

Inverse Modeling of Airborne Time-Domain Electromagnetic (ATEM) Data

Babaei, J.¹  | Ghanati, R.¹  

1. Department of Earth Physics, Institute of Geophysics, University of Tehran, Tehran, Iran.

Corresponding Author E-mail: rghanati@ut.ac.ir

(Received: 14 April 2026, Revised: 18 May 2026, Accepted: 30 June 2026, Published online: 5 Sep 2026)

Summary

Time-domain airborne electromagnetic (ATEM) methods have gained a prominent role in mineral exploration, hydrogeological investigations, and environmental monitoring due to their rapid data acquisition, extensive spatial coverage, and capability to probe considerable depths. Despite these advantages, the quantitative interpretation of ATEM data remains challenging because of the inherent ill-posedness of electromagnetic inversion, the non-uniqueness of recovered models, sensitivity to noise, and the influence of systematic calibration uncertainties. These limitations necessitate careful implementation of forward modeling and inversion strategies, along with appropriate regularization techniques. In this study, the ATEM system response was investigated based on the fundamental principles of electromagnetism and established analytical formulations for one-dimensional (1D) layered-earth models. Both frequency-domain and time-domain representations were examined to provide a comprehensive understanding of the electromagnetic response behavior. Using widely accepted computational tools for forward simulation and inversion, the performance and reliability of these frameworks were evaluated through both synthetic modeling and real-data applications. Forward modeling conducted on synthetic layered-earth scenarios demonstrated that variations in electrical conductivity and layer thickness exert a strong control on the amplitude and temporal decay characteristics of the secondary electromagnetic fields. Specifically, shallow conductive layers generate high-amplitude responses with rapid decay rates, while deeper or more resistive structures produce lower-amplitude signals that persist over longer time intervals. These results highlight the sensitivity of ATEM data to subsurface electrical properties and confirm the theoretical expectations derived from diffusion-based electromagnetic theory. Subsequent inversion of the synthetic datasets showed that the general resistivity structure of the subsurface can be recovered with acceptable accuracy, although fine-scale features may be smoothed due to regularization and limited resolution. The inversion results emphasize the trade-off between data fit and model smoothness, which is a critical aspect of stabilizing ill-posed geophysical problems. In the applied stage, real ATEM data acquired from multiple survey profiles in Australia were analyzed to assess the practical performance of the methodology. The inverted resistivity sections revealed significant geological features, including deep conductive zones, near-surface resistive layers, and structural discontinuities associated with faults and fracture systems. These interpretations are consistent with available geological and geophysical information, demonstrating the reliability and effectiveness of the adopted approach. Overall, the findings of this study indicate that the careful application of standard forward modeling and inversion algorithms enables realistic estimation of subsurface geo-electrical structures from ATEM data. The method proves to be highly valuable for mineral exploration, groundwater assessment, and environmental studies. To further enhance the robustness and resolution of ATEM interpretations, future work should focus on incorporating prior geological constraints, integrating complementary geophysical datasets such as magnetic and seismic data, and advancing toward three-dimensional inversion frameworks. Additionally, systematic uncertainty quantification using stochastic or resampling techniques is recommended to better assess model reliability and reduce ambiguity in interpretation.

Keywords: Airborne Time-Domain Electromagnetic (ATEM), forward modeling, inversion, subsurface resistivity.

Cite this article: Babaei, J., & Ghanati, R. (2026). Inverse Modeling of Airborne Time-Domain Electromagnetic (ATEM) Data. *Journal of the Earth and Space Physics*, 52(2), 271-291. DOI: <http://doi.org/10.22059/jesphys.2026.412524.1007767>

E-mail: (1) j.babaei@ut.ac.ir



© Authors Retain the Copyright and Full Publishing Rights.

Publisher: University of Tehran Press.

DOI: <http://doi.org/10.22059/jesphys.2026.412524.1007767>

Print ISSN: 2538-371X
Online ISSN: 2538-3906

مدل سازی وارون داده های الکترو مغناطیسی هوابرد حوزه زمان (ATEM)

جواد بابایی^۱ | رضا قناتی^۱✉

۱. گروه فیزیک زمین، مؤسسه ژئوفیزیک، دانشگاه تهران، تهران، ایران.

رایانامه نویسنده مسئول: rghanati@ut.ac.ir

(دریافت: ۱۴۰۵/۱/۲۵، بازنگری: ۱۴۰۵/۲/۲۸، پذیرش نهایی: ۱۴۰۵/۴/۹، انتشار آنلاین: ۱۴۰۵/۶/۱۴)

چکیده

روش الکترومغناطیس هوابرد حوزه زمان (ATEM) به دلیل سرعت برداشت بالا، پوشش مکانی گسترده و قابلیت نفوذ مناسب در اعماق، در اکتشاف معدنی و مطالعات هیدروژئولوژیکی جایگاه برجسته ای یافته است. در این پژوهش با تکیه بر مبانی نظری الکترومغناطیس، پاسخ سیستم زمین لایه ای در حوزه زمان بررسی می شود. سپس با بهره گیری از ابزارهای محاسباتی موجود برای مدل سازی پیشرو و وارون سازی، کارایی این چارچوب ها هم در سناریوهای مصنوعی و هم بر روی داده های واقعی ارزیابی می شود. نتایج مدل سازی پیشرو بر روی مدل های مصنوعی نشان می دهد که تغییرات رسانندگی و ضخامت لایه ها به طور مستقیم بر دامنه و نرخ افت میدان های ثانویه اثر می گذارد. وارون سازی داده های مصنوعی توانست روند کلی تغییرات مقاومت ویژه را با دقت مطلوب بازسازی کند. در گام کاربردی، داده های واقعی مربوط به چند پروفیل در استرالیا و با هدف تصویرسازی ساختارهای زیرسطحی بزرگ مقیاس مورد تحلیل قرار گرفت. مقاطع وارون شده، زون های رسانای عمقی، لایه های مقاوم سطحی و الگوهای مرتبط با گسل ها و شکستگی ها را آشکار ساختند و همخوانی مناسبی با شواهد زمین شناسی گزارش شده داشتند. این همسویی نشان می دهد که با استفاده از داده های ATEM و به کارگیری دقیق چارچوب های موجود، همراه با تنظیم مناسب قیدهای وارون سازی، می تواند تصویری قابل اعتماد از ساختار ژئوالکتریکی زیرسطح ارائه کرد. جمع بندی نتایج بیانگر آن است که استفاده هدفمند از الگوریتم های حل مسئله پیشرو و مدل سازی وارون ارائه شده ATEM در این پژوهش، امکان برآورد واقع بینانه تغییرات مقاومت ویژه زیرسطحی مرتبط با ساختارهای زمین شناسی را فراهم می آورد و برای شناسایی اهداف اکتشافی، ارزیابی آبخوان ها و پایش نواحی مسئله دار زیست محیطی سودمند است.

واژه های کلیدی: الکترومغناطیس هوابرد، مدل سازی پیشرو، وارون سازی، مقاومت ویژه زیرسطحی، زمین لایه ای یک بعدی.

۱. مقدمه

زمین زیرسطحی استفاده می کند. به صورت مرسوم، سیستم های الکترومغناطیس هوابرد، بسته به این که آیا اندازه گیری های ثابت در چند فرکانس انتخاب شده انجام می شود یا این که چندین پالس گسسته ایجاد و منحنی افت آن اندازه گیری می شود به دو گروه حوزه فرکانس یا حوزه زمان تقسیم بندی می شوند. در دهه اخیر سیستم های حوزه زمان پیشرفت چشمگیری داشته اند به طوری که توان تفکیک لایه های نزدیک به سطح آنها به اندازه کافی دقیق شده است و لایه های سطحی کم عمق را به خوبی سیستم های حوزه فرکانس تفکیک می کنند. اولین تلاش ها برای استفاده از سیستم های حوزه زمان هوابرد در دهه ۱۹۵۰

در دهه های اخیر، روش های ژئوفیزیکی نقش فزاینده ای در شناخت ساختارهای زیرسطحی زمین ایفا کرده اند. در این میان، روش های الکترومغناطیس هوابرد به واسطه توانایی در برداشت سریع، پوشش وسیع و نفوذ عمقی، به یکی از ابزارهای پر کاربرد در مطالعات ژئوفیزیکی بدل شده است (اوکن و همکاران، ۲۰۱۷). این روش به طور گسترده در زمینه هایی همچون اکتشاف منابع معدنی، مطالعات آب های زیرزمینی، ارزیابی آلودگی های زیست محیطی و پروژه های مهندسی کاربرد دارد (لین و همکاران، ۲۰۲۱). سیستم های الکترومغناطیس هوابرد شامل هر سیستم هوابردی می شوند که از الکترومغناطیس القایی برای اندازه گیری مقاومت ویژه

این حال، به طور کلی، روش های الکترومغناطیس هوابرد برای بررسی در عمق ۶۰۰ متر و زمانی که نیاز به وضوح عمقی و جانبی بهتر از ۴ متر و ۴۰ متر به ترتیب نباشد، مناسب هستند. در ابتدا، الکترومغناطیس هوابرد به عنوان ابزاری برای اکتشاف معدنی توسعه داده شد با این درک که کانه های معدنی، به ویژه سولفیدهای توده ای، تمایز زیادی در رسانایی الکتریکی با سنگ میزبان خود دارند (پالاک و وست، ۱۹۹۱). مطالعات موردی زیادی در ادبیات علمی ارائه شده است که نشان می دهد چگونه الکترومغناطیس هوابرد می تواند برای تعیین مرزهای کانه های فلزات پایه استفاده شود (برای مثال، اسمیت و همکاران، ۲۰۰۳؛ ویتلی و ارواین، ۲۰۰۶). سایر مواد معدنی نیز، مانند کیمبرلیت و لامپرویت های الماس دار (مک نای، ۱۹۹۵؛ کانیون، ۲۰۰۹) و اورانیوم (سورنسن و همکاران، ۲۰۰۹) با استفاده از اندازه گیری های الکترومغناطیس هوابرد اکتشاف شده اند. همچنین از این روش ژئوفیزیکی در تصویرسازی تغییرات زیرسطحی که در آن تمایزهای جزئی بین واحدهای مختلف زمین شناسی وجود دارد مورد استفاده قرار گرفته است (لاوری و همکاران، ۲۰۰۰ ب). الکترومغناطیس هوابرد در تحقیقات هیدروژئولوژیکی برای شناسایی منابع آب و بررسی ویژگی های کیفی آن استفاده می شود (آوکن و همکاران، ۲۰۰۷). نقشه برداری از خاک های شور یک کاربرد گسترده در استرالیا است (لاوری و همکاران، ۲۰۰۰ الف). سایر کاربردها شامل تصویرسازی از ضخامت یخ دریا (رید و همکاران، ۲۰۰۳)؛ نقشه برداری از عمق دریا (ولفگرام و وربانچیک، ۲۰۰۶)؛ شناسایی مهمات منفجر نشده (گیمی و همکاران، ۲۰۰۰) و ویژگی سازی زمین لغزش ها (کونی شی، ۱۹۹۸) می شود. کاربردهای بیشتر توسط آکمن (۲۰۰۳) گزارش شده است که برخی از آنها شامل شناسایی اشیاء مدفون شده، آلودگی ناشی از استخراج در معادن و بررسی ویژگی های خاک برای ساخت خطوط لوله می- باشند. با وجود پیشرفت های قابل توجه در فناوری اندازه گیری و پردازش داده های الکترومغناطیس هوابرد، داده های ثبت شده همواره به صورت غیرمستقیم با ساختار واقعی زیرسطح مرتبط اند. این داده ها ترکیبی از پاسخ های

