

## High-order finite difference methods on the cubed sphere: Application to passive scalar advection

Bagherzadegan, E.<sup>1</sup>  | Mohebalhojeh, A. R.<sup>1</sup>   | Ghader, S.<sup>1</sup> 

1. Department of Space Physics, Institute of Geophysics, University of Tehran, Tehran, Iran.

Corresponding Author E-mail: [amoheb@ut.ac.ir](mailto:amoheb@ut.ac.ir)

(Received: 23 Sep 2024, Revised: 9 Feb 2025, Accepted: 29 April 2025, Published online: 20 Sep 2025)

### Summary

The present work is part of our ongoing effort to make use of the cubed sphere for global atmospheric modeling applications. To this end, high-order numerical solutions of advection equation on the gnomonic cubed sphere grid are presented. Arbitrary-order one-dimensional interpolation based on spherical distance of the grid points have been used at the halo regions to bind the faces of the cubed sphere together. Although, the implementation of the model in this work is such that it makes using finite difference operators of various types and orders straightforward, we only discuss the results of 2nd-, 4th-, and 6th-order centered explicit operators. For time integration, the classical 4th-order Runge-Kutta method and the leapfrog method with a first-degree polynomial regression time filter with 2nd-order accuracy have been used. These methods have been compared by solving the advection equation using solid body rotations of  $C^1$  and  $C^3$  cosine bells. The long-range variant of this test is used to analyze the stability of the schemes. The methods and test cases have been chosen in such a way that facilitates the assessment of different components of the numerical scheme and factors affecting their accuracy.

Results of the advection test cases, demonstrate that although low differentiability class of the advected field or low order of accuracy of the time integration scheme, could limit the actual order of accuracy of the solution, conservation properties of the model could, nevertheless, be improved significantly by the use of high-order finite difference operators. All of the methods used in this work need some scale-selective artificial dissipation for stability which has been supplied in the form of high-order explicit filters. Single-parameter fractional filters (i.e. filters that remove only a fraction of the shortest waves) are used in the long-range integrations to determine the required amount of artificial dissipation for each method.

Results demonstrate that lower-order methods and lower resolutions require more artificial dissipation for stability. Since there is no systematic cascade of variance to smaller scales in the solid body rotation test-case, application of filter does not reduce the order of accuracy of the normalized variance. Also, the minimum required dissipation which has been calculated here might not be sufficient in cases where there is such a cascade. Time traces of 2-norm of error display a linear increase with time with no jumps or transient increases. Although such transient increases are present in time traces of normalized mean and variance, which might signify grid imprinting, this does not pose a problem since these non-conservation errors converge with or faster than the expected order. On the whole, the results demonstrate the superiority of the high-order methods in terms of accuracy and performance. In long-range integrations, high-order methods exhibit convergence of errors at low resolutions even after 100 revolutions of the cosine bells.

**Keywords:** Gnomonic cubed sphere, Advection equation, Finite difference method, Filter, Fractional filter.

Cite this article: Bagherzadegan, E., Mohebalhojeh, A. R., & Ghader, S. (2025). High-order finite difference methods on the cubed sphere: Application to passive scalar advection. *Journal of the Earth and Space Physics*, 51(2), 353-375. DOI: <http://doi.org/10.22059/jesphys.2025.382692.1007629>

E-mail: (1) [baqerzadegan@ut.ac.ir](mailto:baqerzadegan@ut.ac.ir) | [sghader@ut.ac.ir](mailto:sghader@ut.ac.ir)



© Authors Retain the Copyright and Full Publishing Rights.

Publisher: University of Tehran Press.

DOI: <http://doi.org/10.22059/jesphys.2025.382692.1007629>

Print ISSN: 2538-371X  
Online ISSN: 2538-3906

# روش‌های تفاضل متناهی مرتبه بالا بر روی شبکه مکعب کره: کاربرست به فرارفت کمیت نرده‌ای غیرفعال

الیاد باقرزادگان<sup>۱</sup> | علیرضا محب‌الحجه<sup>۱</sup> | سرمد قادر<sup>۱</sup>

۱. گروه فیزیک فضا، مؤسسه ژئوفیزیک، دانشگاه تهران، تهران، ایران.

رایانامه نویسنده مسئول: [amoheb@ut.ac.ir](mailto:amoheb@ut.ac.ir)

(دریافت: ۱۴۰۳/۷/۲، بازنگری: ۱۴۰۳/۱۱/۲۱، پذیرش نهایی: ۱۴۰۴/۲/۹، انتشار آنلاین: ۱۴۰۴/۶/۲۹)

## چکیده

در کار حاضر، پیاده‌سازی شبکه مکعب کره مرکزی و حل تفاضل متناهی مرتبه بالای معادله فرارفت بر روی آن ارائه شده‌اند. اگرچه این پیاده‌سازی به گونه‌ای است که به کارگیری عملگرهای تفاضل متناهی از نوع و مرتبه‌های مختلف را ممکن می‌کند، در این کار، صرفاً به مقایسه روش‌های تفاضل متناهی صریح مرکزی مرتبه ۲، ۴ و ۶ بسنده شده است. انتگرال‌گیری زمانی به دو روش رونگه-کوتای کلاسیک مرتبه ۴ و لیپفرگ با پالایه زمانی وایزش چندجمله‌ای درجه یک با مرتبه دقت ۲ انجام شده است. این روش‌ها در معادله فرارفت با استفاده از آزمون گردش جسم صلب زنگوله‌های کسینوسی با رده‌های مشتق‌پذیری  $C^1$  و  $C^3$  مورد مقایسه قرار گرفته‌اند. روش‌های مکانی، زمانی و آزمون‌های موردی به گونه‌ای انتخاب شده‌اند که امکان بررسی عملکرد اجزای مختلف روش عددی و عوامل مؤثر بر دقت آنها تسهیل شود. نتایج آزمون‌ها نشان می‌دهد که اگرچه رده مشتق‌پذیری پایین یا مرتبه پایین روش انتگرال‌گیری زمانی می‌تواند مرتبه دقت دست‌یافتنی را محدود کنند، باین حال به کارگیری عملگرهای تفاضل متناهی مرتبه بالا می‌تواند خواص پایداری مدل را به‌طور قابل توجهی بهبود دهد. تمامی روش‌های به کاررفته در اینجا برای پایداری نیاز به مقداری میرایی مصنوعی مقیاس‌گزين دارند که در این کار به وسیله پالایه‌های فضایی تأمین می‌شود. نتایج آزمون بلندمدت نشان می‌دهد که روش‌های مرتبه بالاتر و تفکیک‌های بالاتر به میرایی مصنوعی کمتری برای پایداری محاسباتی نیاز دارند.

واژه‌های کلیدی: مکعب کره مرکزی، معادله فرارفت، روش تفاضل متناهی، پالایه، پالایه کسری.

## ۱. مقدمه

روش‌های عددی‌ای که بر روی رایانه‌های با حافظه مشترک (shared) بهینه و اقتصادی هستند، ممکن است برای رایانه‌های با حافظه توزیع شده (distributed) مناسب نباشند. روش‌های طیفی مبتنی بر هماهنگی‌های کروی و روش‌های شبکه‌مبنای مبتنی بر شبکه طول و عرض جغرافیایی (کاهش نیافته) از این دسته‌اند. توسعه شبکه‌های جایگزین بر روی کره از اواخر دهه ۱۹۶۰ و به منظور ارائه راه‌حلی برای مشکل قطب آغاز شد (برای نمونه، فیلیپس، ۱۹۵۷؛ ویلیامسون، ۱۹۶۸، ۱۹۷۰؛ سادورنی و همکاران، ۱۹۶۸؛ سادورنی، ۱۹۷۲). شبکه‌هایی همچون مکعب کره (cubed sphere) نیز برای اولین بار در همان سال‌ها به کار رفتند

(سادورنی، ۱۹۷۲). این شبکه‌ها با توسعه روش‌های تبدیل طیفی و نیمه‌ضمنی نیمه‌لاگرنژی عملاً کنار گذاشته شدند، تا دوباره در اواخر دهه ۱۹۹۰ و با مشخص شدن چشم‌انداز تغییرات معماری ابررایانه‌ها، کار بر روی آنها از سر گرفته شود (برای نمونه، رونچی و همکاران، ۱۹۹۶؛ رنچیچ و همکاران، ۱۹۹۶؛ تیلور و همکاران، ۱۹۹۷). شبکه مکعب کره که از تقسیم سطح کره به شش وجه هم‌نهشت چهاربر و تعریف دستگاه‌های مختصات محلی در هر یک از آنها به دست می‌آید، برای اولین بار توسط سادورنی (۱۹۷۲) ارائه و برای حل معادلات آب کم‌عمق به کار رفت. به دلیل تغییر دستگاه مختصات در مرزهای

استناد: باقرزادگان، الیاد؛ محب‌الحجه، علیرضا و قادر، سرمد (۱۴۰۴). روش‌های تفاضل متناهی مرتبه بالا بر روی شبکه مکعب کره: کاربرست به فرارفت کمیت نرده‌ای غیرفعال. مجله

فیزیک زمین و فضا، ۵۱(۲)، ۳۵۳-۳۷۵. DOI: <http://doi.org/10.22059/jesphys.2025.382692.1007629>

رایانامه: (۱) [baqerzadegan@ut.ac.ir](mailto:baqerzadegan@ut.ac.ir) | [sghader@ut.ac.ir](mailto:sghader@ut.ac.ir)



ناشر: مؤسسه انتشارات دانشگاه تهران.

DOI: <http://doi.org/10.22059/jesphys.2025.382692.1007629>

مطلوب در مدل نیز کمک کند، به نظر می‌رسد در بسیاری از موارد، بیش از آن‌چه از طریق تعامد به دست می‌آید، به طرق دیگر از دست می‌رود. شبکه‌های متعامد بر روی کره یا دچار همگرایی خطوط شبکه هستند یا دارای هم‌پوشانی. شبکه‌های طول و عرض جغرافیایی و مکعب کره همدیس (رنچیچ و همکاران، ۱۹۹۶) از دسته اول و شبکه‌های فیلپس (فیلپس، ۱۹۵۷) و یین-ینگ (کاگیاما و ساتو، ۲۰۰۴) از دسته دوم هستند. همگرایی خطوط شبکه باعث کاهش کمینه فاصله شبکه‌ای و متعاقب آن کوچک‌تر شدن گام زمانی لازم برای پایداری در روش‌های زمانی صریح می‌شود. نتیجه این مسئله افزایش غیر قابل قبول هزینه محاسباتی، چه به دلیل به کارگیری روش صریح با گام زمانی کوچک و چه به دلیل استفاده از روش‌های ضمنی است. هم‌پوشانی تکه‌های شبکه نیز همان‌گونه که پیش‌تر گفته شد، می‌تواند منجر به جداسازی در حل شود.

در کار حاضر، پیاده‌سازی شبکه مکعب کره مرکزی هم‌زاویه (Equiangular) با استفاده از دستگاه‌های مختصات تعمیم‌یافته و حل عددی معادله فرارفت به روش تفاضل متناهی بر روی آن مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین، سعی شده است امکان پیاده‌سازی روش‌های تفاضل متناهی مرتبه بالا بر روی مکعب کره نشان داده شده و با استفاده از مقایسه نتایج در آزمون‌های موردی مختلف، توجیه‌پذیری به کارگیری آنها به جای روش‌های مرتبه پایین بررسی شود.

معادلات حاکم در بخش ۲ تشریح شده‌اند. جزئیات روش کار، اعم از پیاده‌سازی شبکه مکعب کره، انتگرال‌گیری زمانی و عملگرهای تفاضل متناهی مشتق و پالایه در بخش ۳ آورده شده‌اند. بخش ۴ به تبیین آزمون‌های موردی به کاررفته اختصاص دارد. در بخش ۵، نتایج آزمون‌های موردی ارائه شده و مورد بررسی قرار گرفته‌اند. در بخش ۶ بحثی کلی درباره نتایج ارائه شده و در نهایت جمع‌بندی مطالب و نتیجه‌گیری در بخش ۷ صورت گرفته است.

## ۲. معادلات حاکم

شکل دوبعدی معادله فرارفت، که به صورت زیر بیان

وجوه مکعب کره، نقاط نزدیک این مرزها نیازمند توجهی ویژه هستند. روش سادورنی (۱۹۷۲) در این مرزها، استفاده از عملگرهای یک‌سویه برای مشتق بود. این روش به دلیل دقت پایین در مرزهای داخلی و مشکل نوفه‌های شبکه‌مقیاس مورد استقبال قرار نگرفت. رونچی و همکاران (۱۹۹۶) از اضافه کردن نقاط ضمیمه و هم‌پوشانی برای حل مسئله مرزهای داخلی مکعب کره استفاده کردند. هم‌پوشانی به نواحی‌ای اطلاق می‌شود که در آنجا محاسبات اصلی مربوط به حل معادله در بیش از یک وجه انجام شود. وجود نواحی هم‌پوشانی از این نظر که امکان بالقوه جداسازی در حل را ایجاد می‌کند (استنیفورث و توپرن، ۲۰۱۲)، رویکرد جذابی نیست و در چنین شبکه‌هایی برای پیوند زدن نواحی هم‌پوشانی در وجوه مختلف می‌بایست تمهیدی اندیشیده شود. نواحی ضمیمه، اما نواحی‌ای هستند که در درون وجوه همسایه قرار می‌گیرند و مقادیرشان از طریق درونیابی و نه از حل مستقیم معادلات به دست می‌آید. همچنین در یک مدل جوی نیاز به اجرای پارامترسازی‌های فیزیکی در نقاط ضمیمه وجود ندارد، در حالی که در نقاط هم‌پوشانی اجرای آنها لازم است. ماهیت تک‌ستونی و تجربی پارامترسازی‌های فیزیکی می‌تواند مسئله جداسازی را در شبکه‌های دارای هم‌پوشانی تشدید کند (استنیفورث و توپرن، ۲۰۱۲). به کارگیری نقاط ضمیمه در حل مشکل تغییر دستگاه مختصات در مرزهای داخلی بسیار مؤثر بود و مبنای بسیاری از پژوهش‌ها از جمله کار حاضر قرار گرفته است. از روش‌های دیگر حل مسئله مرزهای داخلی مکعب کره می‌توان به اصلاح عددی شبکه برای گذار تدریجی میان دستگاه‌های مختصات در این مرزها (برای نمونه، رنچیچ و همکاران، ۱۹۹۶؛ پرسر و رنچیچ، ۱۹۹۷، ۱۹۹۸؛ پرسر، ۱۹۹۸) و به کارگیری روش‌های عنصر متناهی (برای نمونه، تامس و لاف، ۲۰۰۰، ۲۰۰۲؛ نر و همکاران، ۲۰۰۵؛ لوی و همکاران، ۲۰۰۹) اشاره کرد.

