

Stabilization of Vertical Gradient Calculation Against Random Noise in Potential Field Data Using Tikhonov Regularization

Amirnia, M.¹  | Roshandel Kahoo, A.¹   | Aghajani, H.¹ 

1. Department of Petroleum and Geophysics, Faculty of Mining, Petroleum and Geophysics Engineering, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran.

Corresponding Author E-mail: roshandel@shahroodut.ac.ir

(Received: 25 May 2025, Revised: 27 Sep 2025, Accepted: 18 Oct 2025, Published online: 16 Dec 2025)

Summery

Accurate calculation of vertical gradients in potential field data plays a vital role in geophysical surveys and subsurface explorations. These gradients, which are derived from gravity or magnetic field measurements, serve to enhance the resolution of anomaly boundaries and help differentiate between geological structures located at various depths. By sharpening the edges of anomalies, vertical gradients allow geophysicists to better understand the geometry and distribution of subsurface features such as faults, intrusive bodies, or mineral deposits. However, calculating these gradients is highly sensitive to the presence of random noise, which is an inevitable component of real-world data. This sensitivity becomes increasingly problematic when computing higher-order vertical gradients, where noise amplification can dominate the signal, leading to unstable, distorted signals and hence unreliable interpretations.

This study addresses the critical need to stabilize vertical gradient calculations in the presence of noise. It begins by analyzing the standard method of calculating vertical gradients in the frequency domain using Fourier transforms. While this approach is efficient and mathematically straightforward, it inherently increases the influence of high-frequency components, many of which represent noise rather than useful geological information. As a result, the final gradient estimates obtained through this method may be contaminated, especially in areas with complex geological settings or low signal-to-noise ratios. To overcome these limitations, the paper investigates two advanced stabilization techniques: Tikhonov regularization and upward continuation filtering.

Tikhonov regularization is a well-established method for addressing ill-posed inverse problems. In this context, it introduces a stabilizing constraint that penalizes overly sharp or erratic variations in the gradient estimates. This is achieved through the minimization of a cost function that includes both a data fidelity term and a regularization term that suppresses rapid changes. The strength of this regularization is controlled by a parameter that must be carefully selected. The paper evaluates two methods for determining this parameter: the norm C method and Morozov's discrepancy principle. These approaches help ensure a balance between suppressing noise and preserving meaningful geological detail in the gradient results.

Upward continuation filtering is another effective technique explored in this study. It works by projecting the data to a higher elevation, which naturally smooths out high-frequency (i.e., shallow or noisy) components. This filtering effect reduces the influence of noise and results in more stable and geologically interpretable gradient estimates, particularly for deeper structures.

The effectiveness of these methods is demonstrated using both synthetic and real geophysical datasets. A synthetic model involving a Bouguer anomaly at a 10-meter depth shows that Tikhonov regularization and upward continuation outperform conventional Fourier-based gradient calculations in terms of accuracy and noise resistance. Furthermore, real-world gravity data from Slovakia are used to validate the practical utility of these approaches. The improved clarity in detecting geological features such as faults and shear zones, underscores the value of stabilized gradient methods.

In conclusion, the study highlights the importance of using stabilization techniques for vertical gradient computation. Both Tikhonov regularization and upward continuation significantly improve the reliability and interpretability of gradient estimates, making them essential tools for modern geophysical data analyses and subsurface mapping.

Keywords: Vertical gradient; random noise; Tikhonov regularization; Morozov's discrepancy principle, upward continuation.

Cite this article: Amirnia, M., Roshandel Kahoo, A., & Aghajani, H. (2025). Stabilization of Vertical Gradient Calculation Against Random Noise in Potential Field Data Using Tikhonov Regularization. *Journal of the Earth and Space Physics*, 51(3), 549- 570. DOI: <http://doi.org/10.22059/jesphys.2025.394254.1007685>

E-mail: (1) minaamirnia91@gmail.com | haghajani@shahroodut.ac.ir



© Authors Retain the Copyright and Full Publishing Rights.

Publisher: University of Tehran Press.

DOI: <http://doi.org/10.22059/jesphys.2025.394254.1007685>

Print ISSN: 2538-371X
Online ISSN: 2538-3906

پایدارسازی محاسبه گرادیان قائم داده‌های میدان پتانسیل در مقابل نوفه تصادفی با استفاده از منظم‌سازی تیخونوف

مینا امیرنیا^۱ | امین روشندل کاهو^۱ | حمید آقاجانی^۱

۱. گروه نفت و ژئوفیزیک، دانشکده مهندسی معدن، نفت و ژئوفیزیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران.

رایانامه نویسنده مسئول: roshandel@shahroodut.ac.ir

(دریافت: ۱۴۰۴/۳/۴، بازنگری: ۱۴۰۴/۷/۵، پذیرش نهایی: ۱۴۰۴/۷/۲۶، انتشار آنلاین: ۱۴۰۴/۹/۲۵)

چکیده

محاسبه گرادیان قائم داده‌های میدان پتانسیل یکی از ابزارهای مهم در تفسیر داده‌های ژئوفیزیکی به شمار می‌رود که برای شناسایی مرزهای زیرسطحی و ویژگی‌های زمین‌شناسی استفاده می‌شود. یکی از چالش‌های اصلی در این محاسبات، تأثیر نوفه تصادفی است که موجب ناپایداری و کاهش دقت نتایج می‌شود. در این مقاله، روش‌های مختلف پایدارسازی محاسبه گرادیان قائم در برابر نوفه تصادفی شامل منظم‌سازی و فیلتر ادامه فراسو مورد بررسی قرار گرفته است. در روش منظم‌سازی، با استفاده از ضریب منظم‌ساز بهینه، تأثیر نوفه کاهش یافته و پایداری محاسبات در مقابل نوفه تصادفی به‌طور چشمگیری افزایش می‌یابد. فیلتر ادامه فراسو نیز به‌طور مؤثر اثر نوفه را کاهش می‌دهد، اما نتایج نشان می‌دهد که روش منظم‌سازی نسبت به آن پایداری بیشتری دارد. برای ارزیابی این روش‌ها، از داده‌های مصنوعی و واقعی استفاده شده است و نتایج نشان‌دهنده پایداری بیشتر روش‌های منظم‌سازی و فیلتر ادامه فراسو در مقایسه با روش تبدیل فوریه است. نتایج به‌دست آمده در داده‌های واقعی نیز بهبود قابل‌توجهی در دقت شناسایی لبه‌ها و ساختارهای زیرسطحی ارائه داده است. این مقاله، تأثیر انتخاب روش و تنظیم دقیق پارامترها در بهبود نتایج تفسیر داده‌های میدان پتانسیل را روشن می‌سازد و می‌تواند به‌عنوان ابزار مؤثری در مطالعات اکتشافی و تفسیر ساختارهای زمین‌شناسی مورد استفاده قرار گیرد.

واژه‌های کلیدی: گرادیان قائم، نوفه تصادفی، منظم‌سازی تیخونوف، اصل مغایرت موروزوف، ادامه فراسو.

۱. مقدمه

گسترده آن را در تفسیر ساختارهای زمین‌شناسی به کمک داده‌های میدان پتانسیل توصیف کرد (ایوجن، ۱۹۳۶). محاسبه گرادیان قائم، یکی از چالش‌های اساسی در پردازش و تفسیر داده‌های میدان پتانسیل است که همچنان به‌عنوان یک موضوع تحقیق در پژوهش‌های مختلف به آن پرداخته می‌شود. گرادیان قائم را می‌توان از داده‌های میدان پتانسیل با استفاده از قضیه گرین محاسبه کرد که یک رویکرد اساسی برای محاسبات عملی ارائه می‌دهد (کانتاس، ۱۹۵۹). به‌طور معمول، گرادیان قائم داده‌های میدان پتانسیل در حوزه فرکانس محاسبه می‌شود (بلکلی، ۱۹۹۶). این فرایند با اعمال یک عملگر یا فیلتر بر روی تبدیل فوریه داده میدان پتانسیل انجام می‌شود. عملگر گرادیان قائم در حوزه فرکانس

گرادیان قائم در اکتشافات ژئوفیزیکی به روش میدان پتانسیل دارای اهمیت زیادی است. از گرادیان قائم مرتبه اول و مرتبه‌های بالاتر برای شناسایی و ترسیم مرز بی‌هنجاری‌های زیرسطحی استفاده می‌شود (روشندل کاهو و همکاران، ۲۰۱۵؛ رضایی و همکاران، ۲۰۱۷). گرادیان‌های قائم وضوح داده‌های میدان پتانسیل را افزایش می‌دهند و به تشخیص لبه در این داده‌ها کمک می‌کنند که برای تفسیر ویژگی‌های زمین‌شناسی حیاتی است (روی، ۲۰۰۷). گرادیان قائم می‌تواند بین بی‌هنجاری‌های ایجاد شده توسط منابع در اعماق مختلف نیز تمایز قائل شود و در نتیجه به تفکیک ساختارهای زمین‌شناسی از نظر عمقی کمک کند (بلکلی، ۱۹۹۶). ایوجن در سال ۱۹۳۶ گرادیان قائم را معرفی کرد و مزایای

استناد: امیرنیا، مینا؛ روشندل کاهو، امین و آقاجانی، حمید (۱۴۰۴). پایدارسازی محاسبه گرادیان قائم داده‌های میدان پتانسیل در مقابل نوفه تصادفی با استفاده از منظم‌سازی تیخونوف.

مجله فیزیک زمین و فضا، ۵۱ (۳)، ۵۴۹ - ۵۷۰. DOI: <http://doi.org/10.22059/jesphys.2025.394254.1007685>

رایانامه: (۱) haghajani@shahroodut.ac.ir | minaamirnia91@gmail.com



ناشر: مؤسسه انتشارات دانشگاه تهران.

DOI: <http://doi.org/10.22059/jesphys.2025.394254.1007685>

۲. روش تحقیق

۲-۱. مبانی محاسبه گرادیان داده‌های میدان پتانسیل

داده‌های دو بعدی میدان پتانسیل را می‌توان به‌عنوان یک کمیت اسکالر به‌صورت $\phi(x, y, z)$ اندازه‌گیری شده بر روی سطح افق $z = 0$ در نظر گرفت که گرادیان‌های افقی رتبه n آنرا می‌توان به‌راحتی با استفاده از تبدیل فوریه مقادیر اندازه‌گیری شده در ایستگاه‌های برداشت به‌صورت رابطه (۱) محاسبه کرد (روی، ۲۰۰۷؛ بلکلی، ۱۹۹۶).

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n \phi(x, y, z)}{\partial x^n} &= \mathcal{F}^{-1}\{(ik_x)^n \mathcal{F}\{\phi(x, y, z)\}\}, \quad k_x \\ &= \frac{2\pi}{n_x \Delta x} (j - 1), \quad j = 1, 2, \dots, n_x. \\ \frac{\partial^n \phi(x, y, z)}{\partial y^n} &= \mathcal{F}^{-1}\{(ik_y)^n \mathcal{F}\{\phi(x, y, z)\}\}, \quad k_y \\ &= \frac{2\pi}{n_y \Delta y} (j - 1), \quad j = 1, 2, \dots, n_y. \end{aligned} \quad (1)$$

که در آن، k_x و k_y عدد موج و n_x و n_y تعداد برداشت‌ها با فواصل نمونه‌برداری Δx و Δy در راستای محورهای x و y می‌باشند. عبارت‌های $(ik_x)^n$ و $(ik_y)^n$ عملگرهای گرادیان افقی در حوزه تبدیل فوریه هستند. از آنجایی که داده‌های میدان پتانسیل به‌صورت کمیت اسکالر $\phi(x, y, z)$ بر روی سطح افق $z = 0$ اندازه‌گیری می‌شوند، بنابراین، می‌توان گرادیان قائم آنها را نیز محاسبه کرد. با استفاده از خواص تبدیل فوریه و تعریف گرادیان قائم به روش تفاضل محدود به‌ازای $\Delta z > 0$ ، از آنجایی که در داده‌های میدان پتانسیل $\nabla^2 \phi(x, y, z) = 0$ است، می‌توان گرادیان قائم درجه n -ام داده‌های میدان پتانسیل را به‌صورت رابطه (۲) نوشت (بلکلی، ۱۹۹۶).

$$\frac{\partial^n \phi(x, y, z)}{\partial z^n} = \mathcal{F}^{-1}\{|k|^n \mathcal{F}\{\phi(x, y, z)\}\} \quad (2)$$

در روش تبدیل فوریه، نتایج محاسبه گرادیان بر خلاف روش تفاضل محدود، به فاصله نمونه‌برداری وابستگی ندارد. این مزیت، به‌ویژه در گرادیان‌های مرتبه بالاتر بیشتر نمایان می‌شود. البته در محاسبه گرادیان قائم به روش تبدیل فوریه متداول (بلکلی)، به‌دلیل وابستگی نتایج به اندازه بردار عدد موج $|k|$ ، تقویت مؤلفه‌های با عدد موج‌های بالا که مربوط به طول موج‌های پایین هستند، رخ می‌دهد. از آنجایی

به‌صورت یک فیلتر بالا گذر عمل می‌کند و باعث تقویت بی‌هنجاری‌های با منبع کم عمق و نوفه تصادفی در گرادیان قائم می‌شود (بنی‌عامریان و همکاران، ۲۰۱۸). بنابراین، محاسبه گرادیان قائم در داده‌های میدان پتانسیل که معمولاً آغشته به نوفه تصادفی هستند، همواره با یک ناپایداری مواجه است که در گرادیان‌های مرتبه بالا شدت آن افزایش می‌یابد. روش‌های مختلفی برای پایدارسازی محاسبه گرادیان قائم داده‌های میدان پتانسیل در حضور نوفه تصادفی معرفی شده‌اند که می‌توان آنها را در چند گروه تقسیم‌بندی کرد: روش‌های مبتنی بر ادامه فراسو و معادلات تفاضلی (الوندی و همکاران، ۲۰۲۲؛ فلوریو و همکاران، ۲۰۰۶؛ اولیویرا و فام، ۲۰۲۲؛ ترن و نگوین، ۲۰۲۰)، روش‌های مبتنی بر فیلتر پایین‌گذر (بنی‌عامریان و همکاران، ۲۰۱۸) و روش‌های منظم‌سازی (پاستکا و همکاران، ۲۰۰۹؛ اولیویرا و همکاران، ۲۰۲۴). همچنین جیانگ و همکاران (۲۰۱۲) ضمن بررسی علل ناپایداری تبدیل فوریه در محاسبه گرادیان قائم، پیشنهاد دادند که به‌منظور پایدارسازی محاسبه گرادیان قائم در مقابل نوفه می‌توان به‌جای تبدیل فوریه از تبدیل کسینوس استفاده کرد (موسی‌پور یاسوری و ابراهیم‌زاده اردستانی، ۲۰۱۸؛ جیانگ و همکاران، ۲۰۱۲).