در اکتشاف فلزات پایه در کانادا بسیار موفقیت آمیز بود و در آن دهه بیش از ۱۰ سیستم مختلف فعال بودند. با کاهش اکتشاف فلزات پایه، استفاده از روش های الکترومغناطیس هوابرد از تشخیص ناهنجاری به تصویرسازی از توزیع رسانندگی تغییر یافت و سیستم های الکترومغناطیسی فرانسی هلیکوپتری پدیدار شدند. تا دهه ۱۹۹۰، اکتشاف فلزات پایه بر اهداف عمیق متمرکز بود و سیستم های الکترومغناطیس هوابرد شروع به دنبال کردن دو مسیر کردند. سیستم های حوزه زمان با بال ثابت که برای تشخیص اهداف رساناهای عمیق طراحی شده اند و سیستم های حوزه فرکانس که برای اندازه گیری تغییرات رسانندگی با وضوح بالا و سطحی طراحی شده اند. از بیش از ۳۰ سیستمی که از زمان پیدایش روش الکترومغناطیس هوابرد ظاهر شده اند، تعداد کمی در حال حاضر به طور معمول استفاده می شوند. سیستم های ژئوتم و مگاتم بهبودهای دیجیتالی سیستم اینپوت هستند که از شکل موج فرستنده نیمه سینوسی استفاده می کند و سیستم تم پست از شکل موج فرستنده مربعی استفاده می کند که در سیستم های حوزه زمان زمینی رایج است. سیستم های هلیکوپتری گذار، حلقه فرستنده را به عنوان باری آویزان زیر هلیکوپتر حمل می کنند. سیستم های حوزه زمان هلیکوپتری که به تازگی توسعه یافته اند شامل سیستم های آثروتم، نیوتم، هویس تم، وی تم و اسکای تم می باشند. سیستم های آثروتم، نیوتم، هویس تم، وی تم عمدتاً برای اکتشاف مواد معدنی طراحی شده اند. سیستم اسکای تم برای نقشه برداری ساختارهای زمین شناسی در نزدیکی سطح برای تحقیقات آب های زیرزمینی و محیط زیست طراحی شده است و به عنوان یک جایگزین سریع برای بررسی های حوزه زمان زمینی توسعه یافته است. رسانایی الکتریکی، رایج ترین ویژگی الکترومغناطیسی است که می تواند توسط الکترومغناطیس هوابرد محاسبه شود. نقشه برداری از نفوذپذیری مغناطیسی و گذردهی دی الکتریک ممکن است در برخی شرایط محدود امکان پذیر باشد. عمق بررسی و وضوح الکترومغناطیس هوابرد به شدت به رسانایی زیرسطح و سیستم الکترومغناطیس هوابرد مورد استفاده بستگی دارد. با

الکترومغناطیسی به پارامترهای هندسی و فیزیکی محیط زیرسطح هستند (کریستیانسن و همکاران، ۲۰۰۶). از این رو، استخراج اطلاعات مفید از این داده‌ها مستلزم حل یک مسئله وارون است تا بتوان برآوردی از مدل توزیع رسانایی زیرسطح داشت. مسئله وارون‌سازی الکترومغناطیس هوابرد به دلیل ماهیت بدو وضعی، حساسیت به نوفه و اثرات تداخلات محیطی، از چالش‌برانگیزترین مراحل تفسیر داده‌های ژئوفیزیکی محسوب می‌شود (اولدنبرگ و لی، ۱۹۹۹). در چنین شرایطی، معمولاً چندین مدل زیرسطحی مختلف می‌توانند داده‌های مشابهی تولید کنند و این موضوع منجر به عدم یکتایی پاسخ می‌شود. همچنین، وجود نوفه و منابع تداخل خارجی مانند خطوط انتقال نیرو می‌تواند کیفیت داده‌ها را کاهش داده و دقت نتایج را با مشکل مواجه سازد (هوانگ و فریزر، ۲۰۰۱). برای غلبه بر این چالش‌ها، روش‌های متعددی در مدل‌سازی وارون‌سازی توسعه یافته‌اند و در قالب ابزارها و چارچوب‌های مختلف، امکان استفاده و تحلیل داده‌ها را فراهم کرده‌اند. الگوریتم‌های وارون‌سازی مختلفی در سال‌های اخیر در قالب روش‌های قطعی و تصادفی ارائه شده است. برای مثال می‌توان به پژوهش‌های کانستبل و همکاران (۱۹۸۷)، برودی و ریچاردسون (۲۰۱۵)، یین و همکاران (۲۰۱۸)، برپایه روش‌های وارون‌سازی قطعی اشاره کرد. همچنین مقالات متعددی از کارایی روش‌های تصادفی برپایه روش‌های بیزی برای بازیابی و کمی‌سازی عدم قطعیت در مدل‌سازی وارون داده‌های الکترومغناطیس هوابرد حوزه زمان مانند بلاتر و همکاران (۲۰۱۸)، ژونگ هوی و همکاران (۲۰۱۸)، هگی و همکاران (۲۰۲۰)، هنسن (۲۰۲۰)، مینسلی و همکاران (۲۰۲۱)، و ژیانودونگ و همکاران (۲۰۲۲) ارائه شده است. علیرغم مزیت الگوریتم‌های احتمالی برای وارون‌سازی داده‌های الکترومغناطیسی هوابرد، انتخاب هایپرپارامترها در فرایند اجرای الگوریتم هنوز یک چالش مهم می‌باشد. با این اوصاف، تمرکز این مقاله علاوه بر ارائه حل مسئله پیشرو برای مدل‌سازی یک-بعدی داده‌های الکترومغناطیس هوابرد حوزه زمان به دنبال معرفی یک الگوریتم وارون‌سازی قطعی برای بازیابی توزیع

رسانندگی زیرسطحی است. در ادامه، این مقاله به مطالعه مبانی نظری داده‌های الکترومغناطیس هوابرد و آشنایی با ساختار داده‌های برداشت‌شده می‌پردازد تا شناخت کافی نسبت به ماهیت داده‌ها و اهمیت پارامترهای مؤثر در مدل‌سازی به دست آید. سپس با استفاده از داده‌های مصنوعی، ابتدا عملکرد مدل‌سازی پیشرو ارزیابی می‌شود تا پاسخ‌های الکترومغناطیسی مربوط به مدل‌های مشخص زیرسطحی تولید شود. در ادامه، فرایند وارون‌سازی داده‌های مصنوعی انجام می‌شود تا کارایی روش‌های موجود در بازسازی رسانایی زیرسطحی ارزیابی شود. پس از اعتبارسنجی روش‌ها با داده‌های مصنوعی، داده‌های واقعی برداشت‌شده در چند پروفیل منتخب مورد استفاده قرار می‌گیرند.

۲. روش‌شناسی

۱-۲. مدل‌سازی پیشرو سیستم الکترومغناطیس

هوابرد در زمین لایه‌ای

مدل‌های زمین لایه‌ای امکان مدل‌سازی پیشرو و وارون نسبتاً سریع را نسبت به مدل‌های کلی‌تر دوبعدی یا سه‌بعدی فراهم می‌کنند که معمولاً نیاز به حل عددی دارند. این مدل‌ها تقریب خوبی از زمین واقعی برای محیط‌های زمین‌شناسی لایه‌ای ارائه می‌دهند، جایی که طول مقیاس تغییرات جانبی از مساحت تحت پوشش سیستم بزرگ‌تر است. ویت (۱۹۸۲)، وارد و هومان (۱۹۸۸) معادلات تحلیلی معادل برای میدان مغناطیسی حاصل از زمین لایه‌ای در حضور منابع دوقطبی مغناطیسی قائم و افقی بی‌نهایت کوچک استخراج کرده‌اند. این نوع راه‌حل‌ها پایه و اساس مدل‌سازی زمین لایه‌ای در الکترومغناطیس هوابرد را تشکیل می‌دهند. مدل‌های زمین لایه‌ای دارای N_L لایه افقی گسسته هستند که در راستای قائم روی هم چیده شده‌اند. در هر تک‌لایه خواص الکتریکی یکنواخت و همسانگرد است. به لایه k ام از بالا، ضخامت t_k ، هدایت الکتریکی σ_k ، نفوذپذیری مغناطیسی μ_k و گذردهی دی‌الکتریک ϵ_k اختصاص داده شده است. لایه زیرین که لایه کف یا نیم‌فضا نیز نامیده می‌شود، بی‌نهایت ضخیم است

تغییر می کند، به طوری که $\frac{\partial}{\partial t} = i\omega$ ($i = \sqrt{-1}$) با استفاده از روابط ارائه شده توسط وارد و هومان (۱۹۸۸) و با در نظر گرفتن حروف بزرگ برای کمیت های برداری حوزه فرکانس و با به کارگیری روابط ساختاری، می توانیم معادلات را در حوزه فرکانس بازنویسی کنیم.

$$\nabla \times E + \frac{\partial B}{\partial t} = \nabla \times E + i\mu\omega H = 0 \quad (۱)$$

$$\nabla \times H - \frac{\partial D}{\partial t} - J = \nabla \times H - i\omega\epsilon E - \sigma E = \nabla \times H - (\sigma + i\epsilon\omega)E = 0 \quad (۲)$$

سپس با گرفتن کرل از معادلات (۱) و استفاده از همانی برداری $\nabla \times \nabla \times A = \nabla(\nabla \cdot A) - \nabla^2 A$ به دست می آوریم،