شبکه مکعب کره مرکزی (Gnomonic) شبکه‌ای اساساً نامتعامد است (برای نمونه، سادورنی، ۱۹۷۲؛ رونچی و همکاران، ۱۹۹۶). اگرچه تعامد علاوه بر کاهش محاسبات در یک گام زمانی، می‌تواند به دستیابی به خواص عددی

می‌شود،

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \psi = 0 \quad (۱)$$

فرایند انتقال در یک شاره پیوسته را شبیه‌سازی می‌کند. حل عددی این معادله، گام اول در پیاده‌سازی یک هسته دینامیکی است. فرارفت اهمیت بالایی در جنبه‌های مختلف دینامیک و شیمی جو دارد. قسمت عمده انتقال جرم و انرژی در جو از طریق فرارفت انجام می‌شود. همچنین بخش بزرگی از شارش جوی متوازن است و فرارفت تاوایی پتانسیلی نقش تعیین‌کننده‌ای در آن دارد. حتی در مدل‌هایی که در آنها فرارفت تاوایی پتانسیلی یا تاوایی به صورت مستقیم مدل‌سازی نمی‌شود، معمولاً سعی بر این است که تحول تاوایی پتانسیلی دقیق شبیه‌سازی شود (برای نمونه، توپرن و همکاران، ۲۰۱۴). در هر صورت، فرارفت افقی یکی از فرایندهای اصلی‌ای است که هسته دینامیکی شبیه‌سازی آن را بر عهده دارد (رود، ۲۰۱۱) و خطای آن می‌تواند بخش‌های دیگر مدل (همچون فرایندهای شیمیایی و برخی از پارامترسازی‌های فیزیکی) را نیز مستقیماً تحت تأثیر قرار دهد (کنت و همکاران، ۲۰۱۴).

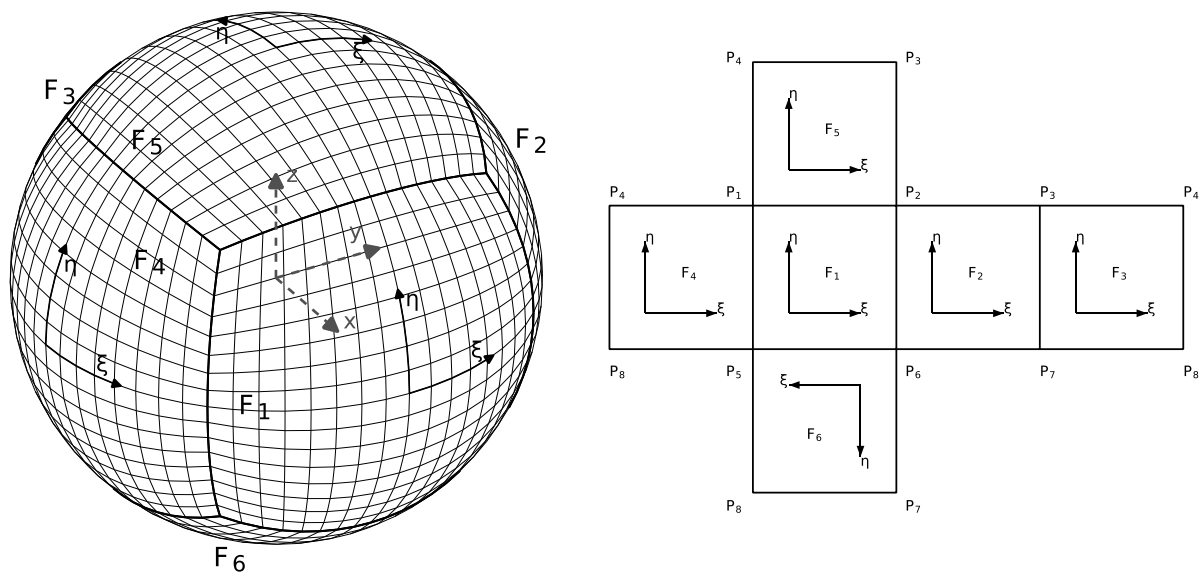
### ۳. روش انجام کار

در این بخش پیاده‌سازی شبکه مکعب‌کره، روش‌های انتگرال‌گیری زمانی، عملگرهای تفاضل متناهی مشتق و پالایه‌های فضایی به کاررفته تشریح شده‌اند.

#### ۳-۱. پیاده‌سازی شبکه مکعب‌کره

با تصویرکردن یک مکعب محاط در کره، بر روی آن در امتداد شعاع‌های کره می‌توان سطح کره را به شش قسمت (وجه) هم‌نهشت متناظر با وجوه مکعب تقسیم کرد. صورت‌های مختلف شبکه مکعب‌کره با تعریف دستگاه‌های مختصات محلی بر روی این وجوه و شبکه‌بندی بر اساس آنها به دست می‌آیند (برای نمونه، شکل ۱). در شبکه مکعب‌کره مرکزی که در ادامه شرح داده خواهد شد، خطوط شبکه قطاع‌های دایره‌های عظیمه هستند.

همان‌گونه که پیش‌تر گفته شد، به هر یک از وجوه مکعب‌کره چند ردیف نقاط شبکه‌ای اضافه شده است. این نقاط که نقاط ضمیمه خوانده می‌شوند، در وجوه همسایه قرار می‌گیرند و مقادیر میدان‌های مختلف نرده‌ای و برداری در آنها از طریق درون‌یابی از نقاط شبکه‌ای اصلی وجوه همسایه به دست می‌آید. خطوط شبکه‌ای در مکعب‌کره مرکزی قطاع‌های دایره‌های عظیمه‌اند. یک خانواده از دایره‌های عظیمه را با یک قطر از کره که میان‌شان مشترک است، تعریف می‌کنیم. خطوط شبکه هر وجه به دو خانواده دایره عظیمه تعلق داشته و دو وجه همسایه در یکی از این خانواده‌ها که شامل مرز میان‌شان است، مشترک هستند. بنابراین و با توجه به استفاده از تفکیک یکنواخت در این پیاده‌سازی، در نقاط ضمیمه به درون‌یابی دوبعدی نیازی نیست و درون‌یابی یک‌بعدی در امتداد خطوط شبکه‌ای مشترک انجام می‌شود (رونچی و همکاران، ۱۹۹۶). در این کار، درون‌یابی در نقاط ضمیمه بر مبنای فاصله کروی نقاط و با مرتبه‌ای بالاتر از مرتبه عملگرهای تفاضل متناهی مشتق به کاررفته در حل، انجام می‌شود. با توجه به اینکه مقادیر یک میدان در یک ردیف از نقاط ضمیمه تنها به مقادیر آن در یک خط شبکه از وجه همسایه وابسته است، درون‌یابی‌ها در یک خط شبکه به صورت هم‌زمان انجام می‌شود. ضرایب درون‌یابی در آغاز هر اجرا با حل دستگاه‌های معادلات مربوطه محاسبه شده و برای استفاده در طول اجرا ذخیره می‌شوند. به دلیل هم‌نهشت بودن وجوه مکعب‌کره با یکدیگر و همچنین تقارن‌های درونی هر وجه، ذخیره این ضرایب در یک نیم‌بر از یکی از وجوه مکعب‌کره کافی است. البته در این کار برای سادگی، ضرایب برای یک بر کامل ذخیره می‌شوند. نقاط شبکه‌ای واقع در گوشه‌های وجوه مکعب‌کره میان سه وجه و سایر نقاط واقع بر مرزها میان دو وجه مشترک هستند. این نقاط تنها نقاط هم‌پوشانی میان وجوه مکعب‌کره هستند و برای پرهیز از جداسازی در حل، مقادیر میدان‌های مختلف در آنها در هر گام زمانی با میانگین دو یا سه مقدار مربوطه جایگزین می‌شود.



شکل ۱. نام‌گذاری وجوه مکعب کره و جهت محورها در دستگاه‌های مختصات محلی.

موقعیت  $(\vec{r})$  به عنوان مختصه قائم، دستگاه مختصات محلی آن وجه،  $(q^1, q^2, q^3) = (\xi, \eta, r)$ ، را تشکیل می‌دهند.

می‌توان نشان داد که برای وجه مفروض در بالا

$$[x_1, x_2, x_3] = \frac{r}{\delta} [1, \tan(\xi), \tan(\eta)] \quad (4)$$

به‌ازای  $\delta = \sqrt{1 + \tan^2(\xi) + \tan^2(\eta)}$  است. بنابراین

می‌توان رابطه‌ای برای بردار موقعیت  $\vec{r}$  بر حسب مختصات محلی به‌دست آورد. با معلوم‌بودن رابطه بردار موقعیت نقطه بر حسب مختصات محلی، بردارهای پایه هم‌وردا (covariant) و پادوردا (contravariant) و تانسورهای متریک هم‌وردا و پادوردا به سادگی تعریف می‌شوند (زدونکووسکی و بُت، ۲۰۰۵). برای عملگرهای شیو و

واگرایی نیز از تعاریف آنها در دستگاه‌های مختصات تعمیم‌یافته استفاده شده است (زدونکووسکی و بُت، ۲۰۰۵). اگرچه در حالت کلی عملگر لاپلاسی از ترکیب عملگرهای واگرایی و شیو به‌دست می‌آید، می‌توان نشان داد که عملگر لاپلاسی در مکعب کره مرکزی صورت ساده‌تری دارد (برای نمونه، رونچی و همکاران، ۱۹۹۶)، که در اینجا از آن استفاده شده است.

رویکرد کلی در پیاده‌سازی شبکه مکعب کره در اینجا، استفاده از دستگاه مختصات دکارتی برای بردارها و به‌کارگیری روابط مربوط به دستگاه‌های مختصات تعمیم‌یافته (برای نمونه، زدونکووسکی و بُت، ۲۰۰۵) در تعریف عملگرها است. بنابراین، بردارها در دستگاه مختصات محلی هر وجه ذخیره نمی‌شوند. شکل ۲ نمای طرحواره‌ای دستگاه‌های مختصات محلی تعریف‌شده بر روی وجوه مکعب کره را نشان می‌دهد. اگر  $[x_1, x_2, x_3]$  بر حسب دستگاه مختصات دکارتی داده شده باشند (مثلاً  $[y, -x, z]$  برای  $F_2$ )، مختصات محلی افقی  $\xi$  و  $\eta$  بر روی وجه مورد نظر به این صورت تعریف می‌شوند:

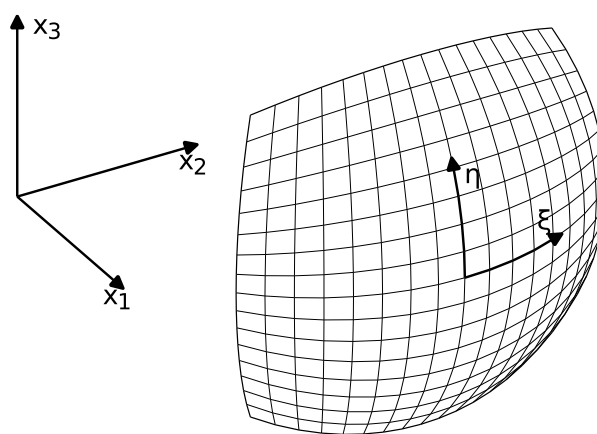
$$\xi = \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right) \quad (2)$$

$$\eta = \arctan\left(\frac{x_3}{x_1}\right) \quad (3)$$

شکل ۱ جهت محورها در هر وجه مکعب کره پیاده‌سازی شده در این کار را نشان می‌دهد. در هر وجه مکعب کره با توجه به جهت آن (جدول ۱)، مختصه‌های افقی  $\xi$  و  $\eta$  در کنار  $r = |\vec{r}|$  (اندازه بردار

جدول ۱. جهت‌های استفاده شده برای وجوه مکعب‌کره در کار حاضر.

| نام وجه مکعب‌کره | $[x_1, x_2, x_3]$ |
|------------------|-------------------|
| $F_1$            | $[x, y, z]$       |
| $F_2$            | $[y, -x, z]$      |
| $F_3$            | $[-x, -y, z]$     |
| $F_4$            | $[-y, x, z]$      |
| $F_5$            | $[z, y, -x]$      |
| $F_6$            | $[-z, -y, -x]$    |



شکل ۲. نمای طرحواره‌ای دستگاه‌های مختصات محلی وجوه مکعب‌کره.  $[x_1, x_2, x_3]$  بر حسب دستگاه مختصات دکارتی  $[x, y, z]$  تعریف می‌شوند. (توجه شود که برای وضوح تصویر، محورهای  $[x_1, x_2, x_3]$  با جابه‌جایی نسبت به مبدأ رسم شده‌اند.)

در یک سو و از  $N_e + 1$  تا  $N_e + N_p$  در سوی دیگر تغییر می‌کنند. و (۴)  $I_w$ : تعداد نقاط استفاده‌شده در درون‌یابی در نقاط ضمیمه  $(I_w \leq 2N_p + 1)$ . جدول ۲ تعداد نقاط ضمیمه  $(N_p)$  و درون‌یابی  $(I_w)$  را در شبکه‌های به‌کاررفته در این کار نشان می‌دهد.

هر شبکه مکعب‌کره در این پژوهش با چهار مشخصه تعریف می‌شود: (۱)  $a$ : شعاع کره، (۲)  $N_e$ : تعداد تقسیمات اصلی هر وجه در هر امتداد (اندیس‌ها در نقاط اصلی از ۰ تا  $N_e$  تغییر می‌کنند)، (۳)  $N_p$ : تعداد ردیف‌های نقاط ضمیمه در هر سو (اندیس‌ها در نقاط ضمیمه از  $-N_p$  تا  $-1$

جدول ۲. مشخصات شبکه در اجراهای مختلف در این کار.  $N_p$  تعداد ردیف‌های نقاط ضمیمه در هر سو و  $I_w$  تعداد نقاط به‌کاررفته برای درون‌یابی در نقاط ضمیمه هستند.

| مرتبه    | پالایه                | $N_p$ | $I_w$ |
|----------|-----------------------|-------|-------|
| ۲        | بدون پالایه           | ۱     | ۳     |
| ۴        | بدون پالایه           | ۲     | ۵     |
| ۶        | بدون پالایه           | ۳     | ۷     |
| ۲، ۴ و ۶ | پالایه مرتبه ۱۰ (F10) | ۵     | ۱۱    |

## ۳-۲. انتگرال گیری زمانی

در این پژوهش، انتگرال گیری زمانی معادلات حاکم با استفاده از روش‌های رونگه-کوتای کلاسیک مرتبه ۴ (دورن، ۲۰۱۰) و روش لیفراگ با پالایه زمانی وایزش چندجمله‌ای PR1(3,2) (یازجی و همکاران، ۲۰۱۷) انجام می‌شود. صورت‌بندی به کاررفته از روش لیفراگ که در اینجا LF-PR1(3,2)<sub>iii</sub> خوانده می‌شود، یک روش مرتبه ۲ است و از مقادیر  $\alpha_0 = 0.925$ ،  $\alpha_1 = 0.85$  و  $\gamma = 0$  استفاده می‌کند (یازجی و همکاران، ۲۰۱۷؛ جدول ۱). هزینه محاسباتی هر روش زمانی صریح تابع دو متغیر است: گام زمانی لازم برای پایداری و تعداد دفعات محاسبه تابع پیش‌یاب در هر گام زمانی. در اینجا، با توجه به استفاده از  $\gamma = 0$  تنها به یک بار محاسبه تابع پیش‌یاب در هر گام زمانی نیاز است. روش LF-PR1(3,2)<sub>iii</sub> از پایداری مناسبی نیز برخوردار است (یازجی و همکاران، ۲۰۱۷؛ جدول ۱). بنابراین، اگرچه مرتبه این روش ۲ است، هزینه محاسباتی آن تفاوت چندانی با روش لیفراگ با پالایه رابرت-اسلین، که اساساً روشی مرتبه اول است، ندارد.