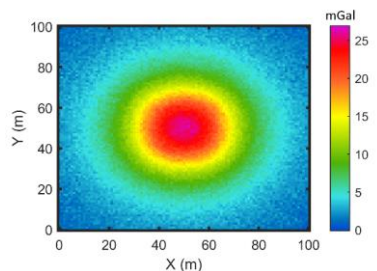
در این مقاله، ابتدا ضمن بررسی الگوریتم متداول محاسبه گرادیان قائم در حوزه فرکانس، عامل ناپایداری آن در حضور نوفه تصادفی مورد تحلیل قرار می‌گیرد. سپس روش‌های متداول و جدید معرفی شده شامل روش‌های منظم‌سازی و روش مبتنی بر فیلتر ادامه فراسو برای پایداری محاسبه گرادیان قائم داده‌های میدان پتانسیل در مقابل نوفه تصادفی مورد بررسی قرار می‌گیرند و فرایند پایدارسازی آنها شرح داده می‌شود. به‌منظور درک بهتر فرایند پایدارسازی در الگوریتم‌های مختلف از یک مثال مصنوعی ساده (بی‌هنجاری بوگه مربوط به یک بی‌هنجاری $30 \times 30 \times 30$ در عمق ۱۰ متر) استفاده می‌شود. درنهایت، به‌منظور ارزیابی روش‌های معرفی شده در پایدارسازی گرادیان قائم داده میدان پتانسیل در مقابل نوفه از داده‌های مصنوعی و واقعی استفاده می‌شود.

که مؤلفه‌های با طول موج پایین اغلب حاوی نوفه هستند، این روش به‌طور طبیعی باعث تقویت این نوفه‌ها می‌شود.

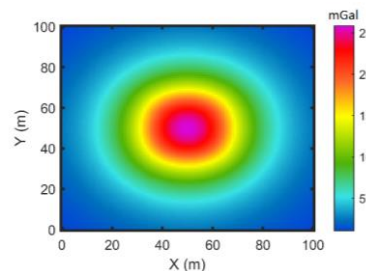
در شکل ۱ گرادیان قائم درجه یک گرانی بوگه مربوط به یک بی‌هنجاری $30 \times 30 \times 30$ متر با عمق بالایی ۱۰ متر، در دو حالت بدون نوفه و همراه نوفه (به میزان ۵ درصد) نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، عملگر محاسبه گرادیان قائم در حوزه فوریه $|k|$ ، سبب تقویت مؤلفه‌های با عدد موج بالا می‌شود. چنان‌چه داده میدان پتانسیل همانند شکل ۱-الف بدون نوفه باشد، عملگر محاسبه گرادیان قائم در حوزه تبدیل فوریه به دلیل عدم وجود مؤلفه‌های با عدد موج بالا در داده اولیه مطابق شکل ۱-ج تأثیر مخرب نخواهد داشت. اگر داده میدان پتانسیل مورد استفاده همانند شکل ۱-ب آغشته به نوفه تصادفی باشد، عملگر محاسبه گرادیان قائم در حوزه فوریه سبب تقویت مؤلفه‌های با عدد موج بالا نوفه می‌شود که در نهایت سبب تقویت نوفه در نتیجه نهایی گرادیان قائم مطابق شکل ۱-د می‌شود. به‌منظور مقایسه کمی نتایج، ضریب همبستگی و میانگین خطای مطلق بین گرادیان قائم در حالت بدون نوفه و حالت آغشته به نوفه محاسبه شد که به ترتیب 0.3328 و $1429/2819$ به دست آمد که بیانگر عملکرد ناپایدار روش تبدیل فوریه متداول در محاسبه گرادیان قائم در حضور نوفه تصادفی است. بدیهی است که

میزان تقویت نوفه تصادفی در گرادیان‌های قائم با درجات بالاتر به مراتب بیشتر می‌شود. این خاصیت محاسبه گرادیان قائم، منجر به ناپایداری در نتایج مراحل بعدی تفسیر داده‌های میدان پتانسیل نظیر لبه‌یابی می‌شود که از گرادیان قائم به‌عنوان ورودی استفاده می‌کنند.

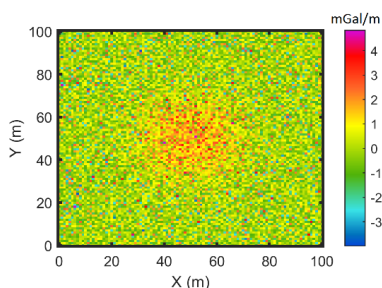
محاسبه گرادیان قائم داده‌های میدان پتانسیل به‌صورت پایدار در مقابل نوفه تصادفی از اهمیت به‌سزایی برخوردار است. همان‌طور که مشاهده شد، عملگر محاسبه گرادیان قائم در حوزه فوریه عامل اصلی تقویت نوفه با عددی‌های موج بالا است. از طرفی، ویژگی سراسری تبدیل فوریه سبب پخش‌شدگی نوفه محلی می‌شود. به عبارت دیگر، در اثر تبدیل فوریه، یک نوفه تصادفی در یک بخش کوچکی از داده تأثیر مخرب روی کل عدد موج‌ها می‌گذارد و باعث افزایش ناپایداری محاسبه گرادیان قائم در تمام محدوده برداشت داده می‌شود. به همین دلیل، اغلب روش‌های بهبود یافته با استفاده از اعمال یک فیلتر پایین‌گذر بر نتیجه گرادیان قائم یا اصلاح عملگر محاسبه گرادیان قائم در حوزه تبدیل فوریه از تقویت بیش از اندازه نوفه تصادفی جلوگیری می‌کنند. در ادامه، روش‌های نوین در بهبود محاسبه گرادیان قائم داده‌های میدان پتانسیل بررسی و مورد مقایسه قرار می‌گیرند.



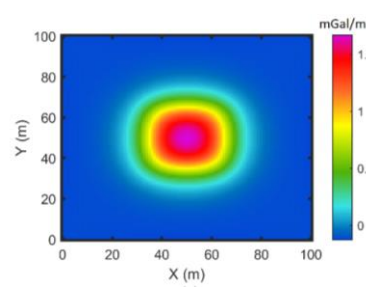
(ب)



(الف)



(د)



(ج)

شکل ۱. گرانی بوگه یک بی‌هنجاری $30 \times 30 \times 30$ در عمق ۱۰ متر و گرادیان قائم آن در حالت (الف) و (ج) بدون نوفه و (ب) و (د) آغشته به نوفه تصادفی با استفاده از روش بلکلی.

بهینه ضریب منظم‌ساز تیخونوف روش‌های مختلفی معرفی شده است که اغلب آنها براساس تخمین توزیع خطا در داده ورودی و انتخاب مقدار بهینه ضریب منظم‌ساز از طریق یک فرایند تکرارشونده عمل می‌کنند. در این مقاله، یک روش مبتنی بر نرم C و دو روش مبتنی بر اصل مغایرت موروزوف مورد بررسی و استفاده قرار می‌گیرد.

۲-۲-۱. روش مبتنی بر نرم C

در روش مبتنی بر نرم C ، به‌ازای مقادیر مختلف برای ضریب منظم‌ساز که معمولاً از یک سری هندسی مطابق $\alpha_i \in \{\alpha_0, \alpha_0 r, \alpha_0 r^2, \dots, \alpha_e = \alpha_0 r^n\}$ انتخاب می‌شوند، مقدار گرادیان قائم با استفاده از رابطه (۴) محاسبه می‌شود، که در آن، α_0 ، α_e و r به ترتیب مقدار اولیه، مقدار نهایی و قدر نسبت می‌باشند که معمولاً به ترتیب برابر با 10^{-10} ، 10^{20} و $1/1$ انتخاب می‌شوند (پاستکا و همکاران، ۲۰۰۹). سپس، نمودار نرم C اختلاف دو گرادیان قائم به‌ازای دو ضریب منظم‌ساز متوالی، به صورت $\|\phi_z^{\alpha(i)}(x, y, z) - \phi_z^{\alpha(i-1)}(x, y, z)\|_\infty$ محاسبه و بر حسب ضریب منظم‌ساز در مقیاس لگاریتمی ترسیم می‌شود. پاستکا و همکاران (۲۰۰۹) نشان دادند که مقدار بهینه ضریب منظم‌ساز منطبق، بر کمینه محلی نمودار ترسیم شده قرار می‌گیرد. در واقع، کمینه محلی نمودار مذکور در موقعیتی قرار گرفته است که میان دو حالت کمتر از حد تنظیم شده و بیشتر از حد تنظیم شده قرار دارد (پاستکا و همکاران، ۲۰۰۹).

در شکل ۲-الف نمودار نرم C اختلاف دو گرادیان قائم به‌ازای دو ضریب منظم‌ساز متوالی بر حسب ضریب منظم‌ساز برای گرانی بوگه آغشته به نوفه شکل ۱ نشان داده شده است. موقعیت کمینه محلی و مقدار بهینه α در نمودار مشخص شده است. گرادیان قائم به‌دست آمده از روش منظم‌سازی با استفاده از ضریب منظم‌ساز $a=7/6962$ در شکل ۲-ب نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، گرادیان قائم به‌دست آمده با استفاده از روش منظم‌سازی و مقدار ضریب منظم‌ساز حاصل از روش پاستکا و همکاران (۲۰۰۹) به مراتب از روش متداول بلکلی که در شکل ۱-د نشان داده شده است، در مقابل نوفه تصادفی پایدارتر است و نتیجه آن بسیار به

۲-۲. بهبود محاسبه گرادیان قائم با استفاده از منظم‌سازی مسئله تخمین گرادیان قائم داده‌های میدان پتانسیل، $\phi_z(x, y, z)$ به‌صورتی که در مقابل نوفه تصادفی پایدار باشد را می‌توان به‌صورت یک مسئله بهینه‌سازی مقید تعریف کرد که تابع هدف آن به‌صورت رابطه (۳) بیان می‌شود (اولیویرا و فام، ۲۰۲۲).

$$\min_{\phi_z(x, y, z)} \left\{ \underbrace{\|\phi_z(x, y, z) - \phi_z^0(x, y, z)\|^2}_{\text{misfit term}} + \alpha \underbrace{\|\nabla_h \phi_z(x, y, z)\|^2}_{\text{Stability term}} \right\} \quad (3)$$

که در آن، $\|\nabla_h \phi_z(x, y, z)\|^2 = \left(\frac{\partial \phi_z(x, y, z)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_z(x, y, z)}{\partial y} \right)^2$ است، $\phi_z^0(x, y, z)$ گرادیان قائم به‌دست آمده از روش متداول مانند روش بلکلی و $\|\cdot\|$ بیانگر نرم L_2 است. کمینه‌سازی عبارت اول در رابطه (۳) باعث کاهش میزان عدم‌برازش میان تخمین گرادیان قائم داده‌های میدان پتانسیل و مقدار گرادیان قائم به‌دست آمده از رابطه (۲) می‌شود. عبارت دوم در رابطه (۳) اندازه بردار گرادیان افقی حاصل از تخمین گرادیان قائم را نشان می‌دهد که مقدار آن بیانگر میزان ناهمواری گرادیان قائم تخمینی است و کمینه‌سازی آن باعث می‌شود که گرادیان قائم تخمین زده شده در مقابل نوفه تصادفی پایدار شود. پاسخ مسئله بهینه‌سازی رابطه (۳) به‌صورت رابطه (۴) به‌دست می‌آید (بنی‌عامریان و همکاران، ۲۰۱۸).

$$\phi_z^\alpha(x, y, z) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{|k|}{1 + \alpha|k|^2} \mathcal{F}[\phi(x, y, z)] \right\} \quad (4)$$

که α ضریب منظم‌ساز تیخونوف است که یک مقدار غیر منفی بوده و نقش به‌سزایی در پایدارسازی گرادیان قائم در مقابل نوفه دارد. مقدار بهینه آن باعث ایجاد تعادل میان عبارت عدم‌برازش و عبارت پایداری در مقابل نوفه می‌شود. چنانچه مقدار آن بزرگ‌تر از مقدار بهینه در نظر گرفته شود، باعث می‌شود که تأثیر عبارت پایدارسازی در مقابل نوفه بیشتر از تأثیر عبارت عدم‌برازش شود و در نهایت تضعیف بیش از حد مؤلفه‌های عدد موج بالا مربوط به سیگنال میدان پتانسیل را سبب می‌شود. اما اگر مقدار ضریب منظم‌ساز کمتر از مقدار بهینه انتخاب شود، تأثیر عبارت پایدارسازی در مقابل نوفه کمتر از تأثیر عبارت عدم‌برازش می‌شود و همچنان نوفه تأثیر مخرب بر گرادیان قائم را خواهد داشت. برای تعیین مقدار

صدق کند (اولیویرا و همکاران، ۲۰۲۴).

$$\|\phi_z^a(x, y, z) - \phi_z^0(x, y, z)\| = \epsilon, \quad \epsilon \geq E, \quad (5)$$

که در آن، $E = \|\phi_z^t(x, y, z) - \phi_z^0(x, y, z)\|$ نرّم دوم خطای میان گرادیان قائم متداول، $\phi_z^0(x, y, z)$ و گرادیان قائم صحیح، $\phi_z^t(x, y, z)$ است که حد پایین خطای داده‌ها است. به عبارتی دیگر، مقدار خطای داده‌ها به‌ازای هر مقدار انتخابی ضریب منظم‌ساز همواره بزرگ‌تر از حد پایین خطا است و فقط در حالت ایده‌آل، زمانی که مقدار ضریب منظم‌ساز به درستی انتخاب شود، گرادیان قائم منظم‌شده با گرادیان قائم واقعی برابر می‌شود و $\epsilon = E$ است. محاسبه گرادیان قائم صحیح، $\phi_z^t(x, y, z)$ در داده‌های واقعی عملاً امکان‌پذیر نمی‌باشد. اولیویرا و همکاران (۲۰۲۴) پیشنهاد دادند که می‌توان به‌جای آن با تقریب مناسبی از $\phi_z^{lp}(x, y, z)$ استفاده کرد که گرادیان قائم محاسبه شده به‌روش متداول بلکلی (۱۹۹۶) پس از اعمال یک فیلتر پایین‌گذر مطابق رابطه (۶) می‌باشد.

