

روش‌های تفاضل متناهی مرتبه بالا بر روی شبکه مکعب کره: کاربرست به فرارفت کمیت نرده‌ای غیرفعال

الیاد باقرزادگان^۱، علیرضا محب‌الحجه^{۲*}، سرمد قادر^۳

bagherzadegan.eliad@gmail.com دانشجوی دکتری هواشناسی، مؤسسه ژئوفیزیک دانشگاه تهران،

amoheb@ut.ac.ir^۲ استاد، گروه فیزیک فضا، مؤسسه ژئوفیزیک دانشگاه تهران،

sghader@ut.ac.ir^۳ استاد، گروه فیزیک فضا، مؤسسه ژئوفیزیک دانشگاه تهران،

چکیده

در کار حاضر، پیاده‌سازی شبکه مکعب کره مرکزی و حل تفاضل متناهی مرتبه بالای معادله فرارفت بر روی آن ارائه شده‌اند. اگرچه این پیاده‌سازی به گونه‌ای است که به کارگیری عملگرهای تفاضل متناهی از نوع و مرتبه‌های مختلف را ممکن می‌کند، در این کار، صرفاً به مقایسه روش‌های تفاضل متناهی صریح مرکزی مرتبه ۲، ۴ و ۶ بسنده شده است. انتگرال‌گیری زمانی به دو روش رونگه-کوتای کلاسیک مرتبه ۴ و لیپفراگ با پالایه زمانی وایزش چندجمله‌ای درجه یک با مرتبه دقت ۲ انجام شده است. این روش‌ها در معادله فرارفت با استفاده از آزمون گردش جسم صلب زنگوله‌های کسینوسی بارده‌های مشتق‌پذیری C^1 و C^3 مورد مقایسه قرار گرفته‌اند. روش‌های مکانی، زمانی و آزمون‌های موردی به گونه‌ای انتخاب شده‌اند که امکان بررسی عملکرد اجزای مختلف روش عددی و عوامل مؤثر بر دقت آنها تسهیل شود. نتایج آزمون‌ها نشان می‌دهد که اگرچه رده مشتق‌پذیری پایین یا مرتبه پایین روش انتگرال‌گیری زمانی می‌تواند مرتبه دقت دست‌یافتنی را محدود کنند، باین حال به کارگیری عملگرهای تفاضل متناهی مرتبه بالا می‌تواند خواص پایداری مدل را به‌طور قابل توجهی بهبود دهد. تمامی روش‌های به کاررفته در اینجا برای پایداری نیاز به مقداری میرایی مصنوعی مقیاس‌گزین دارند که در این کار به وسیله پالایه‌های فضایی تأمین می‌شود. نتایج آزمون بلندمدت نشان می‌دهد که روش‌های مرتبه بالاتر و تفکیک‌های بالاتر به میرایی مصنوعی کم‌تری برای پایداری محاسباتی نیاز دارند.

واژه‌های کلیدی: مکعب کره مرکزی، معادله فرارفت، روش تفاضل متناهی، پالایه، پالایه کسری

High-order finite difference methods on the cubed sphere: Application to passive scalar advection

Summary

The present work is part of our ongoing effort to make use of the cubed sphere for global atmospheric modeling applications. To this end, high-order numerical solutions of advection equation on the gnomonic cubed sphere grid are presented. Arbitrary-order one-dimensional interpolation based on spherical distance of the grid points have been used at the halo regions to bind the faces of the cubed sphere together. Although, the implementation of the model in this work is such that it makes using finite difference operators of various types and orders straightforward, we only discuss the results of 2nd-, 4th-, and 6th-order centered explicit operators. For time integration, the classical 4th-order Runge-Kutta method and the leapfrog method with a first-degree polynomial regression time filter with 2nd-order accuracy have been used. These methods have been compared by solving the advection equation using solid body rotations of C^1 and C^3 cosine bells. The long-range variant of this test is used to analyze the stability of the schemes. The methods and test cases have been chosen in such a way that facilitates the assessment of different components of the numerical scheme and factors affecting their accuracy. Results of the advection test cases, demonstrate that although low differentiability class of the advected field or low order of accuracy of the time integration scheme, could limit the actual order of accuracy of the solution, conservation properties of the model could, nevertheless, be improved significantly by the use of high-order finite difference operators. All of the methods used in this work need some scale-selective artificial dissipation for stability which has been supplied in the form of high-order explicit filters. Single-parameter fractional filters (i.e. filters that remove only a fraction of the shortest waves) are used in the long-range integrations to determine the required amount of artificial dissipation for each method. Results demonstrate that lower-order methods and lower resolutions require more artificial dissipation for stability. Since there is no systematic cascade of variance to smaller scales in the solid body rotation test-case, application of filter does not reduce the order of accuracy of the normalized variance. Also, the minimum required dissipation which has been calculated here might not be sufficient in cases where there is such a cascade. Time traces of 2-norm of error display a linear increase with time with no jumps or transient increases. Although such transient increases are present in time traces of normalized mean and variance, which might signify grid imprinting, this does not pose a problem since these non-conservation errors converge with or faster than the expected order. Overall, the results demonstrate the superiority of the high-order methods in terms of accuracy and performance. In long-range integrations, high-order methods exhibit convergence of errors at low resolutions even after 100 revolutions of the cosine bells.

Keywords: gnomonic cubed sphere, advection equation, finite difference method, filter, fractional filter

روش‌های عددی‌ای که بر روی رایانه‌های با حافظه مشترک (shared) بهینه و اقتصادی هستند، ممکن است برای رایانه‌های با حافظه توزیع شده (distributed) مناسب نباشند. روش‌های طیفی مبتنی بر هماهنگ‌های کروی و روش‌های شبکه‌مبنای مبتنی بر شبکه طول و عرض جغرافیایی (کاهش نیافته) از این دسته‌اند. توسعه شبکه‌های جایگزین بر روی کره از اواخر دهه ۱۹۶۰ و به منظور ارائه راه حلی برای مشکل قطب آغاز شد (برای نمونه، فیلیپس، ۱۹۵۷؛ ویلیامسون، ۱۹۶۸، ۱۹۷۰؛ سادورنی و همکاران، ۱۹۶۸؛ سادورنی، ۱۹۷۲). شبکه‌هایی همچون مکعب کره (cubed sphere) نیز برای اولین بار در همان سال‌ها به کار رفتند (سادورنی، ۱۹۷۲). این شبکه‌ها با توسعه روش‌های تبدیل طیفی و نیمه‌ضمنی نیمه‌لاگراژی عملاً کنار گذاشته شدند، تا دوباره در اواخر دهه ۱۹۹۰ و با مشخص شدن چشم‌انداز تغییرات معماری ابررایانه‌ها، کار بر روی آنها از سر گرفته شود (برای نمونه، رونچی و همکاران، ۱۹۹۶؛ رنچیچ و همکاران، ۱۹۹۶؛ تیلور و همکاران، ۱۹۹۷).

شبکه مکعب کره که از تقسیم سطح کره به شش وجه هم‌نهشت چهاربر و تعریف دستگاه‌های مختصات محلی در هر یک از آنها به دست می‌آید، برای اولین بار توسط سادورنی (۱۹۷۲) ارائه و برای حل معادلات آب کم عمق به کار رفت. به دلیل تغییر دستگاه مختصات در مرزهای وجوه مکعب کره، نقاط نزدیک این مرزها نیازمند توجهی ویژه هستند. روش سادورنی (۱۹۷۲) در این مرزها، استفاده از عملگرهای یک‌سویه برای مشتق بود. این روش به دلیل دقت پایین در مرزهای داخلی و مشکل نوفه‌های شبکه‌مقیاس مورد استقبال قرار نگرفت. رونچی و همکاران (۱۹۹۶) از اضافه کردن نقاط ضمیمه و هم‌پوشانی برای حل مسئله مرزهای داخلی مکعب کره استفاده کردند. هم‌پوشانی به نواحی‌ای اطلاق می‌شود که در آنجا محاسبات اصلی مربوط به حل معادله در بیش از یک وجه انجام شود. وجود نواحی هم‌پوشانی از این نظر که امکان بالقوه جداشدگی در حل را ایجاد می‌کند (استنیفورث و توربن، ۲۰۱۲)، رویکرد جذابی نیست و در چنین شبکه‌هایی برای پیوند زدن نواحی هم‌پوشانی در وجوه مختلف می‌بایست تمهیدی اندیشیده شود. نواحی ضمیمه، اما نواحی‌ای هستند که در درون وجوه همسایه قرار می‌گیرند و مقادیرشان از طریق درون‌یابی و نه از حل مستقیم معادلات به دست می‌آید. همچنین در یک مدل جوی نیاز به اجرای پارامترسازی‌های فیزیکی در نقاط ضمیمه وجود ندارد، در حالی که در نقاط هم‌پوشانی اجرای آنها لازم است. ماهیت تک‌ستونی و تجربی پارامترسازی‌های فیزیکی می‌تواند مسئله جداشدگی را در شبکه‌های دارای هم‌پوشانی تشدید کند (استنیفورث و توربن، ۲۰۱۲). به کارگیری نقاط ضمیمه در حل مشکل تغییر دستگاه مختصات در مرزهای داخلی بسیار مؤثر بود و مبنای بسیاری از پژوهش‌ها از جمله کار حاضر قرار گرفته است. از روش‌های دیگر حل مسئله مرزهای داخلی مکعب کره می‌توان به اصلاح عددی شبکه برای گذار تدریجی میان دستگاه‌های مختصات در این مرزها (برای نمونه، رنچیچ و همکاران، ۱۹۹۶؛ پرسر و رنچیچ، ۱۹۹۷، ۱۹۹۸؛ پرسر، ۱۹۹۸) و به کارگیری روش‌های عنصر متناهی (برای نمونه، تامس و لاف، ۲۰۰۰، ۲۰۰۲؛ نر و همکاران، ۲۰۰۵؛ لوی و همکاران، ۲۰۰۹) اشاره کرد.

شبکه مکعب کره مرکزی (Gnomonic) شبکه‌ای اساساً نامتعامل است (برای نمونه، سادورنی، ۱۹۷۲؛ رونچی و همکاران، ۱۹۹۶). اگرچه تعادل علاوه بر کاهش محاسبات در یک گام زمانی، می‌تواند به دستیابی به خواص عددی مطلوب در مدل نیز کمک کند، به نظر می‌رسد در بسیاری از موارد، بیش از آنچه از طریق تعادل به دست می‌آید، به طرق دیگر از دست می‌رود. شبکه‌های متعادل بر روی کره یا دچار همگرایی خطوط شبکه هستند یا دارای هم‌پوشانی. شبکه‌های طول و عرض جغرافیایی و مکعب کره همدیس (رنچیچ و همکاران، ۱۹۹۶) از دسته اول و شبکه‌های فیلیپس (فیلیپس، ۱۹۵۷) و بین-ینگ (کاگیاما و ساتو، ۲۰۰۴) از دسته دوم هستند. همگرایی خطوط شبکه باعث کاهش کمینه فاصله شبکه‌ای و متعاقب آن کوچک‌تر شدن گام زمانی لازم برای پایداری در روش‌های زمانی صریح می‌شود. نتیجه این مسئله افزایش غیر قابل قبول هزینه محاسباتی، چه به دلیل به کارگیری روش صریح با گام زمانی کوچک و چه به دلیل استفاده از روش‌های ضمنی است. هم‌پوشانی تکه‌های شبکه نیز همان‌گونه که پیش‌تر گفته شد، می‌تواند منجر به جداشدگی در حل شود.

در کار حاضر، پیاده‌سازی شبکه مکعب کره مرکزی هم‌زاویه (Equiangular) با استفاده از دستگاه‌های مختصات تعمیم‌یافته و حل عددی معادله فرارفت به روش تفاضل متناهی بر روی آن مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین، سعی شده است امکان پیاده‌سازی روش‌های تفاضل متناهی

مرتبه بالا بر روی مکعب کره نشان داده شده و با استفاده از مقایسه نتایج در آزمون‌های موردی مختلف، توجیه‌پذیری به کارگیری آنها به جای روش‌های مرتبه پایین بررسی گردد.

معادلات حاکم در بخش ۲ تشریح شده‌اند. جزئیات روش کار، اعم از پیاده‌سازی شبکه مکعب کره، انتگرال‌گیری زمانی و عملگرهای تفاضل متناهی مشتق و پالایه در بخش ۳ آورده شده‌اند. بخش ۴ به تبیین آزمون‌های موردی به کاررفته اختصاص دارد. در بخش ۵، نتایج آزمون‌های موردی ارائه شده و مورد بررسی قرار گرفته‌اند. در بخش ۶ بحثی کلی درباره نتایج ارائه شده و در نهایت جمع‌بندی مطالب و نتیجه‌گیری در بخش ۷ صورت گرفته است.

۲ معادلات حاکم

شکل دوبعدی معادله فرارفت، که به صورت زیر بیان می‌شود،

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \psi = 0 \quad (1)$$

فرایند انتقال در یک شاره پیوسته را شبیه‌سازی می‌کند. حل عددی این معادله، گام اول در پیاده‌سازی یک هسته دینامیکی است. فرارفت اهمیت بالایی در جنبه‌های مختلف دینامیک و شیمی جو دارد. قسمت عمده انتقال جرم و انرژی در جو از طریق فرارفت انجام می‌شود. همچنین بخش بزرگی از شارش جوی متوازن است و فرارفت تاوایی پتانسیلی نقش تعیین‌کننده‌ای در آن دارد. حتی در مدل‌هایی که در آنها فرارفت تاوایی پتانسیلی یا تاوایی به صورت مستقیم مدل‌سازی نمی‌شود، معمولاً سعی بر این است که تحول تاوایی پتانسیلی دقیق شبیه‌سازی شود (برای نمونه، توپرن و همکاران، ۲۰۱۴). در هر صورت، فرارفت افقی یکی از فرایندهای اصلی‌ای است که هسته دینامیکی شبیه‌سازی آن را بر عهده دارد (رود، ۲۰۱۱) و خطای آن می‌تواند بخش‌های دیگر مدل (همچون فرایندهای شیمیایی، برخی از پارامترسازی‌های فیزیکی) را نیز مستقیماً تحت تأثیر قرار دهد (کنت و همکاران، ۲۰۱۴).