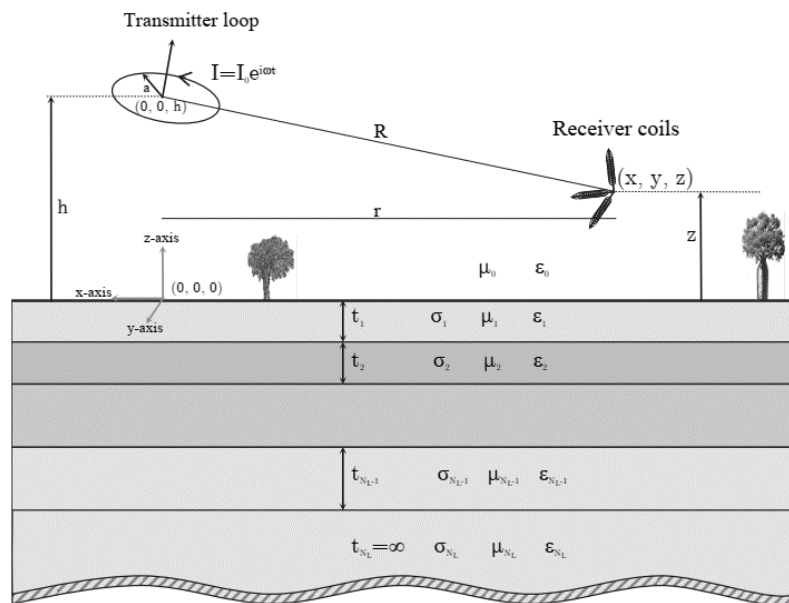
$$\nabla \times [\nabla \times E + i\mu\omega H] = \nabla(\nabla \cdot E) - \nabla^2 E + i\mu\omega \nabla \times H = 0 \quad (۳)$$

و به طور مشابه، کرل معادله (۲) به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\nabla \times [\nabla \times H - (\sigma + i\epsilon\omega)E] = \nabla(\nabla \cdot H) - \nabla^2 H - \nabla \times (\sigma + i\epsilon\omega)E = 0 \quad (۴)$$

به طوری که $t_{N_L} = \infty$ در ادامه برای راحتی، برداری را تعریف می کنیم که حاوی تمام ضخامت لایه ها $t = [t_1, t_2, \dots, t_{N_L-1}]^T$ به روشی مشابه بردارهای $\mu = [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{N_L-1}]^T$ ، $\epsilon = [\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{N_L-1}]^T$ و $\sigma = [\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{N_L}]^T$ تعریف می شوند. شکل ۱ به صورت شماتیک، یک مدل زمین لایه ای و همچنین برخی جنبه های سیستم مختصاتی را نشان می دهد. سیستم مختصاتی که در آن معادلات مدل سازی پیشرو تعریف شده اند، یک سیستم مختصات کارتزینی دست راست است.

در اینجا با نشان دادن استخراج معادلات موج هلمهولتز در حوزه فرکانس برای میدان الکتریکی E و میدان مغناطیسی H آغاز می کنیم. این معادلات از معادلات ماکسول در حوزه زمان و روابط ساختاری استخراج می شوند. ما منابع را در نظر می گیریم که ممان آنها با زمان t به صورت هارمونیک با فرکانس زاویه ای ω به شکل $m = m_0 e^{i\omega t}$



شکل ۱. نمایش شماتیک یک فرستنده دوقطبی مغناطیسی و یک گیرنده سه محوره بالای یک زمین N_L لایه ای. در شکل بالا h فاصله فرستنده از سطح زمین و z فاصله گیرنده از سطح زمین. همچنین دو کمیت هندسی r (فاصله افقی گیرنده-فرستنده) و R (فاصله شعاعی گیرنده-فرستنده) به ترتیب برابر با $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ و $R = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - h)^2}$ هستند.

استوانه‌ای دایره‌ای، ویت (۱۹۸۲) پتانسیل اسکالر هرتر مغناطیسی را تعریف کرد که میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی از آن قابل استخراج هستند. این پتانسیل اسکالر هرتر همچنین معادله اسکالر هلمهولتز را اقلان می‌کند و حل آن ساده‌تر از حل مستقیم میدان‌های مغناطیسی است. در هوا (ناحیه شامل فرستنده منبع) جواب عمومی برای پتانسیل هرتر به صورت زیر به دست می‌آید:

$$F_0 = \frac{Ia}{2} \int_0^\infty \frac{J_1(\lambda a)}{\lambda} [e^{-\lambda|z-h|} + R_0 e^{-\lambda(z+h)}] J_0(\lambda r) d\lambda \quad (9)$$

و در لایه همگن k به صورت زیر خواهد بود:

$$F_k = \frac{Ia}{2} \int_0^\infty \frac{J_1(\lambda a)}{\lambda} [A_k e^{u_k z} + B_k e^{-u_k z}] J_0(\lambda r) d\lambda \quad (10)$$

همان‌طور که در شکل ۱ تعریف شد h فاصله فرستنده از سطح زمین و z فاصله گیرنده از سطح زمین، a شعاع حلقه جریان بسیار کوچک حامل جریان I است، $u_k = \sqrt{\lambda^2 - k_k^2} = \sqrt{\lambda^2 + i\mu_k \sigma_k \omega}$ بسط مراتب صفر و یک هستند و λ متغیر انتگرال‌گیری است. عبارات $R_0(\sigma, \mu, t, \omega, \lambda)$ ، $A_k(\sigma, \mu, t, \omega, \lambda)$ و $B_k(\sigma, \mu, t, \omega, \lambda)$ ضرایب میدان‌های موج بالارونده و پایین‌رونده در هر ناحیه‌اند که باید از طریق اعمال شرایط مرزی تعیین شوند. شرایط مرزی مناسب ایجاب می‌کند که چگالی شار مغناطیسی عمود و میدان‌های مغناطیسی مماسی در سطح و مرزهای لایه‌ها پیوسته باشند. همچنین شرط می‌شود که ضریب میدان موج پایین‌رو در لایه پایینی باید صفر باشد ($B_{N_L} = 0$) زیرا میدان‌ها باید با میل به بی‌نهایت ($z \rightarrow -\infty$) از بین بروند. اعمال این شرایط منجر به مجموعه‌ای از معادلات می‌شود که از آن ضرایب به صورت متوالی حذف می‌شوند و ضریب موردنیاز R_0 تعیین می‌شود. بر اساس وارد و هومان (۱۹۸۸)، راه‌حل به صورت برهم‌نهی موج‌های تخت با زوایای فرود مختلط پیوسته در حال تغییر است. آنها همچنین عبارت R_0 را به عنوان ضریب بازتاب معرفی می‌کنند. برای محاسبه میدان‌های مغناطیسی در هوا (که برای مدل‌سازی هواورد مورد نیاز است)، کافی است R_0 را در معادله (۹) جای‌گذاری کرده و با استفاده از

در معادلات بالا B شار مغناطیسی، J چگالی جریان رسانندگی و D چگالی جریان جابه‌جایی است. برای محیط‌های همگن داریم $\nabla \cdot H = 0$ ، زیرا داریم $\nabla \cdot B = \nabla \cdot \mu H = \mu \nabla \cdot H = 0$ یک ساده‌سازی بیشتر می‌تواند برای مواد رسانای زمین ($\geq 10^4 \text{ s/m}$) انجام گیرد، زیرا بار الکتریکی آزاد در محیط‌های همگن در کمتر از 10^{-6} ثانیه از بین می‌رود (وارد و هومان، ۱۹۸۸). بنابراین برای فرکانس‌هایی که در الکترومغناطیس هواورد استفاده می‌شوند ($\leq 10^5 \text{ Hz}$) می‌توان گفت $\nabla \cdot E = 0$ زیرا $\nabla \cdot D = \nabla \cdot \epsilon E = \epsilon \nabla \cdot E = \rho \sim 0$. در نتیجه با جای‌گذاری $\nabla \times H = (\sigma + i\epsilon\omega)E$ از معادله (۲) در معادله (۳)، و همچنین جای‌گذاری $\nabla \times E = -i\mu\omega H$ از معادله (۱) در معادله (۴)، معادلات موج در حوزه فرکانس به دست می‌آیند:

$$\nabla^2 E + (\mu\epsilon\omega^2 - i\mu\sigma\omega)E = 0 \quad (5)$$

$$\nabla^2 H + (\mu\epsilon\omega^2 - i\mu\sigma\omega)H = 0 \quad (6)$$

این‌ها همان معادلات موج هلمهولتز در E و H هستند. این معادلات انتشار انرژی الکترومغناطیسی را با ثابت انتشار زیر توصیف می‌کنند،

$$k = \sqrt{\mu\epsilon\omega^2 - i\mu\sigma\omega} \quad (7)$$

برای فرکانس‌های پایین ($\leq 10^5 \text{ Hz}$) و مواد واقعی زمین، معمولاً رابطه $\mu\sigma \ll \mu\epsilon\omega^2$ که به فرض شبه‌ایستا معروف است برقرار است. بنابراین با در نظر گرفتن فرض شبه‌ایستا و باتوجه به طیف فرکانس‌های مورد استفاده در ژئوفیزیک هواورد، معادله (۷) را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$k^2 = -i\mu\sigma \quad (8)$$

از نظر فیزیکی، فرض شبه‌ایستا به این معنی است که جریان‌های رسانندگی بر جریان‌های جابه‌جایی غلبه دارند. همچنین این فرض موجب می‌شود که معادلات هلمهولتز به معادلات پخش تبدیل شوند و بنابراین فرایند غالب، پخش (diffusion) باشد، که این امر باعث کاهش توان تفکیک در روش‌های الکترومغناطیسی می‌شود (وارد و هومان، ۱۹۸۸). روابط میدان مغناطیسی ارائه شده در اینجا توسط ویت (۱۹۸۲) تحت این فرض شبه‌ایستا استخراج شده‌اند. برای یک دوقطبی مغناطیسی قائم، در دستگاه مختصات

به‌طوری‌که $k = 2, 3, \dots, N_L$ و برای حالت خاص $k = 1$ ماتریس لایه‌ای به‌صورت زیر ساده می‌شود:

$$M_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \left(1 + \frac{\mu_0 u_1}{\mu_1 u_0}\right) & \left(1 - \frac{\mu_0 u_1}{\mu_1 u_0}\right) \\ \left(1 - \frac{\mu_0 u_1}{\mu_1 u_0}\right) & \left(1 + \frac{\mu_0 u_1}{\mu_1 u_0}\right) \end{bmatrix} \quad (۱۶)$$

ماتریس انتشار مرکب، که حاصل ضرب همه ماتریس‌های لایه‌ای منفرد است، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} = M_1 \prod_{k=2}^{N_L} M_k \quad (۱۷)$$

و ضریب بازتاب مختلط R_0 برابر است با

$$R_0 = \frac{P_{21}}{P_{11}} \quad (۱۸)$$

روش ماتریس انتشار از نظر محاسباتی کارآمدتر و در مفهوم برنامه‌نویسی نیز مناسب‌تر از روش بازگشتی است، به‌ویژه زمانی که مشتقات جزئی ضریب بازتاب نسبت به ویژگی‌های لایه‌های منفرد (رسانندگی و ضخامت‌ها) در یک الگوریتم وارون‌سازی نیاز باشد. مشتقات جزئی تحلیلی R_0 برای رسانندگی و ضخامت لایه‌ها استخراج شده‌اند. بر اساس فارکوهارسون (۲۰۰۰)، ماتریس‌های لایه‌ای و ماتریس‌های انتشار جزئی می‌توانند در طول مرحله مدلسازی پیشرو ذخیره شوند و سپس مجدداً برای محاسبه مشتقات جزئی استفاده شوند. در این بخش، هر ماتریس لایه‌ای M_k محاسبه و ذخیره شده و ماتریس‌های انتشار جزئی قبل و بعد نیز انباشته می‌شوند. این ماتریس‌های انتشار جزئی به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$P_k^{pre} = \prod_{j=1}^{k-1} M_j, \quad P_k^{post} = \prod_{j=k+1}^{N_L} M_j \quad (۱۹)$$

یک منبع دوقطبی بسیار کوچک در مکان $(0,0,h)$ را در نظر بگیرید (h فاصله فرستنده از سطح زمین) که به‌صورت دلخواه در راستای بردار یک $\hat{m}$ قرار دارد و ممان آن به‌صورت هارمونیک در زمان تغییر می‌کند. ممان آن به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$m = m_0^{i\omega t} \hat{m} \quad (۲۰)$$

که در آن m_0 یک ثابت اسکالر است، ω فرکانس زاویه‌ای را نشان می‌دهد و t زمان را بیان می‌کند.

$$M_k = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \left(1 + \frac{\mu_{k-1} u_k}{\mu_k u_{k-1}}\right) & \\ \left(1 - \frac{\mu_{k-1} u_k}{\mu_k u_{k-1}}\right) e^{-2u_{k-1} t_{k-1}} & \end{bmatrix}$$

تعریف پتانسیل هرتز روابط مربوط به مؤلفه‌های میدان مغناطیسی در گیرنده استخراج شود. فرایند مربوط به یک دوقطبی افقی به‌دلیل نبود تقارن استوانه‌ای پیچیده‌تر است، اما همان مسیر کلی را دنبال می‌کند.