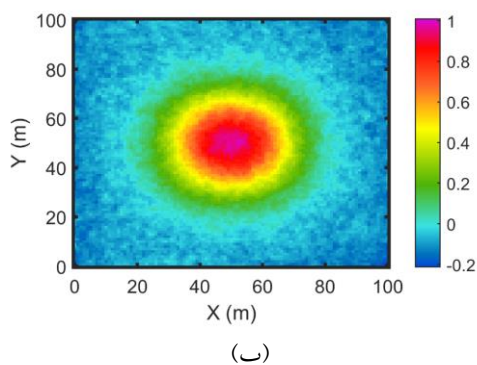
$$\phi^{lp}(x, y, z) = \mathcal{F}^{-1}\{lp(|\mathbf{k}|)\mathcal{F}[\phi(x, y, z)]\} \quad (6)$$

دو فیلتر باترورث و ادامه فراسو مطابق روابط (۷) و (۸)، از فیلترهای پایین‌گذر متداولی هستند که می‌توان از آنها استفاده کرد (گویینز، ۲۰۰۴).

$$lp(|\mathbf{k}|) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{k}{k_c}\right)^{2N}}} \quad (7)$$

$$lp(|\mathbf{k}|) = e^{-hk} \quad (8)$$

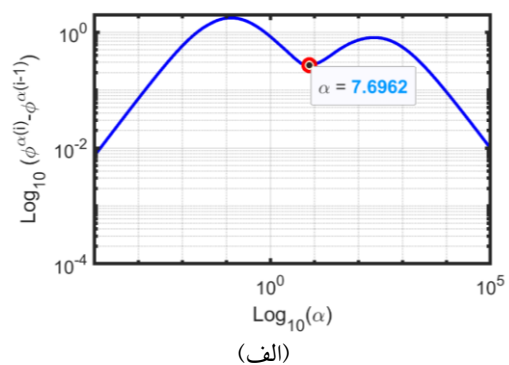
که در آن، k_c ، N و h به‌ترتیب عدد موج قطع، رتبه فیلتر و ارتفاع می‌باشند.



گرادیان قائم بدون نوفه شکل ۱-ج نزدیک است. به‌منظور مقایسه کمی نتایج، ضریب همبستگی و میانگین خطای مطلق بین گرادیان قائم واقعی (خروجی روش متداول برای داده بدون نوفه) و گرادیان قائم پایدارسازی شده به‌روش پاستکا و همکاران (۲۰۰۹) برای داده آغشته به نوفه محاسبه شد که به‌ترتیب ۰/۹۷۸۳ و ۹۵/۱۵۱۴ به‌دست آمد که بیانگر موفقیت عملکرد منظم‌سازی در محاسبه پایدار گرادیان قائم در حضور نوفه تصادفی است.

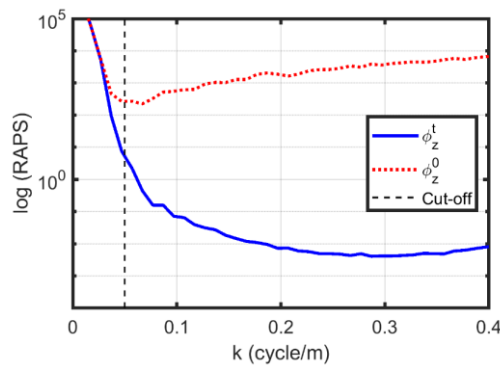
۲-۲-۲. روش مبتنی بر اصل مغایرت موروزوف

انتخاب ضریب منظم‌ساز در روش پاستکا و همکاران (۲۰۰۹) با استفاده از کمینه محلی نمودار نرّم C اختلاف دو گرادیان قائم به‌ازای دو ضریب منظم‌ساز متوالی است. در مدل‌های پیچیده زمین‌شناسی و داده‌های واقعی، این نمودار می‌تواند بیش از یک کمینه محلی داشته باشد. بنابراین، انتخاب ضریب منظم‌ساز به این روش می‌تواند یک مسئله سعی و خطا باشد. به‌همین دلیل روش‌های نوین دیگری به‌منظور انتخاب خودکار ضریب منظم‌ساز معرفی شدند که روش مبتنی بر اصل مغایرت موروزوف یکی از این روش‌ها است. اصل مغایرت موروزوف روشی است که به‌طور گسترده در مسائل وارون‌سازی بدووضع، به‌ویژه در زمینه منظم‌سازی تیخونوف استفاده می‌شود. این اصل روشی سیستماتیک برای انتخاب پارامتر منظم‌سازی بر اساس اختلاف بین داده‌های مشاهده شده و پیش‌بینی‌های مدل ارائه می‌دهد. براساس اصل مغایرت موروزوف، ضریب منظم‌ساز ایده‌آل در معادله رابطه (۵) باید

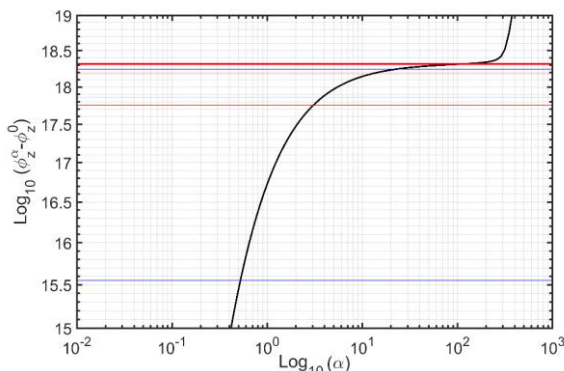


شکل ۲. (الف) نمودار نرّم C اختلاف دو گرادیان قائم به‌ازای دو ضریب منظم‌ساز متوالی بر حسب ضریب منظم‌ساز. (ب) گرادیان قائم گرانی بوگه شکل ۱-ب با استفاده از روش منظم‌سازی و ضریب منظم‌ساز پاستکا.

شکل ۳ است. مقدار پارامتر عدد موج قطع با توجه به شکل ۳ برابر با 0.05 (cycle/m) در نظر گرفته شده است. در شکل ۴ نمودار ϵ_i بر حسب مقادیر مختلف منظم‌سازی برای دو فیلتر پایین‌گذر باتروورث و ادامه فراسو ترسیم شده است. خط‌های افقی نمایش داده شده به رنگ آبی در شکل ۴، مقدار خطای ϵ به‌ازای مقادیر مختلف رتبه فیلتر پایین‌گذر باتروورث و خط‌های افقی به رنگ قرمز در شکل ۴ مقدار خطای ϵ به‌ازای مقادیر مختلف ارتفاع فیلتر فراسو را نشان می‌دهد. محل تلاقی این خط‌ها با نمودار ϵ_i ، مقدار ضریب منظم‌ساز بهینه برای رتبه یا ارتفاع مورد نظر را نشان می‌دهد که در جدول‌های ۱ و ۲ نشان داده شده است.



شکل ۳. طیف توان میانگین شعاعی حاصل از گرادیان قائم گرانی بوگه شکل ۲ برای (آبی توپر) بدون نوفه و (قرمز نقطه‌چین) آغشته به نوفه.



شکل ۴. نمودار ϵ_i بر حسب مقادیر مختلف منظم‌سازی برای گرانی بوگه شکل ۱-ب. خطوط افقی آبی مقدار خطای ϵ به‌ازای مقادیر مختلف رتبه فیلتر پایین‌گذر باتروورث و خطوط افقی قرمز مقدار خطای ϵ به‌ازای مقادیر مختلف ارتفاع فیلتر پایین‌گذر ادامه فراسو را نشان می‌دهند.

در این حالت می‌توان مقدار خطا را به صورت $\|\phi_z^{lp}(x, y, z) - \phi_z^0(x, y, z)\| = \epsilon$ تعریف کرد. مقدار کوچک α باعث می‌شود که $\|\phi_z^\alpha(x, y, z) - \phi_z^0(x, y, z)\| \leq \epsilon$ شود که بدان معناست $\phi_z^\alpha(x, y, z)$ بیشتر به $\phi_z^0(x, y, z)$ نزدیک است تا $\phi_z^{lp}(x, y, z)$ و بنابراین، نیاز به هموارسازی بیشتری است. مقدار بزرگ α باعث می‌شود که $\|\phi_z^\alpha(x, y, z) - \phi_z^0(x, y, z)\| \geq \epsilon$ شود که بدان معناست در $\phi_z^\alpha(x, y, z)$ بیشتر از اندازه مورد نیاز هموارسازی صورت گرفته است. در حالت بهینه، اختلاف بین گرادیان قائم منظم‌شده و گرادیان قائم صحیح نباید بیشتر از خطای ذاتی داده‌ها باشد. در واقع، اصل موروزوف پیشنهاد می‌کند که پارامتر منظم‌سازی α باید به گونه‌ای انتخاب شود که این اختلاف به اندازه خطای داده‌ها باشد و نه کمتر و نه بیشتر. این اصل تضمین می‌کند که تنظیم تیخونوف به گونه‌ای انجام شود که هم پایداری نتایج حفظ شود و هم دقت تقریب بهبود یابد، در حالی که از هموارسازی بیش از حد جلوگیری شود. محاسبه مقدار بهینه ضریب هموارسازی یک مسئله غیرخطی است.

در روش پیشنهادی اولیویرا و همکاران (۲۰۲۴)، برای محاسبه مقدار بهینه ضریب هموارسازی به‌ازای مقادیر مختلف ضریب منظم‌سازی که از سری هندسی $\alpha_i \in \{\alpha_0, \alpha_0 r, \alpha_0 r^2, \dots, \alpha_e = \alpha_0 r^n\}$ انتخاب می‌شوند، گرادیان قائم منظم‌شده با استفاده از رابطه (۴) محاسبه می‌شود. سپس نمودار $\epsilon_i = \|\phi_z^{\alpha(i)}(x, y, z) - \phi_z^0(x, y, z)\|$ بر حسب مقادیر مختلف منظم‌سازی ترسیم می‌شود. مقدار بهینه ضریب منظم‌سازی به گونه‌ای انتخاب می‌شود که $|\epsilon_i - \epsilon|$ کمینه شود. پارامترهای عدد موج قطع و رتبه در فیلتر باتروورث و پارامتر ارتفاع در فیلتر ادامه فراسو تأثیر زیادی بر روی مقدار ضریب منظم‌ساز خواهد داشت. یک راه حل برای انتخاب پارامتر عدد موج قطع، استفاده از روند خطی اولیه نمودار طیف توان میانگین شعاعی حاصل از گرادیان قائم بی‌هنجاری بوگه به روش متداول بلکه مطابق

جدول ۱. مقدار ضریب منظم‌ساز بهینه برای رتبه‌های مختلف فیلتر پایین‌گذر باتروورث.

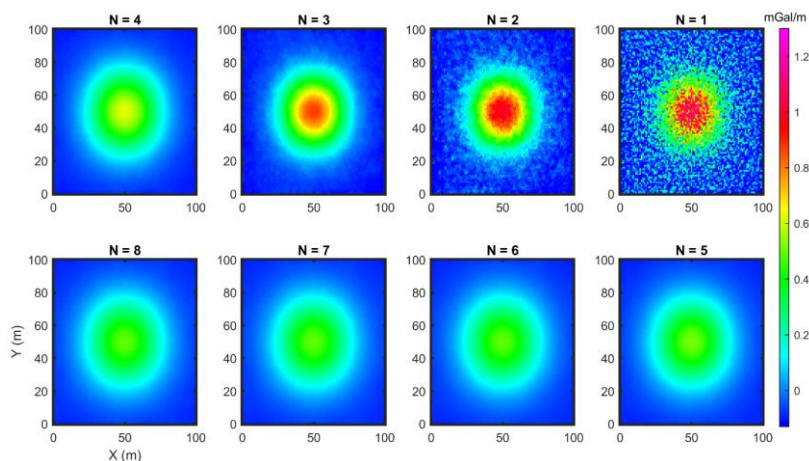
رتبه فیلتر	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
مقدار ضریب منظم‌ساز بهینه	۰/۵۳۱۳	۳/۹۳۱۸	۲۱/۸۶۰۳	۹۱/۳۱۶۰	۱۴۷/۰۶۵۳	۱۶۱/۷۷۱۸	۱۶۱/۷۷۱۸	۱۶۱/۷۷۱۸

جدول ۲. مقدار ضریب منظم‌ساز بهینه برای ارتفاع‌های مختلف فیلتر فراسو.

