

تحلیل وابستگی و همبستگی پارامترهای مدل کول-کول در توموگرافی قطبش القایی طیفی با استفاده از استنباط بیزین

محمد صادق رودسری^۱، رضا قناتی^{۲*}

^۱دانشجوی دکتری ژئوفیزیک، موسسه ژئوفیزیک، دانشگاه تهران، تهران، ایران Sadegh.Roudsari@leibniz-liag.de

^۲دانشیار موسسه ژئوفیزیک، دانشگاه تهران، تهران، ایران rghanati@ut.ac.ir

Mohamad Sadegh Roudsari¹, Reza Ghanati²

¹PhD Student of Geophysics, Institute of Geophysics, University of Tehran, Iran; Sadegh.Roudsari@leibniz-liag.de

²Associate professor, Institute of Geophysics, University of Tehran, Iran; rghanati@ut.ac.ir

چکیده

این مطالعه به بررسی وابستگی و همبستگی پارامترهای مدل کول-کول (CCM) با استفاده از استنباط بیزین برای وارون‌سازی داده‌های قطبش القایی طیفی (SIP) می‌پردازد. هدف این تحقیق بهبود درک ویژگی‌های زیرسطحی و ارائه تفسیری قابل اعتماد از مدل‌های تخمینی زیرسطحی با تحلیل دقیق وابستگی‌های پارامتری است. در این مطالعه یک کد وارون‌سازی دو و نیم‌بعدی جدید را که به‌طور خاص برای داده‌های SIP طراحی شده است، ارائه می‌گردد که از کتابخانه‌های مبتنی بر پایتون و تکنیک‌های پیشرفته آماری استفاده می‌کند. از طریق داده‌های حاصل از مدل‌سازی مصنوعی و نمونه‌برداری زنجیره مارکوف مونت کارلو (McMC)، کارایی روش ارائه شده در سناریوهای مختلف زیرسطحی شامل یک مدل زمین همگن، یک محیط دولایه، و مدلی شامل دو بی‌هنجاری مدفون در پس‌زمینه همگن، ارزیابی می‌شود. رهیافت پیشنهادی امکان استخراج پارامترهای مدل کول-کول را که بیانگر ویژگی‌های الکتریکی هستند، فراهم می‌کند و درکی عمیق‌تر از ساختارهای زمین‌شناسی پیچیده ارائه می‌دهد. ترسیم زنجیره‌های McMC و نمودارهای گوشه‌ای، وابستگی‌های میان پارامترهای کول-کول را نشان داده و همگرایی و قابلیت اطمینان برآوردهای پارامتری را به نمایش می‌گذارند. از طریق اعتبارسنجی با مدل‌های مصنوعی، دقت و اثربخشی این روش مورد تأیید قرار می‌گیرد. بطور کلی این مطالعه پتانسیل وارون‌سازی بیزین را برای بهبود تفسیر داده‌های ژئوفیزیکی و درک عمیق‌تر از همبستگی میان پارامترهای طیفی کول-کول در مدل‌های تخمینی با شرایط مختلف زمین‌شناسی نشان می‌دهد.

واژگان کلیدی: استنباط بیزین، مدل کول-کول، نمونه‌برداری McMC، قطبش القایی طیفی، تحلیل عدم قطعیت.

Analyzing Dependency and Correlation of Cole-Cole Model Parameters in Spectral Induced Polarization Using Bayesian Inference

Spectral induced polarization (SIP) is a useful tool in geophysical exploration for understanding the capacitive properties of materials beneath the surface. Unlike conventional methods, SIP analysis can be done in both the time

رضا قناتی: نویسنده مسئول مکاتبات*

domain and frequency domain. In the time domain, it measures the decay of electrical potential after transmitting a direct current pulse, while in the frequency domain, it measures the phase shift of an alternating current. The Cole-Cole model (CCM) is widely used to analyze SIP data, aiding in the comprehension of subsurface properties in different geological settings. Initially introduced by Cole and Cole (1941) and subsequently expanded upon by Pelton et al (1978), this model provides a description of the complex resistivity of materials. While initially developed for mineralized rock, CCM has been successfully adapted to characterize sedimentary formations lacking electronically conducting components. In such cases, the polarization arises from interactions between pore fluids and electrically charged mineral surfaces, forming an electric double layer. It is well established that frequency-dependent induced polarization measurements offer additional spectral information beyond a single measure of induced polarization amplitude, even though the universal mechanism is not fully understood. This spectral information, derived from the shape of the frequency response, can be linked to petrophysical and geochemical properties of the Earth's subsurface, such as soil texture, water saturation, hydraulic conductivity, pH, and the dissemination of metallic minerals, through empirical relationships. In addition to advances in the fundamental understanding of induced polarization phenomena, the SIP method has seen significant progress and development across various research areas in recent years, including forward modeling, inversion, and equipment. However, the success of the SIP method is strongly dependent on providing a reliable and precise inversion algorithm aimed at retrieving the CCM parameters. Inverse problem theory refers to a mathematical framework that addresses the extraction of information about a parameterized physical system using observational data, theoretical relationships between model parameters and data (i.e., forward problem), and prior knowledge. To ensure accurate interpretation of the estimated models, it is crucial to understand the correlation between the parameters in the subsurface models. This research is significant because it explores the dependency and correlation of the CCM parameters using a Bayesian approach in a 2.5D inversion framework specifically designed for SIP data. The motivation for studying correlation analysis between model parameters arises from the challenges that high parameter correlation can pose to Markov chain Monte Carlo (McMC) sampling algorithms in probabilistic models. In other words, the objective is to enhance the understanding of subsurface properties and provide a more reliable interpretation of the estimated models by thoroughly analyzing parameter interdependencies. A novel 2.5D inversion code specifically developed for SIP data is introduced, leveraging Python-based libraries and advanced statistical methods. Through synthetic modeling and McMC sampling, the robustness of this approach across various subsurface scenarios is evaluated, including a homogeneous earth model, a two-layer medium, and a model featuring two anomalies within a homogeneous background. Our method enables the extraction of CCM parameters that reflect electrical properties, offering deeper insights into complex geological formations. Visualizations of McMC chains and corner plots effectively reveal the interdependencies among CCM parameters, illustrating the convergence and reliability of the parameter estimates. Validation against synthetic models highlights the precision and effectiveness of the proposed methodology. Overall, this study demonstrates the potential of Bayesian inversion to improve the interpretation of geophysical data and offers valuable insights into the correlation between CCM parameters across different geological environments.

Keywords: Bayesian inference, Cole-Cole model, McMC sampling, Spectral Induced Polarization, Uncertainty analysis.

۱- مقدمه

روش قطبش القایی طیفی (SIP) ابزاری مفید در اکتشافات ژئوفیزیکی برای درک ویژگی‌های خزانی مواد زیر سطح زمین است. برخلاف روش‌های مرسوم، تحلیل SIP را می‌توان هم در حوزه زمان و هم در حوزه فرکانس انجام داد. این روش در حوزه زمان، افت پتانسیل الکتریکی پس از ارسال پالس جریان مستقیم را اندازه‌گیری می‌کند، در حالی که در حوزه فرکانس، جابجایی فاز جریان متناوب را اندازه‌گیری می‌کند. در تحلیل داده‌های IP در حوزه زمان که به عنوان قطبش القایی در حوزه زمان (TDIP) شناخته می‌شود، جریان مربعی به زمین تزریق و افت ولتاژ پس از قطع جریان اندازه‌گیری می‌شود. این افت ولتاژ نشان‌دهنده‌ی خاصیت خزانی مواد زیرسطحی است و اطلاعاتی در مورد تفاوت‌های مواد زیرسطحی ارائه می‌دهد. این روش به شناسایی ویژگی‌های خاصی مانند درصد فلزات یا مواد خزانی کمک می‌کند و در بررسی محیط‌های زمین‌شناسی پیچیده بسیار مفید است (مدسن و همکاران، ۲۰۱۷). مدل کول-کول (Cole-Cole Model) به طور گسترده‌ای برای تحلیل داده‌های SIP استفاده می‌شود و به درک ویژگی‌های زیرسطحی در محیط‌های زمین‌شناسی مختلف کمک می‌کند (بینلی و اسلیتر، ۲۰۲۰). این مدل که ابتدا توسط کول و کول در سال ۱۹۴۱ معرفی شد و سپس توسط

پلتون و همکاران (۱۹۷۸) گسترش یافت، توصیفی از مقاومت ویژه مختلط مواد ارائه می‌دهد. اگرچه مدل کول-کول در ابتدا برای سنگ‌های معدنی توسعه یافته بود، اما با موفقیت برای شناسایی سازندهای رسوبی که فاقد اجزای رسانای الکترونی هستند نیز به کار گرفته شده است (وانهالا، ۱۹۹۷؛ بینلی و همکاران، ۲۰۰۵؛ کمن و همکاران، ۲۰۰۴).

در چنین مواردی، قطبش از تعاملات بین سیالات منفذی و سطوح معدنی حاوی بار الکتریکی منفی ایجاد می‌شود که یک لایه دوگانه الکتریکی تشکیل می‌دهد (بینلی و اسلیتر، ۲۰۲۰). به خوبی ثابت شده است که اندازه‌گیری‌های قطبش القایی وابسته به فرکانس، اطلاعات طیفی بیشتری نسبت به یک اندازه‌گیری ساده از دامنه قطبش القایی ارائه می‌دهند، هرچند که ساز و کار کلی هنوز به طور کامل درک نشده است. این اطلاعات طیفی که از شکل پاسخ فرکانسی استخراج می‌شوند، می‌توانند از طریق روابط تجربی به ویژگی‌های پتروفیزیکی و ژئوشیمیایی زیرسطح زمین، مانند بافت خاک، اشباع آب، هدایت هیدرولیکی، pH و پراکندگی مواد معدنی فلزی مرتبط شوند (جانسون و تومل، ۲۰۱۸). علاوه بر پیشرفت‌های اساسی در درک پدیده‌های قطبش القایی، روش SIP در سال‌های اخیر پیشرفت‌های قابل توجهی در زمینه‌های مختلف تحقیقاتی از جمله مدل‌سازی پیشرو، وارون‌سازی، و همچنین در زمینه تجهیزات داشته است. با این حال، موفقیت روش SIP به شدت به ارائه الگوریتم وارون‌سازی قابل اعتماد و دقیق برای استخراج پارامترهای مدل کول-کول (CCM) وابسته است. نظریه مسئله وارون به چارچوبی ریاضی اشاره دارد که به استخراج اطلاعات در مورد یک سیستم فیزیکی پارامتربندی شده با استفاده از داده‌های مشاهداتی، روابط نظری بین پارامترهای مدل و داده‌ها (یعنی مسئله پیشرو) و اطلاعات پیشینی می‌پردازد. این نظریه به طور گسترده‌ای در زمینه ژئوفیزیک توسعه یافته است، به ویژه در زمینه استنباط جزئیات مربوط به زیرسطح زمین بر اساس اندازه‌گیری‌های سطحی. به عنوان مثال، این نظریه شامل تخمین ویژگی‌های زیرسطحی مانند چگالی سنگ، مغناطیس‌پذیری و هدایت الکتریکی با استفاده از اندازه‌گیری‌های سطحی از میدان‌های گرانشی یا الکترومغناطیسی و همچنین تحلیل داده‌های لرزه‌ای می‌شود (موسگارد و تاراتولا، ۲۰۰۴).