اگر  $\Delta s$  فاصله نقاط شبکه،  $\Delta t$  گام زمانی و  $c$  تندی فاز باشند، عدد کورانت برابر با  $\frac{c\Delta t}{\Delta s}$  خواهد بود. در صورتی که شرط کافی برای پایداری یک‌بعدی به صورت یک کران بالا (L) برای عدد کورانت تعریف شده باشد، برای حالت دوبعدی داریم:

$$\max\left(\frac{c\Delta t}{\Delta s}\right) \leq \frac{L}{\sqrt{2}} \quad (5)$$

$$\Rightarrow \Delta t \leq \frac{L}{\sqrt{2}} \min\left(\frac{\Delta s}{c}\right) \quad (6)$$

$$\frac{\mu L \max(\Delta s)}{2 \max(c)} \leq \frac{L}{\sqrt{2}} \frac{\min(\Delta s)}{\max(c)} \leq \frac{L}{\sqrt{2}} \min\left(\frac{\Delta s}{c}\right) \quad (7)$$

از آنجا که

$$\Delta t \leq \frac{\mu L \max(\Delta s)}{2 \max(c)} \quad (8)$$

شرط کافی برای (۵) در نامساوی اول رابطه (۷)  $\mu/\sqrt{2} \leq \min(\Delta s) / \max(\Delta s) \leq 1/\sqrt{2}$  برای نسبت کوتاه‌ترین به بلندترین فاصله شبکه‌ای در مکعب کره مرکزی هم‌زاویه استفاده شده است. در این رابطه،  $\mu$  متغیری کمکی است که در اینجا فاصله نسبت  $\min(\Delta s) / \max(\Delta s)$  را در یک تفکیک مشخص از

مقدار حدی آن در تفکیک بی‌نهایت ( $1/\sqrt{2}$ ) نشان می‌دهد. کمینه مقدار  $\mu$  در تفکیک‌های استفاده‌شده در این کار حدود ۰/۹۹۶۹ (برای  $N_e = 16$ ) است. نکته مهم در اینجا رابطه خطی میان گام زمانی و بلندترین فاصله شبکه‌ای است. می‌توان شرط پایداری (۸) را برحسب  $N_e$  نوشت:

$$\max(\Delta s) = \frac{a\pi}{2N_e} \Rightarrow \Delta t \leq \frac{a\pi\mu L}{4N_e \max(c)} \quad (9)$$

گام زمانی به گونه‌ای انتخاب می‌شود که ضمن برآوردن شرط پایداری، کسری صحیح از بازه زمانی خروجی مدل (برای مثال ۱۲ ساعت) باشد. در این کار، عدد کورانت پیشینه در روش RK4 کوچک‌تر از ۱ و در روش LF-PR1(3,2)<sub>iii</sub> کوچک‌تر از ۰/۳۵ انتخاب شده است. بنابراین با توجه به این که تعداد دفعات محاسبه تابع پیش‌یاب در روش RK4 برابر چهار و در روش LF-PR1(3,2)<sub>iii</sub> برابر یک است، نسبت هزینه محاسباتی دو روش (با فرض استفاده از روش مکانی یکسان) حدود ۱/۴ خواهد بود. جدول ۳ تفکیک‌های شبکه و گام‌های زمانی به کاررفته در این کار را نشان می‌دهد.

## ۳-۳. عملگرهای تفاضل متناهی مشتق

برای گسسته‌سازی فضایی از روش‌های تفاضل متناهی صریح مرکزی با مرتبه‌های ۲، ۴ و ۶ استفاده شده است. عملگر تفاضل متناهی صریح یک‌بعدی مشتق  $m$ ام برای تابع دلخواه  $\Phi$  بر روی یک شبکه یکنواخت بدین صورت نوشته می‌شود:

$$\left. \frac{\partial^n \Phi}{\partial x^n} \right|_j = \frac{1}{\Delta x^n} \sum_{k=-l}^r a_k \Phi_{j+k} \quad (10)$$

که در آن،  $\Delta x$  فاصله نقاط شبکه در راستای محور  $x$  است که در این کار می‌تواند یکی از مختصه‌های محلی افقی  $\xi$  یا  $\eta$  باشد.  $l$  و  $r$  مقادیر حدود پایین و بالای سیگما بسته به روش تفاضل متناهی مربوطه هستند. در عملگرهای تفاضل متناهی متقارن،  $l = r$  و برابر نیم‌پهنای عملگر مربوطه هستند. جدول ۴ ضرایب  $a_k$  عملگرهای تفاضل متناهی صریح به کاررفته در این پژوهش را ارائه می‌دهد. در این کار برای اشاره به عملگرهای تفاضل متناهی مرکزی مرتبه ۲، ۴ و ۶ به ترتیب از CS2،

CS4 و CS6 و برای اشاره به تمامی آنها از CSx استفاده می‌شود.

مرتبه دقت نمی‌تواند توانایی یک روش در شبیه‌سازی امواج بدتفکیک‌شده را به‌خوبی نشان دهد (دورن، ۲۰۱۰). بررسی خطاهای فاز و دامنه عملگرهای تفاضل متناهی مشتق می‌تواند در شناخت رفتار آنها در طیف وسیع‌تری از طول‌موج‌ها مفید باشد. در روش‌های تفاضل متناهی متقارن، خطای فاز برابر صفر است. شکل ۳ خطای دامنه عملگرهای تفاضل متناهی برای مشتق‌های اول و دوم

را نشان می‌دهد. در این شکل می‌توان خطای بالای روش مرتبه ۲ را در قیاس با روش‌های مرتبه‌بالا حتی در طول‌موج‌های بزرگ‌تر از  $10\Delta x$  نیز مشاهده کرد. بازنمایی طول‌موج‌های کوچک‌تر منجر به تولید نوسان‌های با بسامد بالاتر در حل شده و این امر طبیعتاً گام زمانی لازم برای پایداری را محدودتر می‌کند (دورن، ۲۰۱۰). البته در این کار برای روش‌های تفاضل متناهی مرتبه ۲ و ۴ نیز از گام زمانی مشابه روش مرتبه ۶ استفاده شده است.

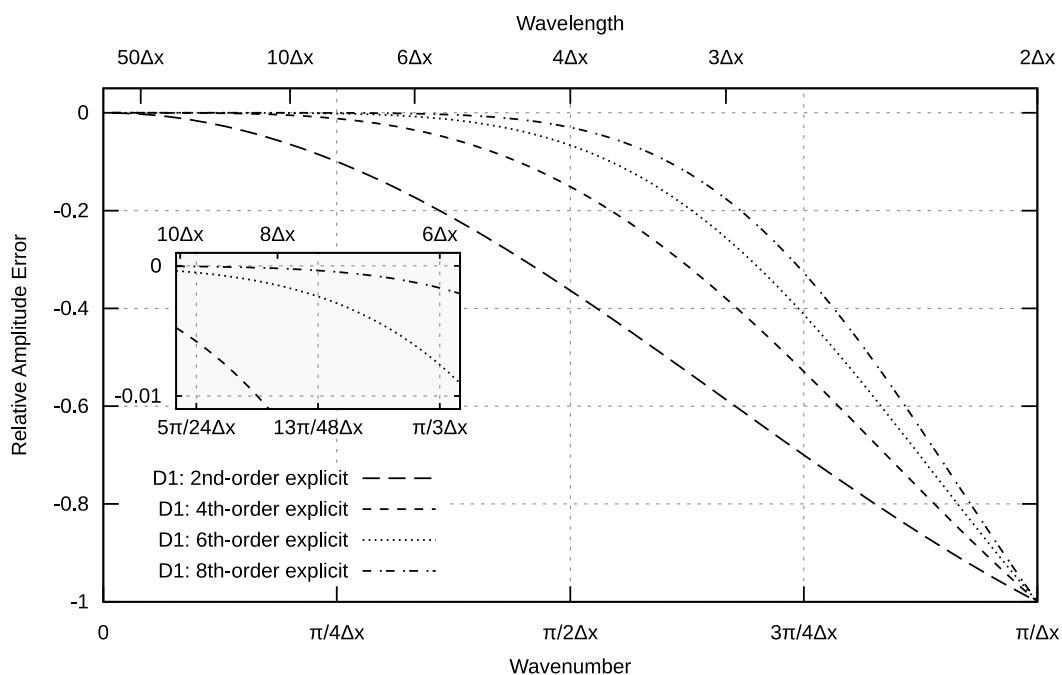
جدول ۳. تفکیک‌های به‌کاررفته در آزمون‌های موردی گردش جسم صلب برای معادله فرارفت و گام‌های زمانی مربوطه.  $\max(\Delta s/a)$  بزرگ‌ترین زاویه شبکه‌ای بر حسب درجه است. (اعداد گرد شده‌اند).

| $\Delta t(s)$              |        | $\max(\Delta s/a) (^{\circ})$ | $N_e$ |
|----------------------------|--------|-------------------------------|-------|
| LF-PR1(3,2) <sub>iii</sub> | RK4    |                               |       |
| ۲۶۱۸/۲                     | ۷۲۰۰/۰ | ۳/۷۵۰۰                        | ۲۴    |
| ۱۹۶۳/۶                     | ۵۴۰۰/۰ | ۲/۸۱۲۵                        | ۳۲    |
| ۱۳۲۹/۲                     | ۳۷۵۶/۵ | ۱/۸۷۵۰                        | ۴۸    |
| ۹۹۳/۱                      | ۲۷۸۷/۱ | ۱/۴۰۶۲                        | ۶۴    |
| ۶۶۴/۶                      | ۱۸۷۸/۳ | ۰/۹۳۷۵                        | ۹۶    |
| ۴۹۹/۴                      | ۱۴۱۶/۴ | ۰/۷۰۳۱                        | ۱۲۸   |
| ۳۳۳/۶                      | ۹۴۹/۵  | ۰/۴۶۸۸                        | ۱۹۲   |
| ۲۵۰/۴                      | ۷۱۴/۰  | ۰/۳۵۱۶                        | ۲۵۶   |
| ۱۶۶/۸                      | ۴۷۴/۷  | ۰/۲۳۴۴                        | ۳۸۴   |
| ۱۲۵/۲                      | ۳۵۷/۰  | ۰/۱۷۵۸                        | ۵۱۲   |
| ۸۳/۵                       | ۲۳۸/۰  | ۰/۱۱۷۲                        | ۷۶۸   |

جدول ۴. ضرایب  $a_k$  عملگرهای تفاضل متناهی مشتق اول مورد استفاده در این کار.

| مرتبه | $a_{-3}$        | $a_{-2}$       | $a_{-1}$       | $a_0$ | $a_1$         | $a_2$           | $a_3$          |
|-------|-----------------|----------------|----------------|-------|---------------|-----------------|----------------|
| ۲     |                 |                | $-\frac{1}{2}$ | 0     | $\frac{1}{2}$ |                 |                |
| ۴     |                 | $\frac{1}{12}$ | $-\frac{2}{3}$ | 0     | $\frac{2}{3}$ | $-\frac{1}{12}$ |                |
| ۶     | $-\frac{1}{60}$ | $\frac{3}{20}$ | $-\frac{3}{4}$ | 0     | $\frac{3}{4}$ | $-\frac{3}{20}$ | $\frac{1}{60}$ |





شکل ۳. خطای نسبی دامنه عملگرهای تفاضل متناهی مرکزی مرتبه ۲، ۴، ۶ و ۸ برای مشتق اول.

به کاررفته در اینجا، صورتی از میرایی مقیاس‌گزین (هم‌چون پالایه عددی یا فرایخش) به عنوان یک مدل زیرشبکه‌ای، برای حذف واریانس اضافی تجمع‌یافته در مقیاس‌های نزدیک به مقیاس شبکه لازم است. اگرچه این مسئله در آزمون گردش جسم صلب در بازه‌های زمانی کوتاه مشکل‌ساز نیست، اما در اجراهای بلندمدت مدل، به کارگیری مقداری میرایی مقیاس‌گزین برای پایداری محاسباتی لازم است. پالایه عددی به دلیل هزینه محاسباتی کمتر و پیاده‌سازی ساده‌تر نسبت به فرایخش می‌تواند گزینه مطلوبی باشد و در این مطالعه به صورت‌های مختلف به کار گرفته شده است.

اگر تابع یک‌بعدی دلخواه  $\psi$  بر روی یک شبکه یکنواخت دوره‌ای تعریف شده باشد، پالایه عددی صریح متقارن  $\mathcal{F}_x$  در جهت  $x$  با مرتبه  $2W$  را بدین صورت تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{F}_x(\psi)|_{x=x_j} \equiv \sum_{k=0}^W b_k \frac{\psi_{j+k} + \psi_{j-k}}{2} \quad (11)$$

ضرایب  $b_k$  این پالایه با اعمال شرط سازگاری، مقدار تابع انتقال  $T$  برای عدد موج  $\pi/\Delta x$  (طول موج  $2\Delta x$ ) و حداکثر مرتبه دقت ممکن پالایه به دست می‌آیند (برای نمونه، برشه، ۲۰۱۸). در صورتی که پالایه کوتاه‌ترین طول موج را

### ۳-۴. پالایه‌های فضایی تفاضل متناهی

پالایه‌ها در مدل‌های عددی به دلایل مختلف و معمولاً برای حذف کوتاه‌ترین امواج تفکیک‌شده به کار می‌روند. در شبکه‌های جابه‌جانشده، رابطه پاشش (dispersion) گسسته معادله فرارفت نایک‌نوا است و موج  $2\Delta x$  به صورت یک مُد محاسباتی با بسامد صفر خود را نشان می‌دهد. بنابراین چشمه‌ای با بسامد پایین، علاوه بر موج‌های بلند می‌تواند موج‌های بسیار کوتاه را نیز تحریک کند. به هر حال، بخش انتهایی طیف که جهت سرعت گروه در آن اساساً اشتباه است، قاعدتاً نمی‌تواند کمکی به بهبود حل کند. مسئله مهم جلوگیری از اثر منفی این بخش از طیف و سازوکارهای حذف آن، از جمله پالایه‌ها، بر حل عددی است.