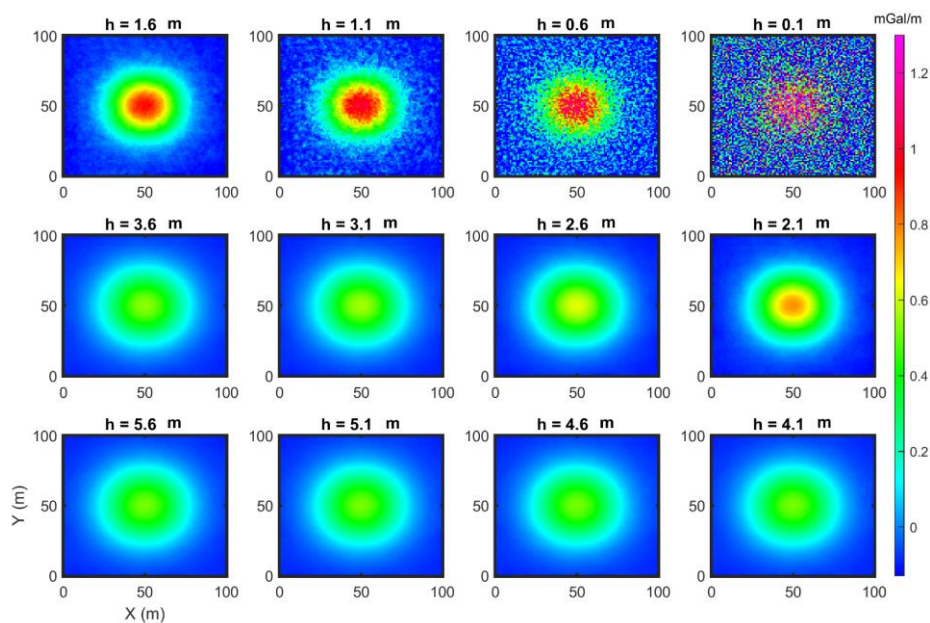
ارتفاع فیلتر	۰/۱	۰/۶	۱/۱	۱/۶	۲/۱	۲/۶	۳/۱	۳/۶	۴/۱	۴/۶	۵/۱	۵/۶
مقدار ضریب منظم‌ساز بهینه	۰/۰۳۳۵	۰/۵۸۴۴	۲/۹۵۴۰	۱۲/۳۳۹۶	۴۲/۵۹۹۶	۹۱/۳۱۶۰	۱۲۱/۵۴۱۵	۱۳۳/۶۹۵۷	۱۴۷/۰۶۵۳	۱۴۷/۰۶۵۳	۱۴۷/۰۶۵۳	۱۴۷/۰۶۵۳

در شکل‌های ۵ و ۶ به ترتیب، گرادیان قائم گرانی بوگه شکل ۱ در حالت آغشته به نوفه با استفاده از روش منظم‌سازی و ضرایب منظم‌سازی جدول‌های ۱ و ۲ نمایش داده شده است. به منظور مقایسه کمی و انتخاب رتبه و ارتفاع بهینه برای فیلتر پایین‌گذر باتروورث و ادامه فراسو، در شکل ۷-الف و ۷-ب به ترتیب ضریب همبستگی میان گرادیان قائم محاسبه شده به ازای رتبه‌ها و ارتفاع‌های مختلف با گرادیان قائم حقیقی بدون نوفه در شکل ۱-ج محاسبه و ترسیم شده است. با توجه به نمودارهای همبستگی، می‌توان رتبه بهینه برای فیلتر پایین‌گذر باتروورث را برابر با عدد ۳ و ارتفاع بهینه برای فیلتر پایین‌گذر ادامه فراسو را ۱/۶ کیلومتر در نظر گرفت که با نتایج نشان داده شده در شکل‌های ۵ و ۶ نیز مطابقت دارند. اما در داده‌های واقعی، به دلیل عدم دسترسی به گرادیان قائم حقیقی، امکان ترسیم نمودار همبستگی مشابه نمودار شکل ۷ وجود ندارد. در این حالت می‌توان از نمودار ضریب همبستگی گرادیان‌های قائم حاصل از دو رتبه یا ارتفاع متوالی مطابق شکل ۸ استفاده کرد (روشندل کاهو و انوری، ۲۰۲۴). محل

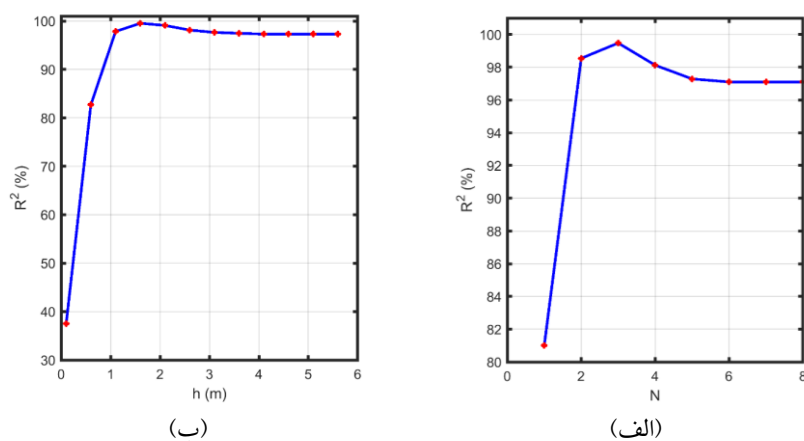
تاشدگی (آرنج) در نمودار شکل ۸ منطبق بر رتبه یا ارتفاع بهینه فیلتر پایین‌گذر برای محاسبه گرادیان قائم به روش منظم‌سازی است. در نقاط قبل از محل تاشدگی که شیب نمودار در آنها زیاد است، همچنان نوفه در نتایج اثر غالبی دارد که باعث کاهش ضریب همبستگی شده است. در نقاط بعد از محل تاشدگی که نمودار به حالت تقریباً افقی می‌رسد، فیلتر پایین‌گذر سبب هموارسازی بیش از حد شده است که نتایج گرادیان قائم نسبتاً یکسانی را تولید می‌کنند. به منظور مقایسه کمی نتایج، ضریب همبستگی و میانگین خطای مطلق بین گرادیان قائم واقعی (خروجی روش متداول برای داده بدون نوفه) و گرادیان قائم پایدارسازی شده به منظم‌سازی مبتنی بر اصل مغایرت موروزوف برای داده آغشته به نوفه محاسبه شد. مقدار ضریب همبستگی و میانگین خطای مطلق برای فیلتر باتروورث به ترتیب ۰/۹۸۱۹ و ۸۲/۶۱۰۸ و برای فیلتر ادامه فراسو به ترتیب ۰/۹۸۱۸ و ۸۶/۳۳۵۶ به دست آمد که بیانگر موفقیت عملکرد منظم‌سازی مبتنی بر اصل مغایرت موروزوف در محاسبه پایدار گرادیان قائم در حضور نوفه تصادفی است.



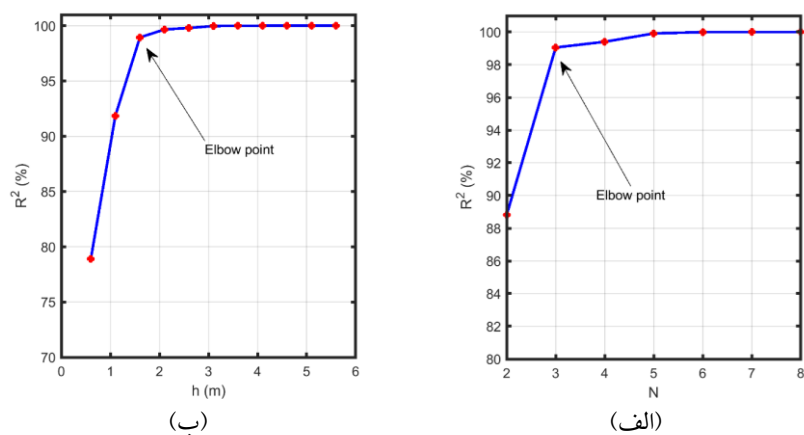
شکل ۵. گرادیان قائم گرانی بوگه شکل ۲ با استفاده از روش منظم‌سازی و ضرایب منظم‌ساز حاصل از روش فیلتر پایین‌گذر باتروورث که در جدول ۱ به ازای مقادیر مختلف رتبه فیلتر نشان داده شده است.



شکل ۶. گرادیان قائم گرانی بوگه شکل ۲ با استفاده از روش منظم‌سازی و ضرایب منظم‌ساز حاصل از روش فیلتر پایین‌گذر فراسو که در جدول ۲ به‌ازای مقادیر مختلف ارتفاع نشان داده شده است.



شکل ۷. ضریب همبستگی میان گرادیان قائم محاسبه شده با گرادیان قائم حقیقی به‌ازای (الف) رتبه‌های مختلف فیلتر پایین‌گذر باتروورث و (ب) ارتفاع‌های مختلف فیلتر پایی‌گذر ادامه فراسو.



شکل ۸. ضریب همبستگی میان گرادیان‌های قائم محاسبه شده به‌ازای (الف) دو رتبه متوالی فیلتر پایین‌گذر باتروورث و (ب) دو ارتفاع متوالی فیلتر پایی‌گذر ادامه فراسو.

$$\Rightarrow \frac{\partial \phi(x, y, z_0)}{\partial z} = \frac{1}{\Delta z} \sum_{i=1}^n c_i \phi(x, y, z_0 + \gamma_i \Delta z) \quad (۱۱)$$

اولیویرا و فام (۲۰۲۲) نشان دادند که با در نظر گرفتن $\gamma_i = (1 - \beta + i)$ (که β یک ثابت با مقدار مثبت است که ادامه فراسو به میزان $\beta \Delta z$ با پایداری در مقابل نوفه را تضمین می‌کند) می‌توان گرادیان قائم را با دقت مناسب و در عین حال پایدار در مقابل نوفه تخمین زد (الوندی و همکاران، ۲۰۲۲). برای محاسبه گرادیان قائم با دقت بالا و پایدار در مقابل نوفه توسط رابطه (۱۱)، اولیویرا و فام (۲۰۲۲) پیشنهاد دادند که پارامتر Δz به صورت 0.1 کوچک‌ترین فاصله شبکه‌بندی برداشت داده‌ها در سطح $z_0 = 0$ و پارامتر β که وظیفه پایداری محاسبه گرادیان قائم در مقابل نوفه را دارد، در بازه ۲۰ تا ۶۰ انتخاب شود. در شکل ۹ تأثیر مقدار پارامتر β بر کیفیت گرادیان قائم محاسبه شده به روش فیلتر ادامه فراسو نشان داده شده است. در جدول ۳ مقادیر ضریب همبستگی و میانگین خطای مطلق بین گرادیان قائم واقعی (خروجی روش متداول برای داده بدون نوفه) و گرادیان قائم پایداری سازی شده به روش فیلتر ادامه فراسو به ازای مقادیر مختلف پارامتر β آورده شده است.

همان‌طور که مشاهده می‌شود، نتایج گرادیان قائم در مقادیر بالاتر از ۴۵ برای پارامتر β تحت تأثیر مقدار این پارامتر نیستند، اما مقادیر بالاتر این پارامتر پایداری بیشتر در برابر نوفه در مقابل کاهش قدرت تفکیک و حذف جزئیات را همراه دارد. به عبارت دیگر، هر چند در این مثال ساده، مقادیر بالای پارامتر β نتایج پایدارتر در مقابل نوفه تصادفی ایجاد می‌کند، اما در مثال‌های پیچیده‌تر که دارای بی‌هنجاری‌های مختلف با ابعاد گوناگون هستند، مقادیر بالای پارامتر β می‌تواند منجر به هموارسازی بیش از حد و از دست دادن اطلاعات مربوط به بی‌هنجاری‌های کوچک مقیاس شود.

۲-۳. بهبود محاسبه گرادیان قائم با استفاده از فیلتر ادامه فراسو

به منظور مقایسه روش منظم‌سازی، روش استفاده از فیلتر ادامه فراسو به عنوان یکی از روش‌های نوین دیگر پایداری سازی محاسبه گرادیان قائم در مقابل نوفه انتخاب شد (اولیویرا و فام، ۲۰۲۲). یکی از ابزارهای متداول و پرکاربرد برای محاسبه تقریب‌های تفاضل محدود مرتبه m در داده‌های میدان پتانسیل بسط تیلور است که مطابق رابطه (۹) در نقاط مشاهده‌ای به صورت $z_i = z_0 + \gamma_i \Delta z$ حول نقطه z_0 تعریف می‌شود.

$$\phi(x, y, z_i) = \sum_{j=0}^m \frac{1}{j!} \frac{\partial^j \phi(x, y, z_0)}{\partial z^j} (z_i - z_0)^j + O(\Delta z^{m+1}) \quad (۹)$$

که $\gamma_i \Delta z$ همسایگی حول نقطه z_0 را نشان می‌دهد. عبارت $O(\Delta z^{m+1})$ جمله‌های درجه بالای بسط تیلور را نشان می‌دهد که تا زمانی $\frac{\partial^{m+1} \phi(x, y, z_0)}{\partial z^{m+1}}$ دارای محدوده مشخصی باشد، مقدار آن به سرعت به سمت صفر میل می‌کند. می‌توان با استفاده از رابطه (۹) یک تقریب تفاضل محدود برای $\phi_z(x, y, z_0)$ بر اساس میانگین وزنی تعداد n نمونه از ضرایب بسط تیلور مطابق رابطه (۱۰) به دست آورد.

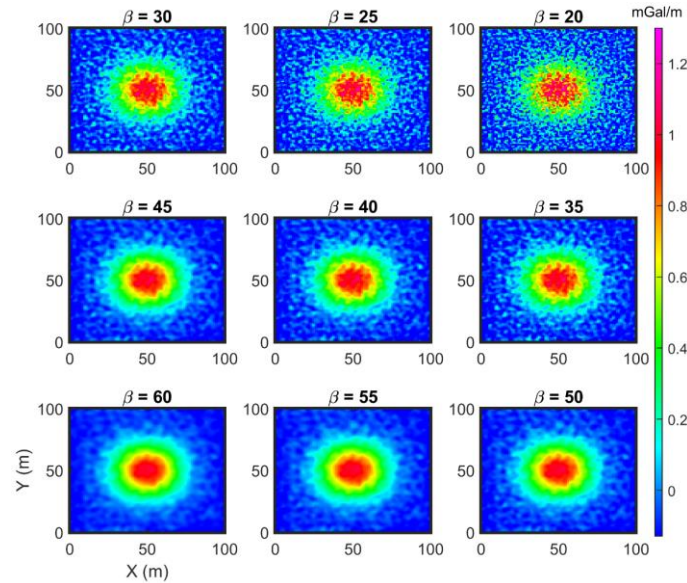
$$\sum_{i=1}^n c_i \phi(x, y, z_i) = \sum_{j=0}^m \frac{1}{j!} \frac{\partial^j \phi(x, y, z_0)}{\partial z^j} \sum_{i=1}^n c_i (z_i - z_0)^j \quad (۱۰)$$

ضرایب c_i ($1 \leq i \leq n$) باید به گونه‌ای انتخاب شوند که $\sum_{i=1}^n c_i (z_i - z_0)^j$ به جز برای حالت $j = 1$ که برابر Δz می‌شود، برای سایر مقادیر $j \neq 1$ برابر صفر باشد. بنابراین، با جای‌گذاری این مقادیر در رابطه (۱۰) می‌توان رابطه (۱۱) را به دست آورد (اولیویرا و فام، ۲۰۲۲).

$$\sum_{i=1}^n c_i \phi(x, y, z_i) = \frac{\partial \phi(x, y, z_0)}{\partial z} \Delta z$$

جدول ۳. مقادیر ضریب همبستگی و میانگین خطای مطلق به ازای مقادیر مختلف پارامتر β در روش فیلتر ادامه فراسو.