۳ روش انجام کار

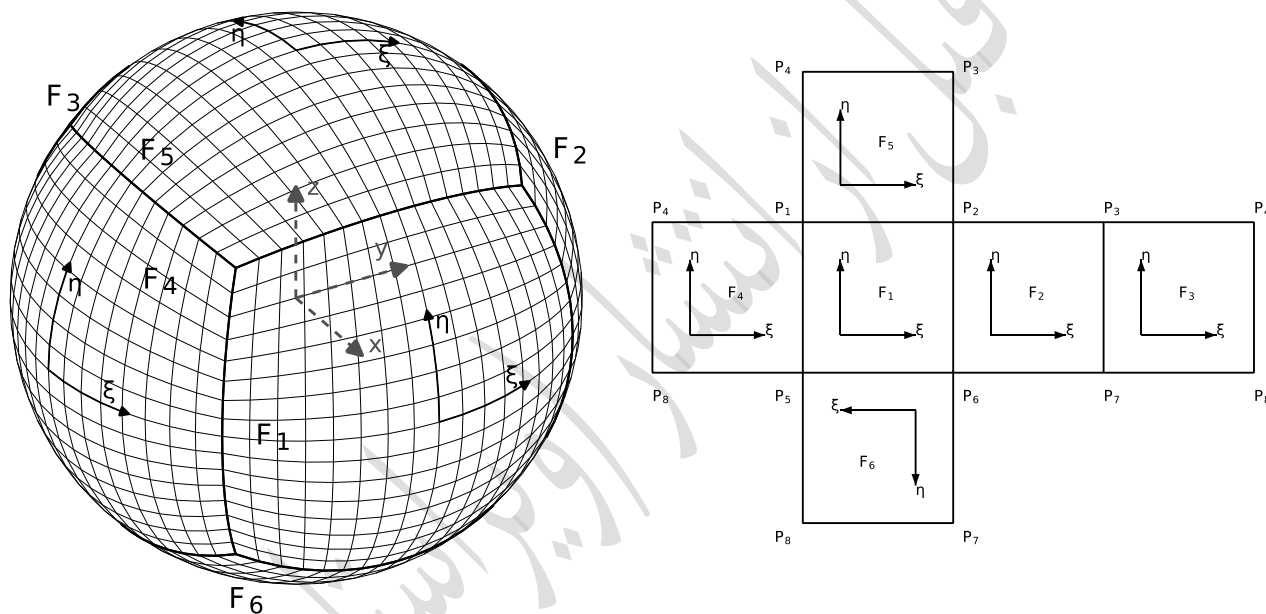
در این بخش پیاده‌سازی شبکه مکعب کره، روش‌های انتگرال‌گیری زمانی، عملگرهای تفاضل متناهی مشتق و پالایه‌های فضایی به کاررفته تشریح شده‌اند.

۳-۱ پیاده‌سازی شبکه مکعب کره

با تصویر کردن یک مکعب محاط در کره، بر روی آن در امتداد شعاع‌های کره می‌توان سطح کره را به شش قسمت (وجه) هم‌نهشت متناظر با وجوه مکعب تقسیم کرد. صورت‌های مختلف شبکه مکعب کره با تعریف دستگاه‌های مختصات محلی بر روی این وجوه و شبکه‌بندی بر اساس آنها به دست می‌آیند (برای نمونه، شکل ۱). در شبکه مکعب کره مرکزی که در ادامه شرح داده خواهد شد، خطوط شبکه قطاع‌های دایره‌های عظیمه هستند.

همان‌گونه که پیش‌تر گفته شد، به هر یک از وجوه مکعب کره چند ردیف نقاط شبکه‌ای اضافه شده است. این نقاط که نقاط ضمیمه خوانده می‌شوند، در وجوه همسایه قرار می‌گیرند و مقادیر میدان‌های مختلف نرده‌ای و برداری در آنها از طریق درون‌یابی از نقاط شبکه‌ای اصلی وجوه همسایه به دست می‌آید. خطوط شبکه‌ای در مکعب کره مرکزی قطاع‌های دایره‌های عظیمه‌اند. یک خانواده از دایره‌های عظیمه را با یک قطر از کره که میان‌شان مشترک است، تعریف می‌کنیم. خطوط شبکه هر وجه به دو خانواده دایره عظیمه تعلق داشته و دو وجه همسایه در یکی از این خانواده‌ها که شامل مرز میان‌شان است، مشترک هستند. بنابراین و با توجه به استفاده از تفکیک یکنواخت در این پیاده‌سازی، در نقاط ضمیمه به درون‌یابی دوبعدی نیازی نیست و درون‌یابی یک‌بعدی در امتداد خطوط شبکه‌ای مشترک انجام می‌شود (رونچی و همکاران، ۱۹۹۶). در این کار،

درون‌یابی در نقاط ضمیمه بر مبنای فاصله کروی نقاط و با مرتبه‌ای بالاتر از مرتبه عملگرهای تفاضل متناهی مشتق به کاررفته در حل، انجام می‌شود. با توجه به اینکه مقادیر یک میدان در یک ردیف از نقاط ضمیمه تنها به مقادیر آن در یک خط شبکه از وجه همسایه وابسته است، درون‌یابی‌ها در یک خط شبکه به صورت هم‌زمان انجام می‌شود. ضرایب درون‌یابی در آغاز هر اجرا با حل دستگاه‌های معادلات مربوطه محاسبه شده و برای استفاده در طول اجرا ذخیره می‌شوند. به دلیل هم‌نهیشت بودن وجوه مکعب کره با یکدیگر و همچنین تقارن‌های درونی هر وجه، ذخیره این ضرایب در یک نیم‌بر از یکی از وجوه مکعب کره کافی است. البته در این کار برای سادگی، ضرایب برای یک بر کامل ذخیره می‌شوند. نقاط شبکه‌ای واقع در گوشه‌های وجوه مکعب کره میان سه وجه و سایر نقاط واقع بر مرزها میان دو وجه مشترک هستند. این نقاط تنها نقاط هم‌پوشانی میان وجوه مکعب کره هستند و برای پرهیز از جداولی در حل، مقادیر میدان‌های مختلف در آنها در هر گام زمانی با میانگین دو یا سه مقدار مربوطه جایگزین می‌شود.



شکل ۱. نام‌گذاری وجوه مکعب کره و جهت محورها در دستگاه‌های مختصات محلی.

رویکرد کلی در پیاده‌سازی شبکه مکعب کره در اینجا، استفاده از دستگاه مختصات دکارتی برای بردارها و به کارگیری روابط مربوط به دستگاه‌های مختصات تعمیم‌یافته (برای نمونه، زدونکووسکی و بُت، ۲۰۰۵) در تعریف عملگرها است. بنابراین، بردارها در دستگاه مختصات محلی هر وجه ذخیره نمی‌شوند. شکل ۲ نمای طرحواره‌ای دستگاه‌های مختصات محلی تعریف شده بر روی وجوه مکعب کره را نشان می‌دهد. اگر $[x_1, x_2, x_3]$ بر حسب دستگاه مختصات دکارتی داده شده باشند (مثلاً $[y, -x, z]$ برای F_2)، مختصات محلی افقی ξ و η بر روی وجه مورد نظر به این صورت تعریف می‌شوند:

$$\xi = \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right) \quad (2\text{-الف})$$

$$\eta = \arctan\left(\frac{x_3}{x_1}\right) \quad (2\text{-ب})$$

شکل ۱ جهت محوره‌های مختصات محلی در هر وجه مکعب کره پیاده‌سازی شده در این کار را نشان می‌دهد. در هر وجه مکعب کره با توجه به جهت آن (جدول ۱)، مختصه‌های افقی ξ و η در کنار $r = |\vec{r}|$ (اندازه بردار موقعیت $\vec{r}$) به عنوان مختصه قائم، دستگاه مختصات محلی آن وجه، $(\xi, \eta, r) = (q^1, q^2, q^3)$ ، را تشکیل می‌دهند. می‌توان نشان داد که برای وجه مفروض در بالا

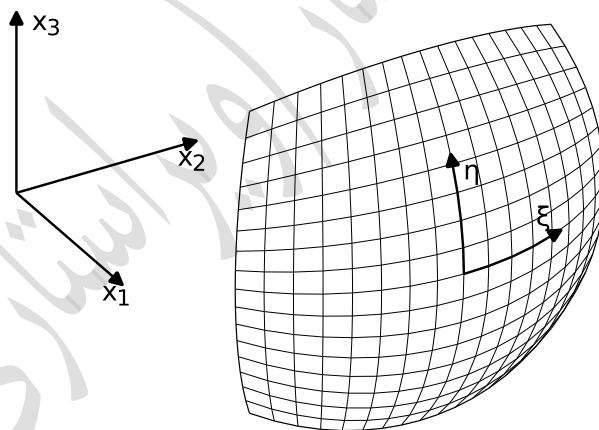
(۳)

$$[x_1, x_2, x_3] = \frac{r}{\delta} [1, \tan(\xi), \tan(\eta)]$$

به ازای $\delta = \sqrt{1 + \tan^2(\xi) + \tan^2(\eta)}$ است. بنابراین می‌توان رابطه‌ای برای بردار موقعیت $\vec{r}$ بر حسب مختصات محلی به دست آورد. با معلوم بودن رابطه بردار موقعیت نقطه بر حسب مختصات محلی، بردارهای پایه هم‌وردا (covariant) و پادوردا (contravariant) و تانسورهای متریک هم‌وردا و پادوردا به سادگی تعریف می‌شوند (زدونکووسکی و بُت، ۲۰۰۵). برای عملگرهای شیو و واگرایی نیز از تعاریف آنها در دستگاه‌های مختصات تعمیم‌یافته استفاده شده است (زدونکووسکی و بُت، ۲۰۰۵). اگرچه در حالت کلی عملگر لاپلاسی از ترکیب عملگرهای واگرایی و شیو به دست می‌آید، می‌توان نشان داد که عملگر لاپلاسی در مکعب کره مرکزی صورت ساده‌تری دارد (برای نمونه، رونچی و همکاران، ۱۹۹۶)، که در اینجا از آن استفاده شده است.

جدول ۱. جهت‌های استفاده شده برای وجوه مکعب کره در کار حاضر.

نام وجه مکعب کره	$[x_1, x_2, x_3]$
F_1	$[x, y, z]$
F_2	$[y, -x, z]$
F_3	$[-x, -y, z]$
F_4	$[-y, x, z]$
F_5	$[z, y, -x]$
F_6	$[-z, -y, -x]$



شکل ۲. نمای طرحواره‌ای دستگاه‌های مختصات محلی وجوه مکعب کره. $[x_1, x_2, x_3]$ بر حسب دستگاه مختصات دکارتی $[x, y, z]$ تعریف می‌شوند. (توجه شود که برای وضوح تصویر، محورهای $[x_1, x_2, x_3]$ با جابه‌جایی نسبت به مبدا رسم شده‌اند.)

هر شبکه مکعب کره در این پژوهش با چهار مشخصه تعریف می‌شود: (۱) شعاع کره، a : تعداد تقسیمات اصلی هر وجه در هر امتداد (اندیس‌ها در نقاط اصلی از ۰ تا N_e تغییر می‌کنند)، (۲) N_p : تعداد ردیف‌های نقاط ضمیمه در هر سو (اندیس‌ها در نقاط ضمیمه از -1 تا N_p در یک سو و از $N_e + 1$ تا $N_e + N_p$ در سوی دیگر تغییر می‌کنند). و (۴) I_w : تعداد نقاط استفاده‌شده در درون‌یابی در نقاط ضمیمه ($I_w \leq 2N_p + 1$). جدول ۲ تعداد نقاط ضمیمه (N_p) و درون‌یابی (I_w) را در شبکه‌های به کاررفته در این کار نشان می‌دهد.

جدول ۲. مشخصات شبکه در اجراهای مختلف در این کار. N_p تعداد ردیف‌های نقاط ضمیمه در هر سو و I_w تعداد نقاط به کاررفته برای درون‌یابی در نقاط ضمیمه هستند.

مرتبیه	پالایه	N_p	I_w
۲	بدون پالایه	۱	۳
۴	بدون پالایه	۲	۵
۶	بدون پالایه	۳	۷
۲، ۴ و ۶	پالایه مرتبه ۱۰ (F10)	۵	۱۱

۳-۲ انتگرال‌گیری زمانی

در این پژوهش، انتگرال‌گیری زمانی معادلات حاکم با استفاده از روش‌های رونگه-کوتای کلاسیک مرتبه ۴ (دورن، ۲۰۱۰) و روش لیپفراگ با پالایه زمانی وایازش چندجمله‌ای $PR1(3,2)$ (یازجی و همکاران، ۲۰۱۷) انجام می‌شود. صورت‌بندی به کاررفته از روش لیپفراگ که در اینجا $LF-PR1(3,2)_{iii}$ خوانده می‌شود، یک روش مرتبه ۲ است و از مقادیر $\alpha_0 = 0.925$ ، $\alpha_1 = 0.85$ و $\gamma = 0$ استفاده می‌کند (یازجی و همکاران، ۲۰۱۷؛ جدول ۱). هزینه محاسباتی هر روش زمانی صریح تابع دو متغیر است: گام زمانی لازم برای پایداری و تعداد دفعات محاسبه تابع پیش‌یاب در هر گام زمانی. در اینجا، با توجه به استفاده از $\gamma = 0$ تنها به یک بار محاسبه تابع پیش‌یاب در هر گام زمانی نیاز است. روش $LF-PR1(3,2)_{iii}$ از پایداری مناسبی نیز برخوردار است (یازجی و همکاران، ۲۰۱۷؛ جدول ۱). بنابراین، اگرچه مرتبه این روش ۲ است، هزینه محاسباتی آن تفاوت چندانی با روش لیپفراگ با پالایه رابرت-اسلین، که اساساً روشی مرتبه اول است، ندارد.