مفهوم مسئله وارون‌سازی شامل استنباط پارامترهایی است که بر اساس مشاهدات موجود، یک سیستم را تعریف می‌کنند. برخلاف مسئله پیشرو که معمولاً در فیزیک‌های قطعی تنها یک راه‌حل دارد، مسئله وارون راه‌حل یکتایی ندارد (تاراتولا، ۲۰۰۴). از طریق اندازه‌گیری‌های SIP، پارامترهای CCM را می‌توان با استفاده از روش‌های وارون قطعی کلاسیک و همچنین رویکردهای وارون تصادفی ارزیابی کرد. نمونه‌هایی از رویکردهای قطعی شامل طرح‌های مبتنی بر الگوریتم‌های گاوس-نیوتن هستند که اغلب شامل میرایی لوبرگ-مارکوارت برای پایداری راه‌حل وارون می‌شوند. با این حال، این روش‌ها معمولاً از محدودیت‌های نرمی به جای میرایی خالص استفاده می‌کنند. استفاده از چنین روش‌هایی برای ارزیابی پارامترهای CCM توسط جگر و همکاران (۱۹۹۸)، لو و ژانگ (۱۹۹۸)، کمن و همکاران (۲۰۰۴)، بودو و سیبروک (۲۰۰۰)، گونتر و مارتین (۲۰۱۷)، و ویگنت و همکاران (۲۰۱۷) نشان داده شده است. اگرچه این روش‌ها همگرایی سریع و کارایی محاسباتی بالایی از خود نشان می‌دهند، ممکن است به‌جای اینکه حل واقعی مسئله وارون را پیدا کنند، به کمینه محلی تابع هدف برسند (قناتی و مولرپتکه، ۲۰۲۱). در دهه‌های اخیر، وارون‌سازی بیزی پارامترهای ژئوفیزیکی با استفاده از روش‌های نمونه‌گیری زنجیره مارکوف مونت کارلو (Markov chain Monte Carlo-McMC) به طور فزاینده‌ای محبوب شده است (وهلینگ و وروگت، ۲۰۱۱؛ جاردانی و همکاران، ۲۰۱۳؛ وروگت، ۲۰۱۶؛ فیانداکا و همکاران، ۲۰۱۷؛ جونینو و همکاران، ۲۰۲۳). از منظر وارون تصادفی پارامترهای CCM، قربانی و همکاران (۲۰۰۷) یک مدل بیزی برای وارون‌سازی داده‌های IP در حوزه زمان و حوزه فرکانس برای پارامترهای یک CCM منفرد توسعه دادند. آنها از یک تکنیک انتگرال‌گیری عددی بر روی شبکه‌های منظم برای به دست آوردن تابع چگالی احتمال پسینی حاشیه‌ای هر پارامتر CCM از تابع توزیع احتمال پسینی مشترک استفاده کردند. چن و همکاران (۲۰۰۸) داده‌های SIP را با استفاده از CCM تفسیر کردند و یک مدل بیزی برای تخمین پارامترها با استفاده از روش‌های نمونه‌گیری

McMC توسعه دادند و از نمونه گیر گیس برای استخراج نمونه‌ها از توزیع پسینی مشترک بهره گرفتند. کری و همکاران (۲۰۱۲) یک مدل طیفی بر اساس توصیف گر چندجمله‌ای ساده از یک توزیع پیشنهاد کردند و این مسئله را با استفاده از روش بیزین حل کردند. بروبه و همکاران (۲۰۱۷) از یک روش شبیه‌سازی تطبیقی McMC برای وارون چند مدل داده‌های SIP آزمایشگاهی استفاده کردند. با وجود کاربرد موفق استنباط بیزین برای بازیابی پارامترهای CCM، استفاده از آن در مدل‌سازی دو بعدی و سه بعدی داده‌های SIP محدود باقی مانده است. این محدودیت احتمالاً به دلیل هزینه بالای محاسباتی، دشواری در انتخاب اطلاعات پیشینی مناسب و پیچیدگی وارون بیزین است. رودسری و همکاران (۲۰۲۴) یک الگوریتم وارون‌سازی هیبریدی را پیشنهاد کردند که روش هموتوپیک را با روش بیزین McMC ترکیب می‌کند تا توزیع دوبعدی پارامترهای طیفی CCM را تخمین بزند. روش آنها از یک روش وارون‌سازی مبتنی بر گرادیان با ویژگی‌های همگرایی سراسری بهره می‌برد تا داده‌های SIP را برای رسانایی با مقدار مختلط وارون کند و سپس با استفاده از نمونه‌گیری McMC یک برازش غیرخطی کامل برای استخراج پارامترهای طیفی انجام می‌دهد. علاوه بر این، در دهه گذشته، الگوریتم‌های مدل‌سازی و وارون‌سازی IP توسعه یافته‌اند تا پارامترهای طیفی را از داده‌های IP حوزه زمان استخراج کنند. به عنوان مثال، فیانداکا و همکاران (۲۰۱۲) و فیانداکا و همکاران (۲۰۱۳) الگوریتم‌های وارون حوزه زمان یک بعدی و دو نیم بعدی را برای حل کمی اطلاعات SIP ایجاد کردند. مادسن و همکاران (۲۰۱۷) نشان دادند که پارامترهای CCM را می‌توان از داده‌های IP حوزه زمان با استفاده از نمونه‌برداری McMC یک‌بعدی بازیابی کرد. با وجود اهمیت وارون‌سازی بیزین در ارائه برآوردهای مطمئن و تخمین پارامترها، باید دانست که بیشتر مطالعات مربوط به پارامترهای طیفی با رویکرد بیزین بر مطالعات آزمایشگاهی و وارون‌سازی داده‌های یک بعدی متمرکز بوده است. برای اطمینان از تفسیر دقیق مدل‌های تخمین زده‌شده، فهم ارتباط بین پارامترها در مدل‌های زیرسطحی ضروری است. این پژوهش از آن جهت اهمیت دارد که به تحلیل وابستگی و همبستگی پارامترهای CCM با استفاده از رویکرد بیزین در چارچوب وارون‌سازی دو و نیم بعدی که به‌طور ویژه برای داده‌های SIP طراحی شده است، می‌پردازد. انگیزه مطالعه تحلیل همبستگی بین پارامترهای مدل از چالش‌هایی ناشی می‌شود که همبستگی بالای پارامترها می‌تواند برای الگوریتم‌های نمونه‌گیری McMC در مدل‌های احتمالاتی ایجاد کند. در فضاها پارامتری با همبستگی بالا، توزیع پسین ممکن است کشیده یا موج شود، که باعث می‌شود الگوریتم نمونه‌گیری مدت‌زمان بیشتری برای همگرایی نیاز داشته باشد. این امر به این دلیل است که نمونه‌گیر ممکن است در برخی نواحی فضای پارامتری گیر کند یا برای کشف کامل فضا به تکرارهای بیشتری نیاز داشته باشد (هوفمن و گلن، ۲۰۱۴؛ گلن و همکاران، ۲۰۱۴). برای تحلیل وابستگی و همبستگی پارامترهای CCM در وارون‌سازی SIP، ما از یک الگوریتم نمونه‌گیری از یک مجموعه غیرمتغیر وابسته استفاده می‌کنیم که توسط گودمن و وار (۲۰۱۰) پیشنهاد شده و توسط فورمن-مک کی و همکاران (۲۰۱۳، ۲۰۱۹) توسعه یافته است. این الگوریتم رفتار پیچیده و روابط متقابل مواد زمین‌شناسی را در نظر می‌گیرد. استفاده از این نمونه‌گیر می‌تواند با تبدیل فضای پارامتری به مجموعه‌ای از پارامترهای نامرتب، اثرات همبستگی پارامترها را کاهش داده و فرآیند نمونه‌گیری را کارآمدتر کند. قابل ذکر است که مطالعه ما با کار مادسن و همکاران (۲۰۱۷) متفاوت است، چرا که تحلیل آن‌ها بر همبستگی‌ها بر اساس پارامتری‌سازی یک بعدی مدل کول-کول (CCM) با استفاده از نمونه‌گیر McMC سنتی (متروپولیس و همکاران، ۱۹۵۳؛ هستینگز، ۱۹۷۰) در زمینه داده‌های قطبش القایی حوزه زمان متمرکز بود. در مقابل، ما همبستگی پارامترهای CCM را در توزیع دوبعدی پارامترهای طیفی در حوزه فرکانس بررسی می‌کنیم. علاوه بر انجام تحلیل همبستگی پارامترهای وارون شده مدل، این مطالعه همچنین یک بررسی تصادفی اولیه از عدم قطعیت در مسئله وارون‌سازی SIP ارائه می‌دهد. این تحلیل به دلیل عدم یکتایی ذاتی مسائل وارون‌سازی ژئوفیزیکی و وجود خطاهای اندازه‌گیری ضروری است. هدف از تحلیل عدم قطعیت، شناسایی مدل‌های معادلی است که به اندازه کافی با داده‌های مشاهده‌شده در محدوده خطاهای یکسان مطابقت داشته و همچنان با اطلاعات پیشین سازگار باشند. علاوه بر این، این مطالعه به‌طور خاص بر تحلیل

داده‌های مصنوعی متمرکز است تا وابستگی‌ها و همبستگی‌های بین پارامترهای CCM را بررسی کند. اگرچه کد وارون سازی دو و نیم بعدی توسعه یافته که از یک رویکرد بیزین استفاده می‌کند نتایج امیدوارکننده‌ای به دست می‌دهد، اما این تنها یک گام اولیه به سوی چارچوب کامل وارون سازی بیزین دو بعدی و سه بعدی برای داده‌های توموگرافی SIP است. استفاده انحصاری از داده‌های مصنوعی نشان‌دهنده نیاز به بهینه‌سازی و اعتبارسنجی بیشتر قبل از استفاده از این روش برای داده‌های صحرائی است. تا جایی که ما می‌دانیم، این مطالعه اولین موردی است که استنباط بیزین را برای تحلیل همبستگی پارامترهای مدل کول-کول در چارچوب داده‌های SIP دوبعدی به کار می‌برد. پس از بررسی مقالات موجود در زمینه تحلیل داده‌های SIP با استفاده از مدل کول-کول (CCM) و روش‌های وارون سازی تصادفی، این مقاله رویکرد مشابهی را برای بررسی بیشتر این موضوع اتخاذ می‌کند. در ادامه، بخش روش‌شناسی به تشریح فرآیند مدل‌سازی پیشرو می‌پردازد که داده‌های شبه‌سازی شده SIP را بر اساس پارامترهای طیفی تولید می‌کند. سپس، مقاله به بررسی روش MCMC پرداخته و مبانی نظری و کاربرد عملی آن در **وارون سازی** داده‌های SIP را توضیح می‌دهد. بخش نتایج و بحث به دنبال آن، یافته‌هایی از آزمایش‌های مصنوعی کنترل‌شده را ارائه داده و به تحلیل و تفسیر جامع آن‌ها می‌پردازد. مقاله با ارائه نتایج نهایی خاتمه می‌یابد.

۲- روش‌شناسی

در این بخش، ابتدا مروری مختصر بر فیزیک پیشرو در مدل‌سازی مقاومت ویژه الکتریکی مختلط دو و نیم بعدی ارائه می‌دهیم و بر محاسبه پاسخ‌های پتانسیل الکتریکی مختلط در محیط زیرسطحی تمرکز می‌کنیم. پس از آن، روش **وارون سازی** بیزین را معرفی می‌کنیم که از نمونه‌گیری MCMC با مجموعه‌ی هم‌افزا (affine-invariant ensemble) استفاده کرده و اطلاعات پیشینی، از جمله حدود پایین و بالای توزیع‌های پیشینی را در نظر می‌گیرد.