ویت (۱۹۸۲) یک روش بازگشتی برای تعیین ضریب بازتاب مختلط R_0 که برای محاسبه میدان‌های مغناطیسی مورد نیاز است ارائه داد. وی دریافت که:

$$R_0 = \frac{N_0 - Y_1}{N_0 + Y_1} \quad (۱۱)$$

که در آن $N_0 = \lambda / i\mu_0 \omega$ گذاری (admittance) در سطح است که نیاز به محاسبه دارد. گذار در مرز بین لایه k ام و $k+1$ ام از طریق رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$Y_k = \frac{Y_{k+1} + N_k \tanh(u_k t_k)}{N_k + Y_{k+1} \tanh(u_k t_k)} \quad (۱۲)$$

که در آن:

$$N_k = \frac{u_k}{i\mu_k \omega} \quad (۱۳)$$

$$u_k = \sqrt{\lambda^2 + i\mu_k \sigma_k \omega} \quad (۱۴)$$

در نیم‌فضای کف داریم $t_{N_L} = \infty$ و $\tanh(u_{N_L} t_{N_L}) \rightarrow 1$ ، در این حالت، معادله (۱۲) به‌شکل زیر ساده می‌شود $Y_{N_L} = N_{N_L}$ که مقداری شناخته‌شده است و می‌توان آن را از معادله (۱۳) محاسبه کرد. بنابراین مبنای یک الگوریتم بازگشتی به دست می‌آید که در آن Y_1 نامعلوم به‌صورت بازگشتی محاسبه می‌شود. بدین صورت که محاسبه Y_k ‌ها از پایین‌ترین مرز (یعنی Y_{N_L}) آغاز می‌شود و با استفاده متوالی از معادله (۱۲)، مقادیر $Y_{N_L-1}, Y_{N_L-2}, \dots, Y_2, Y_1$ به دست می‌آیند. سپس جمله R_0 که در تبدیل هنکل نیاز است را می‌توان از معادله (۱۱) محاسبه کرد. فارکوهارسون و همکاران (۲۰۰۳) و فارکوهارسون (۲۰۰۰) روشی مناسب برای محاسبه جمله $R_0 = P_{21}/P_{11}$ ارائه کردند که آن را در روابط میدان مغناطیسی خود استفاده کردند و این جمله معادل همان ضریب بازتاب R_0 است که در اینجا معرفی می‌شود. آنها این روش را روش ماتریس انتشار می‌نامند. در این روش برای هر لایه یک ماتریس مجزا تعریف می‌شود که برای لایه k ام به‌صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} \left(1 - \frac{\mu_{k-1} u_k}{\mu_k u_{k-1}}\right) & \\ \left(1 + \frac{\mu_{k-1} u_k}{\mu_k u_{k-1}}\right) e^{-2u_{k-1} t_{k-1}} & \end{bmatrix} \quad (۱۵)$$

میدان مغناطیسی کل (H) در موقعیت (x, y, z) برابر است با:

$$H = H^P + H^S \quad (21)$$

که در آن H^P میدان اولیه و H^S میدان ثانویه است. طبق تعریف، میدان اولیه فقط توسط جریان‌هایی که در حلقه فرستنده جاری هستند ایجاد می‌شود، به این معنی که محیط رسانای زیرسطحی وجود نداشته باشد. میدان اولیه با جریان فرستنده هم‌فاز بوده و تنها تابعی از هندسه سیستم و ممان دوقطبی فرستنده است. میدان اولیه به صورت زیر داده می‌شود،

$$H^P = G^P m = \frac{1}{4\pi} \begin{bmatrix} \frac{3x^2 - R^2}{R^5} & \frac{3xy}{R^5} & \frac{3x(z-h)}{R^5} \\ \frac{3xy}{R^5} & \frac{3x^2 - R^2}{R^5} & \frac{3x(z-h)}{R^5} \\ \frac{3x(z-h)}{R^5} & \frac{3y(z-h)}{R^5} & \frac{3(z-h)^2 - R^2}{R^5} \end{bmatrix} m \quad (22)$$

که در آن ماتریس G^P تانسور گرین میدان اولیه را نشان می‌دهد (فیتزمن و بین، ۲۰۰۴). در مقابل، میدان ثانویه از جریان‌های القاشده در زیرسطح ناشی از تحریک اولیه متغیر با زمان به وجود می‌آید. میدان ثانویه با جریان فرستنده اختلاف فاز دارد و بنابراین با کمیت‌های مختلط نمایش داده می‌شود. این میدان‌ها تابعی از ممان فرستنده، هندسه سیستم، فرکانس و ویژگی‌های الکتریکی زیرسطح هستند. میدان ثانویه به صورت زیر داده می‌شود:

$$H^S = G^S m = \frac{1}{4\pi} \begin{bmatrix} \frac{(x^2 - y^2)T_2}{r^3} - \frac{T_0 x^2}{r^2} & \frac{2xyT_2}{r^3} - \frac{xyT_0}{r^2} & -\frac{xT_1}{r} \\ \frac{2xyT_2}{r^3} - \frac{xyT_0}{r^2} & \frac{(y^2 - x^2)T_2}{r^3} - \frac{T_0 y^2}{r^2} & -\frac{yT_1}{r} \\ \frac{xT_1}{r} & \frac{yT_1}{r} & -T_0 \end{bmatrix} m \quad (23)$$

که در آن ماتریس G^S تانسور گرین میدان ثانویه را نشان می‌دهد. ویژگی‌های الکتریکی و وابستگی به فرکانس در روابط، از طریق عبارات T_0 ، T_1 و T_2 که انتگرال‌های تبدیل هنکل هستند، وارد می‌شوند. ستون‌های تانسورهای G^P و G^S می‌توانند از نظر فیزیکی به عنوان سهم یک دوقطبی فرستنده با ممان واحد در جهت‌های محورهای x ، y و z

تفسیر شوند. به طور مشابه، هر سطر به میدان حاصل در گیرنده در راستای هر یک از این محورها مربوط می‌شود. توجه داشته باشید که در فیتزمن و بین (۲۰۰۴) علائم منفی نباید در جلوی جمله موجود در ستون اول از سطر دوم، چه در تانسور گرین میدان اولیه و چه در میدان ثانویه، نمایش داده شوند. بر این اساس، این خطا در معادلات (۲۲) و (۲۳) اصلاح شده است.

عبارات T_0 ، T_1 و T_2 که در تانسور گرین میدان ثانویه ظاهر می‌شوند، انتگرال‌های تبدیل هنکل به شکل زیر هستند:

$$T_0 = -\int_0^\infty R_0(\lambda) \lambda^2 e^{-\lambda(z+h)} J_0(\lambda r) d\lambda \quad (24)$$

$$T_1 = -\int_0^\infty R_0(\lambda) \lambda^2 e^{-\lambda(z+h)} J_1(\lambda r) d\lambda \quad (25)$$

$$T_2 = -\int_0^\infty R_0(\lambda) \lambda e^{-\lambda(z+h)} J_1(\lambda r) d\lambda \quad (26)$$

در درون این انتگرال‌ها، جمله ضریب بازتاب مختلط R_0 یک تابع مختلط از رسانندگی لایه‌ها (σ)، تراوایی‌های مغناطیسی (μ)، ضخامت‌ها (t)، فرکانس فرستنده (ω) و

متغیر انتگرال‌گیری λ است. توابع $J_0(\lambda r)$ و $J_1(\lambda r)$ توابع بسل مراتب صفر و یک هستند که آرگومان آنها حاصل ضرب فاصله افقی فرستنده-گیرنده (r) در متغیر انتگرال است. این انتگرال‌ها در حالت کلی، حل تحلیلی ندارند و باید به صورت عددی محاسبه شوند. محاسبه متوالی R_0 برای چندین مقدار متغیر انتگرال در ارزیابی عددی انتگرال‌ها و تکرار آن برای هر فرکانس فرستنده، پرهزینه‌ترین بخش محاسباتی در مدل‌سازی پیشروی زمین لایه‌ای است.

دشواری در انتگرال‌گیری عددی تبدیل هنکل به دو دلیل وجود دارد؛ بی‌نهایت بودن دامنه انتگرال‌گیری و ماهیت نوسانی تابع بسل برای مقادیر بزرگ λr . در ادبیات علمی مقالات زیادی در مورد محاسبه عددی تبدیل هنکل وجود دارد. نمونه‌های قابل توجه مرتبط با روش‌های ژئوالکتریکی شامل گوش (۱۹۷۱)، کوفود (۱۹۷۲) می‌باشد. به جز چاو (۱۹۸۳)، همه این نویسندگان استفاده از فیلترهای دیجیتال خطی را ترجیح داده‌اند. در تکنیک‌های فیلتر خطی، انتگرال به یک انتگرال کانولوشن تبدیل می‌شود که از طریق یک جانشینی مناسب متغیرها انجام می‌گیرد. سپس این مقدار با یک جمع کانولوشن گسسته تقریب زده

موقعیت قله $R_0(\lambda)$ را نیز می توان با تنها یک بار محاسبه R_0 برای یک نیم فضا که زمین واقعی را تقریب می زند، نسبتاً دقیق تخمین زد. این بدان معناست که محاسبات پرهزینه R_0 می تواند بلافاصله به ناحیه ای محدود شود که دقیقاً در اطراف قله های انتگرال گیر است. علاوه بر این، می توان طول افقی را برای هر سه انتگرال یکسان در نظر گرفت.