مقدار پارامتر β	۲۰	۲۵	۳۰	۳۵	۴۰	۴۵	۵۰	۵۵	۶۰
ضریب همبستگی	۰/۸۰۱۷	۰/۸۸۶۴	۰/۹۳۰۶	۰/۹۵۳۹	۰/۹۶۶۸	۰/۹۷۴۳	۰/۹۷۸۸	۰/۹۸۱۷	۰/۹۸۳۵
میانگین خطای مطلق (mGal/m)	۲۳۵/۲۵۷۹	۱۶۳/۸۹۲۱	۱۲۴/۵۹۶۳	۱۰۲/۳۵۰۵	۸۹/۳۶۸۳	۸۱/۵۶۵۷	۷۶/۴۴۵۴	۷۲/۸۸۱۲	۷۰/۶۰۵۹



شکل ۹. تأثیر پارامتر β بر گرادیان قائم محاسبه شده در روش ادامه فراسو.

۳. نتایج مدل مصنوعی

به منظور ارزیابی روش‌های معرفی شده برای پایدارسازی محاسبه گرادیان قائم داده‌های میدان پتانسیل در مقابل نوفه، یک مدل مصنوعی مطابق شکل ۱۰ متشکل از سه منبع بی‌هنجاری که مشخصات فیزیکی و هندسی آنها در جدول ۴ آمده است، در نظر گرفته شد و با استفاده از برنامه کامپیوتری تهیه شده در محیط MATLAB بر اساس الگوریتم منشورهای مستطیلی (بلکلی، ۱۹۹۶) بی‌هنجاری بوگه مربوط به آن تولید شد که در شکل ۱۱-الف در حالت بدون نوفه نشان داده شده است. برای بررسی عملکرد

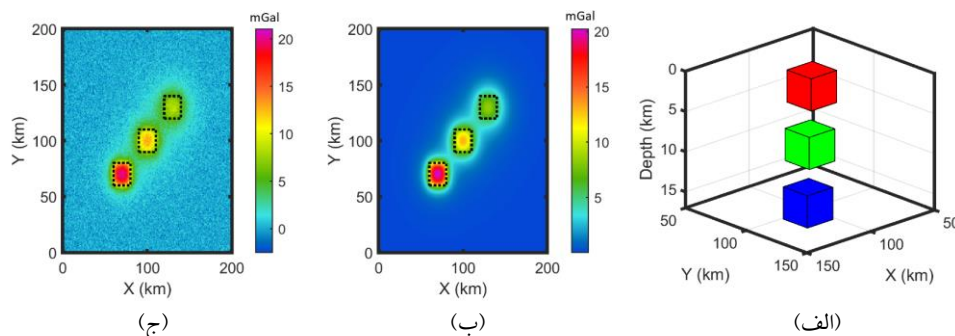
روش‌های محاسبه گرادیان قائم در برابر نوفه، به بی‌هنجاری بوگه محاسبه شده نوفه تصادفی (تولید شده مطابق رابطه (۱۲)) به اندازه ۲/۵ درصد اضافه شد که در شکل ۱۱-ب نمایش داده شده است (روشندل کاهو و همکاران، ۲۰۲۵). نقطه‌چین‌های سیاه در شکل ۱۱ مرز سه منبع بی‌هنجاری را نشان می‌دهد.

$$\text{noise} = \sqrt{\frac{E_{\phi_{\text{clean}}}}{M \times N \times \text{SNR}^2}} \times \text{RANDN}(M, N) \quad (12)$$

در رابطه (۱۲)، SNR نسبت سیگنال به نوفه بر حسب درصد، M و N ابعاد شبکه برداشت داده و RANDN تابع تولیدکننده عدد تصادفی است.

جدول ۴. مشخصات هندسی و فیزیکی مدل مصنوعی مورد استفاده.

بی‌هنجاری	مختصات در جهت x (km)	مختصات در جهت y (km)	مختصات در جهت z (km)	چگالی (kg/cm^3)
قرمز	۶۰-۸۰	۶۰-۸۰	۳-۷	۰/۲
سبز	۹۰-۱۱۰	۹۰-۱۱۰	۷-۱۱	۰/۲
آبی	۱۲۰-۱۴۰	۱۲۰-۱۴۰	۱۱-۱۵	۰/۲



شکل ۱۰. (الف) هندسه مدل مصنوعی در نمای سه بعدی و بی‌هنجاری بوگه آن در حالت (ب) بدون نوفه و (ج) آغشته به نوفه تصادفی به اندازه ۱/۵ درصد. نقطه‌چین‌های سیاه مرز سه منبع بی‌هنجاری را نشان می‌دهد.

نوفه محاسبه می‌شود و نتیجه آن در تعیین لبه‌های بی‌هنجاری توسط روش زاویه شیب مورد بررسی قرار می‌گیرد. به‌منظور بهبود و پایداری گرادیان قائم، الگوریتم منظم‌سازی استفاده شد. ابتدا از روش پاستکا برای تعیین ضریب منظم‌ساز استفاده شد که نمودار مربوط به آن در شکل ۱۲-الف نشان داده شده است. بر اساس ضریب منظم‌ساز به‌دست آمده ($a=11/2178$) گرادیان قائم با استفاده از رابطه (۴) محاسبه شد که در شکل ۱۲-ب نشان داده شده است. نتیجه لبه‌یابی به روش زاویه شیب با استفاده از گرادیان قائم به‌دست آمده در شکل ۱۲-ج نشان داده شده است. با مقایسه نتیجه به‌دست آمده با روش تبدیل فوری می‌توان دید که گرادیان قائم در روش منظم‌سازی با ضریب منظم‌ساز پاستکا نسبت به روش متداول پایداری بیشتری در مقابل نوفه دارد و بهبود چشمگیری در نتیجه لبه‌یابی ایجاد کرده است.

در شکل ۱۳ و ۱۴ به ترتیب نتایج روش منظم‌سازی با ضریب منظم‌ساز حاصل از فیلترهای باتروورث و ادامه فراسو نشان داده شده است. در شکل بخش (الف) این شکل‌ها، نمودار مربوط به تعیین ضریب منظم‌ساز به‌ازای مقادیر مختلف رتبه فیلتر پایین‌گذر باتروورث و ارتفاع فیلتر ادامه فراسو نشان داده شده است. بر اساس نمودار ترسیم شده در بخش (ب) این دو شکل و توضیحات بیان شده در بخش تئوری، مقدار بهینه رتبه فیلتر باتروورث مقدار سه و مقدار بهینه ارتفاع فیلتر ادامه فراسو مقدار یک، انتخاب شد. نتیجه گرادیان قائم و لبه‌یابی محاسبه شده با ضریب منظم‌ساز معادل فیلتر باتروورث رتبه سه ($a=13/5735$) به ترتیب در شکل‌های ۱۳-ج و ۱۳-د و نتیجه گرادیان قائم و لبه‌یابی محاسبه شده با ضریب منظم‌ساز معادل فیلتر ادامه فراسو با ارتفاع یک ($a=10/1980$) به ترتیب در شکل‌های ۱۴-ج و ۱۴-د نشان داده شده است.

در شکل ۱۵-الف گرادیان قائم محاسبه شده به روش فیلتر ادامه فراسو نشان داده شده است. برای محاسبه گرادیان قائم به روش فیلتر ادامه فراسو مقدار $\Delta z = 0.1 \text{ km}$ و $\beta = 50$ در نظر گرفته شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، این روش نسبت به روش تبدیل فوری متداول در مقابل نوفه تصادفی پایداری بیشتری دارد، اما عملکرد آن تقریباً مشابه

در شکل ۱۱-الف گرادیان قائم بی‌هنجاری بوگه بدون نوفه شکل ۱۰-ب با استفاده از روش تبدیل فوری نشان داده شده است که معادل گرادیان قائم صحیح است. گرادیان قائم بی‌هنجاری بوگه آغشته به نوفه تصادفی با استفاده از روش متداول تبدیل فوری در شکل ۱۱-ب نمایش داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، در گرادیان قائم حقیقی که از داده بدون نوفه با استفاده از روش تبدیل فوری به‌دست آمده است، به‌خوبی موقعیت و مرز منبع بی‌هنجاری نسبت به بی‌هنجاری بوگه آشکارتر شده است. به‌همین دلیل، یکی از داده‌های ورودی برای روش‌های مختلف تعیین لبه‌های بی‌هنجاری، گرادیان قائم می‌باشد. اما نتیجه گرادیان قائم برای بی‌هنجاری بوگه آغشته به نوفه تصادفی که با استفاده از روش متداول تبدیل فوری محاسبه شده است، حتی در حضور مقدار کم نوفه نیز پایدار نیست و نتوانسته است موقعیت منبع بی‌هنجاری‌ها را نسبت به بی‌هنجاری بوگه مشخص‌تر کند. در شکل ۱۱-ج و ۱۱-د نتیجه لبه‌یابی برای بی‌هنجاری بوگه بدون نوفه و آغشته به نوفه با استفاده از روش زاویه شیب (نجاتی کلاته و روشندل کاهو، ۲۰۱۳؛ اروچ، ۲۰۱۱؛ ویجنز و همکاران، ۲۰۰۵) مطابق رابطه (۱۳) نشان داده شده است.

$Tilt \text{ Angle} =$

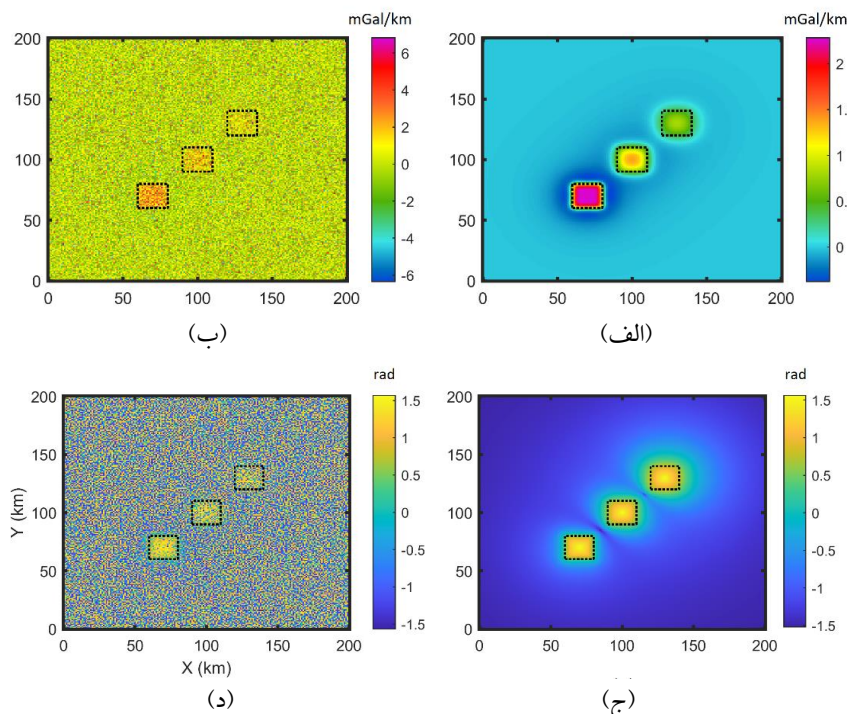
$$\tan^{-1} \left(\frac{\frac{\partial \phi(x, y, z)}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \phi(x, y, z)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi(x, y, z)}{\partial y} \right)^2}} \right) \quad (13)$$

مطابق رابطه (۱۳)، مرز بی‌هنجاری‌ها منطبق بر مقادیر صفر زاویه شیب است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، به‌دلیل عدم پایداری گرادیان قائم محاسبه شده از روش تبدیل فوری متداول، نتایج لبه‌یابی در حالت آغشته به نوفه از کیفیت مناسب برخوردار نیست و به‌شدت تحت تأثیر نوفه تصادفی، لبه‌های کاذبی ایجاد کرده است. همچنین می‌توان دید که تأثیر مخرب نوفه بر روی بی‌هنجاری عمیق‌تر به مراتب بیشتر است.

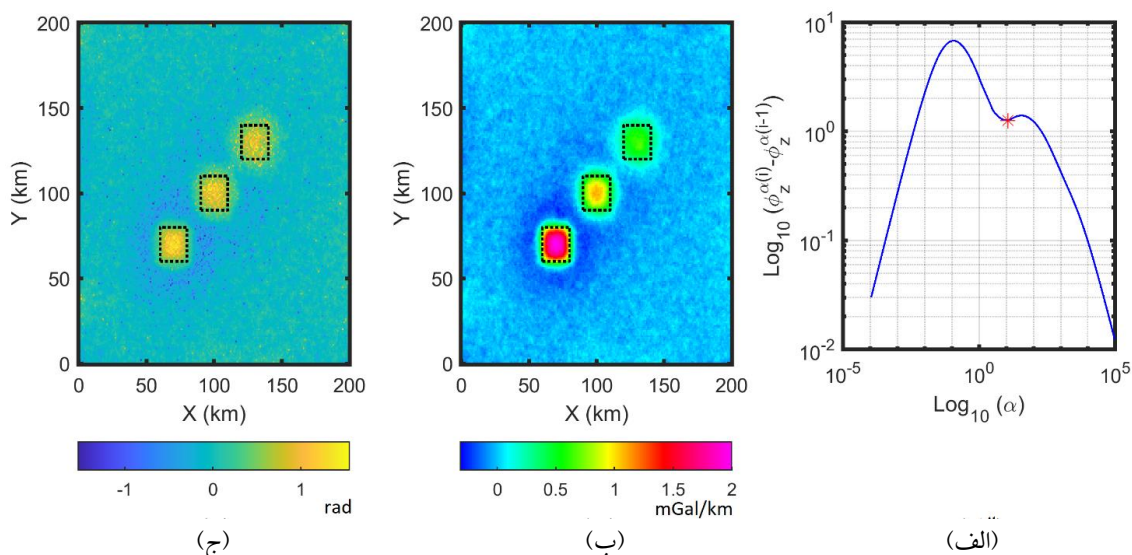
در ادامه با استفاده از روش‌های معرفی شده، گرادیان قائم پایدار در مقابل نوفه تصادفی برای بی‌هنجاری بوگه آغشته به

شکل ۱۵-الف به دست آمده است، مشابه روش‌های منظم‌سازی است ولی نسبت به روش تبدیل فوریه متداول عملکرد به مراتب بهتری دارد.