۲-۱- مدل‌سازی پیشرو

رویکرد مدل‌سازی ما شامل دو بخش اصلی است: مدل‌سازی پیشرو و وارون. در مرحله مدل‌سازی پیشرو، توزیع پتانسیل الکتریکی مختلطی که از یک منبع جریان نقطه‌ای در یک محیط سه‌بعدی غیرهمگن و ایزوتروپ با رسانایی مختلط متغیر $\sigma(x, y, z)$ به وجود می‌آید، شبه‌سازی می‌کنیم. این توزیع توسط معادله دیفرانسیل زیر توصیف می‌شود (ولر و همکاران، ۱۹۹۶؛ کمن و همکاران، ۲۰۰۴)

$$-\nabla \cdot (\sigma^*(x, y, z, \omega) \nabla \varphi^*(x, y, z, \omega)) = I \delta(x - x_s) \delta(y - y_s) \delta(z - z_s), \quad (1)$$

این معادله که برای جریان‌های پایدار مستقیم و جریان متناوب با فرکانس پایین تحت شرایط خاص کاربرد دارد، رسانایی مختلط σ^* را در نظر می‌گیرد، که به صورت $\sigma^* = \sigma' + j\sigma'' = |\sigma^*| \exp(j\theta)$ تعریف می‌شود، که در آن σ' نشان‌دهنده رسانایی الکتریکی و σ'' نشان‌دهنده اثرات قطبش است. همچنین θ زاویه فاز رسانایی مختلط را نشان می‌دهد و z واحد موهومی است $z = \sqrt{-1}j$. علاوه بر این، I بزرگی جریان نقطه‌ای منبع و $\delta(x - x_s)\delta(y - y_s)\delta(z - z_s)$ توابع دلتای دیراک هستند که مکان منبع جریان نقطه‌ای را در (x_s, y_s, z_s) تعریف می‌کنند. تبدیل مکانی فوریه-کسینوسی که بر این معادله اعمال می‌شود، معادله‌ای تبدیل‌شده را ایجاد می‌کند که تکنیک‌های حل را تسهیل می‌کند. معادله تبدیل‌شده به صورت زیر ارائه شده است (ولر و همکاران، ۱۹۹۶؛ کمن و همکاران، ۲۰۰۴):

$$-\nabla \cdot (\sigma^*(x, z, \omega) \nabla \hat{\phi}^*(x, k_y, z, \omega)) + k_y^2 \sigma^*(x, z, \omega) \hat{\phi}^*(x, k_y, z, \omega) = \frac{1}{2} \delta(x - x_s) \delta(z - z_s). \quad (2)$$

در اینجا، $\hat{\phi}^*$ و k_y به ترتیب نشان‌دهنده پتانسیل مختلط تبدیل‌شده و عدد موج نسبت به جهت y هستند. حل این معادله تبدیل‌شده با اعمال شرایط مرزی ترکیبی، امکان استخراج حل‌های پتانسیل مختلط در حوزه مکانی را از طریق تبدیل معکوس فوریه-کسینوسی فراهم می‌کند (دی و موریسون، ۱۹۷۹). علاوه بر این، محتوای طیفی سیگنال مقاومت ویژه مختلط با استفاده از مدل کول-کول (CCM) توصیف می‌شود. این مدل و انواع آن، از هر دو منظر تجربی و کاربردی، مؤثر بودنشان را در توصیف ویژگی‌های الکتریکی سنگ‌های معدنی و مواد رسوبی به اثبات رسانده‌اند. مدل استاندارد کول-کول رابطه بین مقاومت ویژه مختلط (به‌عنوان تابعی از فرکانس زاویه‌ای $\omega = 2\pi f$) و پارامترهای طیفی، یعنی مقاومت جریان مستقیم ρ ، قابلیت بارپذیری (μ)، ثابت زمانی (τ) یا زمان آرامش مدل پلتون τ_{PM} و نمای مدل کول-کول c را به صورت زیر ارائه می‌کند (وانهالا، ۱۹۹۷):

$$\rho^*(\omega) = \rho \left[1 - \mu \left(1 - \frac{1}{1 + (j\omega\tau)^c} \right) \right]. \quad (3)$$

قابل‌ذکر است که معادله ۳ به‌عنوان مدل آسایش پلتون (پلتون و همکاران، ۱۹۷۸) نیز شناخته می‌شود، با این تفاوت که $\tau = \tau_{PM}(1 - \mu)^{(1/c)}$ (ولر و اسلیتر، ۲۰۲۳). τ_{PM} نمایانگر زمان مشخصه‌ای در مدل آسایش پلتون است که به‌طور مستقیم به تأخیر زمانی مرتبط با فرایندهای قطبش الکتریکی در ماده زیرسطحی اشاره دارد. در این مطالعه، از یک مدل بیزین برای وارون‌سازی داده‌های مصنوعی SIP شده و از روش زنجیره مارکوف مونت کارلو (MCMC) برای محاسبه توزیع احتمالی هر یک از پارامترهای مدل کول-کول بهره برده شده است. پس از وارون‌سازی بیزین با استفاده از روش MCMC، یک تحلیل آماری دقیق انجام می‌شود تا عدم قطعیت تخمین پارامترها را کمی‌سازی کنیم. ما از تکنیک‌های نمونه‌گیری زنجیره مارکوف مونت کارلو برای تولید مجموعه‌ای از پارامترهایی استفاده می‌کنیم که توزیع پسینی پارامترهای مدل را نمایندگی می‌کنند. از این نمونه‌ها، میانگین و انحراف معیار هر پارامتر را برای استخراج مقادیر کمی عدم قطعیت محاسبه می‌کنیم. مقادیر میانگین پارامترها نشان‌دهنده گرایش مرکزی توزیع پسینی هستند، در حالی که انحراف معیارها نشان‌دهنده عدم قطعیت مرتبط با هر تخمین پارامتر می‌باشند. این رویکرد آماری دیدگاه‌هایی درباره قابلیت اطمینان نتایج وارون‌سازی ارائه می‌دهد.

۲-۲- وارون‌سازی بیزین

در وارون‌سازی ژئوفیزیکی، روش بیزین از اهمیت زیادی برخوردار است و چارچوبی احتمالاتی برای ارزیابی عدم قطعیت‌ها و کمی‌سازی قابلیت اطمینان پارامترهای مدل ارائه می‌دهد. این رویکرد، پارامترهای مدل و داده‌های مشاهده‌شده را به‌عنوان متغیرهای تصادفی در نظر می‌گیرد و این امکان را فراهم می‌آورد تا درک جامع‌تری از لایه‌های زیرسطحی حاصل شود. در چارچوب بیزین، هم پارامترهای مدل و هم داده‌ها به‌عنوان متغیرهای تصادفی در نظر گرفته می‌شوند. فرض کنید \mathbf{d} یک بردار از متغیرهای تصادفی است که یک مجموعه داده را نشان می‌دهد و \mathbf{m} یک بردار از پارامترهای مدل باشد. طبق قضیه بیز، توزیع احتمالی پارامترها با توجه به متغیرهای تصادفی به صورت زیر بیان می‌شود (بروبه و همکاران، ۲۰۱۷):

$$P(\mathbf{m}|\mathbf{d}) = \frac{P(\mathbf{d}|\mathbf{m}) \times P(\mathbf{m})}{P(\mathbf{d})}, \quad (4)$$

در اینجا، $P(\mathbf{m}|\mathbf{d})$ توزیع احتمالی پسین پارامترهای مدل \mathbf{m} با توجه به داده‌های مشاهده شده \mathbf{d} است، $P(\mathbf{m})$ توزیع احتمالی پیشین است که مستقل از داده‌های اندازه‌گیری شده می‌باشد، $P(\mathbf{d}|\mathbf{m})$ تابع درستنمایی (Likelihood Function) است و $P(\mathbf{d})$ با عنوان درستنمایی حاشیه ای شناخته می‌شود. بنابراین، توزیع پسین متناسب با حاصل ضرب تابع درستنمایی و توزیع پیشین است.

اولین قدم در ساخت یک وارون‌سازی بیزین، تعریف $P(\mathbf{d}|\mathbf{m})$ است که فرض می‌کند خطاهای مشاهده‌ای مربوط به هر اندازه‌گیری دارای توزیع گاوسی ثابت با میانگین صفر هستند. این مفهوم در ادامه توضیح داده خواهد شد. هدف اصلی استنباط بیزین، تعیین انتظارات پسین از یک تابع از \mathbf{m} یا به‌طور مستقیم‌تر، پارامترهای \mathbf{m} است. برای تقریب مقدار انتظاری تابع $f(\mathbf{d})$ ، انتگرال‌گیری مونت کارلو با استفاده از نمونه‌های تصادفی از توزیع پسین \mathbf{d} به کار گرفته می‌شود. $f(\mathbf{d})$ نمایانگر یک تابع کلی از داده‌های مشاهده شده \mathbf{d} است که می‌تواند هر تابعی باشد که اطلاعات مرتبط با پارامترهای مدل \mathbf{m} را بازتاب دهد. این تابع معمولاً به‌منظور محاسبه انتظارات آماری یا ویژگی‌های خاص داده‌ها، مانند میانگین و انحراف معیار مورد استفاده قرار می‌گیرد. در استنباط بیزین، $f(\mathbf{d})$ به‌عنوان ابزاری برای استخراج اطلاعات از توزیع پسین داده‌ها تعریف می‌شود. به عبارت دیگر، این تابع به‌طور مستقیم بر داده‌ها اعمال می‌شود تا ویژگی‌های مرتبط با توزیع پارامترهای مدل مورد نظر به دست آید. انتظار محاسبه شده به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$E[f(\mathbf{d})] \approx \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k f(\mathbf{d}_i) \quad (5)$$

این نمونه‌ها، که با \mathbf{d}_i نشان داده می‌شوند، از توزیع پایای یک زنجیره مارکوف استخراج می‌شوند. در مسائل وارون‌سازی غیرخطی، استخراج یک عبارت تحلیلی برای تابع چگالی احتمال پسین (PDF) ممکن نیست. بنابراین، استفاده از روش‌های زنجیره مارکوف مونت کارلو (MCMC) بسیار رایج است، همان‌طور که توسط سامبریج و ماسگارد (۲۰۰۲، ۲۰۱۷) بیان شده است. در الگوریتم‌های نمونه‌گیری MCMC، پیشنهاد دادن موقعیت‌های جدید برای پارامترها نقش مهمی در جستجو در فضای پارامتر و برآورد توزیع پسین دارد. از میان الگوریتم‌های مختلف MCMC، الگوریتم متروپولیس-هاستینگز (متروپولیس و همکاران، ۱۹۵۳؛ هستینگز، ۱۹۷۰) (MH) به‌عنوان یکی از ساده‌ترین و رایج‌ترین روش‌ها برای پیشنهاد این حرکت‌ها شناخته می‌شود. در این مطالعه، از الگوریتم MH برای ایجاد موقعیت‌های جدید برای نمونه‌گیری پارامترها در هر گام استفاده می‌شود. الگوریتم MH شامل دو مرحله اصلی است: پیشنهاد و پذیرش. در مرحله پیشنهاد (معادله ۶)، با توجه به وضعیت فعلی $X(t)$ ، یک موقعیت پیشنهادی Y از توزیع انتقال $Q(Y; X(t))$ نمونه‌گیری می‌شود. سپس در مرحله پذیرش، موقعیت پیشنهادی Y با احتمالی که توسط حداقل ۱ و نسبت تابع احتمال موقعیت پیشنهادی به موقعیت فعلی، ضربدر نسبت احتمال‌های انتقال برای موقعیت پیشنهادی و موقعیت فعلی تعیین می‌شود، پذیرفته می‌شود. اگر پیشنهاد پذیرفته شود، موقعیت جدید به‌صورت $Y = X(t+1)$ در می‌آید؛ در غیر این صورت، موقعیت تغییر نمی‌کند و همان $X(t+1) = X(t)$ باقی می‌ماند. به این معنا که موقعیت فعلی در زنجیره تکرار می‌شود. بنابراین، احتمال پذیرش به‌صورت زیر تعریف می‌شود (چیب و گرینبرگ، ۱۹۹۵):

$$\mathfrak{R}(Y|X(t)) = \min \left(1, \frac{P(Y|\mathbf{d}) Q(Y|X(t))}{P(X(t)|\mathbf{d}) Q(X(t)|Y)} \right) \quad (6)$$

که در آن $P(Y|\mathbf{d})$ تابع درستنمایی است که در معادله ۸ تعریف شده است. یک روش معمول برای پارامتردهی $Q(Y|X(t))$ استفاده از یک توزیع گاوسی چند متغیره است که حول $X(t)$ متمرکز شده و دارای یک تانسور کواریانس کلی است که برای بهبود عملکرد

بهینه‌سازی شده است. با فرض اینکه توزیع پیشنهادی متقارن باشد، یعنی $Q(Y|X(t)) = Q(X(t)|Y)$ ، و با گرفتن لگاریتم نسبت $(P(Y|d)/P(X(t)|d))$ ، معادله ۶ به شکل زیر ساده می‌شود:

$$\mathfrak{R}(Y|X(t)) = \min(1, \log P(Y|d) - \log P(X(t)|d)) \quad (7)$$

مهم است که به خاطر داشته باشید توزیع پیشنهادی برای انتخاب نقاط جدید در زنجیره می‌تواند به طور دلخواه تعیین شود. با این حال، انتخاب یک توزیع که به توزیع هدف واقعی نزدیک باشد، می‌تواند به طور قابل توجهی سرعت همگرایی مقادیر تولید شده به توزیع صحیح را افزایش دهد (رودسری و همکاران، ۲۰۲۴). بحث جامع در مورد روش‌های MCMC فراتر از حیطه این مقاله است. خوانندگان علاقه‌مند می‌توانند به منابع کلاسیکی مانند (مک کی، ۲۰۰۳) مراجعه کنند. روش‌شناسی **وارون‌سازی** بیزین برای داده‌های SIP مستلزم مجموعه‌ای از توابع دقیقاً طراحی شده است که هر یک نقش مهمی در این فرآیند دارند. تابع درستنمایی برای کمی‌سازی تطابق بین پیش‌بینی‌های مدل و داده‌های مشاهده‌شده ضروری است. این تابع درستنمایی شرطی داده‌ها را با توجه به مقادیر مشخصی از پارامترهای مدل ارزیابی می‌کند. با در نظر گرفتن پیش‌بینی‌های مدل و نیز عدم قطعیت‌های مرتبط با اندازه‌گیری‌ها، این تابع معیار دقیقی برای ارزیابی کیفیت تطابق بین شبیه‌سازی‌های مدل و نقاط داده‌های مشاهده‌شده ارائه می‌دهد. از طریق این فرآیند، تابع درستنمایی نمونه‌گیر MCMC را به سمت نواحی از فضای پارامتر هدایت می‌کند که بهترین توضیح را برای داده‌های مشاهده‌شده ارائه می‌دهند. برای ارزیابی تطابق بین داده‌های مشاهده‌شده و پیش‌بینی‌شده در مدل‌سازی ما، تابع لگاریتم درستنمایی به صورت زیر تعریف می‌شود (وروگت، ۲۰۱۶؛ در پاسکواله و لینده، ۲۰۱۷؛ رودسری و همکاران، ۲۰۲۴):

$$\log \mathcal{L}(m|d) = \log P(d|m) = -\frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \log \left(\prod_{i=1}^n \sigma_i^2 \right) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{d_i - f(m)_i}{\sigma_i} \right)^2 \quad (8)$$