بررسی ها بر روی مدل های چند لایه نشان می دهد که با استفاده از این روش انتگرال گیری تریبی تغییرات را می توان عموماً با دقت نسبی کمتر از ۰/۱٪ و تنها با ۱۷ بار محاسبه R_0 ارزیابی کرد. این سطح از دقت کافی در نظر گرفته می شود، زیرا بسیار بهتر از نوبه دو تا پنج درصدی است که در داده های الکترومغناطیس هوابرد معمول است. در روش فیلتر دیجیتال و ضرایب معرفی شده توسط گوپتاسارما و سینگ (۱۹۹۷) ۱۲۰ و ۱۴۰ ضریب برای کرنل های توابع بسل J_0 و J_1 وجود دارد. از آنجا که طول های افقی همگام نبودند، برای محاسبه هر سه انتگرال در مجموع به ۲۶۰ بار محاسبه R_0 نیاز است. برای ساخت پاسخ کامل سیستم (ولتاژ القایی در گیرنده)، ابتدا باید میدان های مغناطیسی دوقطبی های بی نهایت کوچک معادل را از معادلات (۲۲) یا (۲۳) برای هر حلقه فرستنده، موقعیت سیم پیچ گیرنده و فرکانس به صورت جداگانه محاسبه کنیم.

یک حلقه فرستنده با دور n_{TX} و مساحت A_{TX} را که در نقطه $(0,0,h)$ متمرکز است در نظر بگیرید. این حلقه یک جریان متغیر با زمان $I = I_0 e^{i\omega t}$ را حمل می کند. حلقه توسط یک دوقطبی مغناطیسی بی نهایت کوچک معادل تقریب زده می شود که عمود بر صفحه حلقه جهت گیری دارد و ممان آن به صورت زیر بیان می شود:

$$m = n_{TX} I A_{TX} R_{TX}^T \hat{m}_{TX} \quad (27)$$

که در آن بردار $\hat{m}_{TX}$ یک بردار مرجع جهت گیری حلقه است، زمانی که در پرواز مستقیم و افقی قرار دارد. برای مثال، $\hat{m}_{TX} = [0,0,1]^T$ برای حلقه فرستنده در یک سیستم حوزه زمانی با بال ثابت، و $\hat{m}_{TX} = [1,0,0]^T$ برای سیم پیچ فرستنده در یک مجموعه کوئل عمودی-محوری در

می شود، که در آن جملات جمع شونده حاصل ضرب ارزیابی توابع کرنل با وزن های فیلتر از پیش تعیین شده هستند. این جمع را می توان با استفاده از طرح های مختلف کارآمد کانولوشن تطبیقی و تأخیری انجام داد. بر اساس وارد و هومان (۱۹۸۸)، تکنیک های فیلتر دیجیتال زمانی مفید هستند که نیاز باشد انتگرال برای مقادیر مختلف زیادی از r محاسبه شود، که در این حالت نتایج محاسبات پرهزینه R_0 می تواند ذخیره شده و بعداً برای سایر مقادیر r دوباره استفاده شوند. چاو (۱۹۸۳) روشی مبتنی بر انتگرال گیری عددی تریبی مستقیم را انتخاب کرد که از بسط کسره های پیوسته برای انتگرال های جزئی محاسبه شده بین صفرهای متوالی توابع بسل استفاده می کند. این دسته از مقالات عمدتاً جنبه عمومی دارند، به این معنا که روش ها برای پوشش طیف وسیعی از توابع کرنل و همچنین طیف وسیعی از فاصله های افقی فرستنده تا گیرنده r طراحی شده اند. در مدل سازی پیشروی زمین لایه ای برای سیستم های الکترومغناطیس هوابرد نیازی به پوشش طیف وسیعی از انتگرال گیرها وجود ندارد، زیرا تنها سه مورد از آنها وجود دارد و این سه به طور نزدیکی به هم مرتبط هستند. همچنین، برخلاف سیستم های زمینی، نیازی به محاسبه انتگرال ها برای موقعیت های متعدد گیرنده وجود ندارد، زیرا برای هر مدل زمین لایه ای تنها یک موقعیت گیرنده وجود دارد. در این مقاله، یک روش انتگرال گیری عددی تریبی برای حالت هوابرد و زمین های لایه ای استفاده می شود. تمرکز اصلی بر کاهش دامنه انتگرال گیری و در نتیجه کاهش تعداد محاسبات پرهزینه R_0 بوده است؛ این کار با برآورد تحلیلی موقعیت قله و افت انتگرال ها انجام شده است. این امر امکان پذیر است زیرا $R_0(\lambda)$ و n $\lambda^n e^{-\lambda(z+h)}$ (۱، ۲) توابع هموار از λ هستند. همچنین هنگامی که به طور خاص با حالت هوابرد سروکار داریم، هر دو ارتفاع فرستنده (h) و ارتفاع گیرنده (z) مقادیر مثبت دارند. به همین دلیل، جمله های نمایی $\lambda^n e^{-\lambda(z+h)}$ برای مقادیر افزاینده λ به سرعت افت می کنند. موقعیت قله و نرخ افت از قله عبارت $\lambda^n e^{-\lambda(z+h)}$ را می توان به طور تحلیلی تعیین کرد و

سیستم حوزه فرکانس است. رول، پیچ و یاو حلقه به طور کلی توسط ماتریس چرخش R_{TX} تعریف می شوند.

می توان معادله (۲۷) را مستقیماً در روابط میدان مغناطیسی قرار داد تا میدان های ناشی از یک دوقطبی فرستنده با جهت گیری دلخواه محاسبه شوند. روابط داده شده در معادلات (۲۲) و (۲۳) مؤلفه های میدان های مغناطیسی جهتی را در امتداد هر یک از محورها در سیستم مختصات بیان می کنند. با این حال، مؤلفه های میدان مغناطیسی که می خواهیم مدل سازی کنیم همان مؤلفه هایی هستند که در امتداد محور هر یک از سیم پیچ های گیرنده حس می شوند، که به طور کلی ممکن است چرخیده باشند. یک مجموعه گیرنده سه مؤلفه ای را در نظر بگیرید که دارای سه سیم پیچ حسگر متعامد با n_{RX} دور و مساحت A_{RX} است و در موقعیت (x, y, z) قرار دارد. این ها معمولاً به عنوان سیم پیچ های گیرنده مؤلفه X ، مؤلفه Y و مؤلفه Z نامیده می شوند که محورهایشان، زمانی که مجموعه گیرنده در پرواز مستقیم و افقی قرار دارد، به ترتیب با محورهای x ، y و z سیستم مختصات لختی موازی هستند. با این حال، به طور کلی مجموعه گیرنده می چرخد به گونه ای که رول، پیچ و یاو آن توسط ماتریس چرخش R_{RX} تعریف شود. یک بردار سه مؤلفه ای H_{RX} که مؤلفه های آن میدان های مغناطیسی حس شده توسط سیم پیچ های گیرنده مؤلفه x ، y و z هستند، می تواند تعریف شود و به صورت زیر بیان شود:

$$H_{RX} = R_{RX} H \quad (28)$$

بنابراین، پس از جمع بندی جملات قبلی می توان نوشت:

$$H_{RX} = R_{RX} [(G^P + G^S) I n_{TX} A_{TX} R_{TX}^T \hat{m}_{TX}] \quad (29)$$

به صورت جایگزین، ما ممکن است بخواهیم فقط مؤلفه میدان اولیه را محاسبه کنیم،

$$H_{RX}^P = R_{RX} [G^P I n_{TX} A_{TX} R_{TX}^T \hat{m}_{TX}] \quad (30)$$

یا تنها میدان ثانویه را محاسبه کنیم،

$$H_{RX}^S = R_{RX} [G^S I n_{TX} A_{TX} R_{TX}^T \hat{m}_{TX}] \quad (31)$$

معادلات (۳۰) و (۳۱) معادلات بنیادی هستند که میدان های مغناطیسی اولیه و ثانویه را در راستای محورهای یک مجموعه گیرنده با جهت گیری دلخواه و در حضور یک حلقه فرستنده با جهت گیری دلخواه که در یک تک

فرکانس ارسال می کند، بیان می کنند.

گیرنده در واقع ولتاژ القایی در سیم پیچ و نه خود میدان مغناطیسی را اندازه گیری می کند. بر اساس قانون فارادی، ولتاژ القایی برابر با منفی نرخ زمانی تغییر شار مغناطیسی کل عبوری از حلقه است. برای نوسانات زمانی هارمونیک منبع دوقطبی در نظر گرفته شده، داریم $\partial/\partial t = i\omega$. بنابراین، ولتاژ القایی کل در سیم پیچ گیرنده به صورت زیر است:

$$V_{RX} = -n_{RX} \frac{\partial(B_{RX} A_{RX})}{\partial t} = -n_{RX} \frac{\partial(\mu_0 H_{RX} A_{RX})}{\partial t} = -i\omega \mu_0 n_{RX} A_{RX} H_{RX} \quad (32)$$

و مؤلفه های اولیه و ثانویه آن به ترتیب به صورت زیر هستند:

$$V_{RX}^P = -i\omega \mu_0 n_{RX} A_{RX} R_{RX} [G^P I n_{TX} A_{TX} R_{TX}^T \hat{m}_{TX}] \quad (33)$$

$$V_{RX}^S = -i\omega \mu_0 n_{RX} A_{RX} R_{RX} [G^S I n_{TX} A_{TX} R_{TX}^T \hat{m}_{TX}] \quad (34)$$

در نتیجه، می توان پاسخ یک سیستم الکترومغناطیس هابرد کلی را با استفاده از ترکیبات مناسب معادله (۳۲) محاسبه کرد. برخی سیستم ها نتایج بر حسب میدان مغناطیسی در گیرنده بیان می شوند و نه بر حسب ولتاژ القایی. برای مدل سازی بیشتر سیستم های حوزه فرکانس که از چندین کوئیل ست استفاده می کنند و هر یک شامل یک حلقه فرستنده، یک حلقه گیرنده و عمل کننده در یک فرکانس مشخص است، تنها لازم است که برای هر کوئیل ست یک منبع دوقطبی معادل وجود داشته باشد. برای مدل سازی سیستم های حوزه زمان می توان از روابط تحلیلی حوزه فرکانس استفاده کرد. روند محاسبه پاسخ یک سیستم حوزه زمان به شرح زیر است:

الف) شکل موج جریان فرستنده را دیجیتالی کنید (یا شکل موج معادل داده پردازش شده در حالت تمپست (TEMPEST) و اسپکترم (SPECTREM)) تا یک سری زمانی جریان فرستنده w_t تولید شود و طیف فرکانسی گسسته آن را $W_f = F(w_t)$ به واسطه ی تبدیل فوریه سریع (FFT) محاسبه کنید. ب) مؤلفه های میدان مغناطیسی مورد نیاز B_f^{log} را در گیرنده برای چندین فرکانس گسسته لگاریتمی توزیع شده در پهنای باند کامل سیستم محاسبه کنید، ج) با استفاده از درون یابی اسپلاین، مقادیر لگاریتمی