اگر Δs فاصله نقاط شبکه، Δt گام زمانی و c تندی فاز باشند، عدد کورانت برابر با $\frac{c\Delta t}{\Delta s}$ خواهد بود. در صورتی که شرط کافی برای پایداری یک‌بعدی به صورت یک کران بالا (L) برای عدد کورانت تعریف شده باشد، برای حالت دوبعدی داریم:

$$\max\left(\frac{c\Delta t}{\Delta s}\right) \leq \frac{L}{\sqrt{2}} \quad (۴-الف)$$

$$\Rightarrow \Delta t \leq \frac{L}{\sqrt{2}} \min\left(\frac{\Delta s}{c}\right) \quad (۴-ب)$$

$$\text{Since } \frac{\mu L \max(\Delta s)}{2 \max(c)} \leq \frac{L \min(\Delta s)}{\sqrt{2} \max(c)} \leq \frac{L}{\sqrt{2}} \min\left(\frac{\Delta s}{c}\right) \quad (۴-ج)$$

$$\text{Sufficient condition for (الف): } \Delta t \leq \frac{\mu L \max(\Delta s)}{2 \max(c)} \quad (۴-د)$$

در نامساوی اول رابطه (۴-ج) $\mu/\sqrt{2} \leq \min(\Delta s) / \max(\Delta s) \leq 1/\sqrt{2}$ برای نسبت کوتاه‌ترین به بلندترین فاصله شبکه‌ای در مکعب‌کره مرکزی هم‌زاویه استفاده شده است. در این رابطه، μ متغیری کمکی است که در اینجا فاصله نسبت $\min(\Delta s) / \max(\Delta s)$ را در یک تفکیک مشخص از مقدار حدی آن در تفکیک بی‌نهایت ($1/\sqrt{2}$) نشان می‌دهد. کمینه مقدار μ در تفکیک‌های استفاده‌شده در این کار حدود 0.9969 (برای $N_e = 16$) است. نکته مهم در اینجا رابطه خطی میان گام زمانی و بلندترین فاصله شبکه‌ای است. می‌توان شرط پایداری (۴-د) را برحسب N_e نوشت:

$$\max(\Delta s) = \frac{a\pi}{2N_e} \Rightarrow \Delta t \leq \frac{a\pi\mu L}{4N_e \max(c)} \quad (5)$$

گام زمانی به گونه‌ای انتخاب می‌شود که ضمن برآوردن شرط پایداری، کسری صحیح از بازه زمانی خروجی مدل (برای مثال ۱۲ ساعت) باشد. در این کار، عدد کورانت بیشینه در روش RK4 کوچک‌تر از ۱ و در روش LF-PR1(3,2)_{iii} کوچک‌تر از ۰/۳۵ انتخاب شده است. بنابراین با توجه به این که تعداد دفعات محاسبه تابع پیش‌یاب در روش RK4 برابر چهار و در روش LF-PR1(3,2)_{iii} برابر یک است، نسبت هزینه محاسباتی دو روش (با فرض استفاده از روش مکانی یکسان) حدود ۱/۴ خواهد بود. جدول ۳ تفکیک‌های شبکه و گام‌های زمانی به کاررفته در این کار را نشان می‌دهد.

جدول ۳. تفکیک‌های به کاررفته در آزمون‌های موردی گردش جسم صلب برای معادله فرارفت و گام‌های زمانی مربوطه. $\max(\Delta s/a)$ بزرگ‌ترین زاویه شبکه‌ای بر حسب درجه است. (اعداد گرد شده‌اند).

$\Delta t(s)$		$\max(\Delta s/a) (^{\circ})$	N_e
LF-PR1(3,2) _{iii}	RK4		
۲۶۱۸/۲	۷۲۰۰/۰	۳/۷۵۰۰	۲۴
۱۹۶۳/۶	۵۴۰۰/۰	۲/۸۱۲۵	۳۲
۱۳۲۹/۲	۳۷۵۶/۵	۱/۸۷۵۰	۴۸
۹۹۳/۱	۲۷۸۷/۱	۱/۴۰۶۲	۶۴
۶۶۴/۶	۱۸۷۸/۳	۰/۹۳۷۵	۹۶
۴۹۹/۴	۱۴۱۶/۴	۰/۷۰۳۱	۱۲۸
۳۳۳/۶	۹۴۹/۵	۰/۴۶۸۸	۱۹۲
۲۵۰/۴	۷۱۴/۰	۰/۳۵۱۶	۲۵۶
۱۶۶/۸	۴۷۴/۷	۰/۲۳۴۴	۳۸۴
۱۲۵/۲	۳۵۷/۰	۰/۱۷۵۸	۵۱۲
۸۳/۵	۲۳۸/۰	۰/۱۱۷۲	۷۶۸

۳-۳ عملگرهای تفاضل متناهی مشتق

برای گسسته‌سازی فضایی از روش‌های تفاضل متناهی صریح مرکزی با مرتبه‌های ۲، ۴ و ۶ استفاده شده است. عملگر تفاضل متناهی صریح یک‌بعدی مشتق n ام برای تابع دلخواه Φ بر روی یک شبکه یکنواخت بدین صورت نوشته می‌شود:

$$\left. \frac{\partial^n \Phi}{\partial x^n} \right|_j = \frac{1}{\Delta x^n} \sum_{k=-l}^r a_k \Phi_{j+k} \quad (6)$$

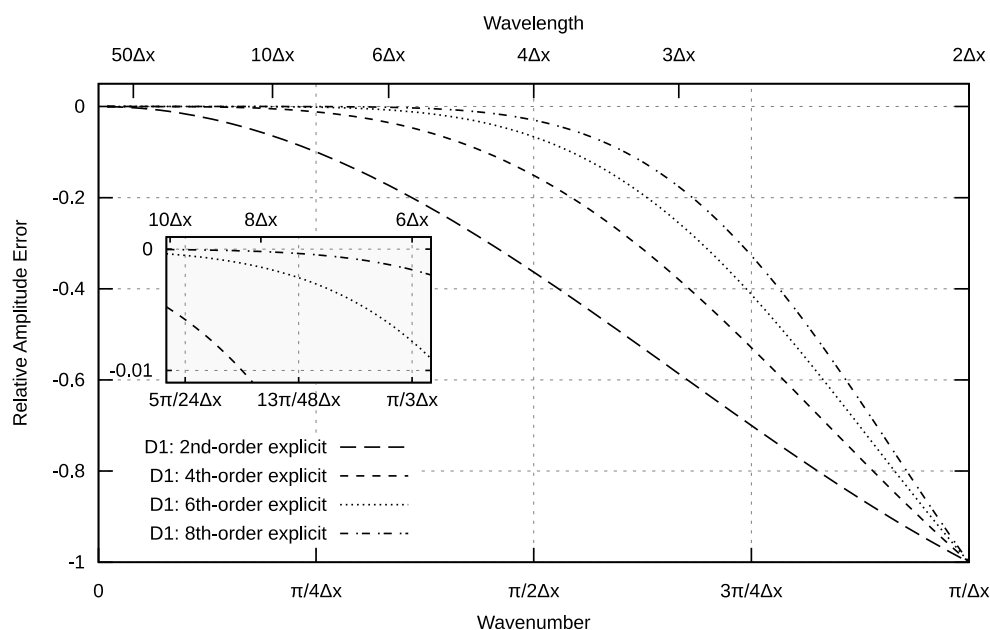
که در آن، Δx فاصله نقاط شبکه در راستای محور x است که در این کار می‌تواند یکی از مختصه‌های محلی افقی ξ یا η باشد. l و r مقادیر حدود پایین و بالای سیگما بسته به روش تفاضل متناهی مربوطه هستند. در عملگرهای تفاضل متناهی متقارن، $l = r$ و برابر نیم‌پهنای عملگر مربوطه هستند. جدول ۴ ضرایب a_k برخی از عملگرهای تفاضل متناهی صریح به کاررفته در این پژوهش را ارائه می‌دهد. در این کار برای اشاره به عملگرهای تفاضل متناهی مرکزی مرتبه ۲، ۴ و ۶ به ترتیب از CS2، CS4 و CS6 و برای اشاره به تمامی آنها از CS x استفاده می‌شود.

مرتبه دقت نمی‌تواند توانایی یک روش در شبیه‌سازی امواج بد تفکیک‌شده را به خوبی نشان دهد (دورن، ۲۰۱۰). بررسی خطاهای فاز و دامنه عملگرهای تفاضل متناهی مشتق می‌تواند در شناخت رفتار آنها در طیف وسیع‌تری از طول‌موج‌ها مفید باشد. در روش‌های تفاضل متناهی متقارن، خطای فاز برابر صفر است. شکل ۳ خطای دامنه عملگرهای تفاضل متناهی برای مشتق‌های اول و دوم را نشان می‌دهد. در این شکل می‌توان خطای بالای روش مرتبه ۲ را در قیاس با روش‌های مرتبه‌بالا حتی در طول‌موج‌های بزرگ‌تر از $10\Delta x$ نیز مشاهده کرد. بازنمایی طول‌موج‌های کوچک‌تر

منجر به تولید نوسان‌های با بسامد بالاتر در حل شده و این امر طبیعتاً گام زمانی لازم برای پایداری را محدودتر می‌کند (دورن، ۲۰۱۰). البته در این کار برای روش‌های تفاضل متناهی مرتبه ۲ و ۴ نیز از گام زمانی مشابه روش مرتبه ۶ استفاده شده است.

جدول ۴. ضرایب a_k عملگرهای تفاضل متناهی مشتق اول مورد استفاده در این کار.

مرتبه	a_{-3}	a_{-2}	a_{-1}	a_0	a_1	a_2	a_3
۲			$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$		
۴		$\frac{1}{12}$	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{12}$	
۶	$-\frac{1}{60}$	$\frac{3}{20}$	$-\frac{3}{4}$	0	$\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{20}$	$\frac{1}{60}$



شکل ۳. خطای نسبی دامنه عملگرهای تفاضل متناهی مرکزی مرتبه ۲، ۴، ۶ و ۸ برای مشتق اول

۳-۴ پالایه‌های فضایی تفاضل متناهی

پالایه‌ها در مدل‌های عددی به دلایل مختلف و معمولاً برای حذف کوتاه‌ترین امواج تفکیک شده به کار می‌روند. در شبکه‌های جابه‌جانشده، رابطه پاشش (dispersion) گسسته معادله فرارفت نایکینوا است و موج $2\Delta x$ به صورت یک مُد محاسباتی با بسامد صفر خود را نشان می‌دهد. بنابراین چشمه‌ای با بسامد پایین، علاوه بر موج‌های بلند می‌تواند موج‌های بسیار کوتاه را نیز تحریک کند. به هر حال، بخش انتهایی طیف که جهت سرعت گروه در آن اساساً اشتباه است، قاعداً نمی‌تواند کمکی به بهبود حل کند. مسئله مهم جلوگیری از اثر منفی این بخش از طیف و سازوکارهای حذف آن، از جمله پالایه‌ها، بر حل عددی است.

واریانسِ کمیتِ فرارفت داده‌شده در معادله فرارفت، ناورد (invariant) است. اگرچه انتقال واریانس از مقیاس‌های بزرگ‌تر به کوچک‌تر در آزمون عددی گردش جسم صلب صرفاً ناشی از خطای عددی است، اما در حالت کلی، واریانس دارای انتقال آشکاری به مقیاس‌های کوچک‌تر

بوده و بنابراین یک ناوردای ناستوار (non-robust) است (توبرن، ۲۰۱۱). با توجه به بی‌اتلاف بودن روش‌های عددی به کاررفته در اینجا، صورتی از میرایی مقیاس‌گزین (هم‌چون پالایه عددی یا فرایخش) به عنوان یک مدل زیرشبکه‌ای، برای حذف واریانس اضافی تجمع‌یافته در مقیاس‌های نزدیک به مقیاس شبکه لازم است. اگرچه این مسئله در آزمون گردش جسم صلب در بازه‌های زمانی کوتاه مشکل‌ساز نیست، اما در اجراهای بلندمدت مدل، به کارگیری مقداری میرایی مقیاس‌گزین برای پایداری محاسباتی لازم است. پالایه عددی به دلیل هزینه محاسباتی کمتر و پیاده‌سازی ساده‌تر نسبت به فرایخش می‌تواند گزینه مطلوبی باشد و در این مطالعه به صورت‌های مختلف به کار گرفته شده است.

اگر تابع یک‌بعدی دلخواه ψ بر روی یک شبکه یکنواخت دوره‌ای تعریف شده باشد، پالایه عددی صریح متقارن $\mathcal{F}_x$ در جهت x با مرتبه $2w$ را بدین صورت تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{F}_x(\psi)|_{x=x_j} \equiv \sum_{k=0}^w b_k \frac{\psi_{j+k} + \psi_{j-k}}{2} \quad (9)$$

ضرایب b_k این پالایه با اعمال شرط سازگاری، مقدار تابع انتقال T برای عدد موج $\pi/\Delta x$ (طول موج $2\Delta x$) و حداکثر مرتبه دقت ممکن پالایه به دست می‌آیند (برای نمونه، برشه، ۲۰۱۸). در صورتی که پالایه کوتاه‌ترین طول موج را به‌طور کامل حذف کند، یعنی $T(\pi/\Delta x) = 0$ ، پالایه را کامل و در غیر این صورت آن را کسری می‌نامیم. بنابراین پالایه کسری پالایه‌ای است که تنها بخشی از کوتاه‌ترین موج (طول موج $2\Delta x$) را حذف می‌کند. برای پارامتر تعیین‌کننده در این پالایه‌ها از مقدار تابع انتقال در عدد موج $\pi/\Delta x$ استفاده شده است. مقدار ضرایب پالایه‌های کسری بر حسب ضرایب پالایه کامل هم‌مرتبه، با استفاده از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$c_k = \begin{cases} b_k + (1 - b_k)\alpha & k = 0 \\ (1 - \alpha)b_k & k \geq 1 \end{cases} \quad (8)$$

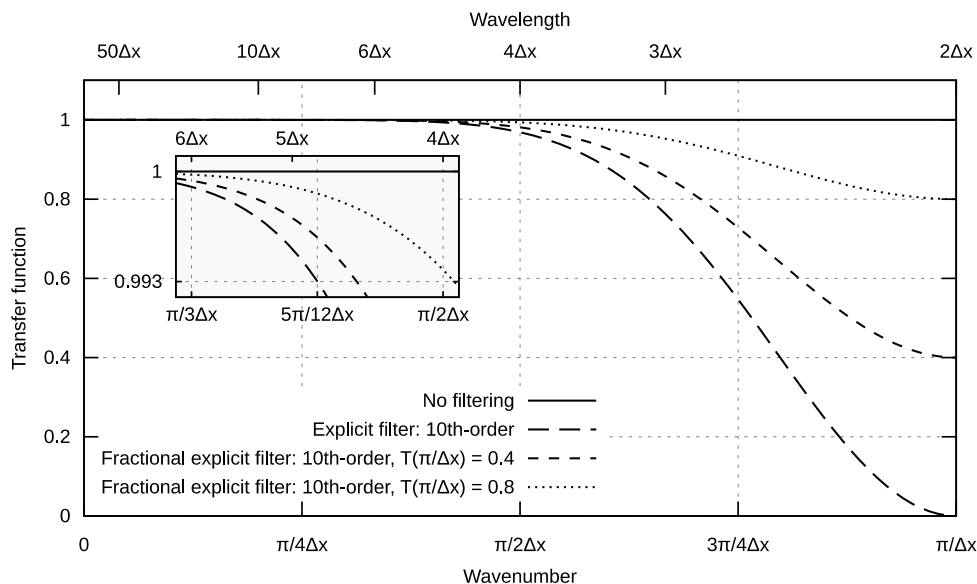
که در آن c_k ضرایب پالایه کسری، b_k ضرایب پالایه کامل هم‌مرتبه و α مقدار تابع انتقال برای عدد موج $\pi/\Delta x$ هستند. اگر در دستگاه مختصات محلی هر وجه مکعب‌کره، $\mathcal{F}_\xi$ و $\mathcal{F}_\eta$ پالایه‌های یک‌بعدی در جهت‌های ξ و η باشند، پالایه دوبعدی $\mathcal{F}_{\xi\eta}$ را به این صورت تعریف می‌کنیم (برشه و کروازی، ۲۰۲۲):

$$\mathcal{F}_{\xi\eta} = \mathcal{F}_{\eta\xi} = \frac{1}{2} [\mathcal{F}_\xi \circ \mathcal{F}_\eta + \mathcal{F}_\eta \circ \mathcal{F}_\xi] \quad (9)$$

در این کار از پالایه‌های کامل و کسری مرتبه ۱۰ استفاده شده است. ضرایب پالایه کامل مرتبه ۱۰ برابر است با:

$$b_0 = \frac{193}{256}, \quad b_1 = \frac{105}{256}, \quad b_2 = -\frac{15}{64}, \quad b_3 = \frac{45}{512}, \quad b_4 = -\frac{5}{256}, \quad b_5 = \frac{1}{512} \quad (10)$$

مقایسه توابع انتقال پالایه‌های تفاضل متناهی (شکل ۴) می‌تواند میزان میرایی پالایه در اعداد موج مختلف را نشان دهد. می‌توان مشاهده کرد که میزان میرایی پالایه کامل مرتبه ۱۰ در طول موج‌های $4\Delta x$ تا $6\Delta x$ نیز کم نیست. برای نشان دادن اثر پارامتر پالایه کسری در میزان میرایی آن، پالایه کسری مرتبه ۱۰ با دو مقدار $0/4$ و $0/8$ برای پارامتر پالایه در این شکل آورده شده است.