در اینجا، n تعداد نقاط داده است، d_i داده‌ی مشاهده‌شده‌ی i -ام است، $f(m)_i$ پیش‌بینی مدل برای نقطه‌ی داده‌ی i -ام بر اساس پارامترهای مدل m بوده، و σ_i انحراف معیار خطای مرتبط با نقطه‌ی داده‌ی i -ام را نشان می‌دهد. با در نظر گرفتن $\frac{1}{2} \log(\prod_{i=1}^n \sigma_i^2) = \sum_{i=1}^n \log(\sigma_i)$ معادله ۸ می‌تواند با کمی بازآرایی به صورت زیر بازنویسی شود:

$$\log \mathcal{L}(m) = -\frac{n}{2} \log(2\pi) - \sum_{i=1}^n \log(\sigma_i) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{d_i - f(m)_i}{\sigma_i} \right)^2. \quad (9)$$

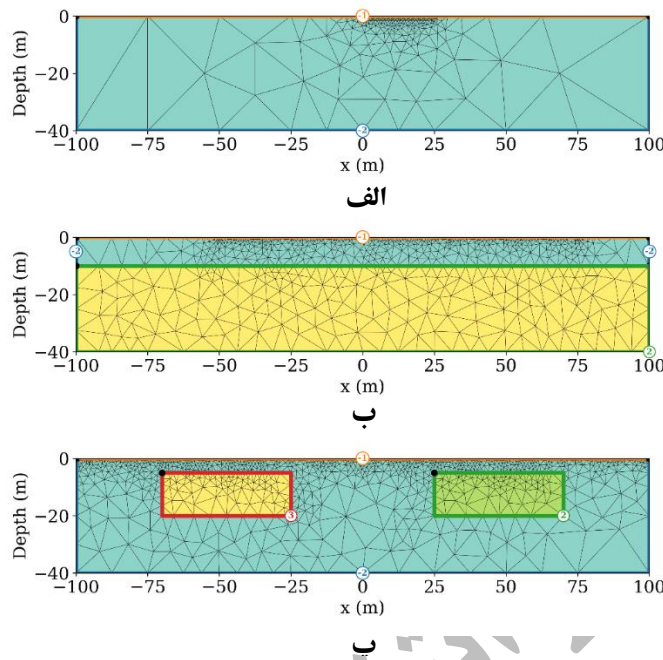
به‌طور کلی، $\log \mathcal{L}(m)$ نشان می‌دهد که یک مدل m با پاسخ نظری $f(m)$ که به داده‌های مشاهده‌شده d نزدیک باشد، مقدار بالایی برای تابع لگاریتم احتمال خواهد داشت و بالعکس. تکمیل‌کننده ارزیابی احتمال، تابع پیشین است که اطلاعات یا فرضیات قبلی درباره پارامترهای مدل را در بر می‌گیرد. این تابع به هر ترکیب پارامتری یک احتمال پیشین لگاریتمی اختصاص می‌دهد و اطلاعاتی درباره بازه‌های مورد انتظار یا توزیع‌های پارامترها بر اساس ملاحظات زمین‌شناسی یا فیزیکی ارائه می‌دهد. با تحمیل محدودیت‌هایی به عنوان یک توزیع پیشین کم‌اطلاعات، تابع پیشین نمونه‌بردار MCMC را هدایت می‌کند تا مناطقی از فضای پارامتری را که با انتظارات پیشین سازگار است، کاوش کند و از حرکت نمونه‌بردار به نواحی فیزیکی غیرمحتمل جلوگیری کند. در اینجا، یک بازه خاص برای چهار پارامتر مدل کول-کول (CCM) تعریف شده است که از بینش‌های زمین‌شناسی یا فیزیکی درباره ویژگی‌های زیرسطحی مورد بررسی

اطلاع می‌گیرد. در واقع، تابع پیشین به عنوان یک فیلتر عمل کرده و نمونه‌بردار McMC را به سمت ترکیب‌های پارامتری که با دانش یا انتظارات پیشین هماهنگ است، هدایت می‌کند. تابع پسین، اطلاعات درستی و پیشین را برای محاسبه احتمال کلی پارامترهای مدل ترکیب می‌کند. با ادغام احتمال پیشین با درستی، این تابع ارزیابی جامعی از ترکیب‌های پارامتری ارائه می‌دهد که توازن میان برازش داده‌های مشاهده‌شده و پایبندی به محدودیت‌های پیشین را برقرار می‌کند. این رویکرد ادغام، نمونه‌بردار McMC را به سمت ترکیب‌های پارامتری هدایت می‌کند که توازن بهینه‌ای بین تطابق با داده‌ها و اطلاعات پیشین برقرار کنند. سرانجام، تابع برازش فرایند **وارون‌سازی** بیزین را با آغاز شبیه‌سازی McMC با استفاده از کتابخانه پایتون (فورمن مک کی و همکاران، ۲۰۱۳ و ۲۰۱۹) emcee هماهنگ می‌کند، که برای نمونه‌برداری از توزیع پسین پارامترهای مدل طراحی شده است. کتابخانه emcee یک نمونه‌بردار McMC با چندین گام بردار (walkers) است که توسط گودمن و ویر (۲۰۱۰) پیشنهاد شده است. یک مزیت مهم روش گودمن این است که فقط نیاز به تنظیم دستی یک یا دو پارامتر دارد، در حالی که روش‌های سنتی نمونه‌برداری McMC در فضای پارامتری N بعدی معمولاً نیاز به تنظیم تقریباً N^2 پارامتر دارند. با تولید یک مجموعه از گام بردارها و تنظیم مکرر مقادیر پارامترها بر اساس تخمین احتمالات، تابع برازش امکان کاوش در فضای پارامتری و تخمین توزیع‌های پارامتری پسین را فراهم می‌کند. الگوریتم McMC از یک مجموعه پارامتری (گام بردار) تشکیل شده است که یا درون مرزهای مشخص یا به صورت تصادفی در فضای پارامتری توزیع می‌شود. هر گام بردار نمایانگر یک ترکیب منحصر به فرد از پارامترهای CCM است که ساختار مختلط مقاومت ویژه زیرسطحی را تعریف می‌کند. در طول شبیه‌سازی، emcee موقعیت‌های این گام بردارها را بر اساس احتمال داده‌های SIP مشاهده‌شده به صورت تکراری تنظیم می‌کند. این ارزیابی احتمال شامل مقایسه پیش‌بینی‌های مدل با داده‌های اندازه‌گیری شده است و عدم قطعیت در اندازه‌گیری‌ها را در نظر می‌گیرد. هدف از این فرآیند، کاوش و نمونه‌برداری از توزیع پسین پارامترهای مدل است تا توزیع احتمالی آن‌ها با توجه به داده‌های مشاهده‌شده ثبت شود. با نمونه‌برداری و تنظیم مکرر موقعیت گام بردارها، که با اصول بیزین هدایت می‌شود، emcee به دنبال بیشینه سازی تطابق بین پیش‌بینی‌های مدل و پاسخ‌های SIP مشاهده‌شده است. ارزیابی همگرایی و عملکرد یک الگوریتم نمونه‌برداری یک کار پیچیده است و مقالات گسترده‌ای در این زمینه وجود دارد. الگوریتم پیشنهادی نمونه‌برداری McMC از یک معیار خود-همبستگی (autocorrelation) بهره‌مند است که مستقیماً تعداد ارزیابی‌های تابع چگالی احتمال پسین را اندازه‌گیری می‌کند که برای تولید نمونه‌های مستقل از چگالی هدف لازم است (به فورمن مک کی و همکاران، ۲۰۱۳ مراجعه کنید). علاوه بر این، برای اطمینان از فرکانس نمونه‌برداری مؤثر، احتمال پذیرش باید بین ۰.۲ و ۰.۵ حفظ شود (به‌عنوان مثال، به گلن و همکاران، ۱۹۹۴؛ بروبه و همکاران، ۱۹۹۴؛ رودسری و همکاران، ۲۰۲۴ مراجعه کنید).

۳- نتایج و بحث

پس از تعیین چارچوب فرآیند **وارون‌سازی**، این بخش به ارائه نتایج ارزیابی جامع الگوریتم توسعه‌یافته برای **وارون‌سازی** داده‌های SIP می‌پردازد. تمرکز این بخش بر روی بررسی وابستگی و همبستگی پارامترهای مدل کول-کول (CCM) در زمینه مدل‌های مصنوعی دوبعدی است. روش شناسی به طور دقیق در سناریوهای مختلف زیرسطحی، از جمله یک مدل همگن، یک مدل دو لایه، و یک نیم‌فضای رسانا شامل دو بی‌هنجاری مستطیلی، آزمایش شده است. داده‌های شبیه‌سازی شده از سه مدل مصنوعی با استفاده از کتابخانه PyGIMLi (روکر و همکاران، ۲۰۱۷)، که به طور خاص برای مدل‌سازی پیشرو ۲.۵ بعدی مقاومت ویژه الکتریکی DC و داده‌های SIP طراحی شده است، تولید شده‌اند. این فرآیند شامل تعریف هندسه زیرسطح، از جمله مرزهای لایه‌ها و پیکربندی الکترودها، و تخصیص خواص فیزیکی مانند مقاومت ویژه الکتریکی (ρ)، قابلیت بارپذیری (μ)، ثابت زمانی (τ)، و نمای مدل (c) به هر منطقه زیرسطحی است. برای