که در آن، $\Phi_d(m)$ عبارت عدم برازش داده ها، $\Phi_r(m)$ عبارت اختلاف مدل مرجع، $\Phi_x(m)$ ، $\Phi_y(m)$ و $\Phi_z(m)$ به ترتیب عبارت های زبری مدل شرقی-غربی، شمالی-جنوبی و قائم هستند، به طوری که باعث تعدیل تغییرات ناگهانی در مدل می شوند و $\Phi_b(m)$ عبارت زبری بایاس است. این عبارت انحرافات موجود در مدل (مثل اجزای فرکانس پایین) را جریمه می کند، که معمولاً زمانی رخ می دهد که خطا یا روندی سیستماتیک در مدل وجود داشته باشد. همچنین پارامترهای منظم سازی λ_x ، λ_y و λ_z ضرایب وزن دهی به هریک از جملات زبری در تابع هدف هستند. بنابراین هدف از کمینه سازی تابع (۳۵) جست و جوی مدلی است که تمامی این جملات را به طور متعادل در نظر بگیرد. تابع Φ_d به مفهوم کمترین مربعات وزن داده شده تعریف می شود،

$$\Phi_d(m) = [d - g(m)]^T C_d^{-1} [d - g(m)] \quad (36)$$

در اینجا $d = (d^{air} | d^{geo} | d^{int})^T$ بردار طول N_d داده ها است که از داده های مشاهده شده هوابرد، ژئوالکتریک و اطلاعات عمقی لایه ها تشکیل شده است. بردار $m = (m^{cal} | m^{ear})^T$ بردار طول N_m از پارامترهای ناشناخته کالبراسیون و رسانندگی مدل است که باید ارزیابی شوند. تابع $g(m)$ تابع مدل پیشروی غیر خطی است که پارامترهای مدل را به داده ها نگاشت می کند. ماتریس C_d با ابعاد $N_d \times N_d$ کوواریانس خطاهای مورد انتظار در داده های مشاهده شده را بیان می کند. اگر فرض شود که خطاها غیر همبسته و به طور نرمال توزیع شده باشند، آنگاه C_d واریانس خطای مربوط به داده λ_m را نشان می دهد و تمامی ورودی های غیر قطری ماتریس C_d صفر خواهند بود. بخش عدم برازش مدل مرجع از تابع هدف Φ_r ، امکان اعمال قیود بر روی حل از طریق پیش بینی های اولیه در مورد ساختار رسانندگی را می دهد.

منظم سازی راه حل را به سمت بر آورد یک مجموعه مرجع از مقادیر رسانندگی لایه ای، ضخامت لایه ای و پارامترهای کالبراسیون سوق می دهد. مقادیر پیش بینی شده اولیه می توانند به عنوان مثال از تجزیه و تحلیل آماری داده های رسانندگی چاه در ناحیه برداشت شده یا از یک

B_f^{log} را به طیف فرکانسی خطی B_f در همان فرکانس های گسسته ای که در W_f وجود دارند تبدیل کنید، د) بسته به این که پاسخ میدان مغناطیسی B یا پاسخ ولتاژ مورد نیاز باشد، $b_t = F^{-1}(B_f W_f)$ یا $v_t = F^{-1}(-i\omega B_f W_f)$ با وارون سازی (FFT) محاسبه کنید تا سری های زمانی پاسخ را به دست آورید، د) سری زمانی b_t یا v_t را بر اساس نیاز پنجره بندی کنید تا شبیه سازی صحیح روش پنجره ای سیستم (برای مثال، باکس کار (boxcar)، کاهش خطی، مساحت زیر منحنی) انجام شود و پاسخ پنجره ای مورد نیاز حوزه زمان تولید شود، ه) نرمال سازی ها و تبدیل واحدها را بر پاسخ های پنجره اعمال کنید تا به طور مناسب هر گونه تنظیمی که بر داده های به دست آمده و شبیه سازی شده صورت گرفته است باز تولید شود. تعداد فرکانس های لگاریتمی فاصله گذاری شده که در آنها محاسبات پرهزینه میدان مغناطیسی باید انجام شوند، به پهنای باند سیستم و دقت مورد نظر بستگی دارد. ضرورتاً، باید از چگالی کافی فرکانس ها استفاده شود تا نمایش اسپلاین دقیقی از طیف پیوسته فرکانس از نمونه های گسسته فراهم شود. به طور معمول، شش فرکانس در هر دهه لازم است که در چهار تا پنج دهه محاسبه شوند (رایش، ۱۹۹۸).

۲-۲. مدل سازی وارون

وارون سازی داده های الکترومغناطیسی هوابرد به فرایندی اطلاق می شود که هدف آن تخمین توزیع ویژگی های فیزیکی زیر سطحی، مانند رسانندگی الکتریکی از روی داده های اندازه گیری شده در میدان الکترومغناطیسی است. این داده ها معمولاً شامل اطلاعاتی از میدان های الکترومغناطیسی ثانویه هستند که توسط فرستنده های هوابرد به زمین ارسال شده و سپس توسط گیرنده ها اندازه گیری می شوند. فرایند وارون سازی شامل برگرداندن مدل های فیزیکی مختلف ($m \in \mathcal{R}^{n \times 1}$) و تطابق پاسخ این مدل ها با داده های واقعی ($d \in \mathcal{R}^{m \times 1}$) می باشد. مدل سازی وارون به دنبال کمینه کردن یک تابع هدف کلی به فرم زیر است:

$$\Phi(m) = \Phi_d(m) + \lambda_r \Phi_r(m) + \lambda_x \Phi_x(m) + \lambda_y \Phi_y(m) + \lambda_z \Phi_z(m) + \lambda_b \Phi_b(m) \quad (35)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial m^{n+1}} = \frac{\partial \Phi_d}{\partial m^{n+1}} + \lambda_r \frac{\partial \Phi_r}{\partial m^{n+1}} + \lambda_x \frac{\partial \Phi_x}{\partial m^{n+1}} + \lambda_y \frac{\partial \Phi_y}{\partial m^{n+1}} + \lambda_z \frac{\partial \Phi_z}{\partial m^{n+1}} + \lambda_b \frac{\partial \Phi_b}{\partial m^{n+1}} = 0 \quad (38)$$

در ادامه، بخش‌های مجزای معادله (۳۸) باید تعیین شوند. با استفاده از معادله (۳۶) مشتق اولین عبارت به شکل زیر است:

$$\frac{\partial \Phi_d}{\partial m^{n+1}} = \frac{\partial}{\partial m^{n+1}} [[d^{obs} - g(m^{n+1})]^T C_d^{-1} [d^{obs} - g(m^{n+1})]] \quad (39)$$

تا به حال $g(m^{n+1})$ ناشناخته است، اما می‌توان آن را با فرض این که تابع g در مجاورت m^n خطی است، و آن به صورت یک سری تیلور دو جمله‌ای تقریب زد،

$$g(m^{n+1}) \cong g(m^n) + G_n(m^{n+1} - m^n) \quad (40)$$

که در آن ماتریس ژاکوبی است.

$$G_n|_{ij} = \frac{\partial g_i}{\partial m_j^n} = \frac{\partial g_i(m^n)}{\partial m_j^n} \quad (41)$$

به عبارت دیگر، ورودی در ردیف i ام و ستون j ام ماتریس G_n مشتق جزئی داده پیش‌بینی شده i ام نسبت به پارامتر مدل j ام است که در نقطه m^n فضای مدل ارزیابی می‌شود.

با استفاده از معادله (۴۰)، اکنون می‌توان معادله (۳۹) را به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$\frac{\partial \Phi_d}{\partial m^{n+1}} = \frac{\partial}{\partial m^{n+1}} [[d - g(m^n) - G_n(m^{n+1} - m^n)]^T C_d^{-1} [d - g(m^n) - G_n(m^{n+1} - m^n)]] \quad (42)$$

از آنجا که d ، $g(m^n)$ و G_n به m^{n+1} وابسته نیستند، داریم،

$$\frac{\partial a(x)^T B a(x)}{\partial x} = 2 \times \frac{\partial a(x)^T}{\partial x} B \times a(x) \quad (43)$$

معادله (۴۲) به صورت زیر کاهش می‌یابد:

$$\frac{\partial \Phi_d}{\partial m^{n+1}} = -2 G_n^T C_d^{-1} [d - g(m^n) - G_n(m^{n+1} - m^n)] \quad (44)$$

به طور مشابه، با توجه به این که s ، r^0 ، L_x ، L_y ، L_z و L_b همگی به m^{n+1} وابسته نیستند، مشتق‌های سایر عبارات در معادله (۳۸) به شکل زیر خواهند بود:

$$\frac{\partial \Phi_r}{\partial m^{n+1}} = \frac{\partial [r^0 - S m^{n+1}]^T C_r^{-1} [r^0 - S m^{n+1}]}{\partial m^{n+1}} = -2 S^T C_r^{-1} [r^0 - S m^{n+1}] \quad (45)$$

محیط زمین‌شناسی مشابه استخراج شوند. اگر اطلاعات پیشین در دسترس محدود باشد (برای مثال فقط چند چاه نزدیک)، آنگاه مقادیر مرجع می‌بایست برای رسانندگی و ضخامت لایه‌ها به صورت فضایی مقادیری ثابت و برای پارامترهای کالیبراسیون به صورت زمانی مقادیری ثابت در نظر گرفته شود. از طرف دیگر، ممکن است اطلاعات پیشین به اندازه کافی زیاد باشد تا بتوان یک مدل مرجع با خواص لایه‌ای فضایی متغیر (به عنوان مثال، با شبکه‌بندی اطلاعات رسانندگی پیشین) و مقادیر زمانی کالیبراسیون متغیر (مثلاً از اندازه‌گیری‌های ارتفاع بالای سطح صفر) تولید کرد.