واریانس کمیت فرارفت داده‌شده در معادله فرارفت، ناوردای (invariant) است. اگرچه انتقال واریانس از مقیاس‌های بزرگ‌تر به کوچک‌تر در آزمون عددی گردش جسم صلب صرفاً ناشی از خطای عددی است، اما در حالت کلی، واریانس دارای انتقال آبشاری به مقیاس‌های کوچک‌تر بوده و بنابراین یک ناوردای ناستوار (non-robust) است (توبرن، ۲۰۱۱). با توجه به بی‌اتلاف بودن روش‌های عددی

$$b_0 = \frac{193}{256}, \quad b_1 = \frac{105}{256}, \quad b_2 = -\frac{15}{64}, \\ b_3 = \frac{45}{512}, \quad b_4 = -\frac{5}{256}, \quad b_5 = \frac{1}{512} \quad (14)$$

مقایسه توابع انتقال پالایه‌های تفاضل منتهای (شکل ۴) می‌تواند میزان میرایی پالایه در اعداد موج مختلف را نشان دهد. می‌توان مشاهده کرد که میزان میرایی پالایه کامل مرتبه ۱۰ در طول موج‌های  $4\Delta x$  تا  $6\Delta x$  نیز کم نیست. برای نشان دادن اثر پارامتر پالایه کسری در میزان میرایی آن، پالایه کسری مرتبه ۱۰ با دو مقدار  $0/4$  و  $0/8$  برای پارامتر پالایه در این شکل آورده شده است.

در این کار، برای تخمین کمینه مقدار پخش عددی مورد نیاز برای پایداری محاسباتی روش عددی مورد نظر، از شبیه‌سازی بلندمدت معادله فرارفت استفاده شده است. به کارگیری حداقل این مقدار میرایی حتی در مسائل کوتاه‌مدت توصیه می‌شود. در آزمون‌های کوتاه‌مدت فرارفت، همگرایی و سری زمانی خطا در دو حالت بدون پالایه و با پالایه کامل (که میرایی بسیار بالاتری از مقدار حداقلی دارد) بررسی شده‌اند. به کارگیری پالایه کامل از آن رو است که اثرگذاری احتمالی پالایه بر دقت روش در شدیدترین حالت آن بررسی شود.

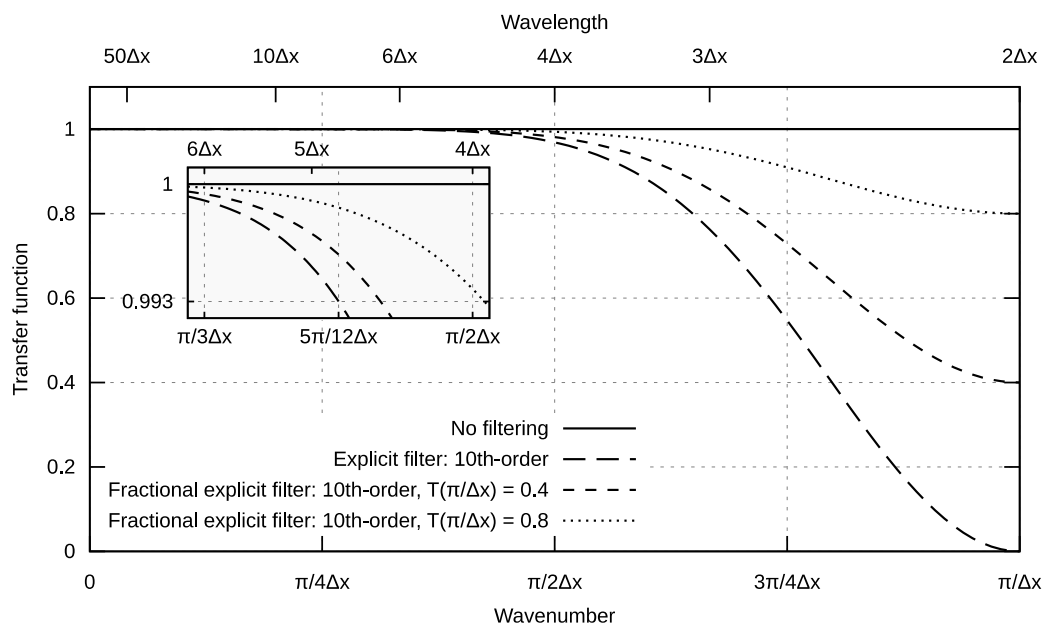
به‌طور کامل حذف کند، یعنی  $T(\pi/\Delta x) = 0$ ، پالایه را کامل و در غیر این صورت آن را کسری می‌نامیم. بنابراین پالایه کسری پالایه‌ای است که تنها بخشی از کوتاه‌ترین موج (طول موج  $2\Delta x$ ) را حذف می‌کند. برای پارامتر تعیین‌کننده در این پالایه‌ها از مقدار تابع انتقال در عدد موج  $\pi/\Delta x$  استفاده شده است. مقدار ضرایب پالایه‌های کسری بر حسب ضرایب پالایه کامل هم‌مرتبه، با استفاده از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$c_k = \begin{cases} b_k + (1 - b_k)\alpha & k = 0 \\ (1 - \alpha)b_k & k \geq 1 \end{cases} \quad (12)$$

که در آن  $c_k$  ضرایب پالایه کسری،  $b_k$  ضرایب پالایه کامل هم‌مرتبه و  $\alpha$  مقدار تابع انتقال برای عدد موج  $\pi/\Delta x$  هستند. اگر در دستگاه مختصات محلی هر وجه مکعب کره،  $\mathcal{F}_\xi$  و  $\mathcal{F}_\eta$  پالایه‌های یک‌بعدی در جهت‌های  $\xi$  و  $\eta$  باشند، پالایه دوبعدی  $\mathcal{F}_{\xi\eta}$  را به این صورت تعریف می‌کنیم (برشه و کروازی، ۲۰۲۲):

$$\mathcal{F}_{\xi\eta} = \mathcal{F}_{\eta\xi} = \frac{1}{2} [\mathcal{F}_\xi \circ \mathcal{F}_\eta + \mathcal{F}_\eta \circ \mathcal{F}_\xi] \quad (13)$$

در این کار از پالایه‌های کامل و کسری مرتبه ۱۰ استفاده شده است. ضرایب پالایه کامل مرتبه ۱۰ برابر است با:



شکل ۴. تابع انتقال پالایه‌های تفاضل منتهای به کاررفته در این پژوهش.

## ۴. آزمون‌های موردی

در این کار از آزمون گردش جسم صلب برای بررسی عملکرد مدل در حل معادله فرارفت یک کمیت نرده‌ای غیرفعال استفاده شده است. این آزمون به دو صورت با شرایط اولیه با رده‌های مشتق‌پذیری مختلف به کار رفته است. رده مشتق‌پذیری شرایط اولیه می‌تواند رفتار روش عددی و مرتبه همگرایی حل را تحت تأثیر قرار دهد. دلیل استفاده از آزمون گردش جسم صلب، وجود جواب تحلیلی برای آن در هر گام زمانی است که می‌تواند با به دست دادن سری زمانی نرُم‌های خطا، بدرفتاری‌های محلی مدل را آشکار سازد. هم‌چنین در این کار، صورتی بلندمدت از این آزمون برای بررسی پایداری محاسباتی روش‌ها ارائه شده است.

## ۴-۱. آزمون گردش جسم صلب

در آزمون گردش جسم صلب، سرعت در نقطه  $\vec{p}$  به این صورت تعریف می‌شود:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{p} \quad (15)$$

که در آن  $\vec{\omega}$  بردار سرعت زاویه‌ای است. اگر نقطه مرکزی توده فرارفت داده شده  $\vec{p}_c = a[1, 0, 0]$  و شعاع کره باشند، سرعت زاویه‌ای

$$\vec{\omega}(\alpha) = \omega[0, -\sin(\alpha), \cos(\alpha)]' \quad (16)$$

این نقطه را بر روی یک دایره عظیمه با زاویه  $\alpha$  نسبت به صفحه  $xy$  در مختصات دکارتی سه بعدی حرکت می‌دهد. اندازه سرعت زاویه‌ای  $\omega = 2\pi/(12 \text{ days})$  فرض می‌شود. در این آزمون از زنگوله‌های کسینوسی با رده‌های مشتق‌پذیری مختلف برای تعریف شرایط اولیه استفاده می‌شود:

$$\psi(\vec{p}) = \begin{cases} \psi_0 \left[ \frac{1+\cos(\pi r/R)}{2} \right]^n & r < R \\ 0 & r \geq R \end{cases} \quad (17)$$

که در آن  $r$  فاصله کروی نقطه  $\vec{p}$  از مرکز زنگوله کسینوسی،  $\vec{p}_c$  است؛  $R = a/3$  شعاع زنگوله کسینوسی و  $\psi_0 = 1000 \text{ m}$  مقدار بیشینه کمیت  $\psi$  است. مقدار  $n$  میزان همواری شرایط اولیه را تعیین می‌کند. ویلیامسون و همکاران (۱۹۹۲) و هریس و همکاران (۲۰۱۱) به ترتیب از

مقادیر  $n = 1$  و  $n = 2$  استفاده کرده‌اند، که توابعی از رده‌های مشتق‌پذیری  $C^1$  و  $C^3$  به دست می‌دهند. میزان همواری شرایط اولیه، مرتبه همگرایی دست‌یافتنی را محدود می‌کند. زنگوله کسینوسی پیشنهادی ویلیامسون و همکاران (۱۹۹۲) با رده مشتق‌پذیری  $C^1$ ، بخشی از آزمون‌های استاندارد است که حل آنها برای مدل‌های فرارفت بر روی کره رایج است. اما با توجه به این که بیشینه مرتبه همگرایی ممکن در این آزمون ۲ خواهد بود، برای آزمون همگرایی روش‌های مرتبه بالا مناسب نیست. در چنین مواردی استفاده از شرایط اولیه هموارتر، مانند زنگوله کسینوسی  $C^3$  (هریس و همکاران، ۲۰۱۱)، با بیشینه مرتبه دست‌یافتنی ۴، مناسب خواهد بود. در این مقاله اگرچه یک روش مرتبه ۶ نیز مورد بررسی قرار می‌گیرد، از به کارگیری شرایط اولیه هموارتر از  $C^3$  پرهیز شده است.

برای بررسی پایداری محاسباتی روش‌های عددی به کاررفته برای حل معادله فرارفت، از پالایه کسری مرتبه ۱۰ و آزمون بلندمدت گردش جسم صلب استفاده می‌کنیم. برای این منظور، آزمون گردش جسم صلب را برای ۱۰۰ دور گردش (۱۲۰۰ روز) در نظر می‌گیریم و مقدار پارامتر پالایه کسری را به گونه‌ای تعیین می‌کنیم که نرُم بی‌نهایت کمیت فرارفت داده شده همواره کوچک‌تر از ۱/۲ برابر مقدار آن در  $t = 0 \text{ s}$  باقی بماند. قاعداً شرایط اولیه نمی‌بایست بر پایداری محاسباتی روش اثرگذار باشد. با این وجود، به دلیل تجربی بودن تعریف آزمون بلندمدت، این آزمون با هر دو شرایط اولیه  $C^1$  و  $C^3$  اجرا شده است تا از عدم تأثیر شرایط اولیه بر نتایج اطمینان حاصل شود.

## ۵. نتایج

نتایج حل معادله فرارفت در دو بخش با انتگرال‌گیری‌های زمانی کوتاه‌مدت و بلندمدت، به ترتیب برای بررسی دقت و پایداری روش‌ها مورد بررسی قرار گرفته است. در بررسی آزمون‌های کوتاه‌مدت تلاش شده است تا عوامل مختلف مؤثر بر مرتبه همگرایی عملی روش‌ها به طور مشخص نشان داده شوند.

## ۵-۱. آزمون گردش جسم صلب

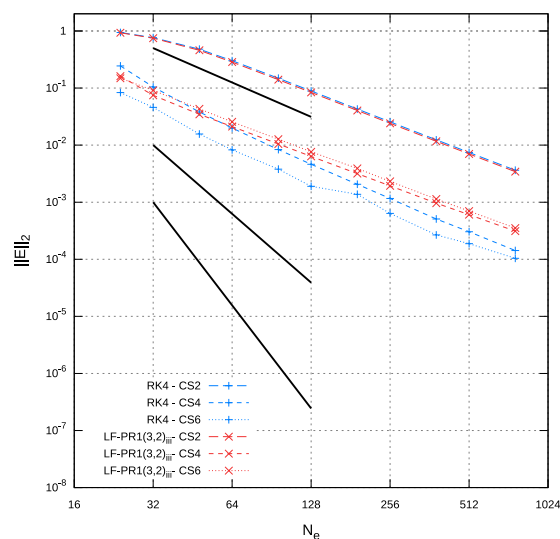
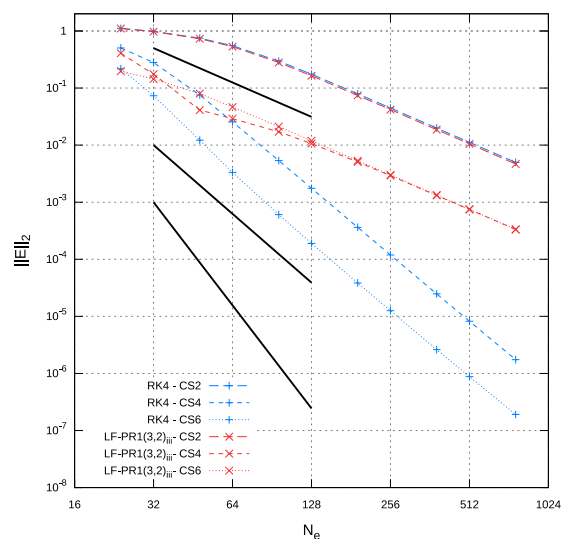
شکل ۵ نُرم ۲ خطا در آزمون گردش جسم صلب زنگوله‌های کسینوسی  $C^3$  (هریس و همکاران، ۲۰۱۱) و  $C^1$  (ویلیامسون و همکاران، ۱۹۹۲) را برای دو روش زمانی رونگه-کوتای کلاسیک مرتبه ۴ و لیپراگ با وایزش چندجمله‌ای PR1(3,2) در ترکیب با روش‌های تفاضل متناهی مرکزی مرتبه‌های ۲، ۴ و ۶ نشان می‌دهد. همان‌گونه که در این شکل نیز قابل مشاهده است، سه عامل در مرتبه همگرایی عملی روش‌ها مؤثر هستند: مرتبه روش گسسته‌سازی مکانی، مرتبه روش انتگرال‌گیری زمانی و رده مشتق‌پذیری شرایط اولیه. ابتدا نتایج آزمون هریس و همکاران (۲۰۱۱) که متعلق به رده مشتق‌پذیری بالاتری است، مورد بررسی قرار می‌گیرد.

تفاوت خطای دو روش RK4-CS2 و LF-PR1(3,2)iii- CS2 ناچیز است. در اینجا، با توجه به غالب بودن خطای بخش مکانی (تفاضل متناهی مرتبه ۲) در هر دو روش، مرتبه اسمی گسسته‌سازی مکانی تعیین‌کننده مرتبه همگرایی عملی است و با توجه به این که مرتبه بخش مکانی بالاتر از مرتبه بخش زمانی نیست، این وضعیت در تفکیک‌های بالاتر نیز صادق خواهد بود. غالب بودن خطای گسسته‌سازی مکانی در یک روش عددی را می‌توان از طریق مقایسه با روش مشابه با گسسته‌سازی مکانی مرتبه بالاتر یا از طریق مقایسه با روش مشابه با گام زمانی کوچک‌تر استنباط کرد. در اینجا از روش اول استفاده شده است.