مدل‌سازی پیشرو، چارچوب Python pyGIMLi از روش اجزای محدود بر روی شبکه‌های مثلثی نامنظم برای هر فرکانس استفاده می‌کند (روکر و همکاران، ۲۰۰۶). فرکانس‌های استفاده‌شده برای شبیه‌سازی پاسخ‌های مقاومت ویژه الکتریکی مختلط ظاهری در مدل‌های مصنوعی شامل ۰.۳، ۱، ۳، ۱۰، ۲۰، ۳۰، ۴۰، ۶۰، ۸۰ و ۱۰۰ هرتز است. اندازه‌گیری‌های صحرائی با استفاده از پیکربندی ونر آلفا با ۴۱ الکتروود و حداقل فاصله الکتروودی ۳.۵ متر، که شامل توزیع‌های مختلف پارامترهای طیفی زیرسطحی است، شبیه‌سازی شده‌اند. تمامی مدل‌های مصنوعی از پارامترهای یکسان برای شبکه استفاده می‌کنند. پس از جمع‌آوری داده‌های SIP مصنوعی در فرکانس‌های مختلف، مراحل پیش‌پردازش برای آماده‌سازی داده‌ها برای تحلیل **وارون‌سازی** بعدی اجرا می‌شود. در این مرحله حیاتی آماده‌سازی، برای شبیه‌سازی شرایط دنیای واقعی، مشاهدات مصنوعی که شامل مقادیر دامنه $(|p^*|)$ و فاز θ هستند، با **نوفه** گاوسی آلوده می‌شوند. سطوح **نوفه** با انحراف معیار ۰.۵٪ (خطای نسبی) برای دامنه و ۱ میلی‌رادیان (خطای مطلق) برای فاز تعیین می‌شود. این سطوح **نوفه** با اختلافات داده‌ای معمولی که در طول **وارون‌سازی** داده‌های صحرائی مشاهده می‌شود مطابقت دارد (بلاژک و همکاران، ۲۰۰۵). در فرآیند **وارون‌سازی**، رویکرد مبتنی بر ناحیه اتخاذ می‌شود که در آن هر محیط با یک ناحیه واحد که شامل تمامی پارامترهای CCM است، نمایش داده می‌شود. این رویکرد به ما امکان می‌دهد که وارون مکانی بر پایه MCMC را برای هر ناحیه به صورت مجزا انجام دهیم و نتایج تخمینی را برای هر ناحیه خاص بازیابی کنیم. برای هر ناحیه، یک CCM مصنوعی تعریف می‌شود که به عنوان هدفی برای بازیابی پارامترها در طول فرآیند **وارون‌سازی** عمل می‌کند. به عنوان مثال، در مورد یک محیط همگن که شامل یک ناحیه واحد است، هدف ما بازیابی چهار پارامتر است که خواص الکتریکی آن را توصیف می‌کنند. شکل‌های ۱ (الف)، (ب)، و (پ) نشان‌دهنده‌ی گسسته‌سازی مدل‌ها هستند: یک محیط همگن، یک مدل دو لایه، و یک نیم‌فضا که شامل دو بی‌هنجاری مستطیلی است. این پیکربندی‌ها به ترتیب مربوط به یک، دو و سه ناحیه در چارچوب **وارون‌سازی** هستند. مدل همگن شامل پیکربندی یک ناحیه‌ای است که در آن فرض می‌شود تمامی خواص الکتریکی در سراسر محیط یکنواخت هستند. جدول ۱ خواص الکتریکی مثال ۱ را بر اساس CCM نشان می‌دهد. این سناریو امکان تخمین پارامترهای CCM که نمایانگر خواص کلی زیرسطح هستند را فراهم می‌کند. در مقابل، مدل دو لایه نمایانگر پیکربندی‌ای است که هر لایه با مجموعه‌ای از پارامترهای CCM منحصر به فرد خود توصیف می‌شود.



شکل ۱. نمایش مدل‌های مصنوعی زیرسطحی. الف) مدل همگن که نمایانگر ویژگی‌های الکتریکی یکنواخت در سراسر محیط است، ب) مدل دو لایه‌ای با لایه‌های متمایز که توسط پارامترهای منحصر به فرد مدل کول-کول توصیف می‌شوند، پ) مدل نیم‌فضا که شامل دو بی‌هنجاری مستطیلی است و نواحی با ویژگی‌های الکتریکی متفاوت را نشان می‌دهد.

در مورد مثال ۲، با وارد کردن چنین ساختارهای لایه‌ای، پیچیدگی فرآیند **وارون‌سازی** افزایش می‌یابد و امکان توصیف محیط‌های زیرسطحی ناهمگن فراهم می‌شود. جدول ۲ پارامترهای طیفی اختصاص داده شده به هر لایه در مثال ۲ را ارائه می‌دهد. علاوه بر این، نمایش دو بی‌هنجاری مستطیلی که در یک نیم‌فضای همگن قرار گرفته‌اند و خواص طیفی آنها در جدول ۳ به تفصیل آمده است، پیچیدگی بیشتری را نشان می‌دهد و مناطقی از زیرسطح را با خواص الکتریکی متفاوت نشان می‌دهد. از طریق رویکرد مبتنی بر ناحیه و تعاریف مدل مصنوعی، **نمونه‌برداری** McMC را انجام می‌دهیم تا مقادیر بهینه پارامترها را برای هر ناحیه استنباط کنیم. این فرآیند تکرارشونده شامل نمونه‌گیری از توزیع پسین پارامترهای مدل است که توسط داده‌های مشاهده‌شده و اطلاعات پیشین هدایت می‌شود. با تحلیل مستقل هر ناحیه، به بینش‌هایی در مورد خواص الکتریکی لایه‌های زیرسطحی مختلف دست می‌یابیم که به درک جامع ساختار زمین‌شناسی کمک می‌کند. جنبه‌ی کلیدی ارزیابی ما شامل بررسی زنجیره‌های McMC و نمودارهای گوشه‌ای (corner plots) است. این تصاویر، بینش‌های ارزشمندی درباره‌ی توزیع و تغییرپذیری پارامترهای مدل در سناریوهای مختلف زیرسطحی ارائه می‌دهند. از طریق تحلیل دقیق زنجیره‌های McMC، ما به درک عمیق‌تری از فضای پارامتری و تأثیرات آن بر نتایج **وارون‌سازی** می‌رسیم. پس از تکمیل فرآیند **نمونه‌برداری** McMC، نمودارهای زنجیره‌ای تولید می‌کنیم تا تکامل هر پارامتر CCM را در طول تکرارها برای هر ناحیه از مدل زیرسطحی ترسیم کنیم. شکل‌های ۲ و ۳ تاریخچه‌ی نمونه‌برداری پارامترهای CCM را پس از اعمال الگوریتم نمونه‌برداری McMC پیشنهادی بر روی مثال‌های مصنوعی اول و دوم به ترتیب نشان می‌دهند. در همه‌ی مثال‌ها، فضای مدل با استفاده از ۳۲ گام بردار نمونه‌برداری می‌شود و حالت اولیه زنجیره‌های مارکوف به‌طور تصادفی از یک توزیع اولیه یکنواخت ترسیم می‌شود. همان‌طور که مشاهده می‌شود، این نمودارهای زنجیره‌ای، اطلاعات ارزشمندی درباره‌ی رفتار همگرایی و پایداری برآورد پارامترها ارائه می‌دهند.

خصوصاً که، مشاهده می‌کنیم که چگونه مقدار هر پارامتر در طول تکرارهای McMC نوسان می‌کند و یک نمای کلی جامع از فرآیند نمونه‌برداری پارامترها را ارائه می‌دهد. همچنین مشاهده می‌شود که با تکرارهای متوالی الگوریتم نمونه‌برداری McMC، حالت‌های تصادفی اولیه به توزیع هدف نزدیک‌تر می‌شوند. نمونه‌های اولیه در ابتدای زنجیره، در طول مرحله burn-in (همگرایی اولیه)، ممکن است به‌طور دقیق توزیع هدف را نمایان نکنند. بنابراین، این نمونه‌های اولیه معمولاً هنگام محاسبه‌ی توزیع پسین و عدم قطعیت در پارامترهای مدل کنار گذاشته می‌شوند.

جدول ۱. پارامترهای طیفی مرتبط با مدل نیم‌فضای همگن

پارامتر	مقادیر
$\log \rho$ ($\Omega \cdot m$)	۲/۳۰۱
μ (V/V)	۰/۴
$\log \tau$ (s)	-۰/۶۹۸
c	۰/۵

جدول ۲. پارامترهای طیفی مرتبط با مدل نیم‌فضای دو لایه

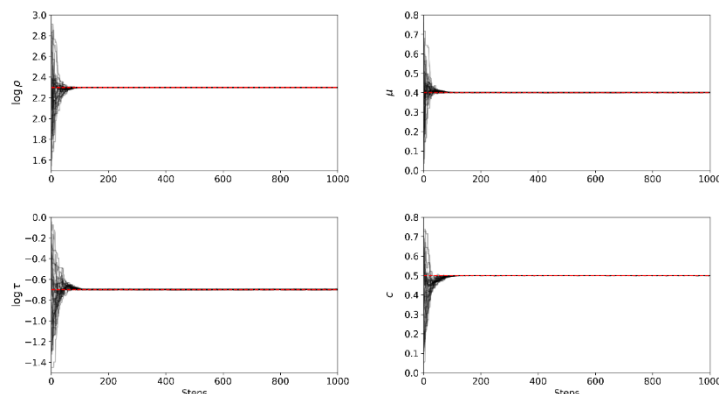
پارامترهای طیفی	مقادیر لایه بالایی	مقادیر لایه پایینی
$\log \rho$ ($\Omega \cdot m$)	۲/۳۰۱	۱/۴۷۷
μ (V/V)	۰/۴	۰/۲
$\log \tau$ (s)	-۰/۶۹۸	-۰/۳۹۷
c	۰/۵	۰/۲

جدول ۳. پارامترهای طیفی مرتبط با مدل نیم‌فضای دارای دو بی‌هنجاری

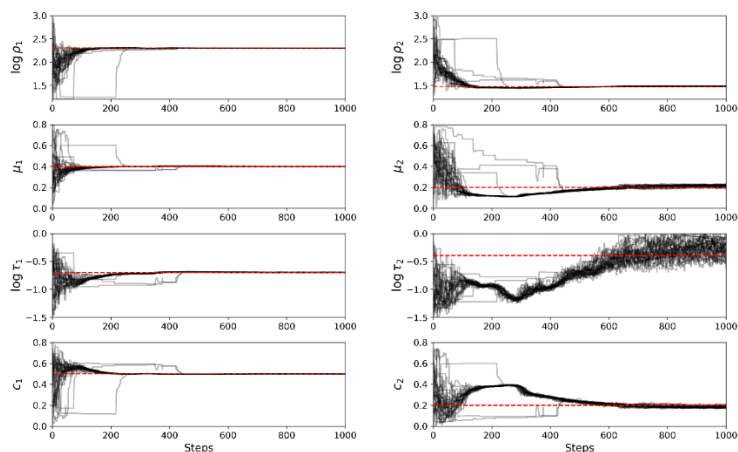
پارامترهای طیفی	مقادیر بی‌هنجاری ۱	مقادیر بی‌هنجاری ۲	مقادیر پس‌زمینه
$\log \rho$ ($\Omega \cdot m$)	۲/۴۷۷	۲/۶۰۲	۱/۹۰۳
μ (V/V)	۰/۴۵	۰/۵	۰/۲
$\log \tau$ (s)	-۰/۰۴۵	-۰/۰۰۴۳	-۰/۳۹۷
c	۰/۵	۰/۴	۰/۶

برای نشان دادن فرآیند نمونه‌برداری MCMC برای مورد آزمایشی سوم، شکل ۴ تاریخچه‌ی نمونه‌برداری برای تمامی پارامترهای طیفی مرتبط با هر ناحیه را نمایش می‌دهد. زنجیره‌ها نشان‌دهنده‌ی همگرایی به توزیع هدف برای بیشتر پارامترها هستند، به‌استثنا $\log \tau_2$ و $\log \tau_3$ که همگرایی جزئی را نشان می‌دهند. این موضوع نشان می‌دهد که روش وارون‌سازی ارائه شده به‌طور کلی در ثبت خصوصیات

الکتريکی بی هنجاری های زیر سطحی قابل اعتماد است. نمودارهای زنجیره ای همچنين پیشرفت مقادير پارامتری هر پارامتر CCM را درون دو ناحیه بی هنجار نشان می دهند و امکان ارزیابی سازگاری و همگرایی برآوردهای پارامتری را برای این مناطق فراهم می کنند.



شکل ۱. نمودارهای زنجیره ای برای پارامترهای مدل همگن. CCM نمودارهای زنجیره ای تکامل هر پارامتر CCM را در طول تکرارهای McMC برای مدل همگن نشان می دهند. این نمودارها بیشی در مورد رفتار همگرایی و پایداری تخمین های پارامتر در طی فرآیند وارون سازی ارائه می دهند.

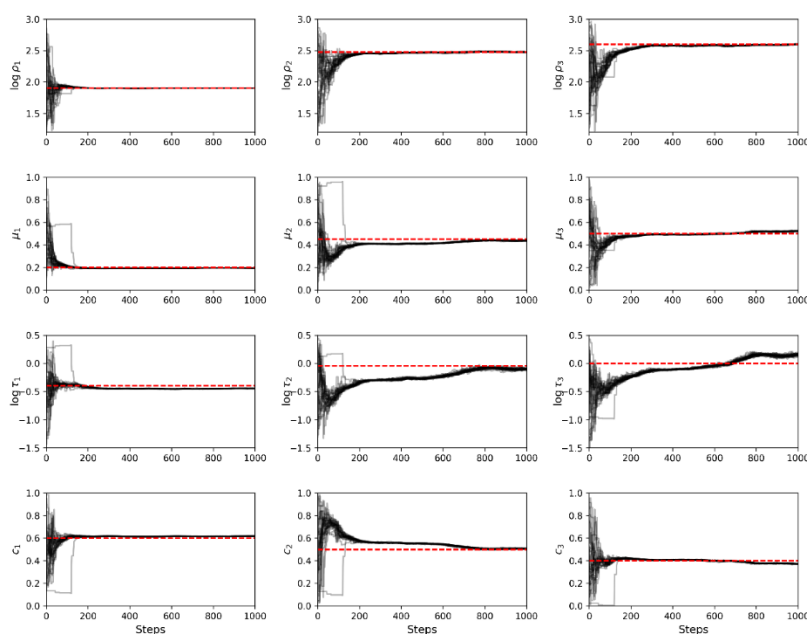


شکل ۳. نمودارهای زنجیره ای برای پارامترها CCM در پیکربندی مدل نیم فضای دو لایه. نمودارهای زنجیره ای پیشرفت مقادير پارامترهای CCM را در مناطق بی هنجار زیر سطحی نشان می دهند.