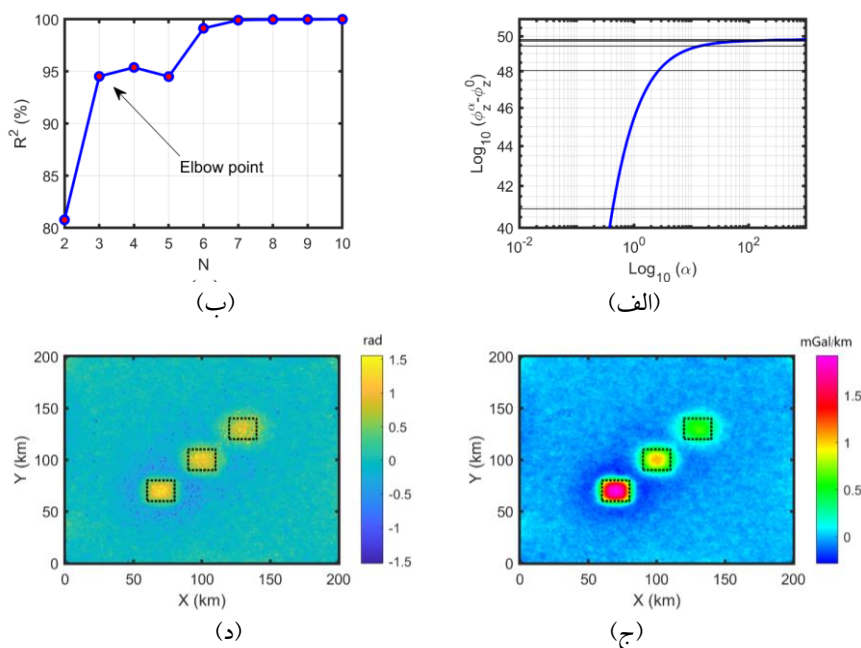
روش منظم‌سازی در پایدارسازی محاسبه گرادیان قائم در مقابل نوفه تصادفی است. به همین دلیل نتیجه لبه‌یابی به روش زاویه شیب در شکل ۱۵-ب که با استفاده از گرادیان قائم



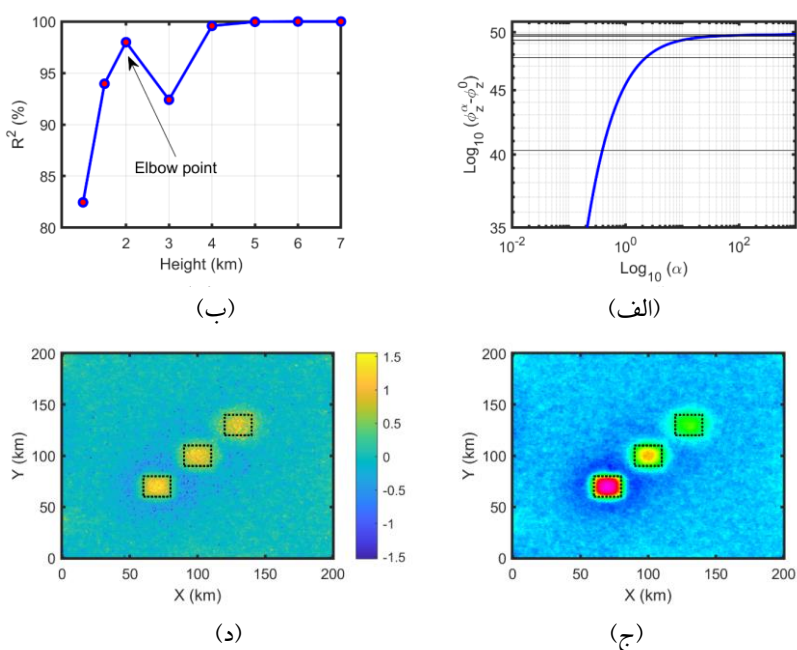
شکل ۱۱. گرادیان قائم بی‌هنجاری بوگه برای (الف) داده مصنوعی بدون نوفه در شکل ۱۰-ب و (ب) داده مصنوعی آغشته به نوفه تصادفی در شکل ۱۰-ج. نتیجه لبه‌یابی به روش زاویه شیب برای (ج) داده بدون نوفه و (د) داده آغشته به نوفه تصادفی. نقطه‌چین‌های سیاه مرز سه منبع بی‌هنجاری را نشان می‌دهد.



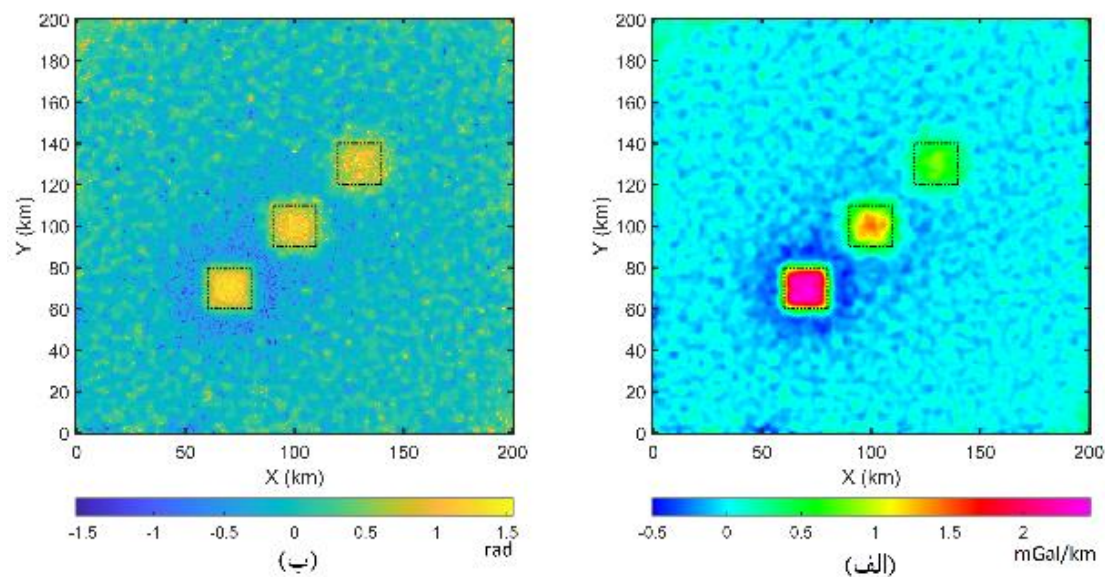
شکل ۱۲. (الف) نمودار نرم C اختلاف دو گرادیان قائم به‌ازای دو ضریب منظم‌ساز متوالی بر حسب ضریب منظم‌ساز برای تعیین ضریب منظم‌ساز ستاره قرمز محل کمینه محلی را نشان می‌دهد. (ب) گرادیان قائم بی‌هنجاری بوگه داده آغشته به نوفه تصادفی شکل ۱۰-ج به روش منظم‌سازی با ضریب منظم‌ساز حاصل از الگوریتم پاستکا و (ج) نتیجه لبه‌یابی به روش زاویه شیب با استفاده از گرادیان قائم پایدارسازی شده به روش منظم‌سازی. نقطه‌چین‌های سیاه مرز سه منبع بی‌هنجاری را نشان می‌دهد.



شکل ۱۳. (الف) نمودار ϵ_i بر حسب مقادیر مختلف منظم‌سازی (ستاره‌های قرمز ضرایب منظم‌ساز به‌ازای مقادیر مختلف رتبه فیلتر را نشان می‌دهد). (ب) نمودار ضریب همبستگی میان گرادیان‌های قائم محاسبه شده به‌ازای دو رتبه متوالی فیلتر پایین‌گذر باتروورث برای انتخاب رتبه بهینه فیلتر. (ج) گرادیان قائم بی‌هنجاری بوگه داده آغشته به نوفه تصادفی شکل ۱۰-ج به روش منظم‌سازی با ضریب منظم‌ساز حاصل از الگوریتم فیلتر پایین‌گذر باتروورث و (د) نتیجه لبه‌یابی به روش زاویه شیب با استفاده از گرادیان قائم پایدارسازی شده به روش منظم‌سازی. نقطه‌چین‌های سیاه مرز سه منبع بی‌هنجاری را نشان می‌دهد.



شکل ۱۴. (الف) نمودار ϵ_i بر حسب مقادیر مختلف منظم‌سازی (ستاره‌های قرمز ضرایب منظم‌ساز به‌ازای مقادیر مختلف ارتفاع فیلتر فراسو را نشان می‌دهد). (ب) نمودار ضریب همبستگی میان گرادیان‌های قائم محاسبه شده به‌ازای دو ارتفاع متوالی فیلتر پایین‌گذر فراسو برای انتخاب ارتفاع بهینه فیلتر فراسو. (ج) گرادیان قائم بی‌هنجاری بوگه داده آغشته به نوفه تصادفی شکل ۱۰-ج به روش منظم‌سازی با ضریب منظم‌ساز حاصل از الگوریتم فیلتر پایین‌گذر فراسو و (د) نتیجه لبه‌یابی به روش زاویه شیب با استفاده از گرادیان قائم پایدارسازی شده به روش منظم‌سازی. نقطه‌چین‌های سیاه مرز سه منبع بی‌هنجاری را نشان می‌دهد.



شکل ۱۵. (الف) گرادیان قائم بی‌هنجاری بوگه داده آغشته به نوفه تصادفی شکل ۱۰-ج به روش فیلتر ادامه فراسو و (ب) نتیجه لبه‌یابی به روش زاویه شیب با استفاده از گرادیان قائم پایدارسازی شده به روش فیلتر ادامه فراسو. نقطه‌چین‌های سیاه مرز سه منبع بی‌هنجاری را نشان می‌دهد.

داده‌های میدان پتانسیل در مقابل نوفه تصادفی در داده‌های صحرایی، داده‌های گرانی‌سنجی کشور اسلواکی انتخاب شد. ساختار زمین‌شناسی کشور اسلواکی حاصل ترکیبی از رسوبات، سنگ‌های دگرگونی و تعاملات پیچیده تکتونیکی است. این ساختار عمدتاً تحت تأثیر رشته‌کوه‌های کارپات غربی است که به دو بخش بیرونی و درونی تقسیم می‌شوند. برخورد بلوک‌های تکتونیکی در مرحله نهایی باعث تجزیه و حرکت مستقل آنها شده که منجر به کنار هم قرار گرفتن واحدهای زمین‌شناسی متفاوت شده است. این تنوع ساختاری و زمین‌شناسی، در مدل‌های ژئوفیزیکی و نقشه‌های ساختاری مشهود است. همچنین، ساختار ژئومورفولوژیکی منطقه نیز به دلیل فعالیت‌های تکتونیکی و آتشفشانی نئو-آلپاین، شامل هورست‌ها و گرابن‌های متعدد است (بزاك و همکاران، ۲۰۲۳). در شکل ۱۶ نقشه زمین‌شناسی و تکتونیک ناحیه مورد مطالعه نشان داده شده است.

برای مقایسه کمی نتایج، مقدار ضریب همبستگی و میانگین خطای مطلق میان گرادیان قائم حاصل از روش متداول در حالت بدون نوفه به عنوان گرادیان قائم واقعی و گرادیان قائم تخمین زده شده به روش‌های مختلف مورد اشاره در این مقاله، در جدول ۵ آورده شده است.

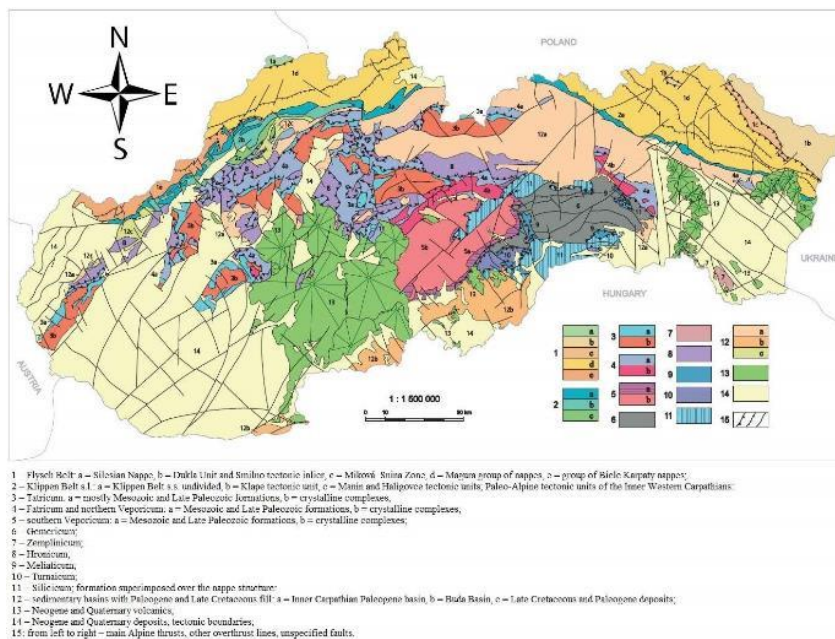
روش منظم‌سازی تیخونوف نسبت به روش تبدیل فوریه و فیلتر ادامه فراسو پایداری بیشتری در مقابل نوفه تصادفی در محاسبه گرادیان قائم داده‌های میدان پتانسیل ایجاد می‌کند. همچنین روش فیلتر باترورث نسبت به دو روش پاستکا و فیلتر ادامه فراسو برای تعیین ضریب منظم‌سازی پایداری بیشتری در محاسبه گرادیان قائم در مقابل نوفه تصادفی ایجاد می‌کند.

۴. نتایج داده‌های واقعی

به منظور بررسی عملکرد روش‌های پایدارسازی گرادیان قائم

جدول ۵. مقایسه کمی نتایج روش‌های محاسبه گرادیان قائم برای مثال مصنوعی شکل ۱۰.