در روش LF-PR1(3,2)iii- با افزایش مرتبه روش مکانی از ۲ به ۴، خطا در تمامی تفکیک‌ها کاهش می‌یابد. چنین کاهش خطایی نشان از غالب بودن خطای گسسته‌سازی مکانی در روش LF-PR1(3,2)iii-CS2 دارد. مرتبه همگرایی عملی روش LF-PR1(3,2)iii-CS4 در

تفکیک‌های بالاتر از  $1.5^\circ$  ( $N_e = 64$ ) حدود ۲ است که نشان‌دهنده غالب بودن خطای بخش زمانی روش است. عدم کاهش خطا با افزایش مرتبه روش گسسته‌سازی مکانی از ۴ به ۶ نیز موید این امر است. در روش RK4، افزایش مرتبه گسسته‌سازی مکانی از ۲ به ۴ علاوه بر کاهش مقدار خطا به افزایش مرتبه روش نیز منجر می‌شود. در روش RK4-CS4 هنوز خطای غالب مربوط به گسسته‌سازی مکانی است. این امر از مقایسه خطای این روش با خطای روش RK4-CS6 قابل استنباط است. برای بررسی جامع روش‌های مرتبه ۶ و بالاتر به شرایط اولیه هموارتر، مانند تپه گاوسی نیاز است. اگرچه بررسی رفتار روش‌های مرتبه بالا در آزمون‌های با رده مشتق‌پذیری پایین نیز اطلاعات مهمی درباره روش به دست می‌دهد.

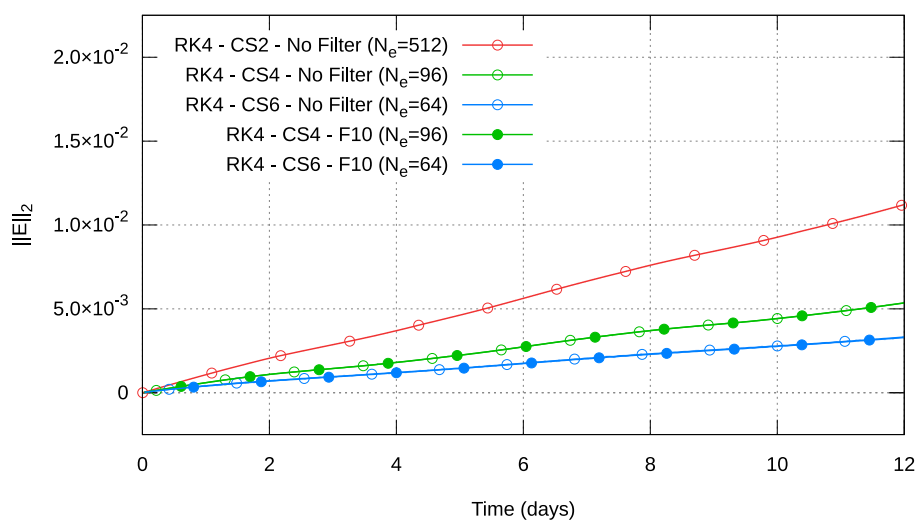
نتایج آزمون گردش جسم صلب زنگوله کسینوسی  $C^1$  (ویلیامسون و همکاران، ۱۹۹۲) اثر هموار نبودن شرایط اولیه بر جواب را آشکار می‌کند. تمامی روش‌هایی که با زنگوله کسینوسی  $C^3$  دارای مرتبه عملی ۲ بودند، در اینجا با کاهش مرتبه به حدود  $1/6$  تا  $1/8$  مواجه می‌شوند. اما روش‌های با مرتبه عملی ۴ در آزمون پیشین، می‌توانند به بیشینه مرتبه دست‌یافتنی در این آزمون (یعنی مرتبه ۲) نائل شوند. روش‌های مرتبه ۳ مانند LF-PR2(3,4)i-CS4 (با ضرایب  $\alpha_0 = -0.4$ ،  $\alpha_1 = 0.5$  و  $\gamma = 1$ ) نیز در این آزمون مرتبه همگرایی عملی ۲ را در نُرم ۲ خطا نشان می‌دهند (در اینجا آورده نشده‌اند). نکته دیگر قابل توجه در نتایج این آزمون نامنظم بودن نمودار روش RK4-CS6 و کاهش مرتبه آن در تفکیک‌های بالاتر از  $N_e = 128$  است. این مسئله مربوط به تجمع واریانس در طول موج‌های کوچک است که به دلیل بدون پالایه بودن این روش در جواب باقی‌مانده و باعث افزایش خطا می‌شود. نمودارهای مشابه مربوط به صورت‌های پالایه این روش (آورده نشده) این بی‌نظمی و کاهش مرتبه را نشان نمی‌دهند.

(ب) زنگوله کسینوسی  $\mathcal{C}^1$ (الف) زنگوله کسینوسی  $\mathcal{C}^3$ 

شکل ۵. همگرایی نرْم ۲ خطا در آزمون گردش جسم صلب (الف) زنگوله کسینوسی  $\mathcal{C}^3$  و (ب) زنگوله کسینوسی  $\mathcal{C}^1$  در  $t = 12$  days برای روش‌های مکانی تفاضل متناهی صریح مرتبه‌های ۲، ۴ و ۶ در کنار روش‌های زمانی RK4 و LF-PR1(3,2)<sub>III</sub> بدون پالایه فضایی. خطوط پررنگ مرتبه‌های ۲، ۴ و ۶ را نشان می‌دهند.

مرتبه پایین‌تر کمتر باشد. تفکیک روش مرتبه ۲ حدود  $0.176^\circ$  ( $N_e = 512$ ) است. نکته مهم در این سری‌های زمانی روند خطی افزایش خطا و عدم وجود جهش در آنها در زمان‌هایی است که زنگوله در حال عبور از مرزهای داخلی مکعب کره است.

شکل ۶ سری زمانی نرْم ۲ خطا در آزمون زنگوله کسینوسی  $\mathcal{C}^3$  را برای روش‌های تفاضل متناهی مرکزی مرتبه ۲، ۴ و ۶ در تفکیک‌های متفاوت نشان می‌دهد. تفکیک‌ها به گونه‌ای انتخاب شده‌اند که خطاها از نظر اندازه بزرگی مشابه بوده و خطای روش مرتبه بالاتر از روش



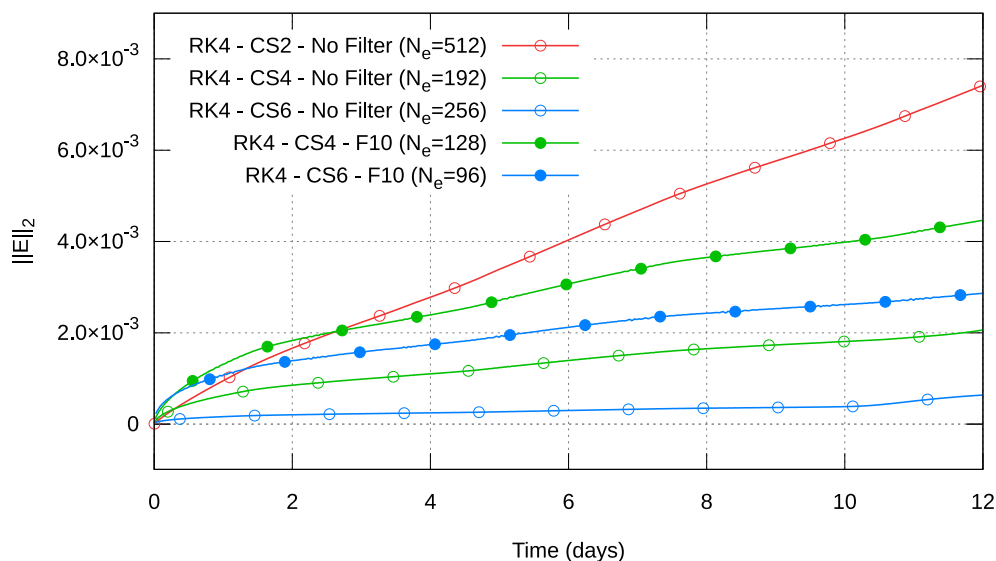
شکل ۶. سری زمانی نرْم ۲ خطا در آزمون گردش جسم صلب زنگوله کسینوسی  $\mathcal{C}^3$  روش زمانی RK4 و روش‌های مکانی تفاضل متناهی صریح مرتبه ۲ با تفکیک  $N_e = 512$ ، مرتبه ۴ با تفکیک  $N_e = 96$  و مرتبه ۶ با تفکیک  $N_e = 64$  هستند.

در شکل ۶ مشاهده می‌شود که روش مرتبه ۴ با تفکیک حدود  $0.938^\circ$  ( $N_e = 96$ ) نتایج بهتری نسبت به روش مرتبه ۲ با تفکیک اسمی بیش از ۵ برابر دارد. در این تفکیک‌ها، هزینه محاسباتی روش مرتبه ۲ حدود ۱۲۰ برابر روش مرتبه ۴ با خطای مشابه است. روش مرتبه ۶ نیز با تفکیک حدود  $1.41^\circ$  ( $N_e = 64$ ) نتایج بهتری نسبت به روش مرتبه ۴ با تفکیک  $1/5$  برابر دارد. هزینه محاسباتی روش مرتبه ۲ حدود ۳۵۰ برابر روش مرتبه ۶ با خطای مشابه است. در این شکل، نتایج روش‌های مرتبه ۴ و ۶ با پالایه مرتبه ۱۰ نیز در تفکیک‌های مشابه با نتایج بدون پالایه آورده شده‌اند. می‌توان مشاهده کرد که در اینجا (برای زنگوله کسینوسی  $C^3$ ) به کارگیری پالایه تفاوت قابل توجهی در نتایج ایجاد نمی‌کند. به طور کلی و همان‌طور که در ادامه نیز نشان داده خواهد شد، این امر زمانی صادق است که شرایط اولیه به اندازه کافی هموار و دوره شبیه‌سازی به حد کافی کوتاه باشند. سری زمانی خطا در آزمون فرارفت زنگوله کسینوسی  $C^1$  می‌تواند معایب به کارگیری روش‌های مرتبه بالا را در مسائلی که رده مشتق‌پذیری بالایی ندارند نشان دهد. همان‌طور که در شکل ۷ می‌توان مشاهده کرد، در این آزمون، روش مرتبه ۴ با  $N_e = 192$  خطای کمتری نسبت به روش مرتبه ۲ با  $N_e = 512$  دارد. در اینجا اما نسبت تفکیک‌ها  $\frac{1}{2}$  نسبت مشابه در آزمون فرارفت زنگوله کسینوسی  $C^3$  است، یعنی میزان افزایش کارایی مدل با افزایش مرتبه از ۲ به ۴ نسبت به آزمون قبلی کمتر است. افزایش مرتبه روش از ۴ به ۶ باعث کاهش کارایی مدل می‌شود. به‌طور مشخص، رشد خطای روش مرتبه ۶ پس از روز دهم شتاب می‌گیرد.

بررسی توزیع فضایی خطای روش RK4-CS6 در  $t = 12 \text{ days}$  (شکل آورده نشده است) نشان می‌دهد که امواج بسیار کوتاه در مسیر حرکت زنگوله کسینوسی باقی مانده‌اند. همین امواج هستند که منجر به رشد شدید خطا در این روش پس از روز دهم شده‌اند. اگرچه در نگاه اول این پدیده در آزمون با شرایط اولیه هموارتر (زنگوله کسینوسی  $C^3$ ) دیده نمی‌شود، در صورت طولانی‌تر شدن زمان شبیه‌سازی، در آن آزمون هم بروز می‌کند. با وجود

این که میدان‌های سرعت و ارتفاع در این آزمون بسیار بزرگ مقیاس هستند، برهم‌کنش آنها در جمله فرافت گسسته‌سازی شده می‌تواند به تولید امواج کوتاه در جواب منجر شود. در صورت بالاتر بودن مرتبه عملگر مشتق نسبت به بالاترین مرتبه دست‌یافتنی بر اساس رده مشتق‌پذیری مسئله، امواج کوتاه در نزدیکی محل کاهش رده مشتق‌پذیری ایجاد می‌شوند. این پدیده با افزایش مرتبه عملگر مشتق یا کاهش رده مشتق‌پذیری مسئله، تشدید می‌شود. برهم‌کنش همین امواج کوتاه با میدان سرعت است که به ظهور زودرس نوفه‌های با طول‌موج بسیار کوتاه در حل مرتبه‌بالای آزمون گردش جسم صلب زنگوله کسینوسی  $C^1$  منجر می‌شود. این پدیده در صورت مهار نشدن، می‌تواند به بروز خطای دگرنامی و ناپایداری حل عددی منجر شود. برای مهار این خطا در اینجا از پالایه عددی استفاده شده است. در شکل ۷ مشاهده می‌شود در صورت به کارگیری پالایه مرتبه ۱۰، می‌توان از روش مرتبه ۴ با تفکیک  $N_e = 128$  یا روش مرتبه ۶ با تفکیک  $N_e = 96$  به جای روش مرتبه ۲ با  $N_e = 512$  استفاده کرد. به کارگیری این روش‌ها هزینه محاسباتی را به ترتیب به حدود  $\frac{1}{50}$  و  $\frac{1}{100}$  هزینه روش مرتبه ۲ کاهش می‌دهد.