شکل ۴. تابع انتقال پالایه‌های تفاضل متناهی به کاررفته در این پژوهش.

در این کار، برای تخمین کمینه مقدار پخش عددی مورد نیاز برای پایداری محاسباتی روش عددی مورد نظر، از شبیه‌سازی بلندمدت معادله فرارفت استفاده شده است. به کارگیری حداقل این مقدار میرایی حتی در مسائل کوتاه‌مدت توصیه می‌شود. در آزمون‌های کوتاه‌مدت فرارفت، همگرایی و سری زمانی خطا در دو حالت بدون پالایه و با پالایه کامل (که میرایی بسیار بالاتری از مقدار حداقلی دارد) بررسی شده‌اند. به کارگیری پالایه کامل از آن رو است که اثرگذاری احتمالی پالایه بر دقت روش در شدیدترین حالت آن بررسی شود.

۴ آزمون‌های موردی

در این کار از آزمون گردش جسم صلب برای بررسی عملکرد مدل در حل معادله فرارفت یک کمیت نرده‌ای غیرفعال استفاده شده است. این آزمون به دو صورت با شرایط اولیه با رده‌های مشتق‌پذیری مختلف به کار رفته است. رده مشتق‌پذیری شرایط اولیه می‌تواند رفتار روش عددی و مرتبه همگرایی حل را تحت تأثیر قرار دهد. دلیل استفاده از آزمون گردش جسم صلب، وجود جواب تحلیلی برای آن در هر گام زمانی است که می‌تواند با به‌دست‌دادن سری زمانی نرُم‌های خطا، بدرفتاری‌های محلی مدل را آشکار سازد. هم‌چنین در این کار، صورتی بلندمدت از این آزمون برای بررسی پایداری محاسباتی روش‌ها ارائه شده است.

۴-۱ آزمون گردش جسم صلب

در آزمون گردش جسم صلب، سرعت در نقطه $\vec{p}$ به این صورت تعریف می‌شود

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{p} \quad (11)$$

که در آن $\vec{\omega}$ بردار سرعت زاویه‌ای است. اگر نقطه مرکزی توده فرارفت داده‌شده $\vec{p}_c = a[1, 0, 0]'$ و شعاع کره باشند، سرعت زاویه‌ای

$$\vec{\omega}(\alpha) = \omega[0, -\sin(\alpha), \cos(\alpha)]' \quad (12)$$

این نقطه را بر روی یک دایره عظیمه با زاویه α نسبت به صفحه xy در مختصات دکارتی سه‌بعدی حرکت می‌دهد. اندازه سرعت زاویه‌ای $\omega = 2\pi/(12 \text{ days})$ فرض می‌شود. در این آزمون از زنگوله‌های کسینوسی با رده‌های مشتق‌پذیری مختلف برای تعریف شرایط اولیه استفاده می‌شود:

$$\psi(\vec{r}) = \begin{cases} \psi_0 \left[\frac{1 + \cos(\pi r/R)}{2} \right]^n & r < R \\ 0 & r \geq R \end{cases} \quad (13)$$

که در آن r فاصله کروی نقطه $\vec{r}$ از مرکز زنگوله کسینوسی، $\vec{p}_c$ است؛ $R = a/3$ شعاع زنگوله کسینوسی و $\psi_0 = 1000$ m مقدار بیشینه کمیت ψ است. مقدار n میزان همواری شرایط اولیه را تعیین می کند. ویلیامسون و همکاران (۱۹۹۲) و هریس و همکاران (۲۰۱۱) به ترتیب از مقادیر $n = 1$ و $n = 2$ استفاده کرده اند، که توابعی از رده های مشتق پذیری C^1 و C^3 به دست می دهند.

میزان همواری شرایط اولیه، مرتبه همگرایی دست یافتنی را محدود می کند. زنگوله کسینوسی پیشنهادی ویلیامسون و همکاران (۱۹۹۲) با رده مشتق پذیری C^1 ، بخشی از آزمون های استاندارد است که حل آنها برای مدل های فرارفت بر روی کره رایج است. اما با توجه به این که بیشینه مرتبه همگرایی ممکن در این آزمون ۲ خواهد بود، برای آزمون همگرایی روش های مرتبه بالا مناسب نیست. در چنین مواردی استفاده از شرایط اولیه هموارتر، مانند زنگوله کسینوسی C^3 (هریس و همکاران، ۲۰۱۱)، با بیشینه مرتبه دست یافتنی ۴، مناسب خواهد بود. در این مقاله اگرچه یک روش مرتبه ۶ نیز مورد بررسی قرار می گیرد، از به کارگیری شرایط اولیه هموارتر از C^3 پرهیز شده است.

برای بررسی پایداری محاسباتی روش های عددی به کاررفته برای حل معادله فرارفت، از پالایه کسری مرتبه ۱۰ و آزمون بلندمدت گردش جسم صلب استفاده می کنیم. برای این منظور، آزمون گردش جسم صلب را برای ۱۰۰ دور گردش (۱۲۰۰ روز) در نظر می گیریم و مقدار پارامتر پالایه کسری را به گونه ای تعیین می کنیم که ترم بی نهایت کمیت فرارفت داده شده همواره کوچک تر از ۱/۲ برابر مقدار آن در $t = 0$ s باقی بماند. قاعدتا شرایط اولیه نمی بایست بر پایداری محاسباتی روش اثرگذار باشد. با این وجود، به دلیل تجربی بودن تعریف آزمون بلندمدت، این آزمون با هر دو شرایط اولیه C^1 و C^3 اجرا خواهد شد تا از عدم تأثیر شرایط اولیه بر نتایج اطمینان حاصل شود.

۵ نتایج

نتایج حل معادله فرارفت در دو بخش با انتگرال گیری های زمانی کوتاه مدت و بلندمدت، به ترتیب برای بررسی دقت و پایداری روش ها مورد بررسی قرار گرفته است. در بررسی آزمون های کوتاه مدت تلاش شده است تا عوامل مختلف موثر بر مرتبه همگرایی عملی روش ها به طور مشخص نشان داده شوند.

۵-۱ آزمون گردش جسم صلب

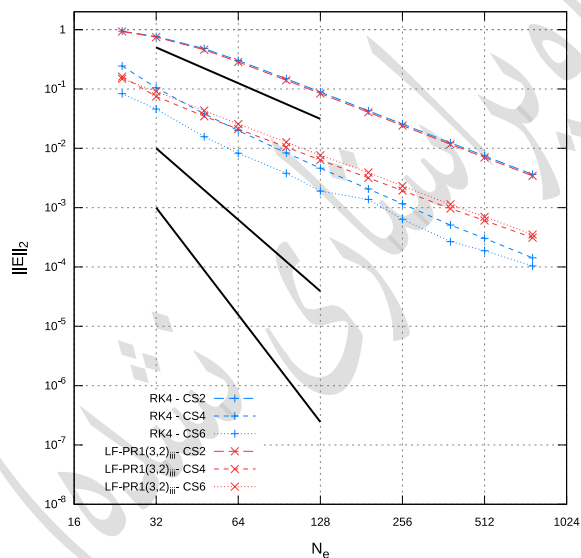
شکل ۵ ترم ۲ خطا در آزمون گردش جسم صلب زنگوله های کسینوسی C^3 (هریس و همکاران، ۲۰۱۱) و C^1 (ویلیامسون و همکاران، ۱۹۹۲) را برای دو روش زمانی رونگه- کوتای کلاسیک مرتبه ۴ و لیپفرانگ با وایازش چند جمله ای PR1(3,2) در ترکیب با روش های تفاضل متناهی مرکزی مرتبه های ۲، ۴ و ۶ نشان می دهد. همان گونه که در این شکل نیز قابل مشاهده است، سه عامل در مرتبه همگرایی عملی روش ها موثر هستند: مرتبه روش گسسته سازی مکانی، مرتبه روش انتگرال گیری زمانی و رده مشتق پذیری شرایط اولیه. ابتدا نتایج آزمون هریس و همکاران (۲۰۱۱) که متعلق به رده مشتق پذیری بالاتری است، مورد بررسی قرار می گیرد.

تفاوت خطای دو روش RK4-CS2 و LF-PR1(3,2)-CS2 ناچیز است. در اینجا، با توجه به غالب بودن خطای بخش مکانی (تفاضل متناهی مرتبه ۲) در هر دو روش، مرتبه اسمی گسسته سازی مکانی تعیین کننده مرتبه همگرایی عملی است و با توجه به این که مرتبه بخش مکانی بالاتر از مرتبه بخش زمانی نیست، این وضعیت در تفکیک های بالاتر نیز صادق خواهد بود. غالب بودن خطای گسسته سازی مکانی در یک روش عددی

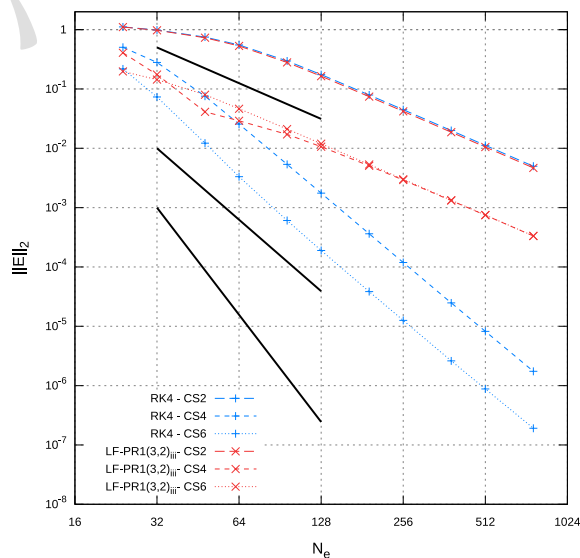
را می‌توان از طریق مقایسه با روش مشابه با گسسته‌سازی مکانی مرتبه بالاتر یا از طریق مقایسه با روش مشابه با گام زمانی کوچک‌تر استنباط کرد. در اینجا از روش اول استفاده شده است.

در روش LF-PR1(3,2)_{iii} با افزایش مرتبه روش مکانی از ۲ به ۴، خطا در تمامی تفکیک‌ها کاهش می‌یابد. چنین کاهش خطایی نشان از غالب بودن خطای گسسته‌سازی مکانی در روش LF-PR1(3,2)_{iii}-CS2 دارد. مرتبه همگرایی عملی روش LF-PR1(3,2)_{iii}-CS4 در تفکیک‌های بالاتر از 1.5° ($N_e = 64$) حدود ۲ است که نشان‌دهنده غالب بودن خطای بخش زمانی روش است. عدم کاهش خطا با افزایش مرتبه روش گسسته‌سازی مکانی از ۴ به ۶ نیز موید این امر است. در روش RK4، افزایش مرتبه گسسته‌سازی مکانی از ۲ به ۴ علاوه بر کاهش مقدار خطا به افزایش مرتبه روش نیز منجر می‌شود. در روش RK4-CS4 هنوز خطای غالب مربوط به گسسته‌سازی مکانی است. این امر از مقایسه خطای این روش با خطای روش RK4-CS6 قابل استنباط است. برای بررسی جامع روش‌های مرتبه ۶ و بالاتر به شرایط اولیه هموارتر، مانند تپه گاوسی نیاز است. اگرچه بررسی رفتار روش‌های مرتبه بالا در آزمون‌های با رده مشتق‌پذیری پایین نیز اطلاعات مهمی درباره روش به دست می‌دهد.

نتایج آزمون گردش جسم صلب زنگوله کسینوسی $\mathcal{C}^1$ (ویلیامسون و همکاران، ۱۹۹۲) اثر هموار نبودن شرایط اولیه بر جواب را آشکار می‌کند. تمامی روش‌هایی که با زنگوله کسینوسی $\mathcal{C}^3$ دارای مرتبه عملی ۲ بودند، در اینجا با کاهش مرتبه به حدود $1/6$ تا $1/8$ مواجه می‌شوند. اما روش‌های با مرتبه عملی ۴ در آزمون پیشین، می‌توانند به بیشینه مرتبه دست‌یافتنی در این آزمون (یعنی مرتبه ۲) نائل شوند. روش‌های مرتبه ۳ مانند LF-PR2(3,4)_i-CS4 (با ضرایب $\alpha_0 = -0.4$ ، $\alpha_1 = 0.5$ و $\gamma = 1$) نیز در این آزمون مرتبه همگرایی عملی ۲ را در نرم ۲ خطا نشان می‌دهند (در اینجا آورده نشده‌اند). نکته دیگر قابل توجه در نتایج این آزمون نامنظم بودن نمودار روش RK4-CS6 و کاهش مرتبه آن در تفکیک‌های بالاتر از $N_e = 128$ است. این مسئله مربوط به تجمع واریانس در طول موج‌های کوچک است که به دلیل بدون پالایه بودن این روش در جواب باقی مانده و باعث افزایش خطا می‌شود. نمودارهای مشابه مربوط به صورت‌های با پالایه این روش (آورده نشده) این بی‌نظمی و کاهش مرتبه را نشان نمی‌دهند.