علاوه بر این، همان طور که قبلاً ذکر شد، تحلیل MCMC امکان بررسی همبستگی ها و تعاملات پیچیده بین خواص طیفی مختلف را فراهم می کند. شکل های ۵، ۶ و ۷، تصاویر یک بعدی و دوبعدی از پارامترهای CCM که از طریق تخمین پارامترهای MCMC در مثال ۱، مثال ۲ و مثال ۳ به دست آمده اند را نشان می دهند. این نمودارهای گوشه ای که به عنوان نمودارهای جفتی نیز شناخته می شوند، توزیع های مشترک جفت های پارامترهای طیفی را نمایش می دهند. پنل های خارج از محور اصلی توزیع های دوبعدی حاشیه ای را نشان

می‌دهند که به بررسی همبستگی بین پارامترهای طیفی می‌پردازد. علاوه بر این، هیستوگرام‌ها یا نمودارهای فراوانی روی محور اصلی، توزیع‌های حاشیه‌ای برای هر پارامتر به صورت مستقل را نمایش می‌دهند.

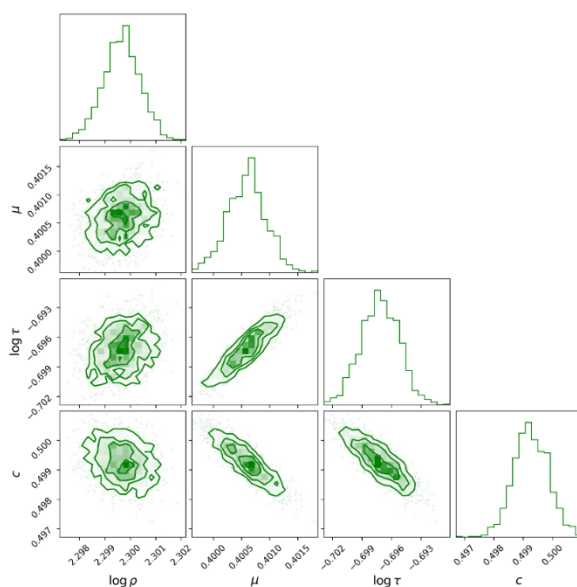
ابتدا نمودار گوشه‌ای مرتبط با مدل زمین همگن (شکل ۵) را بررسی می‌کنیم. نمودارهای توزیع که رابطه بین لگاریتم مقاومت ویژه $(\log \rho)$ و سایر پارامترهای طیفی $(\mu, \log \tau, c)$ را نشان می‌دهند، به شکل دایره‌ای ظاهر می‌شوند. این شکل دایره‌ای نشان‌دهنده همبستگی ضعیف بین $\log \rho$ و این پارامترها است. در نتیجه، تغییرات در مقاومت ویژه تحت تأثیر تغییرات در بارپذیری، زمان آسایش، یا نمای مدل (c) قرار نمی‌گیرد. این مشاهده نشان می‌دهد که در مدل همگن، تغییرات در مقاومت ویژه بر دیگر خصوصیات الکتریکی تأثیری نمی‌گذارد و فضای پارامتری مقاومت ویژه نسبتاً غیر مرتبط است.



شکل ۴. نمودارهای زنجیره‌ای برای پارامترهای CCM در سه محیط مختلف در پیکربندی نیم‌فضای دارای دو بی‌هنجاری مستطیلی. این نمودارها مناسب بودن بازیابی پارامترها را نشان می‌دهند و قابلیت اطمینان و دقت فرآیند وارون‌سازی را در توصیف ساختارهای پیچیده زیرسطحی تأیید می‌کنند.

از سوی دیگر، نمودارهای گوشه‌ای برای نمای مدل (c) در برابر بارپذیری (μ) و زمان آسایش $(\log \tau)$ یک توزیع بیضی‌شکل با زاویه‌ای حدوداً -45° درجه را نمایش می‌دهند. این جهت‌گیری نشان‌دهنده همبستگی منفی بین این پارامترها است. همان‌طور که مقدار c افزایش می‌یابد، هر دو μ و $\log \tau$ تمایل به کاهش دارند و بالعکس. این همبستگی منفی ممکن است یک رابطه فیزیکی زیرین در محیط همگن را منعکس کند که در آن رسانایی وابسته به فرکانس بالاتر با بارپذیری کمتر و زمان‌های آرامش کوتاه‌تر مطابقت دارد، احتمالاً به دلیل طبیعت واکنش محیط به قطبش القایی. این نتایج با موارد گزارش شده در مادسن و همکاران (۲۰۱۷) سازگار است. نمودار گوشه‌ای بین

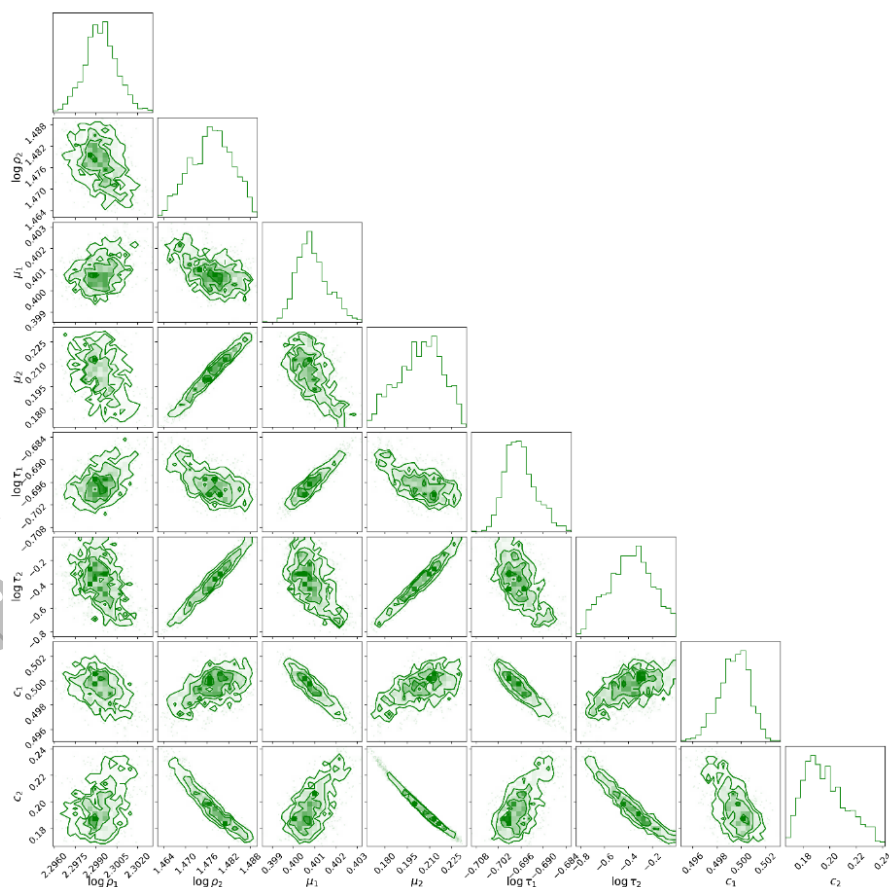
$\log \tau$ و μ نیز یک توزیع بیضوی شکل با زاویه‌ای حدوداً ۴۵ درجه را نشان می‌دهد. این زاویه نشان‌دهنده همبستگی مثبت بین این پارامترها است: با افزایش $\log \tau$ ، μ نیز تمایل به افزایش دارد و بالعکس. این همبستگی مثبت بدین معنی است که زمان‌های آسایش طولانی‌تر با بارپذیری بیشتر همراه هستند. به عبارتی ساده‌تر، توانایی محیط در قطبش و نگهداری بار به مدت زمان اثر قطبش القایی مرتبط است. این تفاسیر از نمودارهای گوشه‌ای اطلاعات با ارزشی را در مورد روابط بین پارامترها در محیط همگن فراهم می‌کنند. واضح است که هیچ همبستگی‌ای بین $\log \tau$ و سایر پارامترها وجود ندارد، که نشان می‌دهد مقاومت ویژه به صورت مستقل رفتار می‌کند. از سوی دیگر، همبستگی‌های مشاهده‌شده بین μ ، c و $\log \tau$ بر وابستگی‌های پیچیده تأکید می‌کنند و درک عمیق‌تری از خصوصیات الکتریکی و تعاملات آنها درون مدل ارائه می‌دهند. علاوه بر این، هیستوگرام‌های روی محور اصلی یک توزیع به شکل زنگوله و تک‌مودال را نمایش می‌دهند که دارای یک بیشینه در مقدار واقعی مدل است.



شکل ۵. نمودار گوشه‌ای برای پارامترهای CCM در مدل همگن. نمودار گوشه‌ای (corner plot) نمای دوبعدی از فضای پارامترها ارائه می‌دهد که همبستگی‌ها و وابستگی‌های میان پارامترهای CCM را در هر منطقه برای مدل‌های همگن و دولایه نشان می‌دهد. این نمایش تصویری بینشی در مورد تعاملات پیچیده بین ویژگی‌های مختلف الکتریکی در محیط زیرسطحی ارائه می‌دهد.