اگر تابع هدف Φ درجه دوم باشد، نسبت به پارامترهای مدل، می‌توانستیم مدل مطلوب را به طور مستقیم با استفاده از تکنیک‌های تئوری واریانس واریانس خطی کلاسیک پیدا کنیم (مکنه، ۱۹۸۹؛ لاوسن و هنسون، ۱۹۷۴). با این حال، از آنجا که رابطه بین پارامترهای مدل و داده‌ها غیرخطی است، مدل پیشروی $g(m)$ و تابع هدف $\Phi(m)$ نیز غیرخطی هستند و از این رو، $\Phi(m)$ در درجه دوم نیست. این به این معنی است که باید به تکنیک‌های واریانس واریانس غیرخطی تکراری متوسل شویم (به عنوان مثال مارکوارت، ۱۹۶۳؛ لاینز و تریتل، ۱۹۸۴). یک تخمین اولیه از پارامترهای مدل $m = m^0$ با استفاده از الگوریتم گرادیان مزدوج برای حل سیستم خطی انجام می‌شود:

$$r^0 = S m^0 \quad (37)$$

که پارامترهای مدل اولیه را پیدا می‌کند که مقادیر مرجع را بازتولید می‌کنند. سپس یک حلقه تکراری تنظیم می‌شود که در m امین تکرار، هدف به روزرسانی پارامترهای مدل فعلی m^n به یک تخمین جدید m^{n+1} است، به طوری که تابع هدف کاهش یابد (یعنی $\Phi(m^{n+1}) < \Phi(m^n)$). برای انتخاب مناسب از m^{n+1} که تاکنون ناشناخته است، از این دانش استفاده می‌شود که مشتق تابع هدف نسبت به پارامترهای مدل جدید در کمینه صفر خواهد بود. شرط این است که،

حداقل قرار نخواهد گرفت. تنها تضمین شده است که مسیر از m^n به m^{n+1} در سطح تابع هدف از m^n به پایین می رود. مسیر ممکن است از دره ای عبور کند و سپس به سمت بالای تپه حرکت کند، بنابراین در واقع این امکان وجود دارد که $\Phi(m^{n+1}) > \Phi(m^n)$. در این صورت، لازم است که از افت طول گام استفاده شود (پارکر، ۱۹۹۴) تا اطمینان حاصل شود که تابع هدف در هر تکرار کاهش می یابد. همچنین سطح قابل قبول از عدم برآزش زمانی رخ می دهد که عدم برآزش χ^2 کمتر از تعداد داده ها باشد.

$$\chi^2 = \Phi_d(m^{n+1}) = [d - g(m^{n+1})]^T C_d^{-1} [d - g(m^{n+1})] \quad (55)$$

بنابراین، وارون سازی زمانی خاتمه می یابد که عدم برآزش داده های نرمال شده به صورت $\Phi_d(m^{n+1})/N_d \leq 1$ افتاد شود. انتخاب مقادیر ضرایب وزن دهی λ در معادله (۳۵) در ابتدای وارون سازی انجام می شود و این مقادیر در طول وارون سازی ثابت باقی می ماند.

۳. نتایج عددی

۳-۱. وارون ساز داده های مصنوعی

در این بخش، مدل سازی پیشرو برای تک سونداژ و با در نظر گرفتن زمین لایه ای حل می شود. در خروجی، مؤلفه های میدان های اولیه، میدان های ثانویه و تغییرات زمانی میدان های ثانویه قابل محاسبه است. در این بخش دو مدل واقعی ۳ و ۵ لایه با مقادیر ضخامت و رسانندگی مشخص را تعریف می کنیم و این مدل های واقعی به عنوان ورودی مدل سازی پیشرو در نظر گرفته می شوند. مقادیر پارامترهای فیزیکی مربوط به این مدل های واقعی را در جدول ۱ و ۲ می توان مشاهده کرد. سپس تغییرات میدان ثانویه در راستای Z را بر حسب پنجره های زمانی مختلف رسم می کنیم. نمودار نرخ کاهش میدان مغناطیسی ثانویه در راستای قائم Z بر حسب زمان برای این دو مدل واقعی در شکل ۲ رسم شده است. بر اساس نتایج نشان داده شده در شکل ۲، در زمان های ابتدایی (گیت های اولیه)، مدل اول (رنگ آبی) پاسخ قوی تری نسبت به مدل دوم (رنگ نارنجی) از خود نشان می دهد. در ادامه با افزایش زمان،

$$\frac{\partial \Phi_x}{\partial m^{n+1}} = \frac{\partial (m^{n+1})^T S^T L_x^T L_x S m^{n+1}}{\partial m^{n+1}} = \frac{2 S^T L_x^T L_x S m^{n+1}}{\partial m^{n+1}} \quad (46)$$

$$\frac{\partial \Phi_y}{\partial m^{n+1}} = \frac{\partial (m^{n+1})^T S^T L_y^T L_y S m^{n+1}}{\partial m^{n+1}} = \frac{2 S^T L_y^T L_y S m^{n+1}}{\partial m^{n+1}} \quad (47)$$

$$\frac{\partial \Phi_z}{\partial m^{n+1}} = \frac{\partial (m^{n+1})^T S^T L_z^T L_z S m^{n+1}}{\partial m^{n+1}} = \frac{2 S^T L_z^T L_z S m^{n+1}}{\partial m^{n+1}} \quad (48)$$

$$\frac{\partial \Phi_b}{\partial m^{n+1}} = \frac{\partial (m^{n+1})^T S^T L_b^T L_b S m^{n+1}}{\partial m^{n+1}} = \frac{2 S^T L_b^T L_b S m^{n+1}}{\partial m^{n+1}} \quad (49)$$

با جمع بندی نتایج معادلات (۴۴) تا (۴۹) و جای گذاری در معادله (۳۸) داریم،

$$\begin{aligned} & -2 G_n^T C_d^{-1} [d - g(m^n) - G_n(m^{n+1} - m^n)] \\ & - 2 \lambda_r S^T C_r^{-1} [r^0 - S m^{n+1}] \\ & + 2 \lambda_x S^T L_x^T L_x S m^{n+1} \\ & + 2 \lambda_y S^T L_y^T L_y S m^{n+1} \\ & + 2 \lambda_z S^T L_z^T L_z S m^{n+1} \\ & + 2 \lambda_b S^T L_b^T L_b S m^{n+1} = 0 \end{aligned} \quad (50)$$

سپس با جمع بندی عبارت ها در بردار ناشناخته m^{n+1} به سمت چپ معادله، نتیجه به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} & [G_n^T C_d^{-1} G_n + \lambda_r S^T C_r^{-1} S + \lambda_x S^T L_x^T L_x S \\ & + \lambda_y S^T L_y^T L_y S + \lambda_z S^T L_z^T L_z S \\ & + \lambda_b S^T L_b^T L_b S] m^{n+1} \\ & = G_n^T C_d^{-1} [d - g(m^n) + G_n m^n] \\ & + \lambda_r S^T C_r^{-1} r^0 \end{aligned} \quad (51)$$

این می تواند به فرم زیر بازنویسی شود:

$$A m^{n+1} = b \quad (52)$$

که در آن:

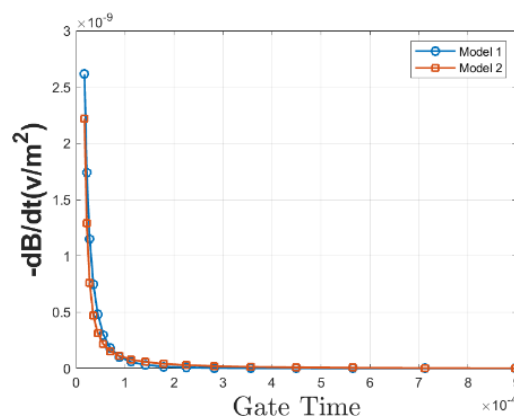
$$\begin{aligned} A = & [G_n^T C_d^{-1} G_n + \lambda_r S^T C_r^{-1} S + \lambda_x S^T L_x^T L_x S \\ & + \lambda_y S^T L_y^T L_y S + \lambda_z S^T L_z^T L_z S \\ & + \lambda_b S^T L_b^T L_b S] \end{aligned} \quad (53)$$

و

$$b = G_n^T C_d^{-1} [d - g(m^n) + G_n m^n] + \lambda_r S^T C_r^{-1} r^0 \quad (54)$$

معادله (۵۲) بنابراین یک سیستم معادلات خطی را نمایش می دهد که می توان آن را حل کرد تا بردار مورد نیاز m^{n+1} به دست آید. به دلیل تقریب خطی تابع مدل سازی پیشرو غیرخطی $g(m)$ که در بالا ذکر شد، m^{n+1} قطعاً در نقطه

مقدار پاسخ به سرعت کاهش می‌یابد. این روند معمولاً بیانگر وجود لایه‌های رسانا در نزدیکی سطح زمین است. در چنین شرایطی، میدان القایی ثانویه در زمان‌های اولیه بسیار قوی بوده و سپس به سرعت افت می‌کند، زیرا جریان‌های گردابی در لایه‌های رساناتر سطحی سریع‌تر تضعیف می‌شوند. در مقابل، مدل دوم (رنگ نارنجی) پاسخ ضعیف‌تری دارد و مقدار تغییرات در زمان‌های اولیه کمتر از مدل اول است. همچنین، نرخ افت میدان ثانویه در این مدل آرام‌تر و یکنواخت‌تر است. این رفتار معمولاً مربوط به محیط‌های با مقاومت الکتریکی بالاتر یا حضور ساختارهای رسانا در اعماق بیشتر است، جایی که میدان الکترومغناطیسی با تأخیر و ضعف بیشتری به آنها نفوذ می‌کند. با توجه به این مقایسه، می‌توان نتیجه گرفت که مدل اول دارای ساختار رساناتر در نزدیکی سطح زمین است، در حالی که در مدل دوم، پاسخ ناشی از اعماق بیشتر یا محیط‌های رساناتر است. این تحلیل به شناسایی و تفکیک مناطق رسانا از مقاوم در زیرسطح کمک می‌کند و گامی مهم در تفسیر ژئوفیزیکی داده‌های الکترومغناطیسی به شمار می‌رود.



شکل ۲. نمودار تغییرات میدان ثانویه در راستای Z بر حسب زمان برای دو مدل مصنوعی ۳ لایه (آبی) و ۵ لایه (نارنجی) که خروجی مدل پیشرو می‌باشد.