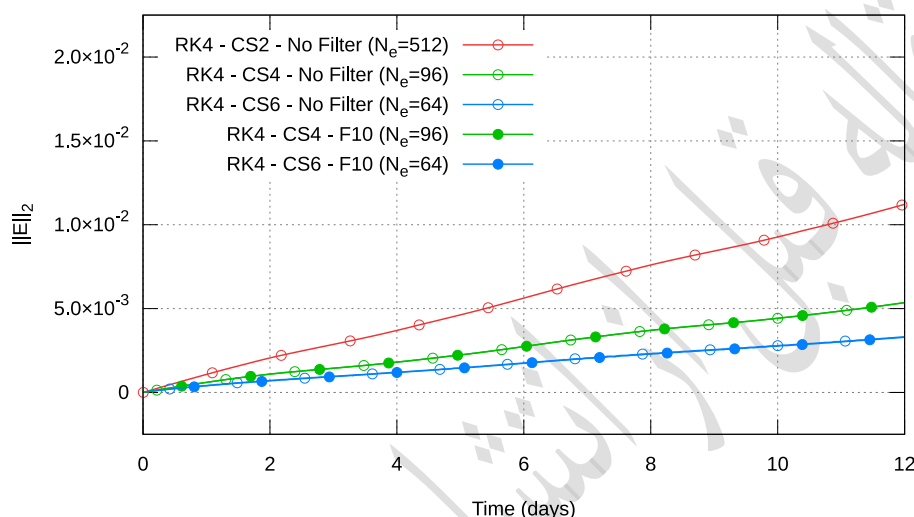


شکل ۵. همگرایی نرم ۲ خطا در آزمون گردش جسم صلب (الف) زنگوله کسینوسی $\mathcal{C}^1$ و (ب) زنگوله کسینوسی $\mathcal{C}^3$ در $t = 12$ days برای روش‌های مکانی تفاضل متناهی صریح مرتبه‌های ۲، ۴ و ۶ در کنار روش‌های زمانی RK4 و LF-PR1(3,2)_{iii}. بدون پالایه فضایی. خطوط پررنگ مرتبه‌های ۲، ۴ و ۶ را نشان می‌دهند.



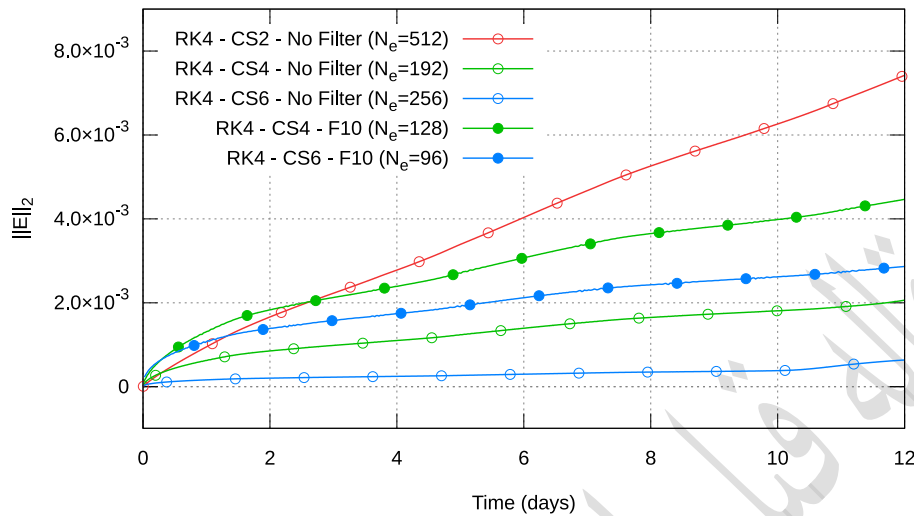
شکل ۵. همگرایی نرم ۲ خطا در آزمون گردش جسم صلب (الف) زنگوله کسینوسی $\mathcal{C}^3$ و (ب) زنگوله کسینوسی $\mathcal{C}^1$ در $t = 12$ days برای روش‌های مکانی تفاضل متناهی صریح مرتبه‌های ۲، ۴ و ۶ در کنار روش‌های زمانی RK4 و LF-PR1(3,2)_{iii}. بدون پالایه فضایی. خطوط پررنگ مرتبه‌های ۲، ۴ و ۶ را نشان می‌دهند.

شکل ۶ سری زمانی نرَم ۲ خطا در آزمون زنگوله کسینوسی $\mathcal{C}^3$ را برای روش‌های تفاضل متناهی مرکزی مرتبه ۲، ۴ و ۶ در تفکیک‌های متفاوت نشان می‌دهد. تفکیک‌ها به گونه‌ای انتخاب شده‌اند که خطاها از نظر اندازه بزرگی مشابه بوده و خطای روش مرتبه بالاتر از روش مرتبه پایین‌تر کمتر باشد. تفکیک روش مرتبه ۲ حدود 0.176° ($N_e = 512$) است. نکته مهم در این سری‌های زمانی روند خطی افزایش خطا و عدم وجود جهش در آنها در زمان‌هایی است که زنگوله در حال عبور از مرزهای داخلی مکعب کره است.



شکل ۶. سری زمانی نرَم ۲ خطا در آزمون گردش جسم صلب زنگوله کسینوسی $\mathcal{C}^3$. روش زمانی RK4 و روش‌های مکانی تفاضل متناهی صریح مرتبه ۲ با تفکیک $N_e = 512$ ، مرتبه ۴ با تفکیک $N_e = 96$ و مرتبه ۶ با تفکیک $N_e = 64$ هستند.

در شکل ۶ مشاهده می‌شود که روش مرتبه ۴ با تفکیک حدود 0.938° ($N_e = 96$) نتایج بهتری نسبت به روش مرتبه ۲ با تفکیک اسمی بیش از ۵ برابر دارد. در این تفکیک‌ها، هزینه محاسباتی روش مرتبه ۲ حدود ۱۲۰ برابر روش مرتبه ۴ با خطای مشابه است. روش مرتبه ۶ نیز با تفکیک حدود 1.41° ($N_e = 64$) نتایج بهتری نسبت به روش مرتبه ۴ با تفکیک $1/5$ برابر دارد. هزینه محاسباتی روش مرتبه ۲ حدود ۳۵۰ برابر روش مرتبه ۶ با خطای مشابه است. در این شکل، نتایج روش‌های مرتبه ۴ و ۶ با پالایه مرتبه ۱۰ نیز در تفکیک‌های مشابه با نتایج بدون پالایه آورده شده‌اند. می‌توان مشاهده کرد که در اینجا (برای زنگوله کسینوسی $\mathcal{C}^3$) به کارگیری پالایه تفاوت قابل توجهی در نتایج ایجاد نمی‌کند. به طور کلی و همان‌طور که در ادامه نیز نشان داده خواهد شد، این امر زمانی صادق است که شرایط اولیه به اندازه کافی هموار و دوره شیه‌سازی به حد کافی کوتاه باشند. سری زمانی خطا در آزمون فرارفت زنگوله کسینوسی $\mathcal{C}^1$ می‌تواند معایب به کارگیری روش‌های مرتبه بالا را در مسائلی که رده مشتق‌پذیری بالایی ندارند نشان دهد. همان‌طور که در شکل ۷ می‌توان مشاهده کرد، در این آزمون، روش مرتبه ۴ با $N_e = 192$ خطای کمتری نسبت به روش مرتبه ۲ با $N_e = 512$ دارد. در اینجا اما نسبت تفکیک‌ها $\frac{1}{2}$ نسبت مشابه در آزمون فرارفت زنگوله کسینوسی $\mathcal{C}^3$ است، یعنی میزان افزایش کارایی مدل با افزایش مرتبه از ۲ به ۴ نسبت به آزمون قبلی کمتر است. افزایش مرتبه روش از ۴ به ۶ باعث کاهش کارایی مدل می‌شود. به طور مشخص، رشد خطای روش مرتبه ۶ پس از روز دهم شتاب می‌گیرد.

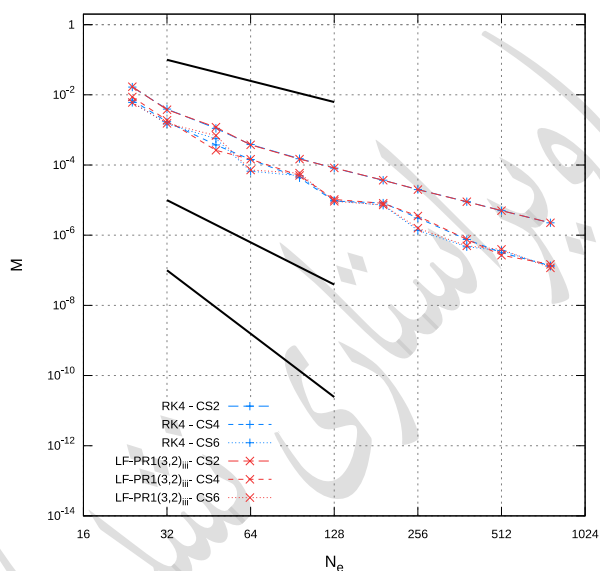


شکل ۷. سری زمانی نرَم ۲ خطا در آزمون گردش جسم صلب زنگوله کسینوسی $\mathcal{C}^1$ روش زمانی RK4 و روش‌های مکانی تفاضل متناهی صریح مرتبه ۲ با تفکیک $N_e = 512$ ، مرتبه ۴ با تفکیک $N_e = 192$ و مرتبه ۶ با تفکیک $N_e = 256$ هستند. نتایج روش‌های مرتبه ۴ پالایده با تفکیک $N_e = 128$ و مرتبه ۶ پالایده با تفکیک $N_e = 96$ نیز در این شکل آورده شده‌اند. در این روش‌ها از پالایه تفاضل متناهی مرکزی مرتبه ۱۰ استفاده شده است.

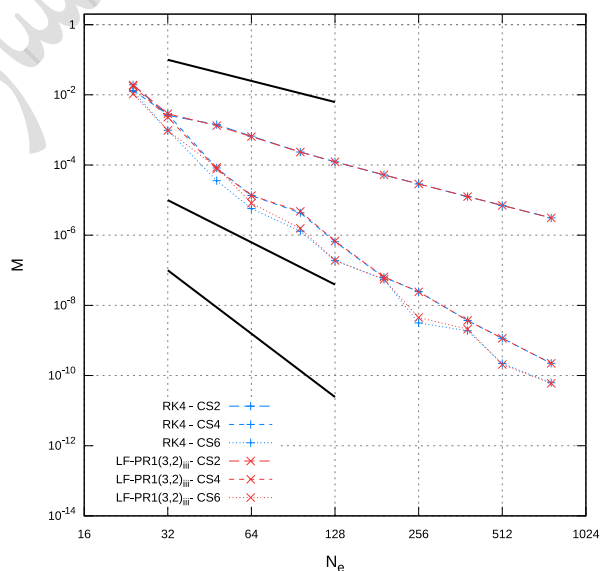
بررسی توزیع فضایی خطای روش RK4-CS6 در $t = 12$ days (شکل آورده نشده است) نشان می‌دهد که امواج بسیار کوتاه در مسیر حرکت زنگوله کسینوسی باقی مانده‌اند. همین امواج هستند که منجر به رشد شدید خطا در این روش پس از روز دهم شده‌اند. اگرچه در نگاه اول این پدیده در آزمون با شرایط اولیه هموارتر (زنگوله کسینوسی $\mathcal{C}^3$) دیده نمی‌شود، در صورت طولانی‌تر شدن زمان شبیه‌سازی، در آن آزمون هم بروز می‌کند. با وجود این که میدان‌های سرعت و ارتفاع در این آزمون بسیار بزرگ مقیاس هستند، برهم‌کنش آنها در جمله فرارفت گسسته‌سازی شده می‌تواند به تولید امواج کوتاه در جواب منجر شود. در صورت بالاتر بودن مرتبه عملگر مشتق نسبت به بالاترین مرتبه دست‌یافتنی بر اساس رده مشتق‌پذیری مسئله، امواج کوتاه در نزدیکی محل کاهش رده مشتق‌پذیری ایجاد می‌شوند. این پدیده با افزایش مرتبه عملگر مشتق یا کاهش رده مشتق‌پذیری مسئله، تشدید می‌شود. برهم‌کنش همین امواج کوتاه با میدان سرعت است که به ظهور زودرس نوفه‌های با طول‌موج بسیار کوتاه در حل مرتبه‌بالای آزمون گردش جسم صلب زنگوله کسینوسی $\mathcal{C}^1$ منجر می‌شود. این پدیده در صورت مهار نشدن، می‌تواند به بروز خطای دگرنامی و ناپایداری حل عددی منجر شود. برای مهار این خطا در اینجا از پالایه عددی استفاده شده است. در شکل ۷ مشاهده می‌شود در صورت به کارگیری پالایه مرتبه ۱۰، می‌توان از روش مرتبه ۴ با تفکیک $N_e = 128$ یا روش مرتبه ۶ با تفکیک $N_e = 96$ به جای روش مرتبه ۲ با $N_e = 512$ استفاده کرد. به کارگیری این روش‌ها هزینه محاسباتی را به ترتیب به حدود $\frac{1}{50}$ و $\frac{1}{100}$ هزینه روش مرتبه ۲ کاهش می‌دهد.

به سادگی می‌توان نشان داد که افزایش مرتبه روش مکانی (از ۲ به ۴، از ۴ به ۶ و...) خطای دامنه موج‌های بلندتر را بیش از موج‌های کوتاه‌تر کاهش می‌دهد. اثرات این مسئله در نتایج آزمون‌های موردی فرارفت نیز قابل مشاهده است. با مقایسه توزیع فضایی خطای روش‌های مکانی مختلف در آزمون فرارفت زنگوله کسینوسی $\mathcal{C}^3$ ، می‌توان مشاهده کرد که با افزایش مرتبه روش مکانی، طول‌موج میانگین خطا کاهش می‌یابد. در شکل مربوط به روش مرتبه ۶ بیشینه خطا دیگر در امواج بلند در نزدیکی مرکز زنگوله نبوده و به صورت امواج کوتاه در حاشیه زنگوله خود را نشان می‌دهد. در آزمون فرارفت زنگوله کسینوسی $\mathcal{C}^1$ گذار از امواج بلند به کوتاه در خطا با افزایش مرتبه روش پررنگ‌تر است. دلیل این امر افزایش شدیدتر دامنه موج‌های کوتاه در خطای روش‌های مرتبه‌بالا به دلیل پدیده شبه گیبس در نزدیکی محل کاهش رده مشتق‌پذیری است.