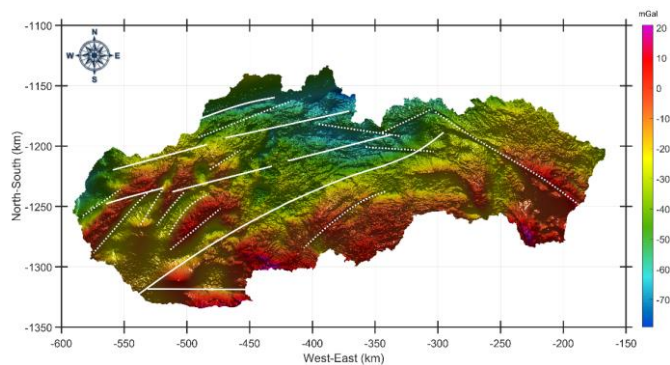
روش	تبدیل فوریه (بلکلی)	منظم‌سازی تیخونوف (پاستکا)	منظم‌سازی تیخونوف (باترورث)	منظم‌سازی تیخونوف (فیلتر ادامه فراسو)	فیلتر ادامه فراسو
ضریب همبستگی	۰/۱۵۱۵	۰/۹۶۴۲	۰/۹۶۳۱	۰/۹۶۴۱	۰/۹۵۳۳
میانگین خطای مطلق (mGal/Km)	۶۷۴۲/۹۸۹۹	۱۷۴/۸۲۹۴	۱۴۵/۵۶۸۴	۱۶۳/۳۵۵۶	۳۳۶/۵۲۹۵



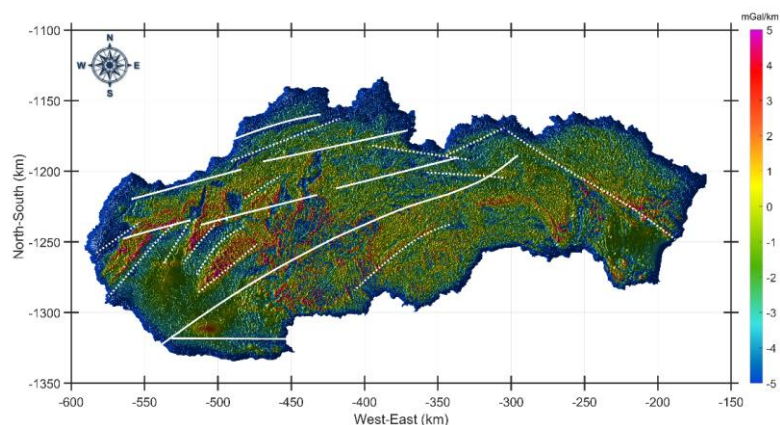
شکل ۱۶. نقشه زمین‌شناسی و تکتونیک ساده شده کشور اسلواکی (بزاک و همکاران، ۲۰۲۳).

در ادامه گرادیان قائم و نتیجه لبه‌یابی به روش زاویه شیب برای بی‌هنجاری بوگه کل شکل ۱۷ با استفاده از روش متداول تبدیل فوریه محاسبه شد که در شکل ۱۸ نشان داده شده‌اند. موقعیت گسل‌ها و نواحی برشی در شکل به‌صورت نقطه‌چین و خطوط توپر سفید نشان داده شده‌اند. همان‌طور که مشاهده می‌شود، گرادیان قائم محاسبه شده به‌شدت تحت تأثیر نوفه تصادفی موجود در داده است و به‌همین دلیل، نتایج لبه‌یابی به روش زاویه شیب دارای لبه‌های کاذب زیادی است و انطباق خوبی با خطواره‌های شناسایی شده در منطقه ندارند. به‌همین دلیل، روش‌های مختلف پایدارسازی گرادیان قائم در مقابل نوفه تصادفی که در این مقاله مورد بررسی قرار گرفتند، برای محاسبه گرادیان قائم بی‌هنجاری بوگه کل شکل ۱۷ استفاده شدند.

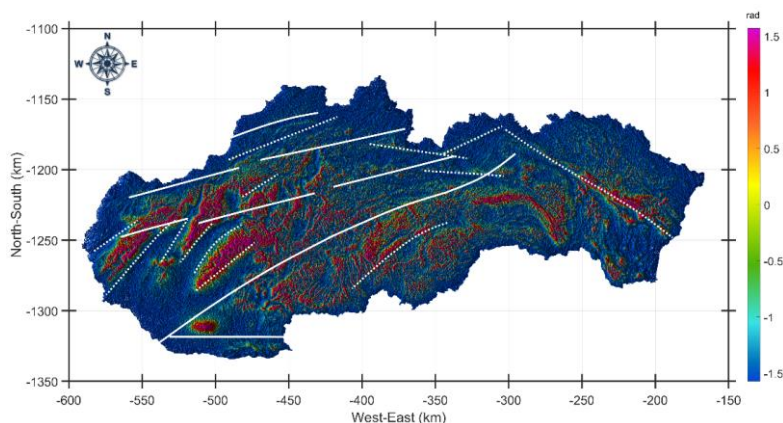
در این مقاله از بی‌هنجاری گرانی بوگه کشور اسلواکی استفاده شده است. داده‌های نمایش‌داده‌شده در شکل ۱۷ شامل بی‌هنجاری‌های منطقه‌ای و محلی هستند. ناحیه‌ای با توده‌های کم‌چگالی در شمال مرکزی کشور، ناشی از واحدهای فلیش و پوسته گرانیتی کارپات‌های غربی بیرونی، شاخص‌ترین ویژگی منطقه‌ای است. در مقابل، نواحی پرچگالی با سنگ‌های دگرگونی و گرانیتوئیدی در رشته‌کوه‌های مرکزی غرب اسلواکی ارتباط دارند. این منطقه دارای ساختارهای خطی و گسل‌هایی با منشأ تکتونیک و گرادیان‌های گرانشی تند است. نقشه بی‌هنجاری بوگه کامل اطلاعات ارزشمندی درباره ساختارهای زمین‌شناسی و تکتونیک ارائه می‌دهد و خطوط ترسیم‌شده بر روی آن نمایانگر گسل‌ها و ناحیه‌های برشی نئوآلپاین هستند (بزاک و همکاران، ۲۰۱۴).



شکل ۱۷. بی‌هنجاری بوگه کل در منطقه مورد مطالعه به همراه گسل‌های فشارشی-لغزشی (نقطه‌چین سفید) و نواحی برشی (خط توپر سفید).



(الف)

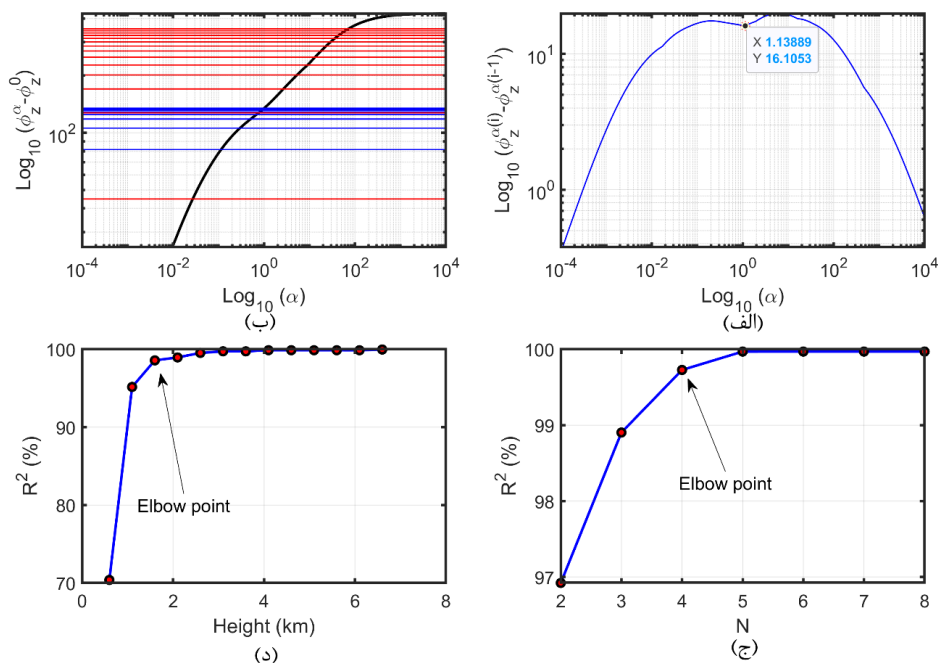


(ب)

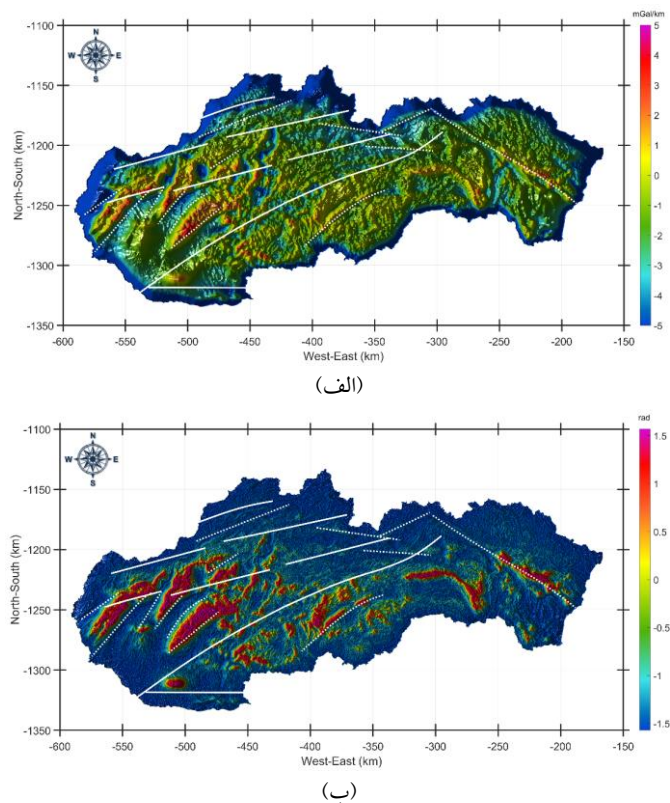
شکل ۱۸. (الف) گرادیان قائم بی‌هنجاری بوگه شکل ۱۷ به روش تبدیل فوری و (ب) نتیجه لبه‌یابی به روش زاویه شیب. نقطه‌چین‌ها و خطوط توپر سفید، گسل‌ها و ناحیه‌های برشی منطقه مورد مطالعه را نشان می‌دهند.

منظم‌سازی با استفاده از سه ضریب به‌دست آمده به‌ترتیب در شکل‌های ۲۰ الی ۲۲ نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، مطابق نتایج به‌دست آمده در داده مصنوعی، روش منظم‌سازی در محاسبه گرادیان قائم داده واقعی نیز پایداری بسیار خوبی در مقابل نوفه تصادفی نشان داده است و سبب ایجاد لبه‌های کاذب بسیار کمتری نسبت به روش تبدیل فوری شده است. با توجه به نتایج به‌دست آمده، انطباق قابل‌قبولی میان خطواره‌های شناسایی شده در منطقه با نتایج لبه‌یابی به روش زاویه شیب حاصل از گرادیان قائم به روش منظم‌سازی وجود دارد.

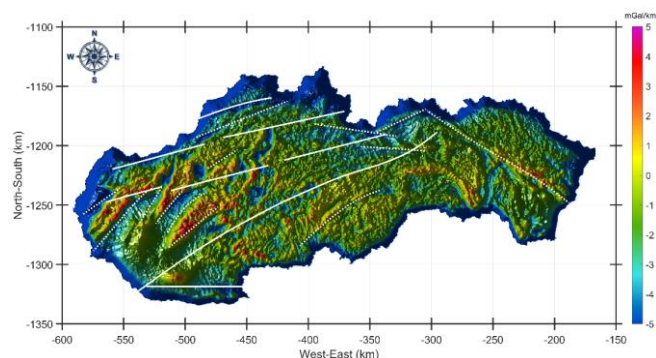
در ادامه به‌منظور بهبود نتایج و پایدارسازی بیشتر گرادیان قائم در مقابل نوفه تصادفی، روش منظم‌سازی مورد استفاده قرار گرفت. همان‌طور که بیان شد، از دو روش مبتنی بر نرم C و اصل مغایرت موروزوف می‌توان ضریب منظم‌ساز را محاسبه کرد. در شکل ۱۹، نمودار مربوط به محاسبه ضریب منظم‌سازی برای روش مبتنی بر نرم C و دو فیلتر باترورث و ادامه فراسو در روش مبتنی بر اصل مغایرت موروزوف نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، ضریب منظم‌ساز برای سه روش به‌ترتیب ۱/۱۳۸۸۹، ۰/۷۰۷۱۶۳ و ۲/۶۸۵۴۵ به‌دست آمد. نتایج روش محاسبه گرادیان به روش



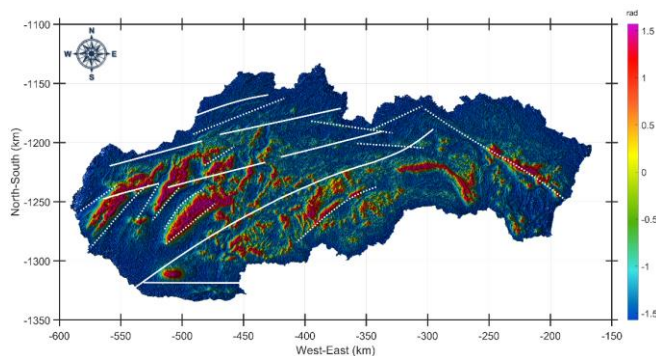
شکل ۱۹. محاسبه ضریب منظم سازی برای محاسبه گرادیان قائم به روش منظم سازی با استفاده از (الف) روش مبتنی بر نرم C، (ب) نمودار ϵ_i بر حسب مقادیر مختلف منظم سازی برای گرانی بوگه شکل ۱۷. خطوط افقی آبی مقدار خطای ϵ به ازای مقادیر مختلف رتبه فیلتر پایین گذر باتروورث و خطوط افقی قرمز مقدار خطای ϵ به ازای مقادیر مختلف ارتفاع فیلتر پایین گذر ادامه فراسو را نشان می دهند. (ج) نمودار ضریب همبستگی میان گرادیان های قائم محاسبه شده به ازای دو رتبه متوالی فیلتر پایین گذر باتروورث برای انتخاب رتبه بهینه فیلتر و (د) نمودار ضریب همبستگی میان گرادیان های قائم محاسبه شده به ازای دو ارتفاع متوالی فیلتر پایین گذر ادامه فراسو.