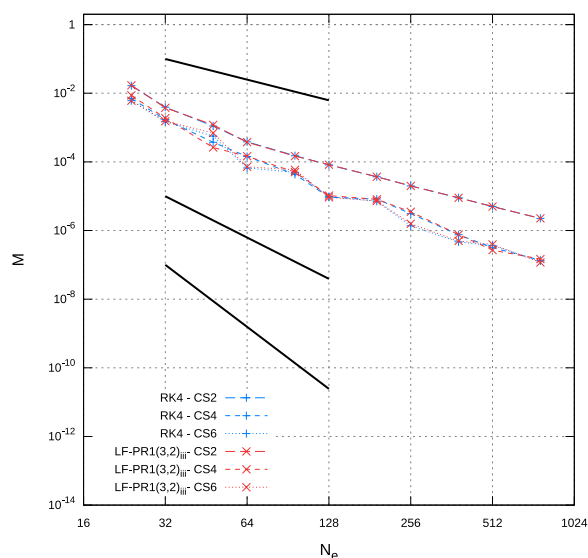
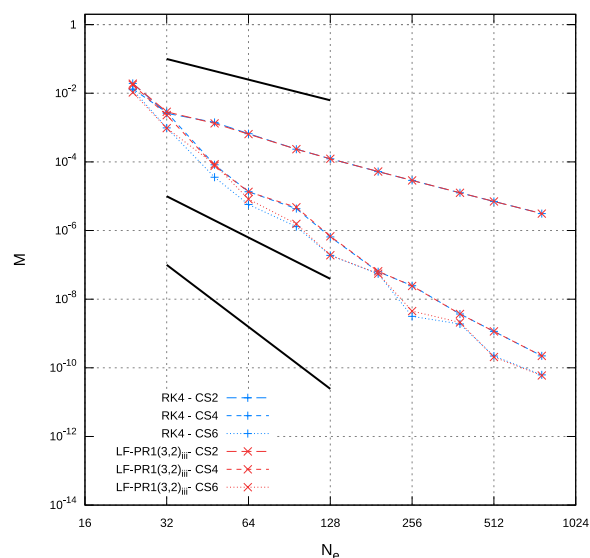
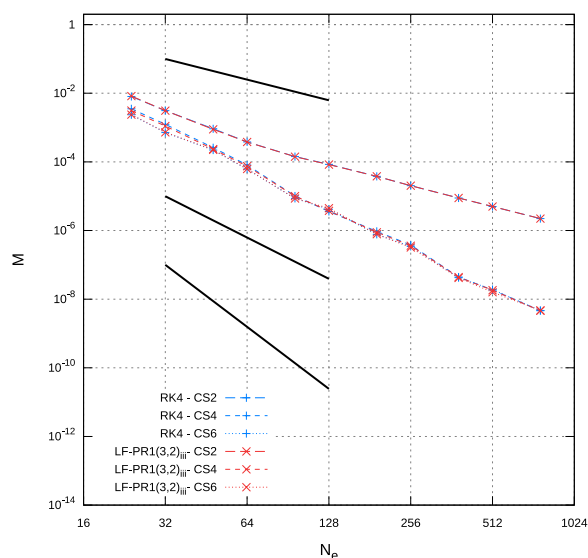
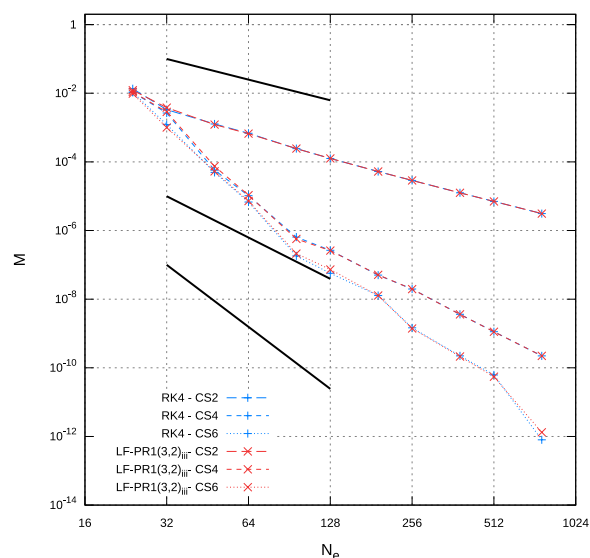
به سادگی می‌توان نشان داد که افزایش مرتبه روش مکانی (از ۲ به ۴، از ۴ به ۶ و...) خطای دامنه موج‌های بلندتر را بیش از موج‌های کوتاه‌تر کاهش می‌دهد. اثرات این مسئله در نتایج آزمون‌های موردی فرارفت نیز قابل مشاهده است. با مقایسه توزیع فضایی خطای روش‌های مکانی مختلف در آزمون فرارفت زنگوله کسینوسی  $C^3$ ، می‌توان مشاهده کرد که با افزایش مرتبه روش مکانی، طول‌موج میانگین خطا کاهش می‌یابد. در شکل مربوط به روش مرتبه ۶ بیشینه خطا دیگر در امواج بلند در نزدیکی مرکز زنگوله نبوده و به صورت امواج کوتاه در حاشیه زنگوله خود را نشان می‌دهد. در آزمون فرارفت زنگوله کسینوسی  $C^1$  گذار از امواج بلند به کوتاه در خطا با افزایش مرتبه روش پررنگ‌تر است. دلیل این امر افزایش شدیدتر دامنه موج‌های کوتاه در خطای روش‌های مرتبه بالا به دلیل پدیده شبه گیس در نزدیکی محل کاهش رده مشتق‌پذیری است.



شکل ۷. سری زمانی نرُم ۲ خطا در آزمون گردش جسم صلب زنگوله کسینوسی  $C^1$  روش زمانی RK4 و روش‌های مکانی تفاضل متناهی صریح مرتبه ۲ با تفکیک  $N_e = 512$ ، مرتبه ۴ با تفکیک  $N_e = 192$  و مرتبه ۶ با تفکیک  $N_e = 256$  هستند. نتایج روش‌های مرتبه ۴ پالاییده با تفکیک  $N_e = 128$  و مرتبه ۶ پالاییده با تفکیک  $N_e = 96$  نیز در این شکل آورده شده‌اند. در این روش‌ها از پالایه تفاضل متناهی مرکزی مرتبه ۱۰ استفاده شده است.

CS2 برابر ۲ بوده و تحت تأثیر رده مشتق‌پذیری میدان  $\psi$  یا به‌کارگیری پالایه قرار ندارد. مرتبه عملی روش‌های مرتبه بالا در آزمون فرارفت زنگوله کسینوسی  $C^1$ ، در حالت بدون پالایه بین ۲ تا ۳ بوده و با به‌کارگیری پالایه به حدود ۴ افزایش می‌یابد. در اینجا، پایین‌بودن رده مشتق‌پذیری مسئله، مرتبه همگرایی میانگین بهنجار شده را به ۲ محدود نکرده است. با این حال رده مشتق‌پذیری بر مرتبه همگرایی میانگین بهنجار شده بی‌تأثیر نیست. با مقایسه دو شکل ۱۲-ج و ۱۲-د می‌توان تأثیر کاهش رده مشتق‌پذیری را بر روش‌های مرتبه بالا مشاهده کرد. در آزمون فرارفت زنگوله کسینوسی  $C^3$ ، روش‌های RK4-CS6 و LF-PR1(3,2)<sub>iii</sub>-CS6 مرتبه‌های بالاتر از ۶ از خود نشان می‌دهند. نکته قابل توجه دیگر این‌که، در شکل ۸ در تمامی حالت‌ها، منحنی‌های مربوط به دو روش زمانی RK4 و LF-PR1(3,2)<sub>iii</sub> تقریباً بر هم منطبق هستند و به نظر می‌رسد خطای ناپایستاری روش‌های زمانی در مقایسه با خطای پایستاری ناشی از گسسته‌سازی مکانی ناچیز باشد.

میانگین بهنجار شده کمیت فرارفت داده شده (ویلیامسون و همکاران، ۱۹۹۲؛ معادله ۸۶) معیاری از پایستاری است (نر و همکاران، ۱۹۹۹). بررسی نمودارهای همگرایی میانگین بهنجار شده (شکل ۸) نکات جالبی را درباره اثر عوامل مختلف بر پایستاری روش‌های به‌کاررفته نشان می‌دهد. باید توجه شود که در آزمون گردش جسم صلب، میانگین بهنجار شده در  $t = 12$  days مرتبه همگرایی بسیار بالاتری نسبت به مرتبه همگرایی نرُم‌های خطا از خود نشان می‌دهد و این حتی برای شرایط اولیه با رده مشتق‌پذیری پایین و روش‌های بدون پالایه فضایی نیز صادق است. این کاهش خطا مصنوعی است و دلیل آن تقارن‌های مسئله و وابستگی خطای پایستاری به محل قرارگیری زنگوله کسینوسی است که در سری زمانی میانگین بهنجار شده نیز قابل مشاهده است (شکل ۱۱). بنابراین، در تهیه شکل ۸ از بیشینه دوازده‌روزه این کمیت استفاده شده است تا تحلیل‌ها به واقعیت نزدیک‌تر باشند. مرتبه همگرایی میانگین بهنجار شده در روش‌های RK4-CS2 و LF-PR1(3,2)<sub>iii</sub>-

(ب)  $C^1$  بدون پالایه فضایی.(الف)  $C^3$  بدون پالایه فضایی.(د)  $C^1$  با پالایه کامل مرتبه ۱۰.(ج)  $C^3$  با پالایه کامل مرتبه ۱۰.

شکل ۸ همگرایی بیشینه دوازده روزه میانگین بهنجار شده ( $M$ ) حل آزمون گردش جسم صلب زنگوله کسینوسی  $C^3$  و زنگوله کسینوسی  $C^1$  برای روش‌های مکانی تفاضل متناهی صریح مرتبه‌های ۲، ۴ و ۶ در کنار روش‌های زمانی RK4 و LF-PR1(3,2)<sub>III</sub> در دو حالت بدون پالایه فضایی (الف و ب) و با پالایه کامل مرتبه ۱۰ (ج و د). خطوط پرنگ مرتبه‌های ۲، ۴ و ۶ را نشان می‌دهند.

در نتایج به دست آمده در آزمون کوتاه مدت گردش جسم صلب، رده مشتق پذیری میدان  $\psi$  جز در یک مورد که در ادامه به آن اشاره خواهد شد، تأثیر قابل توجهی بر مرتبه همگرایی واریانس بهنجار شده نداشت. بنابراین در شکل ۹ تنها نتایج مربوط به زنگوله کسینوسی  $C^1$  نشان داده شده‌اند. واریانس بهنجار شده (شکل ۹) در روش‌های LF-RK4-CS2 و PR1(3,2)<sub>III</sub>-CSx دارای مرتبه ۲ بوده و به کارگیری پالایه فضایی تأثیری بر آن ندارد. در صورت بهنجار شده در روش‌های RK4-CS4 و RK4-CS6 حدود ۵ است. در حالت بدون پالایه این مقدار به حدود ۴/۳ کاهش می‌یابد. البته در فرافت زنگوله کسینوسی  $C^1$  مرتبه

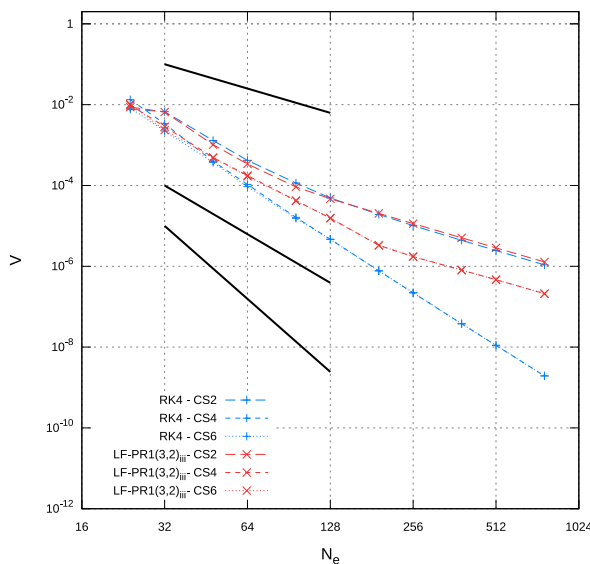
در نتایج به دست آمده در آزمون کوتاه مدت گردش جسم صلب، رده مشتق پذیری میدان  $\psi$  جز در یک مورد که در ادامه به آن اشاره خواهد شد، تأثیر قابل توجهی بر مرتبه همگرایی واریانس بهنجار شده نداشت. بنابراین در شکل ۹ تنها نتایج مربوط به زنگوله کسینوسی  $C^1$  نشان داده شده‌اند. واریانس بهنجار شده (شکل ۹) در روش‌های LF-



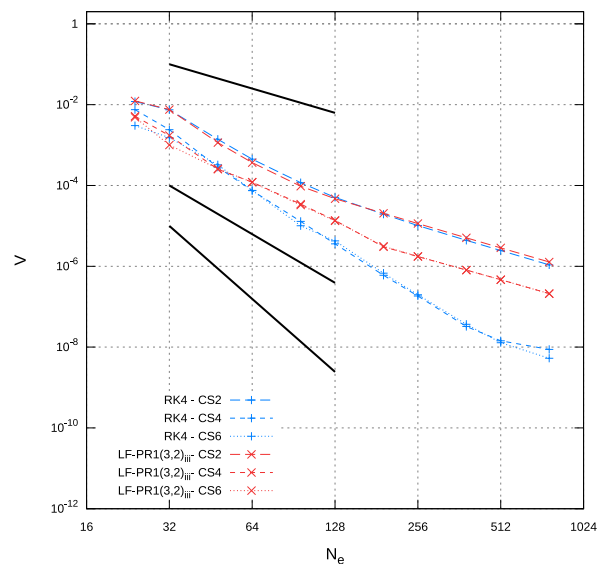
به نمایش نتایج روش‌های بدون پالایه اکتفا شده است. برای زنگوله کسینوسی  $C^3$ ، مرتبه کمینه بهنجار شده در روش‌های RK4-CS4 و RK4-CS6 حدود  $3/1$  و مرتبه سایر روش‌ها حدود  $2/5$  است. این مقادیر برای زنگوله کسینوسی  $C^1$ ، به ترتیب برابر  $1/5$  و حدود  $1/3$  هستند. با توجه به اینکه در این کار از روش‌های حفظ شکل استفاده نشده است و بیشینه میدان  $\psi$  در همسایگی نقاط کاهش رده مشتق‌پذیری قرار ندارد، می‌توان انتظار داشت که همگرایی بیشینه بهنجار شده (ویلیامسون و همکاران، ۱۹۹۲؛ معادله ۸۸) رفتاری تا حدی شبیه به نرم‌های خطا داشته باشد. مرتبه همگرایی بیشینه بهنجار شده در روش‌های LF-PR1(3,2)<sub>iii</sub> و CSx و RK4-CS2 حدود  $2/5$  تا ۳ است و رده مشتق‌پذیری تأثیر چندانی بر آن ندارد (شکل ۱۰). تأثیر رده مشتق‌پذیری اما در روش‌های RK4-CS4 و RK4-CS6 قابل توجه است. در این دو روش بیشینه بهنجار شده برای زنگوله‌های کسینوسی  $C^3$  و  $C^1$  به ترتیب مرتبه‌هایی در حدود ۵ و ۳ دارد.

عملی روش‌های مرتبه بالای بدون پالایه کاهش شدیدی در تفکیک‌های بالا از خود نشان می‌دهد (شکل ۹-الف) و در تفکیک  $N_e = 768$  به حدود ۱ تا ۲ می‌رسد. همان‌طور که پیش‌تر ذکر شد، این مسئله مربوط به انباشت واریانس در طول موج‌های کوچک و بروز خطای دگرنامی است که در صورت ادامه شبیه‌سازی منجر به ناپایداری غیرخطی خواهد شد. البته این مسئله برای همه روش‌های بدون پالایه به کاررفته در این کار صادق است و تنها مقیاس زمانی و شدت آن متفاوت است. پایداری عددی روش‌ها در زیربخش بعد به کمک آزمون بلندمدت بررسی شده است.