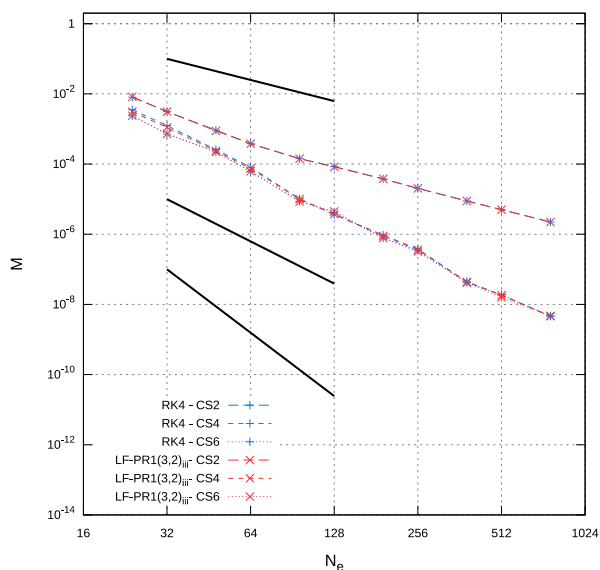
میانگین بهنجار شده کمیت فرارفت داده شده (ویلیامسون و همکاران، ۱۹۹۲؛ معادله ۸۶) معیاری از پایداری است (نر و همکاران، ۱۹۹۹). بررسی نمودارهای همگرایی میانگین بهنجار شده (شکل ۸) نکات جالبی را درباره اثر عوامل مختلف بر پایداری روش‌های به کار رفته نشان می‌دهد. باید توجه شود که در آزمون گردش جسم صلب، میانگین بهنجار شده در $t = 12 \text{ days}$ مرتبه همگرایی بسیار بالاتری نسبت به مرتبه همگرایی نرم‌های خطا از خود نشان می‌دهد و این حتی برای شرایط اولیه با رده مشتق‌پذیری پایین و روش‌های بدون پالایه فضایی نیز صادق است. این کاهش خطا مصنوعی است و دلیل آن تقارن‌های مسئله و وابستگی خطای پایداری به محل قرارگیری زنگوله کسینوسی است که در سری زمانی میانگین بهنجار شده نیز قابل مشاهده است (شکل ۱۱). بنابراین، در تهیه شکل ۸ از بیشینه دوازده روزه این کمیت استفاده شده است تا تحلیل‌ها به واقعیت نزدیک‌تر باشند. مرتبه همگرایی میانگین بهنجار شده در روش‌های RK4-CS2 و LF-PR1(3,2)_{iii}-CS2 برابر ۲ بوده و تحت تأثیر رده مشتق‌پذیری میدان $\mathcal{C}^1$ یا به کارگیری پالایه قرار ندارد. مرتبه عملی روش‌های مرتبه بالا در آزمون فرارفت زنگوله کسینوسی $\mathcal{C}^1$ ، در حالت بدون پالایه بین ۲ تا ۳ بوده و با به کارگیری پالایه به حدود ۴ افزایش می‌یابد. در اینجا، پایین بودن رده مشتق‌پذیری مسئله، مرتبه همگرایی میانگین بهنجار شده را به ۲ محدود نکرده است. با این حال رده مشتق‌پذیری بر مرتبه همگرایی میانگین بهنجار شده بی‌تأثیر نیست. با مقایسه دو شکل ۱۲-ج و ۱۲-د می‌توان تأثیر کاهش رده مشتق‌پذیری را بر روش‌های مرتبه بالا مشاهده کرد. در آزمون فرارفت زنگوله کسینوسی $\mathcal{C}^3$ ، روش‌های RK4-CS6 و LF-PR1(3,2)_{iii}-CS6 مرتبه‌های بالاتر از ۶ از خود نشان می‌دهند. نکته قابل توجه دیگر این که، در شکل ۸ در تمامی حالت‌ها، منحنی‌های مربوط به دو روش زمانی RK4 و LF-PR1(3,2)_{iii} تقریباً بر هم منطبق هستند و به نظر می‌رسد خطای ناپایداری روش‌های زمانی در مقایسه با خطای پایداری ناشی از گسسته‌سازی مکانی مکانی ناچیز باشد.



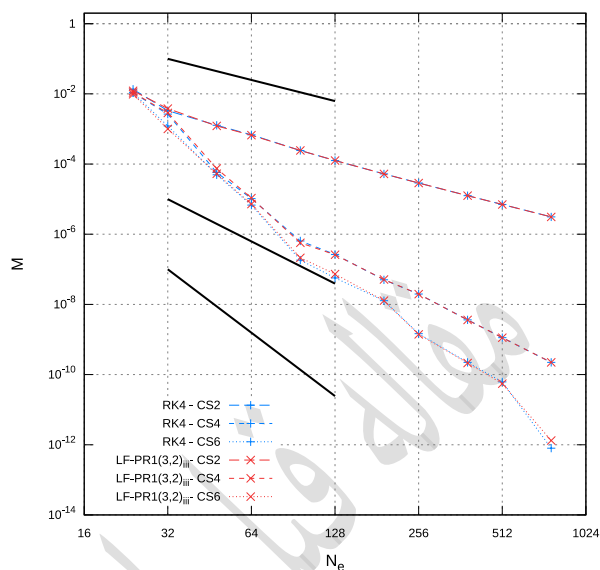
(ب) $\mathcal{C}^1$ بدون پالایه فضایی.



(الف) $\mathcal{C}^3$ بدون پالایه فضایی.



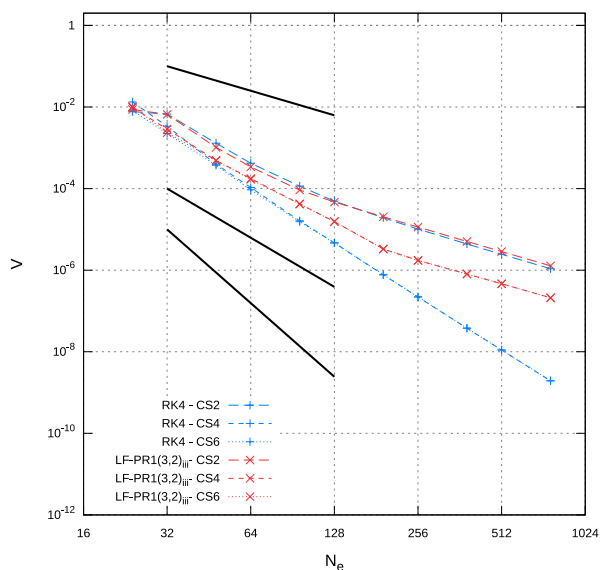
(د) C^1 با پالایه کامل مرتبه ۱۰.



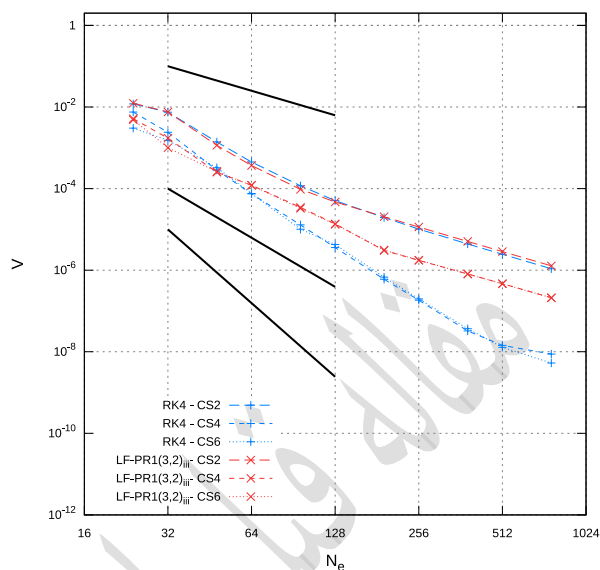
(ج) C^3 با پالایه کامل مرتبه ۱۰.

شکل ۸. همگرایی بیشینه دوازده روزه میانگین بهنجار شده (M) حل آزمون گردش جسم صلب زنگوله کسینوسی C^3 (هریس و همکاران، ۲۰۱۱) و زنگوله کسینوسی C^1 (ویلیامسون و همکاران، ۱۹۹۲) برای روش های مکانی تفاضل متناهی صریح مرتبه های ۲، ۴ و ۶ در کنار روش های زمانی RK4 و LF-PR1(3,2)_{iii} در دو حالت بدون پالایه فضایی (الف و ب) و با پالایه کامل مرتبه ۱۰ (ج و د). خطوط پررنگ مرتبه های ۲، ۴ و ۶ را نشان می دهند.

در نتایج به دست آمده در آزمون کوتاه مدت گردش جسم صلب، رده مشتق پذیری میدان $\mathcal{H}^1$ جز در یک مورد که در ادامه به آن اشاره خواهد شد، تأثیر قابل توجهی بر مرتبه همگرایی واریانس بهنجار شده نداشت. بنابراین در شکل ۹ تنها نتایج مربوط به زنگوله کسینوسی C^1 نشان داده شده اند. واریانس بهنجار شده (شکل ۹) در روش های LF-PR1(3,2)_{iii}-CSx و RK4-CS2 دارای مرتبه ۲ بوده و به کارگیری پالایه فضایی تأثیری بر آن ندارد. در صورت به کارگیری پالایه فضایی، مرتبه همگرایی واریانس بهنجار شده در روش های RK4-CS4 و RK4-CS6 حدود ۵ است. در حالت بدون پالایه این مقدار به حدود ۴/۳ کاهش می یابد. البته در فرارفت زنگوله کسینوسی C^1 مرتبه عملی روش های مرتبه بالای بدون پالایه کاهش شدیدی در تفکیک های بالا از خود نشان می دهد (شکل ۹-الف) و در تفکیک $N_e = 768$ به حدود ۱ تا ۲ می رسد. همان طور که پیش تر ذکر شد، این مسئله مربوط به انباشت واریانس در طول موج های کوچک و بروز خطای دگرنامی است که در صورت ادامه شبیه سازی منجر به ناپایداری غیرخطی خواهد شد. البته این مسئله برای همه روش های بدون پالایه به کاررفته در این کار صادق است و تنها مقیاس زمانی و شدت آن متفاوت است. پایداری عددی روش ها در زیربخش بعد به کمک آزمون بلندمدت بررسی شده است.



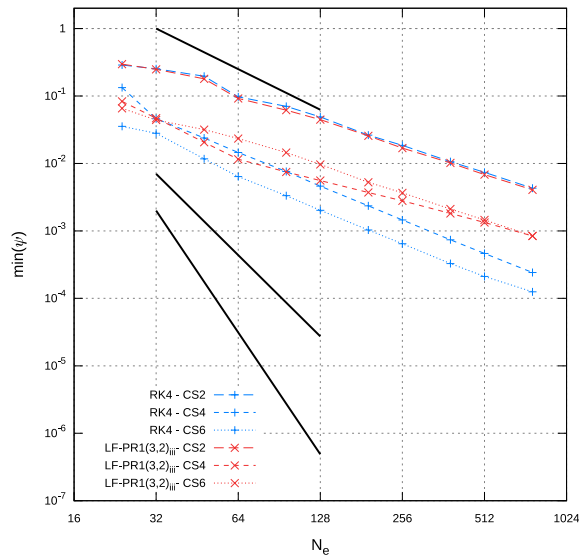
(ب) با پالایه کامل مرتبه ۱۰.



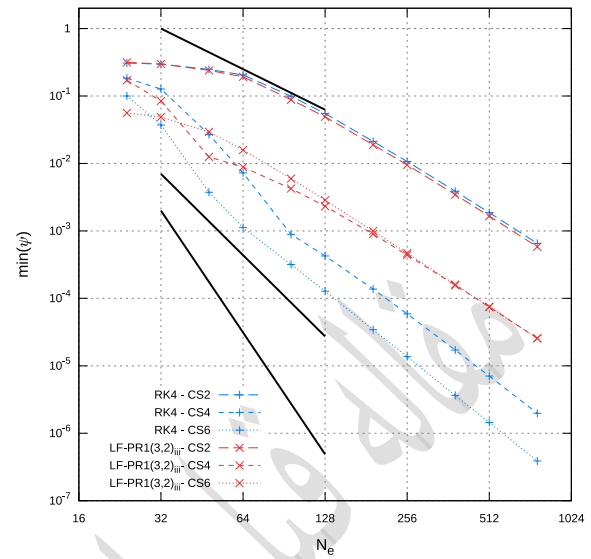
(الف) بدون پالایه فضایی.

شکل ۹. همگرایی بیشینه دوازده روزه واریانس بهنجارشده (V) حل آزمون گردش جسم صلب زنگوله کسینوسی C^1 برای روش های مکانی تفاضل متناهی صریح مرتبه های ۲، ۴ و ۶ در کنار روش های زمانی RK4 و LF-PR1(3,2)_{III} در دو حالت (الف) بدون پالایه فضایی و (ب) با پالایه کامل مرتبه ۱۰. خطوط پررنگ مرتبه های ۲، ۴ و ۶ را نشان می دهند.