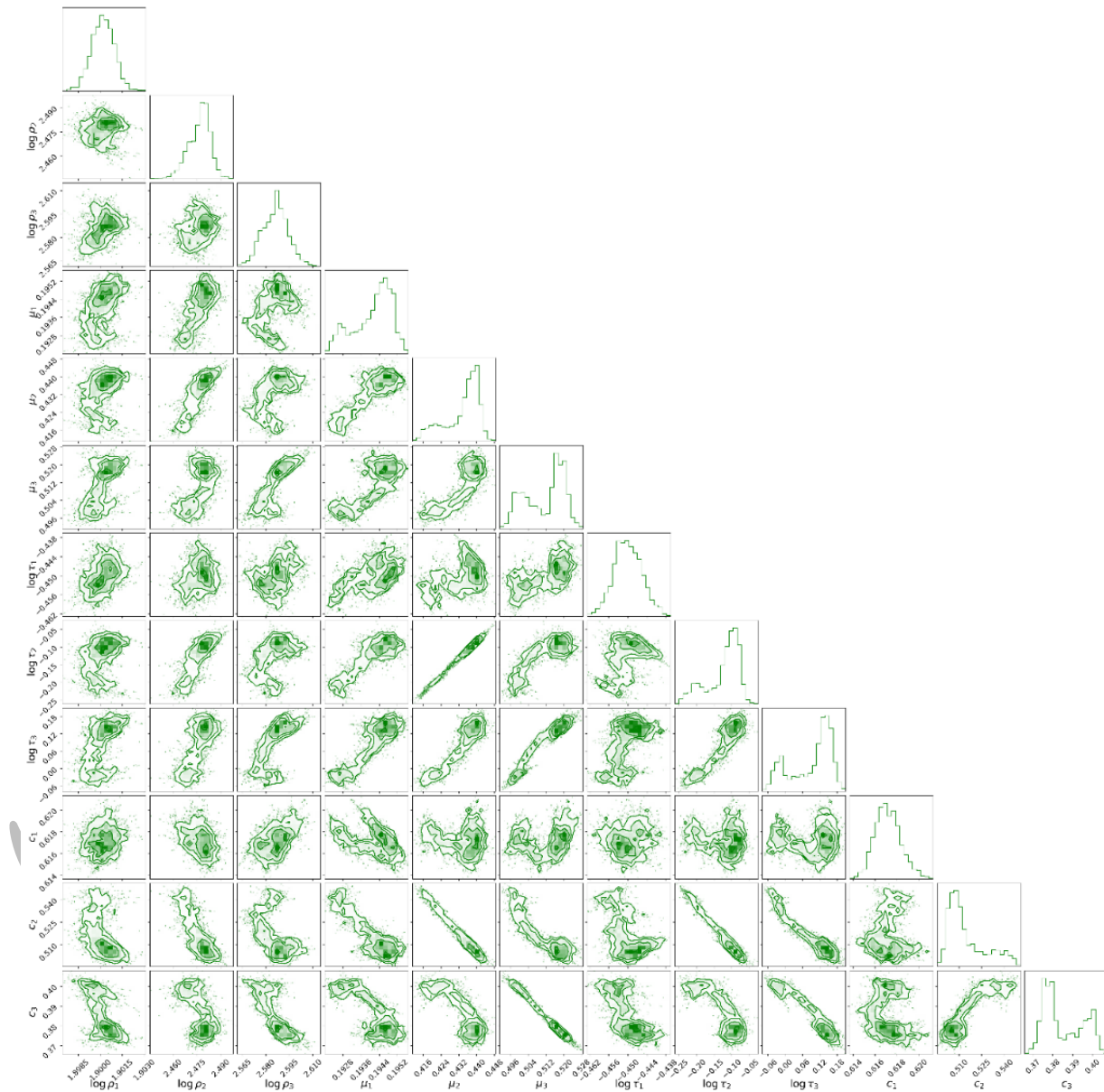
شکل ۶ نمودارهای گوشه‌ای برای مدل دولایه را نمایش می‌دهد. نمودارهای گوشه‌ای بین $\log \rho_1$ و سایر پارامترها ($c_1, c_2, \log \tau_1, \log \tau_2, \mu_1$, and μ_2) توزیعی دایره‌ای را نشان می‌دهند که نشان‌دهنده همبستگی ضعیف است. این موضوع نشان می‌دهد که تغییرات در مقاومت ویژه لایه بالایی ($\log \rho_1$) تا حد زیادی مستقل از تغییرات در سایر پارامترها است. برای لایه پایینی، نمودارهای توزیع برای $\log \rho_2$ در برابر μ_2 و $\log \tau_2$ به شکل بیضی‌های باریک با زاویه‌ای حدوداً ۴۵ درجه ظاهر می‌شوند. این موضوع نشان‌دهنده یک همبستگی مثبت بین $\log \rho_2$ و هر دو μ_2 و $\log \tau_2$ است. به عبارت دیگر، با افزایش $\log \rho_2$ ، μ_2 و $\log \tau_2$ نیز تمایل به افزایش دارند و بالعکس. این موضوع نشان می‌دهد که مقاومت ویژه بالاتر در لایه پایینی با بارپذیری بیشتر و زمان‌های آسایش طولانی‌تر همراه است. برعکس، نمودار گوشه‌ای $\log \rho_2 - c_2$ توزیعی به شکل بیضی باریک با زاویه‌ای حدوداً ۴۵- درجه را نشان می‌دهد که

نشان‌دهنده یک همبستگی منفی بین این پارامترها است. همبستگی متقابل بین μ_2 و c_2 نیز یک خط مورب با زاویه‌ای حدوداً -45° درجه تشکیل می‌دهد که نشان‌دهنده یک همبستگی منفی قوی است. علاوه بر این، نمودار μ_2 در برابر $\log \tau_2$ یک خط مورب با زاویه‌ای حدوداً 45° درجه تشکیل می‌دهد که نشان‌دهنده یک همبستگی مثبت قوی است. در مورد نمودار گوشه‌ای $\log \tau_1$ و c_1 ، توزیع بیضی‌شکل باریک با زاویه‌ای حدوداً -45° درجه نشان‌دهنده یک همبستگی منفی است. به همین ترتیب، نمودار $\log \tau_2$ در برابر c_2 نیز توزیع بیضی‌شکل باریک با زاویه‌ای حدوداً -45° درجه را نشان می‌دهد که بیانگر یک همبستگی منفی است. همبستگی ضعیف بین $\log \rho_1$ و سایر پارامترها نشان می‌دهد که مقاومت ویژه لایه بالایی به طور مستقل از سایر پارامترها رفتار می‌کند. در مقابل، همبستگی‌های مربوط به $\log \rho_2$ ، μ_2 ، c_2 و $\log \tau_2$ به پیچیدگی‌های وابستگی‌ها در لایه پایینی بیشتر به هم مرتبط هستند، در حالی که لایه بالایی در مورد مقاومت ویژه رفتار مستقل‌تری دارد. شکل ۶ همچنین توزیع‌های پسین یک‌بعدی حاشیه‌ای برای شش پارامتر طیفی را که از نمونه‌های پس از فاز (burn-in) تخمین زده شده‌اند، در قطر نمودار گوشه‌ای نمایش می‌دهد. نمودارهای هیستوگرام مربوط به پارامترهای لایه بالایی کمتر به چپ یا راست کشیده شده‌اند و بیشتر به توزیع نرمال شباهت دارند. در مقابل، هیستوگرام‌های پارامترهای لایه پایینی به چپ و راست کشیدگی نشان می‌دهند. این کشیدگی ممکن است ناشی از همبستگی‌های اضافی بین پارامترهای طیفی لایه پایینی باشد.



شکل ۶. نمودار گوشه‌ای برای پارامترهای CCM در مدل دولایه.

برای تحلیل نتایج تخمین پارامترهای به دست آمده از طریق MCMC در مورد آزمایش سوم، شکل ۷ همبستگی‌های متقابل بین پارامترهای طیفی را در پنل‌های خارج از قطر نشان می‌دهد. نمودار گوشه‌ای μ_2 در برابر $\log \tau_2$ یک توزیع باریک و بیضی شکل را نشان می‌دهد که تقریباً در زاویه ۴۵ درجه قرار دارد و نشان‌دهنده همبستگی مثبت بین این پارامترهاست. به طور مشابه، نمودارهای μ_3 در برابر $\log \tau_2$ و $\log \tau_3$ نیز نشان‌دهنده این همبستگی مثبت با زاویه ۴۵ درجه هستند و نشان می‌دهند که افزایش در τ_3 با افزایش در هر دو زمان آسایش مرتبط است. علاوه بر این، نمودار $\log \tau_2$ در برابر $\log \tau_3$ نیز زاویه ۴۵ درجه‌ای را نمایش می‌دهد که رابطه مثبت بین زمان‌های آسایش دو ناهنجاری را تقویت می‌کند. در عوض، نمودارهای c_2 در برابر μ_2 ، μ_3 ، $\log \tau_2$ و $\log \tau_3$ توزیع‌های باریک بیضی شکل با زاویه‌ای تقریباً ۴۵- درجه را نشان می‌دهند که بیانگر همبستگی منفی است.



شکل ۷. نمودار گوشه‌ای برای پارامترهای CCM در مدل نیم‌فضای در حضور دو بی‌هنجاری.

این بدان معناست که مقادیر بالاتر c_2 با مقادیر کمتری از μ_3 ، μ_2 و $\log \tau_3$ همراه است. به طور مشابه، مقایسه‌های c_3 با μ_3 و $\log \tau_3$ نیز زاویه -45° درجه‌ای را نشان می‌دهد که همبستگی‌های منفی رامشخص می‌کند. سایر ترکیب‌های پارامتری همبستگی‌های ضعیف یا ناچیزی را نشان می‌دهند که نشان می‌دهد تغییرات در یک پارامتر عمدتاً مستقل از تغییرات در سایر پارامترهاست. علاوه بر این، پنل‌های قطر شکل ۷ توزیع‌های پسین یک‌بعدی حاشیه‌ای برای دوازده پارامتر مدل را نمایش می‌دهند که از نمونه‌های پس از سوختن استخراج شده‌اند. هیستوگرام‌های مربوط به پارامترهای طیفی مرتبط با بی‌هنجاری‌ها یک توزیع چندحالتی (multimodal) با کشیدگی به هر دو طرف را نشان می‌دهند. مشابه مورد ۲، این مشاهده ممکن است به همبستگی‌های افزایش‌یافته بین پارامترهای بی‌هنجاری‌ها نسبت داده شود. هدف اصلی از نمایش شدت همبستگی بین پارامترهای CCM این نیست که به ابهام احتمالی یک مدل معادل اشاره کنیم. بلکه هدف ما نشان دادن این است که با افزایش تعداد پارامترهای CCM، همبستگی بین این پارامترها قوی‌تر می‌شود و در نتیجه، بازیابی پارامترهای طیفی زیرسطحی پیچیده‌تر می‌شود. یک تحلیل آماری روی آزمایش‌های مصنوعی انجام شد تا پارامترهای تخمینی که از روش نمونه‌گیری MCMC به دست آمده را با مقادیر واقعی مقایسه کنیم. نتایج برای مثال‌های ۲ و ۳ در جداول ۴ و ۵ به ترتیب نشان داده شده‌اند، که میانگین و انحراف معیار برای هر پارامتر را نمایش می‌دهند. نتایج برای اولین مثال مصنوعی که نسبتاً ساده است، در جداول گنجانده نشده‌اند. تحلیل نشان می‌دهد که مقادیر میانگین تخمینی به مقادیر واقعی بسیار نزدیک هستند، که نشان‌دهنده تخمین دقیق پارامترهای $\log \rho$ ، μ و $\log \tau$ با تغییرات کم است. با این حال، پارامترهایی مانند $\log \tau$ و c تغییرات بیشتری از خود نشان می‌دهند، که پیچیدگی‌های موجود در تعیین دقیق این پارامترها را برجسته می‌کند.

جدول ۴. مقایسه پارامترهای طیفی برآوردشده با مقادیر واقعی مرتبط با مدل دولایه

پارامترهای طیفی	میانگین	مقدار واقعی	انحراف معیار
$(\Omega, m)\log \rho_1$	۲/۲۹۹۳۷	۲/۳۰۱۳۰	۰/۰۰۱۱۷
$(\Omega, m)\log \rho_2$	۱/۴۷۷۱۱	۱/۴۷۷۱۲	۰/۰۰۵۶۷
$(V/V)\mu_1$	۰/۴۰۰۹	۰/۴	۰/۰۰۰۷۳
$(V/V)\mu_2$	۰/۲۰۳۵۸	۰/۲	۰/۰۱۴۴۹
$(s)\log \tau_1$	-۰/۶۹۶۱۴	-۰/۶۹۸۹۷	۰/۰۰۴۰۴
$(s)\log \tau_2$	-۰/۳۸۳۰۶	-۰/۳۹۷۴۹	۰/۱۸۱۵۱
c_1	۰/۴۹۹۴	۰/۵	۰/۰۰۱۲۳
c_2	۰/۱۹۶۸۸	۰/۲	۰/۰۱۵۹۳

جدول ۵. مقایسه مقادیر پارامترهای طیفی برآورد شده با مقادیر واقعی مرتبط با مدل نیم فضای دارای دو بی هنجاری

پارامترهای طیفی	میانگین	مقدار واقعی	انحراف معیار
$\log \rho_1 (\Omega. m)$	۱/۹۰۰۱۷	۱/۹۰۳۰۹	۰/۰۰۰۷۷
$\log \rho_2 (\Omega. m)$	۲/۴۷۶۶۶	۲/۴۷۷۱۲	۰/۰۰۶۶۲
$\log \rho_3 (\Omega. m)$	۲/۵۸۶۰۵	۲/۶۰۲۰۶	۰/۰۰۸۰۳
$\mu_1 (V/V)$	۰/۱۹۴۱۲	۰/۲	۰/۰۰۰۸۴
$\mu_2 (V/V)$	۰/۴۳۳۷۵	۰/۴۵	۰/۰۰۷۷۳
$\mu_3 (V/V)$	۰/۵۱۱۵۷	۰/۵	۰/۰۰۸۷۸
$\log \tau_1 (s)$	-۰/۴۴۹۹۹	-۰/۳۹۷۴۹	۰/۰۰۴۳۷
$\log \tau_2 (s)$	-۰/۱۲۳۲۶	-۰/۰۴۵۷۶	۰/۰۴۶۱۵
$\log \tau_3 (s)$	۰/۰۹۱۶۶	-۰/۰۰۴۳۶	۰/۰۷۰۹۶
c_1	۰/۶۱۷۱۸	۰/۶	۰/۰۰۱۱۹
c_2	۰/۵۱۴۹۵	۰/۵	۰/۰۱۲۹۶
c_3	۰/۳۸۵۲	۰/۴	۰/۰۰۹۹۴