کمینه بهنجار شده (ویلیامسون و همکاران، ۱۹۹۲؛ معادله ۸۹) بر خلاف واریانس بیشتر تحت تأثیر رده مشتق‌پذیری مسئله است. دلیل این امر قرار گرفتن محل کاهش رده مشتق‌پذیری در کمینه میدان  $\psi$  (معادله ۱۷) است. به کارگیری پالایه تأثیر قابل توجهی بر مرتبه همگرایی کمینه و بیشینه بهنجار شده ندارد. بنابراین در شکل ۱۰ تنها

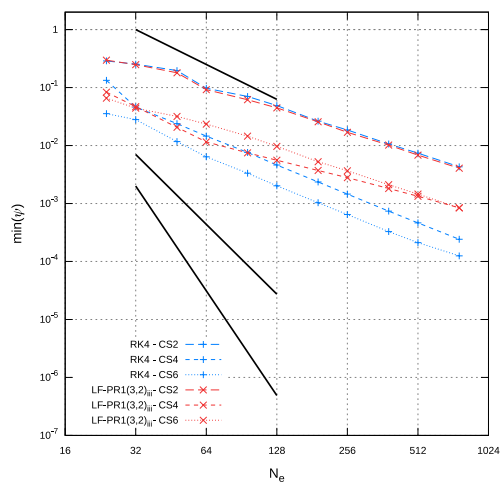
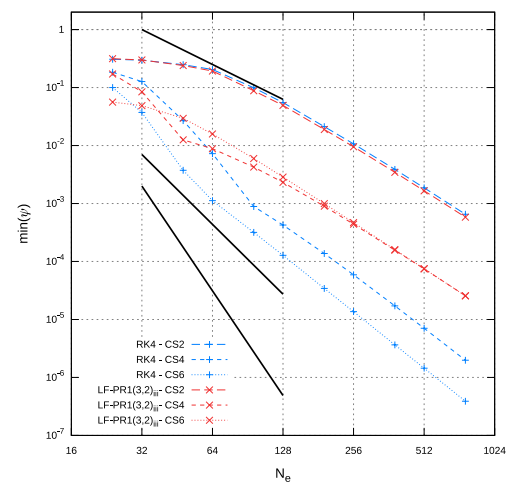
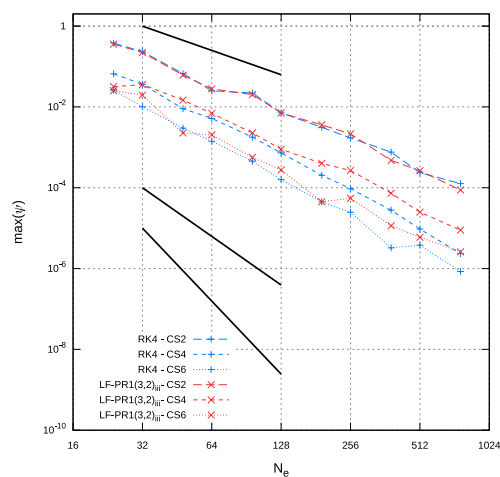
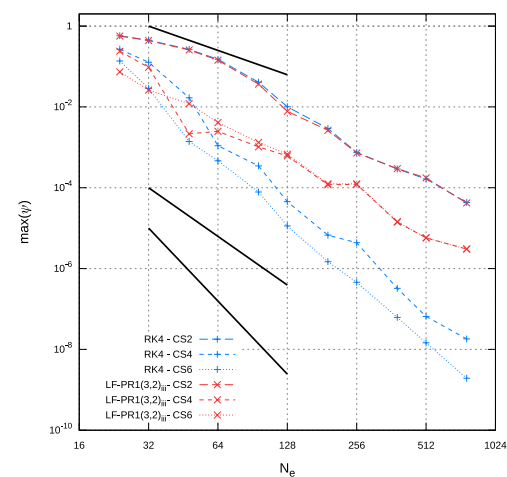


(ب) با پالایه کامل مرتبه ۱۰.



(الف) بدون پالایه فضایی.

شکل ۹. همگرایی بیشینه دوازده‌روزه واریانس بهنجار شده ( $V$ ) حل آزمون گردش جسم صلب زنگوله کسینوسی  $C^1$  برای روش‌های مکانی تفاضل متناهی صریح مرتبه‌های ۲، ۴ و ۶ در کنار روش‌های زمانی RK4 و LF-PR1(3,2)<sub>iii</sub> در دو حالت (الف) بدون پالایه فضایی و (ب) با پالایه کامل مرتبه ۱۰. خطوط پررنگ مرتبه‌های ۲، ۴ و ۶ را نشان می‌دهند.

(ب) کمینه بهنجارشده زنگوله  $C^1$ .(الف) کمینه بهنجارشده زنگوله  $C^3$ .(د) بیشینه بهنجارشده زنگوله  $C^1$ .(ج) بیشینه بهنجارشده زنگوله  $C^3$ .

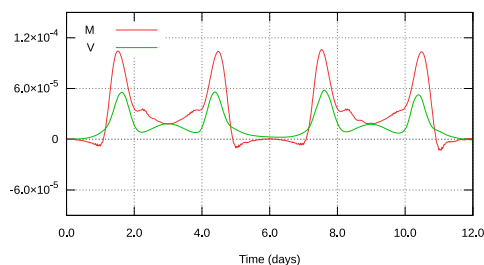
شکل ۱۰. همگرایی (بیشینه دوازده روزه) کمینه بهنجارشده ((الف) و (ب)) و بیشینه بهنجارشده ((ج) و (د)) میدان  $\psi$  در حل آزمون گردش جسم صلب زنگوله‌های کسینوسی  $C^3$  و  $C^1$  برای روش‌های مکانی تفاضل متناهی صریح مرتبه‌های ۲، ۴ و ۶ در کنار روش‌های زمانی RK4 و LF-PR1(3,2)iii بدون پالایه فضایی. خطوط پرنگ مرتبه‌های ۲، ۴ و ۶ را نشان می‌دهند.

حالت با و بدون پالایه نشان می‌دهد. سری‌های زمانی روش RK4-CS2 در این دو حالت تفاوت واضحی با هم ندارند. این نمودارها برخلاف نمودارهای مربوط به روش‌های مرتبه بالا ساختاری هموار دارند و نوسان‌های با بسامد بالا در آنها دیده نمی‌شود. تقارن‌های ساختاری هر دو سری زمانی (میانگین و واریانس) می‌تواند نشانی از خطای ردگذاری شبکه (grid imprinting) باشد. این بدین معنا است که در شبکه مکعب کره پیاده‌سازی شده، محل قرارگیری زنگوله کسینوسی مقادیر میانگین و واریانس بهنجارشده را تحت تأثیر قرار می‌دهد. میانگین‌های بهنجارشده روش‌های

با توجه به آنچه گفته شد می‌توان نتیجه گرفت که به کارگیری عملگرهای تفاضل متناهی مرتبه بالا برای مشتق‌های مکانی حتی اگر به دلیل پایین بودن مرتبه روش زمانی یا رده مشتق‌پذیری مسئله به مرتبه عملی بالا در نرُم‌های خطا منجر نشود، می‌تواند مرتبه همگرایی میانگین و واریانس بهنجارشده را افزایش داده و خواص پایستاری مدل را، به خصوص در تفکیک‌های بالاتر، بهبود بخشد.

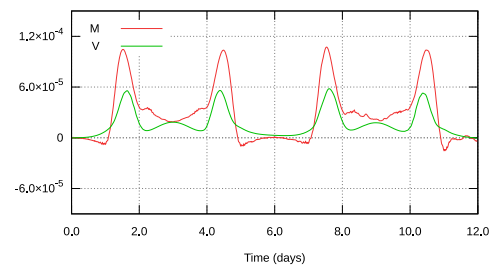
شکل ۱۱ سری‌های زمانی میانگین و واریانس بهنجارشده (ویلیامسون و همکاران، ۱۹۹۲؛ معادله‌های ۸۶ و ۸۷) روش‌های مکانی مختلف با روش زمانی RK4 را در دو

مرتبه‌های مورد انتظار کاهش می‌یابد. در مجموع، مقدار میانگین بهنجار شده در هیچ یک از روش‌های دارای پالایه تغییر نظام‌مندی از خود نشان نمی‌دهد. واریانس بهنجار شده در روش‌های دارای پالایه جز نوسان‌های گذرا با دامنه محدود، روند کاهشی خطی دارد که به دلیل حذف واریانس از مقیاس‌های کوچک توسط پالایه است. در روش‌های بدون پالایه تغییرات واریانس بهنجار شده نامنظم‌تر و بزرگ‌تر است. در شکل ۱۱-ج مشاهده می‌شود که پس از روز دهم، واریانس بهنجار شده دارای روند افزایشی است که می‌تواند مقدمه‌ای بر بروز ناپایداری عددی باشد.

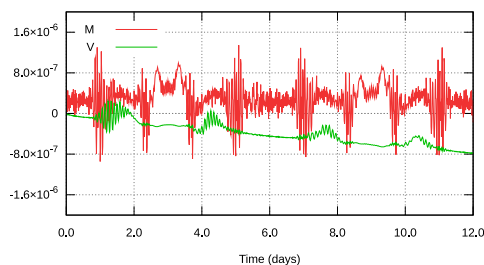


RK4-CS2 – F10 (د)

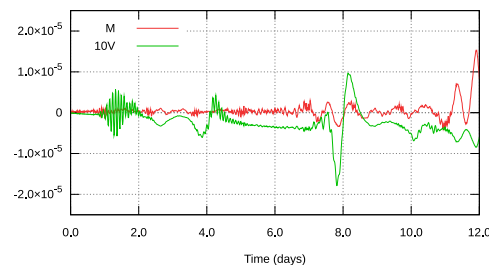
RK4-CS4 و RK4-CS6 در حالت بدون پالایه، نوسان و رشد شدیدی را در نیمه دوم دوره شبیه‌سازی از خود نشان می‌دهند. این تغییرات با کار بست پالایه به طور کامل حذف می‌شوند. در نمودارهای مربوط به صورت با پالایه این روش‌ها (شکل‌های ۱۱-ه و ۱۱-و) پدیده جالبی قابل مشاهده است. میانگین بهنجار شده در محدوده‌های زمانی قرارگیری زنگوله در زوایای گردش حدود  $\frac{\pi}{4}n + \frac{\pi}{8}$  رادیان نسبت به موقعیت اولیه (مرکز یکی از وجوه مکعب کره) دامنه بسیار بزرگ‌تری نسبت به زمان‌های دیگر دارد، که می‌تواند نمونه‌ای از خطای ردگذاری شبکه تلقی شود. البته همان گونه که در شکل ۸ مشاهده شد، دامنه این جهش‌ها با



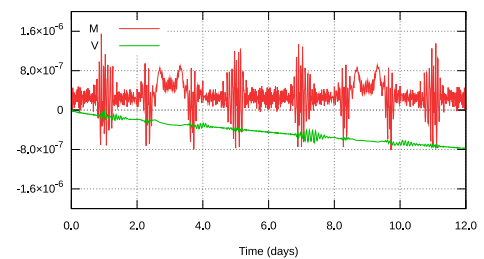
RK4-CS2 – No Filter (الف)



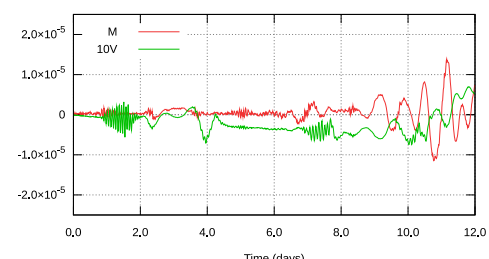
RK4-CS4 – F10 (ه)



RK4-CS4 – No Filter (ب)



RK4-CS6–F10 (و)



RK4-CS6–No Filter (ج)

شکل ۱۱. سری زمانی میانگین ( $M$ ) و واریانس ( $V$ ) بهنجار شده ارتفاع برای نتایج آزمون گردش جسم صلب زنگوله کسینوسی  $C^1$ . روش زمانی RK4 تفکیک  $N_e = 192$ . عملگرهای تفاضل متناهی مرکزی مرتبه ۲، ۴ و ۶ در دو حالت بدون پالایه (به ترتیب الف)، (ب) و (ج) و با پالایه فضایی مرتبه ۱۰ (به ترتیب د)، (ه) و (و). در مواردی که نمودارها از نظر مقدار بزرگی بسیار متفاوت هستند، نمودار کوچک‌تر به صورت بزرگ‌نمایی شده رسم شده و ضریب بزرگ‌نمایی در کلید نمودار آورده شده است.

## ۵-۲. آزمون بلندمدت

در بررسی نتایج آزمون بلندمدت گردش جسم صلب برای معادله فرارفت، نخست پایداری و سپس دقت روش‌ها مورد توجه قرار می‌گیرد. هدف اول آزمون بلندمدت برای معادله فرارفت یافتن کمینه میرایی لازم برای پایداری حل عددی است. بالاترین تفکیک به کاررفته در اینجا حدود  $0.469^\circ$  ( $N_e = 192$ ) است. این انتخاب به دلیل بالا بودن هزینه محاسباتی این آزمون صورت گرفته است.

جدول ۵ مقادیر پارامتر پالایه کسری مرتبه ۱۰ را که برای پایداری حل لازم است، به دست می‌دهد. توجه شود که بزرگ‌تر بودن مقدار پارامتر پالایه، به معنای میرایی کمتر است. به کارگیری مقدار تابع انتقال در کوتاه‌ترین طول موج به عنوان پارامتر پالایه کسری، مقایسه میزان میرایی پالایه‌های مختلف را آسان می‌کند. با این حال، مقایسه میزان میرایی ناشی از کاربست یک پالایه با سایر صورت‌های افزودن میرایی مصنوعی به مدل (مانند فرایپخش)، می‌تواند پیچیده باشد. بحث مفصل در این زمینه را به مقاله‌ای دیگر موکول می‌کنیم. در اینجا از مقیاس زمانی میرایی

کوتاه‌ترین موج دوبعدی، یعنی موج  $(2\Delta x, 2\Delta x)$ ،

$$\tau = -\frac{\Delta t}{2 \ln \left| T\left(\frac{\pi}{\Delta x}\right) \right|} \quad (18)$$

برای مقایسه میزان میرایی روش‌های مختلف استفاده می‌کنیم. مقیاس زمانی میرایی در روش رونگه-کوتا از حدود ۵ گام زمانی در تفکیک‌های پایین ( $N_e = 16$ ) تا ۵۰ گام زمانی در تفکیک‌های میانی ( $N_e = 192$ ) متغیر است. مقیاس زمانی میرایی لازم برای پایداری بلندمدت روش LF-PR1(3,2)<sup>iii</sup> حدود ۴ گام زمانی در تفکیک‌های پایین و ۲۵ گام زمانی در تفکیک‌های میانی است. با توجه به این مسئله و نسبت گام‌های زمانی استفاده‌شده برای دو روش زمانی، می‌توان نتیجه گرفت که پایداری بلندمدت روش LF-PR1(3,2)<sup>iii</sup> به میرایی مصنوعی بسیار بیشتری نسبت به روش RK4 نیاز دارد. همچنین، اگرچه در آزمون‌های کوتاه‌مدت، نشانه‌های بروز ناپایداری محاسباتی تنها در روش‌های مرتبه‌بالا دیده شد، نتایج آزمون بلندمدت (جدول ۵) نشان می‌دهند که به‌طور کلی روش‌های مرتبه‌بالا تر برای پایداری به میرایی کمتری نیاز دارند.