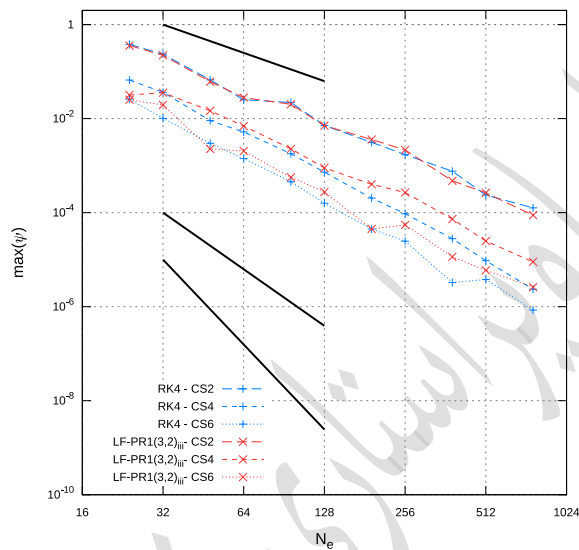
کمینه بهنجارشده (ویلیامسون و همکاران، ۱۹۹۲؛ معادله ۸۹) بر خلاف واریانس بیشتر تحت تأثیر رده مشتق پذیری مسئله است. دلیل این امر قرار گرفتن محل کاهش رده مشتق پذیری در کمینه میدان ψ (معادله ۱۳) است. به کارگیری پالایه تأثیر قابل توجهی بر مرتبه همگرایی کمینه و بیشینه بهنجارشده ندارد. بنابراین در شکل ۱۰ تنها به نمایش نتایج روش های بدون پالایه اکتفا شده است. برای زنگوله کسینوسی C^3 ، مرتبه کمینه بهنجارشده در روش های RK4-CS4 و RK4-CS6 حدود ۳/۱ و مرتبه سایر روش ها حدود ۲/۵ است. این مقادیر برای زنگوله کسینوسی C^1 ، به ترتیب برابر ۱/۵ و حدود ۱/۳ هستند. با توجه به اینکه در این کار از روش های حفظ شکل استفاده نشده است و بیشینه میدان ψ در همسایگی نقاط کاهش رده مشتق پذیری قرار ندارد، می توان انتظار داشت که همگرایی بیشینه بهنجارشده (ویلیامسون و همکاران، ۱۹۹۲؛ معادله ۸۸) رفتاری تا حدی شبیه به نرم های خطا داشته باشد. مرتبه همگرایی بیشینه بهنجارشده در روش های LF-PR1(3,2)_{III}-CSx و RK4-CS2 حدود ۲/۵ تا ۳ است و رده مشتق پذیری تأثیر چندانی بر آن ندارد (شکل ۱۰). تأثیر رده مشتق پذیری اما در روش های RK4-CS4 و RK4-CS6 قابل توجه است. در این دو روش بیشینه بهنجارشده برای زنگوله های کسینوسی C^1 و C^3 به ترتیب مرتبه هایی در حدود ۵ و ۳ دارد.



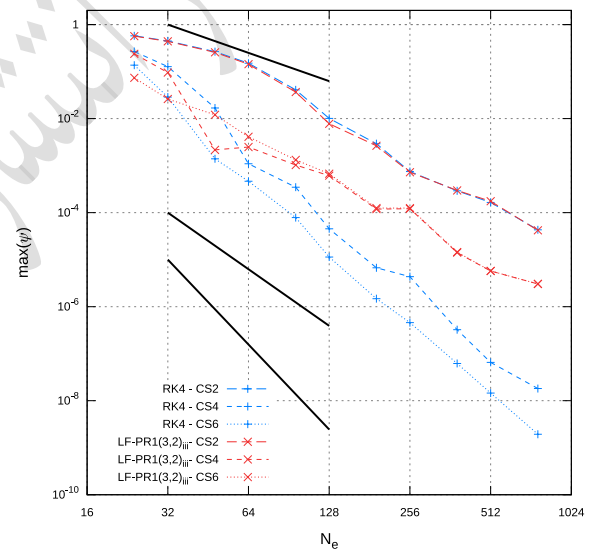
(ب) کمینه بهنجارشده زنگوله $\mathcal{C}^1$.



(الف) کمینه بهنجارشده زنگوله $\mathcal{C}^3$.



(د) بیشینه بهنجارشده زنگوله $\mathcal{C}^1$.



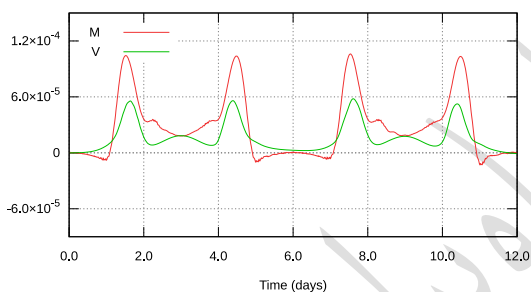
(ج) بیشینه بهنجارشده زنگوله $\mathcal{C}^3$.

شکل ۱۰. همگرایی (بیشینه دوازده‌روزه) کمینه بهنجارشده ((الف) و (ب)) و بیشینه بهنجارشده ((ج) و (د)) میدان ψ در حل آزمون گردش جسم صلب زنگوله‌های کسینوسی $\mathcal{C}^1$ و $\mathcal{C}^3$ برای روش‌های مکانی تفاضل متناهی صریح مرتبه‌های ۲، ۴ و ۶ در کنار روش‌های زمانی RK4 و LF-PR1(3,2)iii. بدون پالایه فضایی. خطوط پررنگ مرتبه‌های ۲، ۴ و ۶ را نشان می‌دهند.

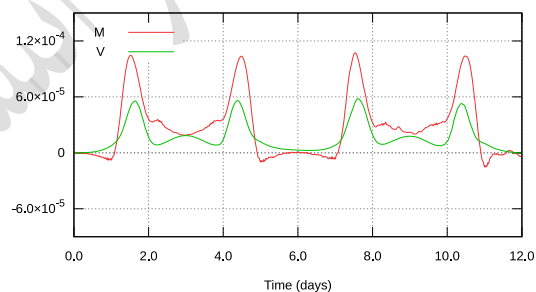
با توجه به آنچه گفته شد می‌توان نتیجه گرفت که به کارگیری عملگرهای تفاضل متناهی مرتبه بالا برای مشتق‌های مکانی حتی اگر به دلیل پایین بودن مرتبه روش زمانی یا رده مشتق‌پذیری مسئله به مرتبه عملی بالا در نرُم‌های خطا منجر نشود، می‌تواند مرتبه همگرایی میانگین و واریانس بهنجارشده را افزایش داده و خواص پایستاری مدل را، به‌خصوص در تفکیک‌های بالاتر، بهبود بخشد.

شکل ۱۱ سری‌های زمانی میانگین و واریانس بهنجارشده (ویلیامسون و همکاران، ۱۹۹۲؛ معادله‌های ۸۶ و ۸۷) روش‌های مکانی مختلف با روش زمانی RK4 را در دو حالت با و بدون پالایه نشان می‌دهد. سری‌های زمانی روش RK4-CS2 در این دو حالت تفاوت واضحی با هم ندارند. این

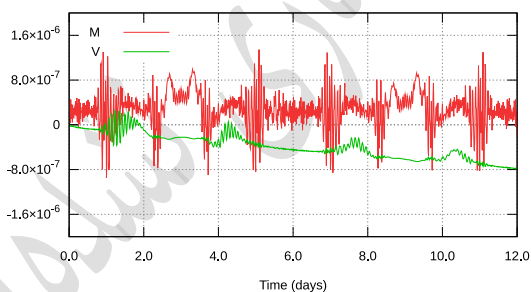
نمودارها برخلاف نمودارهای مربوط به روش‌های مرتبه‌بالا ساختاری هموار دارند و نوسان‌های با بسامد بالا در آنها دیده نمی‌شود. تقارن‌های ساختاری هر دو سری زمانی (میانگین و واریانس) می‌تواند نشانی از خطای ردگذاری شبکه (grid imprinting) باشد. این بدین معنا است که در شبکه مکعب کره پیاده‌سازی شده، محل قرارگیری زنگوله کسینوسی مقادیر میانگین و واریانس بهنجارشده را تحت تأثیر قرار می‌دهد. میانگین‌های بهنجارشده روش‌های RK4-CS4 و RK4-CS6 در حالت بدون پالایه، نوسان و رشد شدیدی را در نیمه دوم دوره شبیه‌سازی از خود نشان می‌دهند. این تغییرات با کاربست پالایه به طور کامل حذف می‌شوند. در نمودارهای مربوط به صورت با پالایه این روش‌ها (شکل‌های ۱۱-ه و ۱۱-و) پدیده جالبی قابل مشاهده است. میانگین بهنجارشده در محدوده‌های زمانی قرارگیری زنگوله در زوایای گردش حدود $\frac{\pi}{4}n + \frac{\pi}{8}$ رادیان نسبت به موقعیت اولیه (مرکز یکی از وجوه مکعب کره) دامنه بسیار بزرگ‌تری نسبت به زمان‌های دیگر دارد، که می‌تواند نمونه‌ای از خطای ردگذاری شبکه تلقی گردد. البته همان گونه که در شکل ۸ مشاهده شد، دامنه این جهش‌ها با مرتبه‌های مورد انتظار کاهش می‌یابد. در مجموع، مقدار میانگین بهنجارشده در هیچ یک از روش‌های دارای پالایه تغییر نظام‌مندی از خود نشان نمی‌دهد. واریانس بهنجارشده در روش‌های دارای پالایه جز نوسان‌های گذرا با دامنه محدود، روند کاهشی خطی دارد که به دلیل حذف واریانس از مقیاس‌های کوچک توسط پالایه است. در روش‌های بدون پالایه تغییرات واریانس بهنجارشده نامنظم‌تر و بزرگ‌تر است. در شکل ۱۱-ج مشاهده می‌شود که پس از روز دهم، واریانس بهنجارشده دارای روند افزایشی است که می‌تواند مقدمه‌ای بر بروز ناپایداری عددی باشد.



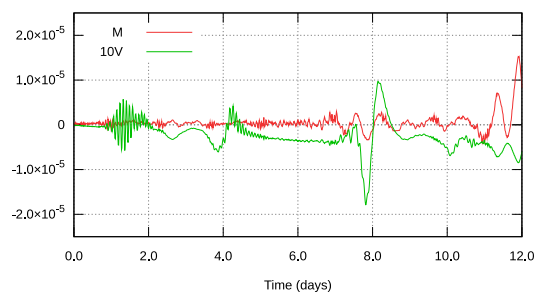
RK4-CS2 – F10 (د)



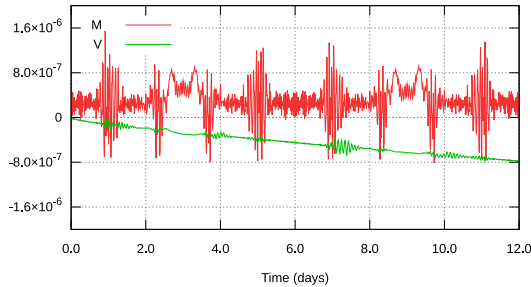
RK4-CS2 – No Filter (الف)



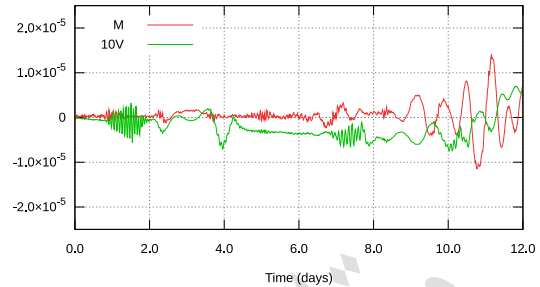
RK4-CS4 – F10 (ه)



RK4-CS4 – No Filter (ب)



و) RK4-CS6 – F10



ج) RK4-CS6 – No Filter

شکل ۱۱. سری زمانی میانگین (M) و واریانس (V) بهنجار شده ارتفاع برای نتایج آزمون گردش جسم صلب زنگوله کسینوسی C^1 . روش زمانی RK4. تفکیک $N_e = 192$. عملگرهای تفاضل متناهی مرکزی مرتبه ۲، ۴ و ۶ در دو حالت بدون پالایه (به ترتیب الف)، (ب) و (ج) و با پالایه فضایی مرتبه ۱۰ (به ترتیب د)، (ه) و (و). در مواردی که نمودارها از نظر مقدار بزرگی بسیار متفاوت هستند، نمودار کوچک تر به صورت بزرگ نمایی شده رسم شده و ضریب بزرگ نمایی در کلید نمودار آورده شده است.

۵-۲ آزمون بلندمدت

در بررسی نتایج آزمون بلندمدت گردش جسم صلب برای معادله فرارفت، نخست پایداری و سپس دقت روش ها مورد توجه قرار می گیرد. هدف اول آزمون بلندمدت برای معادله فرارفت یافتن کمینه میرایی لازم برای پایداری حل عددی است. بالاترین تفکیک به کاررفته در اینجا حدود 0.469° ($N_e = 192$) است. این انتخاب به دلیل بالا بودن هزینه محاسباتی این آزمون صورت گرفته است.

جدول ۵ مقادیر پارامتر پالایه کسری مرتبه ۱۰ را که برای پایداری حل لازم است، به دست می دهد. توجه شود که بزرگ تر بودن مقدار پارامتر پالایه، به معنای میرایی کمتر است. به کارگیری مقدار تابع انتقال در کوتاه ترین طول موج به عنوان پارامتر پالایه کسری، مقایسه میزان میرایی پالایه های مختلف را آسان می کند. با این حال، مقایسه میزان میرایی ناشی از کاربست یک پالایه با سایر صورت های افزودن میرایی مصنوعی به مدل (مانند فرابخش)، می تواند پیچیده باشد. بحث مفصل در این زمینه را به مقاله ای دیگر موکول می کنیم. در اینجا از مقیاس زمانی میرایی کوتاه ترین موج دوبعدی، یعنی موج $(2\Delta x, 2\Delta x)$ ،

(۱۴)

$$\tau = -\frac{\Delta t}{2 \ln \left[T \left(\frac{\pi}{\Delta x} \right) \right]}$$

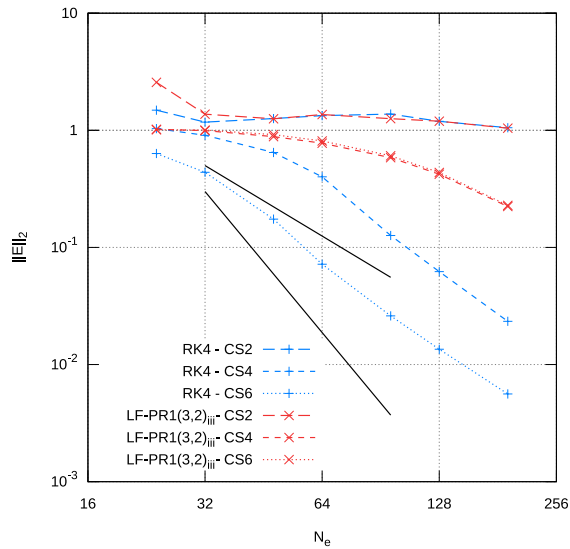
برای مقایسه میزان میرایی روش های مختلف استفاده می کنیم. مقیاس زمانی میرایی در روش رونگه-کوتا از حدود ۵ گام زمانی در تفکیک های پایین $(N_e = 16)$ تا ۵۰ گام زمانی در تفکیک های میانی $(N_e = 192)$ متغیر است. مقیاس زمانی میرایی لازم برای پایداری بلندمدت روش LF-PR1(3,2)ⁱⁱⁱ حدود ۴ گام زمانی در تفکیک های پایین و ۲۵ گام زمانی در تفکیک های میانی است. با توجه به این مسئله و نسبت گام های زمانی استفاده شده برای دو روش زمانی، می توان نتیجه گرفت که پایداری بلندمدت روش LF-PR1(3,2)ⁱⁱⁱ به میرایی مصنوعی بسیار بیشتری نسبت به روش RK4 نیاز دارد. همچنین، اگرچه در آزمون های کوتاه مدت، نشانه های بروز ناپایداری محاسباتی تنها در روش های مرتبه بالا دیده شد، نتایج آزمون بلندمدت (جدول ۵) نشان می دهند که به طور کلی روش های مرتبه بالاتر برای پایداری به میرایی کمتری نیاز دارند.