شکل ۲۰. (الف) گرادیان قائم بی هنجاری بوگه شکل ۱۷ به روش منظم سازی با ضریب منظم ساز مبتنی بر نرم C و (ب) نتیجه لبه یابی به روش زاویه شیب. نقطه چین ها و خطوط توپر سفید، گسل ها و ناحیه های برشی منطقه مورد مطالعه را نشان می دهند.

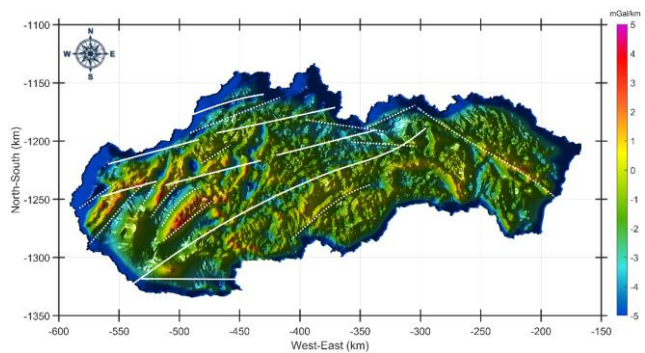


(الف)

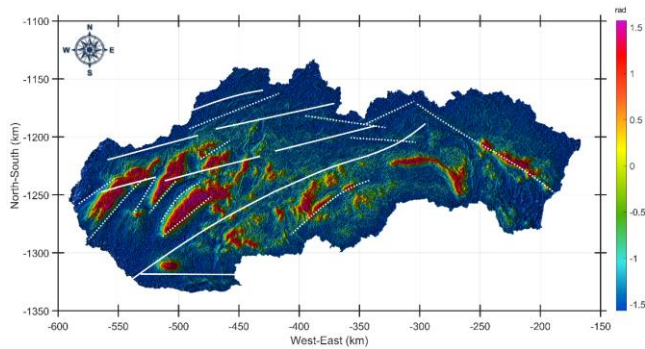


(ب)

شکل ۲۱. (الف) گرادیان قائم بی‌هنجاری بوگه شکل ۱۷ به روش منظم‌سازی با ضریب منظم‌ساز مبتنی بر اصل مغایرت موروزوف و فیلتر پایین‌گذر باترورت و (ب) نتیجه لبه‌یابی به روش زاویه شیب. نقطه‌چین‌ها و خطوط توپر سفید، گسل‌ها و ناحیه‌های برشی منطقه مورد مطالعه را نشان می‌دهند.

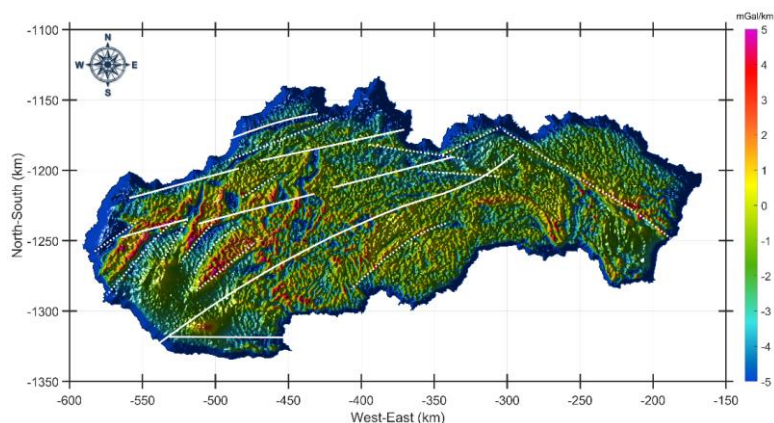


(الف)

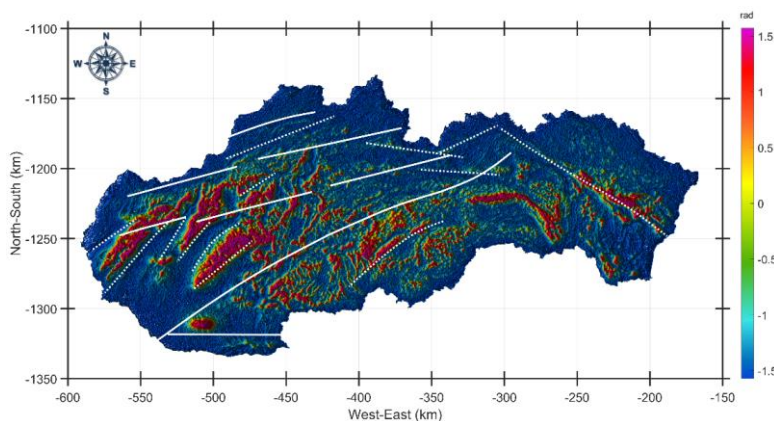


(ب)

شکل ۲۲. (الف) گرادیان قائم بی‌هنجاری بوگه شکل ۱۷ به روش منظم‌سازی با ضریب منظم‌ساز مبتنی بر اصل مغایرت موروزوف و فیلتر پایین‌گذر ادامه فراسو و (ب) نتیجه لبه‌یابی به روش زاویه شیب. نقطه‌چین‌ها و خطوط توپر سفید، گسل‌ها و ناحیه‌های برشی منطقه مورد مطالعه را نشان می‌دهند.



(الف)



(ب)

شکل ۲۳. (الف) گرادیان قائم بی‌هنجاری بوگه شکل ۱۷ به روش فیلتر ادامه فراسو و (ب) نتیجه لبه‌یابی به روش زاویه شیب. نقطه‌چین‌ها و خطوط توپر سفید، گسل‌ها و ناحیه‌های برشی منطقه مورد مطالعه را نشان می‌دهند.

۵. نتیجه‌گیری

مطلق نسبت به روش متداول، بیانگر پایداری چشمگیر و دقت بالای این رویکرد بود. همچنین، نتایج حاصل از روش فیلتر ادامه فراسو گرچه از نظر پایداری عملکرد قابل قبولی داشت، اما در مقایسه با منظم‌سازی تیخونوف از توان تفکیک کمتری برخوردار بود. در داده‌های واقعی گرانی کشور اسلواکی نیز مشاهده شد که روش منظم‌سازی نه تنها نوفه تصادفی را به‌خوبی مهار می‌کند، بلکه موجب کاهش لبه‌های کاذب و بهبود وضوح خطوطاره‌های زمین‌ساختی در نتایج لبه‌یابی می‌شود. این نتایج نشان می‌دهد که انتخاب صحیح پارامتر منظم‌ساز نقش تعیین‌کننده‌ای در موفقیت فرایند پایداری‌سازی دارد و استفاده از تحلیل نقطه آرنجی نمودار همبستگی گرادیان‌های متوالی می‌تواند این انتخاب را به‌صورت سیستماتیک و قابل اطمینان انجام دهد. در مجموع، می‌توان نتیجه گرفت که منظم‌سازی تیخونوف با انتخاب بهینه پارامتر منظم‌ساز، رویکردی کارآمد، پایدار و دقیق برای محاسبه

در این مقاله، رفتار ناپایدار روش متداول محاسبه گرادیان قائم در حوزه تبدیل فوریه در حضور نوفه تصادفی به‌صورت کمی و کیفی مورد بررسی قرار گرفت. نتایج نشان داد که ویژگی سراسری تبدیل فوریه و خاصیت بالاگذر عملگر گرادیان قائم موجب تقویت مؤلفه‌های با عدد موج بالای نوفه شده و در نتیجه پایداری محاسبات را به‌ویژه در گرادیان‌های مرتبه بالاتر کاهش می‌دهد. برای غلبه بر این مشکل، از روش‌های منظم‌سازی تیخونوف و فیلتر ادامه فراسو به‌عنوان دو رویکرد پایداری‌سازی استفاده شد. تحلیل‌های عددی روی داده‌های مصنوعی نشان داد که منظم‌سازی تیخونوف در هر دو روش انتخاب ضریب منظم‌ساز مبتنی بر نرم C و اصل مغایرت موروزوف، به‌طور مؤثری توانست میان کاهش اثر نوفه و حفظ جزئیات ساختاری تعادل برقرار کند. مقادیر ضریب همبستگی بالاتر از ۰/۹۶ و کاهش قابل توجه میانگین خطای

زیرسطحی و لبه‌یابی بی‌هنجاری‌ها در مطالعات ژئوفیزیکی
به کار گرفته شود.

مراجع

- Alvandi, A., Ardestani, V. E., & Motavalli-Anbaran, S.-H. (2022). Calculation of stable vertical derivatives using the combination of finite difference and upward continuation, case study: gravity field data of the northern area of the Jalalabad iron ore mine, Kerman province. 8(4), 287-299.
<https://doi.org/10.22044/jrag.2024.14025.1356>
- Baniamerian, J., Liu, S., & Abbas, M. A. (2018). Stable computation of the vertical gradient of potential field data based on incorporating the smoothing filters. *Pure and Applied Geophysics*, 175, 2785-2806.
<https://doi.org/https://link.springer.com/article/10.1007/s00024-018-1857-2>
- Bezák, V., Bielik, M., Marko, F., Zahorec, P., Pašteka, R., Vozár, J., & Papčo, J. (2023). Geological and tectonic interpretation of the new Bouguer gravity anomaly map of Slovakia. *Geologica Carpathica*, 74(2), 109-122.
<https://doi.org/10.31577/GeolCarp.2023.08>
- Bezák, V., Pek, J., Vozár, J., Bielik, M., & Vozár, J. (2014). Geoelectrical and geological structure of the crust in Western Slovakia. *Studia Geophysica et Geodaetica*, 58, 473-488.
<https://doi.org/10.1007/s11200-013-0491-9>
- Blakely, R. J. (1996). *Potential theory in gravity and magnetic applications*. Cambridge university press.
- Evjen, H. M. (1936). The place of the vertical gradient in gravitational interpretations. *Geophysics*, 1(1), 127-136.
<https://doi.org/https://doi.org/10.1190/1.1437067>
- Florio, G., Fedi, M., & Pasteka, R. (2006). On the application of Euler deconvolution to the analytic signal. *Geophysics*, 71(6), L87-L93.
<https://doi.org/https://doi.org/10.1190/1.2360204>
- Gubbins, D. (2004). *Time series analysis and inverse theory for geophysicists*. Cambridge university press.
- Jiang, F.-Y., Huang, Y., & Yan, K. (2012). Full gravity gradient tensors from vertical gravity by cosine transform. *Applied Geophysics*, 9(3), 247-260.
- Kántás, K. (1959). The gravitational potential and its vertical derivatives. *Geofisica pura e applicata*, 44, 20-24.
<https://doi.org/https://doi.org/10.1007/BF01997636>
- Mousapour Yasoori, M., & Ebrahimzadeh Ardestani, V. (2018). Improvement of the first and second vertical gradients calculated using cosine transform. 4(2), 413-427.
<https://doi.org/10.22044/jrag.2017.5684.1112>
- Nejati Kalateh, A., & Roshandel Kahoo, A. (2013). Edge detection of potential field data using Theta maps. *Iranian Journal of Geophysics*, 7(1), 24-33.
<https://doi.org/20.1001.1.20080336.1392.7.1.3.7>
- Oliveira, S. P., & Pham, L. T. (2022). A stable finite difference method based on upward continuation to evaluate vertical derivatives of potential field data. *Pure and Applied Geophysics*, 179(12), 4555-4566.
<https://doi.org/https://doi.org/10.1007/s00024-022-03164-z>
- Oliveira, S. P., Pham, L. T., & Pašteka, R. (2024). Regularization of vertical derivatives of potential field data using Morozov's discrepancy principle. *Geophysical Prospecting*, 72(8), 2880-2892.
<https://doi.org/10.1111/1365-2478.13534>
- Oruç, B. (2011). Edge detection and depth estimation using a tilt angle map from gravity gradient data of the Kozaklı-Central Anatolia Region, Turkey. *Pure and Applied Geophysics*, 168(10), 1769-1780.
<https://doi.org/10.1007/s00024-010-0211-0>
- Pašteka, R., Richter, F., Karcol, R., Brazda, K., & Hajach, M. (2009). Regularized derivatives of potential fields and their role in semi-automated interpretation methods. *Geophysical Prospecting*, 57(4), 507-516.
<https://doi.org/https://doi.org/10.1111/j.1365-2478.2008.00780.x>
- Rezaie, M., Moradzadeh, A., Kalate, A. N., Aghajani, H., Kahoo, A. R., & Moazam, S. (2017). 3D modelling of Trompsburg Complex (in South Africa) using 3D focusing inversion of gravity data. *Journal of African Earth Sciences*, 130, 1-7.
<https://doi.org/10.1016/j.jafrearsci.2017.03.002>
- Roshandel Kahoo, A., & Anvari, R. (2024). Separation of regional-residual anomaly in 2D gravity data using the 2D singular spectrum analysis. *Physics of the earth and space*, 50(3), 573-594.
<https://doi.org/10.22059/jesphys.2024.367608.1007574>
- Roshandel Kahoo, A., Nejati Kalateh, A., & Salajegheh, F. (2015). Interpretation of gravity data using 2-D continuous wavelet transformation and 3-D inverse modeling.

- Journal of Applied Geophysics*, 121, 54-62.
<https://doi.org/10.1016/j.jappgeo.2015.07.008>
- Roshandel Kahoo, A., Soltani, P., & Baghzendani, H. (2025). Using a new filter with high resolution to identify the edges of anomalies in the potential field data based on the thresholding of the tilt angle of the total horizontal gradient. *Iranian Journal of Geophysics*.
<https://doi.org/10.30499/ijg.2025.470149.1616>
- Roy, K. K. (2007). *Potential theory in applied geophysics*. Springer Science & Business Media.
- Tran, K. V., & Nguyen, T. N. (2020). A novel method for computing the vertical gradients of the potential field: application to downward continuation. *Geophysical Journal International*, 220(2), 1316-1329.
<https://doi.org/https://doi.org/10.1093/gji/ggz524>
- Wijns, C., Perez, C., & Kowalczyk, P. (2005). Theta map: Edge detection in magnetic data. *Geophysics*, 70(4), L39-L43.
<https://doi.org/10.1190/1.1988184>