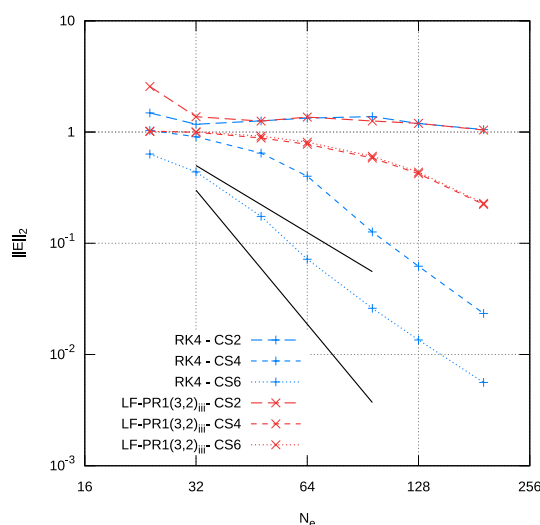
جدول ۵. مقادیر لازم برای پارامتر پالایه کسری صریح مرتبه ۱۰ برای پایداری بلندمدت مدل فرارفت. مقادیر پایین‌تر به معنای پخش بیشتر است. این مقادیر با دو شرط اولیه (زنگوله‌های کسینوسی  $C^1$  و  $C^3$ ) محاسبه شده‌اند. تنها در ۳ مورد (پررنگ) شرایط اولیه در پارامتر تعیین‌شده مؤثر بود.

| $N_e$ | RK4  |      |      | LF-PR1(3,2) <sup>iii</sup> |      |      |
|-------|------|------|------|----------------------------|------|------|
|       | CS2  | CS4  | CS6  | CS2                        | CS4  | CS6  |
| ۲۴    | ۰/۹۳ | ۰/۹۵ | ۰/۹۵ | ۰/۹۰                       | ۰/۹۴ | ۰/۹۴ |
| ۳۲    | ۰/۹۱ | ۰/۹۷ | ۰/۹۶ | ۰/۹۱                       | ۰/۹۳ | ۰/۹۴ |
| ۴۸    | ۰/۹۱ | ۰/۹۷ | ۰/۹۷ | ۰/۹۰                       | ۰/۹۳ | ۰/۹۴ |
| ۶۴    | ۰/۹۴ | ۰/۹۸ | ۰/۹۸ | ۰/۹۲                       | ۰/۹۴ | ۰/۹۵ |
| ۹۶    | ۰/۹۶ | ۰/۹۸ | ۰/۹۸ | ۰/۹۵                       | ۰/۹۶ | ۰/۹۷ |
| ۱۲۸   | ۰/۹۷ | ۰/۹۸ | ۰/۹۸ | ۰/۹۶                       | ۰/۹۷ | ۰/۹۷ |
| ۱۹۲   | ۰/۹۷ | ۰/۹۹ | ۰/۹۹ | ۰/۹۷                       | ۰/۹۸ | ۰/۹۸ |

کمیت فرارفت داده شده (در کاربرد واقعی) است و نه مدت شبیه سازی.

### ۶. بحث

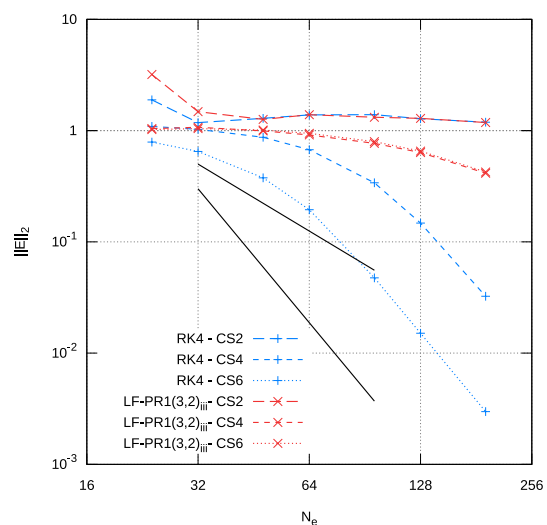
در پیاده سازی شبکه مکعب کره در کار حاضر از درونیابی یک بعدی مبتنی بر فاصله کروی نقاط برای اتصال وجوه به هم استفاده شده است. مرتبه درونیابی در اینجا بالاترین مرتبه ممکن با توجه به مقدار  $N_p$  انتخاب شده است و بنابراین همواره بالاتر از مرتبه عملگرهای تفاضل متناهی صریح به کاررفته برای مشتق است (جدول ۲). بنابراین در نگاه اول انتظار آن نمی رود که خطای درونیابی در رفتار مدل تأثیرگذار باشد. بررسی نتایج نشان از تأثیر سه عامل بر آهنگ همگرایی نرم ۲ خطا دارد: مرتبه اسمی عملگرهای مشتق، مرتبه اسمی روش انتگرال گیری زمانی و رده مشتق پذیری مسئله. یعنی در بررسی نرم ۲ خطا، رفتار مدل مطابق انتظار بوده و نشانی از تأثیر خطای درونیابی نقاط ضمیمه مشاهده نمی شود. در بررسی خطای پایداری، میانگین و واریانس بهنجار شده مرتبه هایی متناسب با مرتبه اسمی عملگرهای تفاضل متناهی مشتق دارند. بنابراین در این دو شاخص نیز نمی توان اثری از خطای درونیابی مشاهده کرد.



(ب) زنگوله کسینوسی  $C^1$ .

شکل ۱۲ نرم ۲ خطا در آزمون گردش جسم صلب زنگوله  $C^1$  را پس از ۱۰۰ دور گردش در  $t = 1200$  days نشان می دهد. می توان مشاهده کرد که خطای روش های RK4-CS2 و LF-PR1(3,2)<sub>III</sub>-CS2 (با مرتبه ۲ و خطای مکانی غالب) در تمامی تفکیک های ارائه شده در اینجا، به حالت اشباع رسیده است. روش های LF-PR1(3,2)<sub>III</sub>-CS4 و LF-PR1(3,2)<sub>III</sub>-CS6 که هر دو روش های مرتبه ۲ (خطای زمانی غالب) هستند، در بازه تفکیک  $(N_e)$  از ۶۴ تا ۱۹۲ کاهش خطا با مرتبه ای فزاینده (از ۰/۳۴ تا ۱/۳۸) را نشان می دهند. اما حل روش های RK4-CS4 و RK4-CS6 که روش های مرتبه ۴ به ترتیب با خطای مکانی و زمانی غالب هستند، در گستره بزرگ تری از تفکیک ها، خطای مناسبی دارند. مرتبه این روش ها در بازه تفکیک  $(N_e)$  ۶۴ تا ۱۹۲ میان ۲ تا ۳ است.

البته در تحلیل نتایج آزمون بلندمدت باید دقت داشت که اگرچه در زمان انتهای شبیه سازی خطای روش های مرتبه ۲ بسیار بالا بود، اما این به معنای مناسب نبودن روش های مرتبه پایین برای مدل های اقلیمی نیست. در واقع مدت زمانی که یک روش لازم است طی آن در آزمون های موردی بدون چشمه و چاهه (همچون آزمون های به کاررفته در اینجا) جوابی قابل قبول به دست دهد، متناسب با طول عمر



(الف) زنگوله کسینوسی  $C^3$ .

شکل ۱۲. همگرایی نرم ۲ خطا در آزمون بلندمدت گردش جسم صلب (الف) زنگوله کسینوسی  $C^3$  و (ب) زنگوله کسینوسی  $C^1$  در  $t = 1200$  days برای روش های مکانی تفاضل متناهی صریح مرتبه های ۲، ۴ و ۶ در کنار روش های زمانی RK4 و LF-PR1(3,2)<sub>III</sub>. پایانه فضایی کسری مرتبه ۱۰ با کمینه میرایی مورد نیاز (جدول ۵). خطوط پررنگ مرتبه های ۲ و ۴ را نشان می دهند.

یا مرتبه پایین روش زمانی، مرتبه همگرایی عملی حل پایین باشد، به کارگیری روش‌های مکانی مرتبه بالا می‌تواند خواص پایستاری آن را بسیار بهبود بخشد.

نتایج آزمون‌های موردی نشان‌دهنده امکان پیاده‌سازی مدل تفاضل متناهی مرتبه بالا برای حل معادله فرارفت بر روی شبکه مکعب کره است. به هر روی، رفتار روش‌های عددی مورد بررسی، اعم از مرتبه پایین یا مرتبه بالا، مطابق انتظار بود. این امر نشان از پیاده‌سازی مناسب این روش‌ها بر روی شبکه مکعب کره دارد.

### تشکر و قدردانی

نویسندگان بدین وسیله از جان توبرن (John Thuburn) به خاطر پیشنهادات مهمش در مراحل مختلف این کار، از جمله ایده به کارگیری پالایه‌های کسری قدردانی می‌کنند.

### مراجع

- Brachet, M. (2018). Schémas compacts hermitiens sur la sphère: applications en climatologie et océanographie numérique. *PhD thesis*, Université de Lorraine.
- Brachet, M., & Croisille, J.-P. (2022). A center compact scheme for the shallow water equations on the sphere. *Computers & Fluids*, 236, 105286.
- Durran, D. R. (2010). Numerical Methods for Fluid Dynamics: With Applications to Geophysics. New York, NY: Springer New York.
- Harris, L. M., Lauritzen, P. H., & Mittal, R. (2011). A flux-form version of the conservative semi-Lagrangian multi-tracer transport scheme (CSLAM) on the cubed sphere grid. *Journal of Computational Physics*, 230(4), 1215–1237.
- Kageyama, A., & T. Sato (2004). "Yin-Yang grid": An overset grid in spherical geometry. *Geochemistry, Geophysics, Geosystems* 5(9). Q09005.
- Kent, J., Ullrich, P. A., & Jablonowski, C. (2014). Dynamical core model intercomparison project: Tracer transport test cases. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 140(681), 1279–1293.
- Levy, M. N., Nair, R. D., & Tufo, H. M. (2009). A high-order element-based Galerkin method for the barotropic vorticity equation. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 59(12), 1369–1387.
- Nair, R., Côté, J., & Staniforth, A. (1999). Cascade interpolation for semi-Lagrangian advection over the sphere. *Quarterly Journal of the Royal*

البته باید توجه داشت که تغییر دستگاه مختصات در مرز وجوه مکعب کره به دو صورت بر حل اثرگذار است: اول از طریق خطای درونیابی در نقاط ضمیمه، که در بالا بحث شد و دوم از طریق تغییر الگوی خطا در مرزها. این تغییر الگو به دلیل وابستگی خطای مدل به دستگاه مختصات محلی است و در مسائل پیچیده‌تر می‌تواند اثر قابل توجهی بر حل داشته باشد.

### ۷. جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

در کار حاضر، حل عددی معادله فرارفت به روش تفاضل متناهی بر روی شبکه مکعب کره مورد بررسی قرار گرفت. در آزمون‌های مختلف، سه عامل اصلی مؤثر بر مرتبه همگرایی عملی حل یعنی (۱) مرتبه همگرایی روش مکانی، (۲) مرتبه همگرایی روش زمانی و (۳) رده مشتق‌پذیری مسئله مورد بررسی قرار گرفتند. در حل معادله فرارفت نشان داده شد که حتی اگر به دلیل رده مشتق‌پذیری پایین شرایط اولیه

- Meteorological Society*, 125(556), 1445–1468.
- Nair, R. D., Thomas, S. J., & Loft, R. D. (2005). A discontinuous Galerkin transport scheme on the cubed sphere. *Monthly Weather Review*, 133(4), 814–828.
- Phillips, N. A. (1957). A map projection system suitable for large-scale numerical weather prediction. *Journal of the Meteorological Society of Japan*, Ser. II 35A, 262–267.
- Purser, R. J. (1998). Non-standard grids. In Seminar on Recent Developments in Numerical Methods for Atmospheric Modelling, 7-11 September 1998, 44–72.
- Purser, R. J., & Rančić, M. (1997, March). Conformal octagon: An attractive framework for global models offering quasi-uniform regional enhancement of resolution. *Meteorology and Atmospheric Physics*, 62(1), 33–48.
- Purser, R. J., & Rančić, M. (1998). Smooth quasi-homogeneous gridding of the sphere. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 124(546), 637–647.
- Rančić, M., Purser, R. J., & Mesinger, F. (1996). A global shallow-water model using an expanded spherical cube: Gnomonic versus conformal coordinates. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 122(532), 959–982.
- Ronchi, C., Iacono, R., & Paolucci, P. (1996). The "cubed sphere": A new method for the solution of partial differential equations in spherical geometry. *Journal of Computational Physics*, 124(1), 93–114.
- Rood, R. B. (2011). A perspective on the role of the

- dynamical core in the development of weather and climate models. In P. Lauritzen, C. Jablonowski, M. Taylor, and R. Nair (Eds.), *Numerical Techniques for Global Atmospheric Models*, 513–537. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.
- Sadourny, R. (1972). Conservative finite-difference approximations of the primitive equations on quasi-uniform spherical grids. *Monthly Weather Review*, 100(2), 136–144.
- Sadourny, R., Arakawa, A., & Mintz, Y. (1968). Integration of the nondivergent barotropic vorticity equation with an icosahedral-hexagonal grid for the sphere. *Monthly Weather Review*, 96(6), 351–356.
- Staniforth, A., & Thuburn, J. (2012). Horizontal grids for global weather and climate prediction models: a review. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 138(662), 1–26.
- Taylor, M., Tribbia, J., & Iskandarani, M. (1997). The spectral element method for the shallow water equations on the sphere. *Journal of Computational Physics*, 130(1), 92–108.
- Thomas, S. J., & Loft, R. D. (2000). Parallel semi-implicit spectral element methods for atmospheric general circulation models. *Journal of Scientific Computing*, 15(4), 499–518.
- Thomas, S. J., & Loft, R. D. (2002). Semi-implicit spectral element atmospheric model. *Journal of Scientific Computing*, 17(1), 339–350.
- Thuburn, J. (2011). Conservation in dynamical cores: What, how and why? In P. Lauritzen, C. Jablonowski, M. Taylor, and R. Nair (Eds.), *Numerical Techniques for Global Atmospheric Models*, 345–355. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.
- Thuburn, J., Cotter, C. J., & Dubos, T. (2014). A mimetic, semi-implicit, forward-in-time, finite volume shallow water model: comparison of hexagonal–icosahedral and cubed-sphere grids. *Geoscientific Model Development*, 7(3), 909–929.
- Williamson, D. L. (1968). Integration of the barotropic vorticity equation on a spherical geodesic grid. *Tellus*, 20(4), 642–653.
- Williamson, D. L. (1970). Integration of the primitive barotropic model over a spherical geodesic grid. *Monthly Weather Review*, 98(7), 512–520.
- Williamson, D. L., Drake, J. B., Hack, J. J., Jakob, R., & Swarztrauber, P. N. (1992). A standard test set for numerical approximations to the shallow water equations in spherical geometry. *Journal of Computational Physics*, 102(1), 211–224.
- Yazgi, D., Mohebalhojeh, A. R., & Ghader, S. (2017). Using polynomial regression in designing the time filters for the leapfrog time-stepping scheme. *Monthly Weather Review*, 145(5), 1779–1795.
- Zdunkowski, W., & Bott, A. (2005). *Dynamics of the Atmosphere: A Course in Theoretical Meteorology*. Cambridge University Press.