جدول ۵. مقادیر لازم برای پارامتر پالایه کسری صریح مرتبه ۱۰ برای پایداری بلندمدت مدل فرارفت. مقادیر پایین تر به معنای پخش بیشتر است. این مقادیر با دو شرط اولیه (زنگوله‌های کسینوسی C^1 و C^3) محاسبه شده‌اند. تنها در ۳ مورد (پررنگ) شرایط اولیه در پارامتر تعیین شده موثر بود.

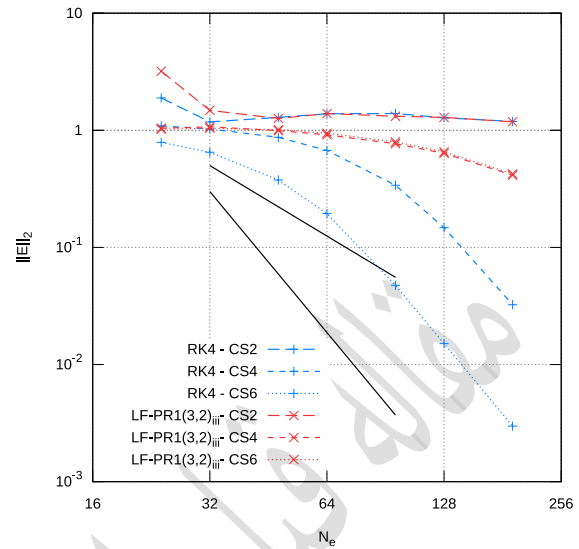
N_e	RK4			LF-PR1(3,2) ⁱⁱⁱ		
	CS2	CS4	CS6	CS2	CS4	CS6
۲۴	۰/۹۳	۰/۹۵	۰/۹۵	۰/۹۰	۰/۹۴	۰/۹۴
۳۲	۰/۹۱	۰/۹۷	۰/۹۶	۰/۹۱	۰/۹۳	۰/۹۴
۴۸	۰/۹۱	۰/۹۷	۰/۹۷	۰/۹۰	۰/۹۳	۰/۹۴
۶۴	۰/۹۴	۰/۹۸	۰/۹۸	۰/۹۲	۰/۹۴	۰/۹۵
۹۶	۰/۹۶	۰/۹۸	۰/۹۸	۰/۹۵	۰/۹۶	۰/۹۷
۱۲۸	۰/۹۷	۰/۹۸	۰/۹۸	۰/۹۶	۰/۹۷	۰/۹۷
۱۹۲	۰/۹۷	۰/۹۹	۰/۹۹	۰/۹۷	۰/۹۸	۰/۹۸

شکل ۱۲ نرم ۲ خطا در آزمون گردش جسم صلب زنگوله C^1 را پس از ۱۰۰ دور گردش در $t = 1200$ days نشان می‌دهد. می‌توان مشاهده کرد که خطای روش‌های RK4-CS2 و LF-PR1(3,2)ⁱⁱⁱ-CS2 (با مرتبه ۲ و خطای مکانی غالب) در تمامی تفکیک‌های ارائه‌شده در اینجا، به حالت اشباع رسیده است. روش‌های LF-PR1(3,2)ⁱⁱⁱ-CS4 و LF-PR1(3,2)ⁱⁱⁱ-CS6 که هر دو روش‌های مرتبه ۲ (خطای زمانی غالب) هستند، در بازه تفکیک (N_e) از ۶۴ تا ۱۹۲ کاهش خطا با مرتبه‌ای فزاینده (از ۰/۳۴ تا ۱/۳۸) را نشان می‌دهند. اما حل روش‌های RK4-CS4 و RK4-CS6 که روش‌های مرتبه ۴ به ترتیب با خطای مکانی و زمانی غالب هستند، در گستره بزرگ‌تری از تفکیک‌ها، خطای مناسبی دارند. مرتبه این روش‌ها در بازه تفکیک (N_e) ۶۴ تا ۱۹۲ میان ۲ تا ۳ است.

البته در تحلیل نتایج آزمون بلندمدت باید دقت داشت که اگرچه در زمان انتهای شبیه‌سازی خطای روش‌های مرتبه ۲ بسیار بالا بود، اما این به معنای مناسب نبودن روش‌های مرتبه پایین برای مدل‌های اقلیمی نیست. در واقع مدت زمانی که یک روش لازم است طی آن در آزمون‌های موردی بدون چشمه و چاهه (همچون آزمون‌های به کاررفته در اینجا) جوابی قابل قبول به دست دهد، متناسب با طول عمر کمیت فرارفت داده‌شده (در کاربرد واقعی) است و نه مدت شبیه‌سازی.



(ب) زنگوله کسینوسی $\mathcal{C}^1$.



(الف) زنگوله کسینوسی $\mathcal{C}^3$.

شکل ۱۲. همگرایی نرم ۲ خطا در آزمون بلندمدت گردش جسم صلب (الف) زنگوله کسینوسی $\mathcal{C}^3$ و (ب) زنگوله کسینوسی $\mathcal{C}^1$ در $t = 1200$ days برای روش‌های مکانی تفاضل متناهی صریح مرتبه‌های ۲، ۴ و ۶ در کنار روش‌های زمانی RK4 و LF-PR1(3,2)_{III}. پالایه فضایی کسری مرتبه ۱۰ با کمینه میرایی مورد نیاز (جدول ۵). خطوط پررنگ مرتبه‌های ۲ و ۴ را نشان می‌دهند.

۶ بحث

در پیاده‌سازی شبکه مکعب کره در کار حاضر از درون‌یابی یک‌بعدی مبتنی بر فاصله کروی نقاط برای اتصال وجوه به هم استفاده شده است. مرتبه درون‌یابی در اینجا بالاترین مرتبه ممکن با توجه به مقدار N_p انتخاب شده است و بنابراین همواره بالاتر از مرتبه عملگرهای تفاضل متناهی صریح به کاررفته برای مشتق است (جدول ۲). بنابراین در نگاه اول انتظار آن نمی‌رود که خطای درون‌یابی در رفتار مدل تأثیرگذار باشد. بررسی نتایج نشان از تأثیر سه عامل بر آهنگ همگرایی نرم ۲ خطا دارد: مرتبه اسمی عملگرهای مشتق و مرتبه اسمی روش انتگرال‌گیری زمانی و رده مشتق‌پذیری مسئله. یعنی در بررسی نرم ۲ خطا، رفتار مدل مطابق انتظار بوده و نشانی از تأثیر خطای درون‌یابی نقاط ضمیمه مشاهده نمی‌شود. در بررسی خطای پایداری، میانگین و واریانس بهنجار شده مرتبه‌هایی متناسب با مرتبه اسمی عملگرهای تفاضل متناهی مشتق دارند. بنابراین در این دو شاخص نیز نمی‌توان اثری از خطای درون‌یابی مشاهده کرد.

البته باید توجه داشت که تغییر دستگاه مختصات در مرز وجوه مکعب کره به دو صورت بر حل اثرگذار است: اول از طریق خطای درون‌یابی در نقاط ضمیمه، که در بالا بحث شد و دوم از طریق تغییر الگوی خطا در مرزها. این تغییر الگو به دلیل وابستگی خطای مدل به دستگاه مختصات محلی است و در مسائل پیچیده‌تر می‌تواند اثر قابل توجهی بر حل داشته باشد.

۷ جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

در کار حاضر، حل عددی معادله فرارفت به روش تفاضل متناهی بر روی شبکه مکعب کره مورد بررسی قرار گرفت. در آزمون‌های مختلف، سه عامل اصلی موثر بر مرتبه همگرایی عملی حل یعنی (۱) مرتبه همگرایی روش مکانی، (۲) مرتبه همگرایی روش زمانی و (۳) رده مشتق‌پذیری مسئله

مورد بررسی قرار گرفتند. در حل معادله فرارفت نشان داده شد که حتی اگر به دلیل رده مشتق‌پذیری پایین شرایط اولیه یا مرتبه پایین روش زمانی، مرتبه همگرایی عملی حل پایین باشد، به کارگیری روش‌های مکانی مرتبه بالا می‌تواند خواص پایستاری آن را بسیار بهبود بخشد. نتایج آزمون‌های موردی نشان‌دهنده امکان پیاده‌سازی مدل تفاضل متناهی مرتبه بالا برای حل معادله فرارفت بر روی شبکه مکعب کره است. به هر روی، رفتار روش‌های عددی مورد بررسی، اعم از مرتبه پایین یا مرتبه بالا، مطابق انتظار بود. این امر نشان از پیاده‌سازی مناسب این روش‌ها بر روی شبکه مکعب کره دارد.

تشکر و قدردانی

نویسندگان بدین وسیله از جان توبرن (John Thuburn) به خاطر پیشنهادات مهم‌اش در مراحل مختلف این کار، از جمله ایده به کارگیری پالایه‌های کسری قدردانی می‌کنند.

مراجع

- Brachet, M. (2018). Schémas compacts hermitiens sur la sphère: applications en climatologie et océanographie numérique. PhD thesis, Université de Lorraine.
- Brachet, M. and J.-P. Croisille (2022). A center compact scheme for the shallow water equations on the sphere. *Computers & Fluids* 236, 105286.
- Durran, D. R. (2010). *Numerical Methods for Fluid Dynamics: With Applications to Geophysics*. New York, NY: Springer.
- Harris, L. M., P. H. Lauritzen, and R. Mittal (2011). A flux-form version of the conservative semi-Lagrangian multi-tracer transport scheme (CSLAM) on the cubed sphere grid. *Journal of Computational Physics* 230(4), 1215–1237.
- Kageyama, A. and T. Sato (2004). “Yin-Yang grid”: An overset grid in spherical geometry. *Geochemistry, Geophysics, Geosystems* 5(9), Q09005.
- Kent, J., P. A. Ullrich, and C. Jablonowski (2014). Dynamical core model intercomparison project: Tracer transport test cases. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 140(681), 1279–1293.
- Levy, M. N., R. D. Nair, and H. M. Tufo (2009). A high-order element-based Galerkin method for the barotropic vorticity equation. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 59(12), 1369–1387.
- Nair, R., J. Côté, and A. Staniforth (1999). Cascade interpolation for semi-Lagrangian advection over the sphere. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 125(556), 1445–1468.
- Nair, R. D., S. J. Thomas, and R. D. Loft (2005). A discontinuous Galerkin transport scheme on the cubed sphere. *Monthly Weather Review* 133(4), 814–828.
- Phillips, N. A. (1957). A map projection system suitable for large-scale numerical weather prediction. *Journal of the Meteorological Society of Japan. Ser. II* 35A, 262–267.
- Purser, R. J. (1998). Non-standard grids. In *Seminar on Recent Developments in Numerical Methods for Atmospheric Modelling*, 7-11 September 1998, pp. 44–72.
- Purser, R. J. and M. Rančić (1997, March). Conformal octagon: An attractive framework for global models offering quasi-uniform regional enhancement of resolution. *Meteorology and Atmospheric Physics* 62(1), 33–48.
- Purser, R. J. and M. Rančić (1998). Smooth quasi-homogeneous gridding of the sphere. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 124(546), 637–647.
- Rančić, M., R. J. Purser, and F. Mesinger (1996). A global shallow-water model using an expanded spherical cube: Gnomonic versus conformal coordinates. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 122(532), 959–982.
- Ronchi, C., R. Iacono, and P. Paolucci (1996). The “cubed sphere”: A new method for the solution of partial differential equations in spherical geometry. *Journal of Computational Physics* 124(1), 93–114.
- Rood, R. B. (2011). A perspective on the role of the dynamical core in the development of weather and climate models. In P. Lauritzen, C. Jablonowski, M. Taylor, and R. Nair (Eds.), *Numerical Techniques for Global Atmospheric Models*, pp. 513–537. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.
- Sadourny, R. (1972). Conservative finite-difference approximations of the primitive equations on quasi-uniform spherical grids. *Monthly Weather Review* 100(2), 136–144.
- Sadourny, R., A. Arakawa, and Y. Mintz (1968). Integration of the nondivergent barotropic vorticity equation with an icosahedral-hexagonal grid for the sphere. *Monthly Weather Review* 96(6), 351–356.
- Staniforth, A. and J. Thuburn (2012). Horizontal grids for global weather and climate prediction models: a review. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 138(662), 1–26.

- Taylor, M., J. Tribbia, and M. Iskandarani (1997). The spectral element method for the shallow water equations on the sphere. *Journal of Computational Physics* 130(1), 92–108.
- Thomas, S. J. and R. D. Loft (2000, Dec). Parallel semi-implicit spectral element methods for atmospheric general circulation models. *Journal of Scientific Computing* 15(4), 499–518.
- Thomas, S. J. and R. D. Loft (2002). Semi-implicit spectral element atmospheric model. *Journal of Scientific Computing* 17(1), 339–350.
- Thuburn, J. (2011). Conservation in dynamical cores: What, how and why? In P. Lauritzen, C. Jablonowski, M. Taylor, and R. Nair (Eds.), *Numerical Techniques for Global Atmospheric Models*, pp. 345–355. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.
- Thuburn, J., C. J. Cotter, and T. Dubos (2014). A mimetic, semi-implicit, forward-in-time, finite volume shallow water model: comparison of hexagonal–icosahedral and cubed-sphere grids. *Geoscientific Model Development* 7(3), 909–929.
- Williamson, D. L. (1968). Integration of the barotropic vorticity equation on a spherical geodesic grid. *Tellus* 20(4), 642–653.
- Williamson, D. L. (1970). Integration of the primitive barotropic model over a spherical geodesic grid. *Monthly Weather Review* 98(7), 512–520.
- Williamson, D. L., J. B. Drake, J. J. Hack, R. Jakob, and P. N. Swarztrauber (1992). A standard test set for numerical approximations to the shallow water equations in spherical geometry. *Journal of Computational Physics* 102(1), 211–224.
- Yazgi, D., A. R. Mohebalhojeh, and S. Ghader (2017). Using polynomial regression in designing the time filters for the leapfrog time-stepping scheme. *Monthly Weather Review* 145(5), 1779–1795.
- Zdunkowski, W. and A. Bott (2005). *Dynamics of the Atmosphere: A Course in Theoretical Meteorology*. Cambridge University Press.