۴- نتیجه گیری

با رویکرد بیزین، برای وارون سازی پارامترهای طیفی مدل کول-کول از داده های IP حوزه فرکانس استفاده شد. علاوه بر این، تأثیر وابستگی و همبستگی پارامترهای مدل کول-کول (CCM) بر بازیابی خواص الکتریکی زیرسطح مورد مطالعه قرار گرفت. روش نمونه گیری MCMC پیشنهادی به مدل های مصنوعی مختلف با مقادیر متفاوت پارامترهای طیفی اعمال شد. نتایج با استفاده از نمودارهای زنجیره ای و گوشه ای نمایش داده شدند که به درک روابط بین پارامترهای مختلف CCM و ارزیابی انسجام و دقت فرآیند تخمین پارامترها از طریق تحلیل عدم قطعیت کمک کردند. مشاهده شد که همبستگی قوی بین پارامترهای طیفی وجود دارد و این همبستگی با افزایش پیچیدگی مدل های زیرسطحی برجسته تر می شود. تحلیل همبستگی که از نمودارهای گوشه ای توزیع احتمال پسین برای پارامترهای کول-کول به دست آمده، نشان می دهد که همبستگی ضعیفی بین $\log \rho$ و پارامترهای طیفی (μ ، $\log \tau$ و c) وجود دارد. با این حال، این همبستگی ضعیف ممکن است در مدل های زیرسطحی پیچیده تر (مانند موارد موجود در مثال دوم و سوم) با افزایش تعداد پارامترهای کول-کول بیشتر نمایان شود. در مدل زمین دو لایه، وابستگی های قابل توجهی بین $\log \rho_2$ ، μ_2 ، $\log \tau_2$ و c_2 مشاهده شد که نشان دهنده روابط پیچیده تری در لایه پایینی در مقایسه با لایه بالایی است. به طور خاص، قابلیت بارپذیری، زمان آسایش و نمای CCM در لایه پایینی همبستگی بیشتری نشان می دهند، در حالی که مقاومت ویژه در لایه بالایی رفتار مستقل تری دارد. در مثال سوم، همبستگی بین مقاومت ویژه و پارامترهای طیفی نادیده گرفته شده است، زیرا تأثیر ρ بر سیگنال پلاریزاسیون القایی در مثال های اول و دوم کم بود. با این حال، همبستگی های قابل توجهی بین پارامترهای μ ، $\log \tau$ و c در رابطه با نواحی غیر معمول مشاهده شد. به طور خاص، یک همبستگی مثبت بین $\log \tau_2$ ، μ_3 ، $\log \tau_3$ و وجود دارد، در حالی که همبستگی منفی بین c_2 ، c_3 ، μ_2 ، μ_3 ، $\log \tau_2$ و $\log \tau_3$ و پارامترهای μ و $\log \tau$ ذکر شده، شناسایی شد. علاوه بر این، هیچ وابستگی واضحی بین پارامترهای طیفی زمینه همگن و آنهایی که مربوط به نواحی بی هنجار هستند، مشاهده نشد. نگاهی به آینده، نتایج امیدوارکننده به دست آمده از مدل های مصنوعی یک مبنای قوی

برای فعالیت‌های آتی با استفاده از داده‌های واقعی ایجاد می‌کند. با به کارگیری روش **وارون‌سازی** بیزین برای داده‌های واقعی SIP، پتانسیل زیادی برای بهبود درک از بررسی‌های ژئوفیزیکی و دست‌یابی به بینش‌های عمیق‌تر در مورد خواص زیرسطح وجود دارد. علاوه بر این، زمینه برای کارهای بیشتر در راستای بهبود روش فعلی وجود دارد، با تمرکز بر افزایش کارایی محاسباتی و سازگاری با سناریوهای زمین‌شناسی متنوع‌تر. از سوی دیگر، روش‌های سنتی نمونه‌برداری McMC برای مقابله با چالش‌های ناشی از شدت همبستگی بین پارامترهای مدل با مشکل مواجه هستند، که به شدت بر دقت بازایی مدل زیرسطحی و ارزیابی عدم قطعیت تأثیر می‌گذارد. در نتیجه، نیاز به توسعه و به کارگیری الگوریتم‌های پیشرفته‌تر نمونه‌برداری McMC، به ویژه در زمینه **وارون‌سازی** داده‌های SIP احساس می‌شود.

منابع

- Bayes, T., 1763. An Essay towards solving a Problem in the Doctrine of Chance: Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 53, 370–418.
- Bérubé, C. L., Chouteau, M., Shamsipou, M., Enkin, P., Olivo, G. R., (2017) Bayesian inference of spectral induced polarization parameters for laboratory complex resistivity measurements of rocks and soils, Computers and Geosciences, 105, 51-64.
- Binley, A., Slater, L., (2020) Resistivity and induced polarization: Theory and applications to the near-surface earth. Cambridge University Press.
- Binley, A., Slater, L. D., Fukes, M., Cassiani, G., (2005) Relationship between spectral induced polarization and hydraulic properties of saturated and unsaturated sandstone. Water Resources Research, 41(12), W12417.
- Blaschek, R., Hördt, A., Kemna, A., (2008) A new sensitivity-controlled focusing regularization scheme for the inversion of induced polarization data based on the minimum gradient support, Geophysics, 73(2), F45–F54.
- Boadu, F. K., Seabrook, B., (2000) Estimating hydraulic conductivity and porosity of soils from spectral electrical response measurements. Journal of Environmental and Engineering Geophysics, 5(1), 1–9.
- Chen, J., Kemna, A., Hubbard, S., (2008) A comparison between Gauss-Newton and Markov-chain Monte Carlo-based methods for inverting spectral induced-polarization data for Cole-Cole parameters. Geophysics, 73, F247-F259.
- Chib, S., Greenberg, E., (1995) Understanding the Metropolis-Hastings Algorithm. The American Statistician. 49 (4), 327–335.
- Cole, Kenneth S., Cole, Robert H., (1941) Dispersion and Absorption in Dielectrics I. Alternating Current Characteristics. The Journal of Chemical Physics, 9(4), 341-351.
- De Pasquale, G., Linde, N., (2017) On Structure-Based Priors in Bayesian Geophysical Inversion. Geophysical Journal International, 208, 1342–1358.
- Dey, A., Morrison, M. F., (1979) Resistivity modeling for arbitrarily shaped two-dimensional structures: Geophysical Prospecting, 27, 106-136.
- Foreman-Mackey, D., Hogg, D. W., Lang, D., Goodman, J., (2013) emcee: The MCMC Hammer. Publications of the Astronomical Society of the Pacific, 125(925), 306.
- Foreman-Mackey, D., Farr, W. M., Sinha, M., Archibald, A. M., Hogg, D. W., Sanders, J. S., Zuntz, J., Williams, P. K. G., Nelson, A. R. J., de Val-Borro, M., Erhardt, T., Pashchenko, I., Abril Pla, O. A., (2019) emcee v3: A Python ensemble sampling toolkit for affine-invariant MCMC. Journal of Open Source Software, 4(43), 1864.
- Fiandaca, G., Auken, E., Gazoty, A., Christiansen, A. V., (2012) Time-domain induced polarization: Full-decay forward modeling and 1D laterally constrained inversion of Cole-Cole parameters. Geophysics, 77, E213-E225.
- Fiandaca, G., Madsen, L., Maurya, P., (2017) Re-parameterization of the Cole-Cole Model for Improved Spectral Inversion of Induced Polarization Data. Near Surface Geophysics. 2018, 16, 385–399.
- Fiandaca, G., Ramm, J., Binley, A., Gazoty, A., Christiansen, A. V., Auken, E., (2013) Resolving spectral information from time domain induced polarization data through 2-D inversion. Geophysical Journal International, 192, 631-646.
- Gelman, A., Roberts, G. O., Gilks, W. R., (1994) Bayesian Statistics 5, Oxford University Press, 599–607.

- Gelman, A., Carlin, J. B., Stern, H. S., Rubin, D. B., (2014) Bayesian data analysis. 3rd ed. Chapman and Hall.
- Ghanati, R., Müller-Petke, M., (2021) A homotopy continuation inversion of geoelectrical sounding data. *Journal of Applied Geophysics*, 191, p.104356.
- Ghorbani, A., Camerlynck, C., Florsch, N., Cosenza, P., Revil, A., (2007) Bayesian inference of the Cole-Cole parameters from time- and frequency-domain induced polarization. *Geophysical Prospecting*, 55, 589–605.
- Günther, T., Martin, T., (2016) Spectral two-dimensional inversion of frequency-domain induced polarisation data from a mining slag heap. *Journal of Applied Geophysics*, 135, 436-448.
- Goodman, J., Weare, J., (2010) Ensemble samplers with affine invariance. *Communications in Applied Mathematics and Computational Science*, 5, 65–80.
- Hastings, W. K., (1970) Monte Carlo sampling methods using Markov chains and their applications. *Biometrika*, 57, 97–109.
- Hoffman, M. D., Gelman, A., (2014) The No-U-Turn sampler: adaptively setting path lengths in Hamiltonian Monte Carlo, *Journal of Machine Learning Research*, 15(1), 1593–1623.
- Jaggar, S. R., Fell, P. A., (1988) Forward and inverse Cole–Cole modelling in the analysis of frequency domain electrical impedance data. *Exploration Geophysics*, 19, 463–470.
- Jardani, A., Revil, A., Dupont, J. P., (2013) Stochastic joint inversion of hydrogeophysical data for salt tracer test monitoring and hydraulic conductivity imaging. *Advances in Water Resources*, 52, 62-77.
- Johnson, T. C., Thomle, J., (2018) 3-D decoupled inversion of complex conductivity data in the real number domain. *Geophysical Journal International*, 212, 284–296.
- Keery, J., Binley, A., Elshenawy, A., Clifford, J., (2012) Markov-chain Monte Carlo estimation of distributed Debye relaxations in spectral induced polarization. *Geophysics*, 77(2), E159-E170.
- Kemna, A., Binley, A., Slater, L., (2004) Crosshole IP imaging for engineering and environmental applications. *Geophysics*, 69, 97–107.
- Kemna, A., (2000) Tomographic inversion of complex resistivity: Theory and application (Ph.D. thesis). Ruhr-University Bochum.
- Luo, Y., Zhang, G., (1998) Theory and application of spectral induced polarization. SEG, *Geophysical Monograph Series*, no. 8.
- Madsen, L. M., Fiandaca, G., Auken, E., Christiansen, A. V., (2017) Time-domain induced polarization – an analysis of Cole–Cole parameter resolution and correlation using Markov Chain Monte Carlo inversion. *Geophysical Journal International*, 211, 1341-1353.
- MacKay, D., (2003) *Information Theory, Inference, and Learning Algorithms*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Metropolis, N., Rosenbluth, M. N., Rosenbluth, A. W., Teller, A. H., (1953) Equation of state calculations by fast computing machines. *Journal of Chemical Physics*, 21, 1087–1092.
- Mosegaard, K., Tarantola, A., (1995) Monte Carlo sampling of solutions to inverse problems. *Journal of Geophysical Research, Atmospheres*, 100, 12431–12448.
- Pelton, W. H., Ward, S. H., Hallof, P. G., Sill, W. R., Nelson, P. H., (1978) Mineral discrimination and removal of inductive coupling with multifrequency IP. *Geophysics*, 43(3), 588–609.
- Roudsari, M. S., Ghanati, R., Bérubé, C. L., (2024) Spectral induced polarization tomography inversion: Hybridizing homotopic continuation with Bayesian inversion. *Geophysics*, 89(5), 1-63.
- Rücker, C., Günther, T., Spitzer, K., (2006) Three-dimensional modeling and inversion of DC resistivity data incorporating topography—part I: modeling. *Geophysical Journal International*, 166, 495–505.
- Rücker, C., Günther, T., Wagner, F. M., (2017) pyGIMLi: An open-source library for modelling and inversion in geophysics. *Computers & Geosciences*, 109, 106–123.
- Rubin, Y., Hubbard, S. S., (2005) *Hydrogeophysics*. Springer Netherlands, Dordrecht.
- Sen, P. N., (2004) Time domain induced polarization measurement interpretation: Model and experiment. *Geophysics*, 69(3), 731-741.
- Tikhonov, A. N., Arsenin, V. Y., (1977) *Solution of Ill-Posed Problems*. Winston, Washington D.C.
- Tarantola, A., Valette, B., (1982) Generalized nonlinear inverse problems solved using the least squares criterion. *Reviews of Geophysics*, 20, 219–232.