در ادامه، از داده‌های خروجی مدل‌سازی پیشرو به عنوان ورودی برنامه وارون استفاده می‌کنیم و نتایج حاصل از وارون‌سازی را برای داده‌های مربوط به دو سونداژ محاسبه می‌نماییم. در برنامه وارون‌سازی، زمین به صورت لایه‌هایی

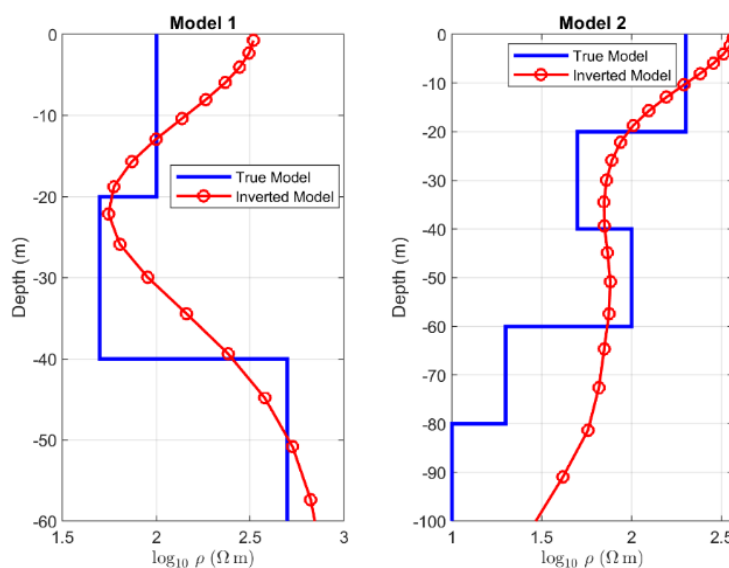
در نظر گرفته می‌شود که ضخامت آنها به صورت لگاریتمی از سطح تا عمق افزایش می‌یابد. عمق نهایی نیز حدود ۲۳۰ متر انتخاب شده است. این گسسته‌سازی می‌تواند بر کیفیت وارون‌سازی تأثیرگذار باشد، زیرا تعداد پارامترهای مدل (رسانندگی هر لایه) برابر با تعداد لایه‌های گسسته‌شده زمین است. به عبارت دیگر، در این نوع گسسته‌سازی، ضخامت هر لایه از پیش مشخص است و تنها رسانندگی لایه‌ها پارامتر مجهول مدل محسوب می‌شود که این امر منجر به پایداری بیشتر مسئله وارون می‌شود. بدیهی است که اگر ضخامت و تعداد لایه‌ها به عنوان پارامترهای معلوم وارد مسئله شوند، ضمن کاهش ناپایداری، مدل حاصل از وارون‌سازی ممکن است باعث محو نسبی مرزهای تیز بین لایه‌های زمین‌شناسی شود. هرچند در صورت‌بندی دیگر مسئله وارون، ضخامت لایه‌ها نیز می‌تواند به عنوان مجهول در نظر گرفته شود. فرض اول (ضخامت‌های ثابت و از پیش تعیین‌شده) منجر به مدل‌های هموار از تغییرات رسانندگی می‌شود، در حالی که فرض دوم (ضخامت‌های مجهول) منجر به مدل‌های بلوکی از تغییرات رسانندگی لایه‌های زیرسطحی می‌شود. در این مقاله، فرض اول مد نظر قرار گرفته است، یعنی وارون‌سازی هموار تغییرات رسانندگی. مدل واقعی و مدل وارون‌شده برای این دو مدل ۳ لایه و ۵ لایه در شکل ۳ با یکدیگر مقایسه شده‌اند. مدل‌سازی وارون تا حدود خوبی با مدل واقعی مصنوعی سازگاری نشان می‌دهد. در هر دو حالت مقدار مقاومت ویژه ابتدا افزایش می‌یابد و سپس روند نزولی به خود می‌گیرد. در مدل ۵ لایه بعد از افت مقاومت ویژه دوباره شاهد فاز افزایشی می‌باشیم. این مدل‌سازی وارون نتوانسته است تغییرات کوچک در مقدار مقاومت ویژه را به خوبی نشان دهد و در عوض روند افزایشی کلی را به خوبی آشکار کرده است. در گام بعدی با هدف بررسی وابستگی الگوریتم وارون‌سازی به ضخامت مدل واقعی، ضخامت‌ها را برای مدل‌های واقعی به ۱۰ متر کاهش می‌دهیم. مقادیر پارامترهای فیزیکی مربوط به این مدل واقعی را در ادامه در جداول ۳ و ۴ می‌توان مشاهده کرد.

جدول ۱. پارامترهای هندسی و فیزیکی مدل مصنوعی اول شامل سه لایه با ضخامت های ۲۰ متر. رسانندگی (S/m) لایه ها ابتدا افزایشی و سپس کاهشی است.

مدل ۱	لایه اول	لایه دوم	نیم فضا
رسانندگی (S/m)	۰/۰۱	۰/۰۲	۰/۰۰۲
ضخامت (m)	۲۰	۲۰	-

جدول ۲. پارامترهای هندسی و فیزیکی مدل مصنوعی دوم با ۵ لایه با ضخامت های ۲۰ متر.

مدل ۲	لایه اول	لایه دوم	لایه سوم	لایه چهارم	نیم فضا
رسانندگی (S/m)	۰/۰۰۵	۰/۰۲۰	۰/۰۱۰	۰/۰۵۰	۰/۱۰۰
ضخامت (m)	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	-



شکل ۳. نمودارهای مقاومت ویژه بر حسب عمق برای مدل واقعی (آبی) و مدل سازی وارون شده (قرمز). ضخامت ها برای مدل ۳ لایه و نیز برای مدل ۵ لایه ۲۰ انتخاب شده اند.

جدول ۳. پارامترهای هندسی و فیزیکی مدل مصنوعی سوم با ۳ لایه با ضخامت های ۱۰ متر.

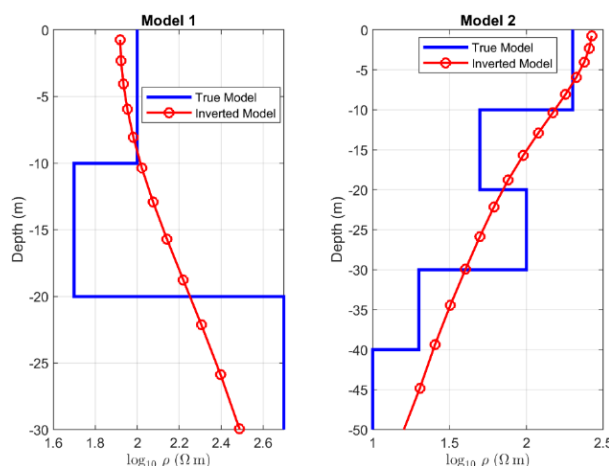
مدل ۱	لایه اول	لایه دوم	نیم فضا
رسانندگی (S/m)	۰/۰۰۱	۰/۰۲۰	۰/۰۰۲
ضخامت (m)	۱۰	۱۰	-

جدول ۴. پارامترهای هندسی و فیزیکی مدل مصنوعی چهارم با ۵ لایه با ضخامت های ۱۰ متر.

مدل ۲	لایه اول	لایه دوم	لایه سوم	لایه چهارم	نیم فضا
رسانندگی (S/m)	۰/۰۰۵	۰/۰۲۰	۰/۰۱۰	۰/۰۵۰	۰/۱۰۰
ضخامت (m)	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	-

زیرسطحی انطباق خوبی را با مدل واقعی نشان می دهد. هرچند که به دلیل ماهیت وارون سازی هموار امکان بازسازی دقیق ناپیوستگی ها (مرز لایه ها) وجود ندارد.

تغییرات مربوط به نتایج وارون سازی را در شکل ۴ مشاهده می کنیم. در مدل اول ۳ لایه (سمت چپ) روند کلی تا حدودی بازسازی شده است و در مدل دوم ۵ لایه (سمت راست) روند کلی تغییرات مقاومت ویژه

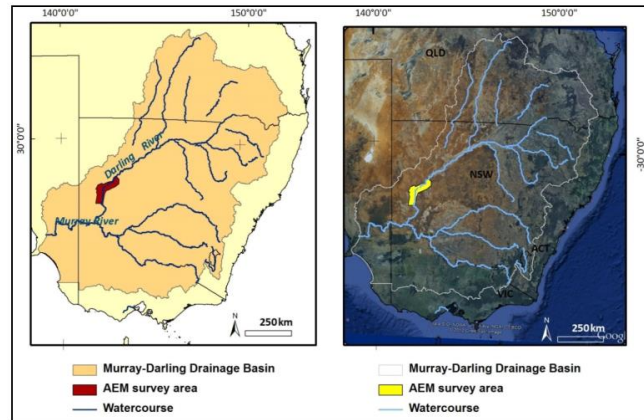


شکل ۴. نمودار تغییرات مقاومت ویژه برحسب عمق مربوط به مدل مصنوعی اول (سه لایه) و دوم (پنج لایه) با ضخامت ۱۰ برای هریک از لایه‌ها.

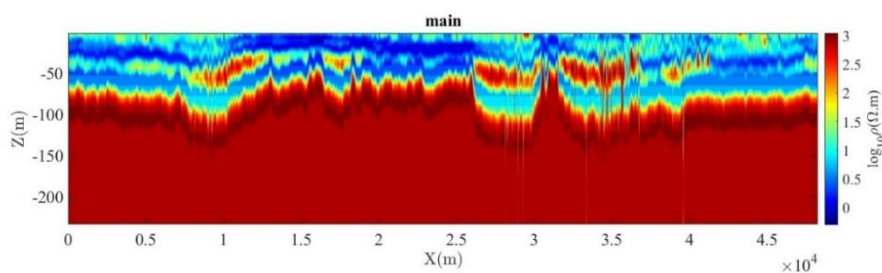
۳-۲. وارون‌ساز داده‌های صحرائی

در این بخش با هدف ارزیابی و صحت‌سنجی عملکرد الگوریتم وارون‌سازی توسعه‌یافته، مجموعه‌ای از داده‌های صحرائی استفاده می‌شود. یک شیت داده‌های الکترومغناطیس هوابرد حاوی اطلاعات جامع از دستگاه‌های برداشت، شامل ویژگی‌هایی همچون نوع و موقعیت گیرنده و فرستنده، فاصله‌های عمودی و افقی بین فرستنده و گیرنده، نوع چیدمان دستگاه‌ها، اطلاعات مکانی و ارتفاعی، همچنین داده‌های میدان الکترومغناطیسی ثبت‌شده توسط گیرنده و فرستنده و جریان‌های مرتبط است. با بهره‌گیری از این داده‌ها و به کارگیری الگوریتم وارون‌سازی ارائه شده، می‌توان فرایند مدل‌سازی وارون را انجام داد. این مدل‌سازی می‌تواند به صورت نمونه به نمونه (سونداژ به سونداژ) یا به طور همزمان برای مجموعه‌ای از سونداژها صورت گیرد. در این مطالعه، مدل‌سازی وارون به روش نمونه به نمونه انجام می‌شود و در نهایت، با استفاده از تکنیک‌های درون‌یابی، مدل‌سازی لایه‌های زیرسطحی صورت می‌گیرد. پروژه BHMAR-2009 بزرگ‌ترین برداشت ژئوفیزیک هوابرد فدرال استرالیا طی سه دهه اخیر و با هدف تعیین تغییرات پی‌سنگ محدوده مورد مطالعه انجام شده است. مأموریتی که برای پشتیبانی از طرح تغذیه مصنوعی آبخوان بروکن‌هیل در فاصله ۲۸ ژوئن تا ۳

سپتامبر ۲۰۰۹ اجرا شد. نقشه زمین‌شناسی و عکس هوایی محدوده مورد مطالعه در منطقه بروکن‌هیل در شکل ۵ نمایش داده شده است. برداشت‌های هوابرد با استفاده از سامانه TEM هلیکوپتری اسکای‌تم (SkyTEM) با حلقه‌ای به قطر ۳۰ متر، روی شبکه‌ای با خطوط پروازی به طول مجموع ۳۲۰۶۵۹ کیلومتر و فاصله ۲۰۰ متری (عمدتاً در راستای شمال‌غربی-جنوب‌شرقی) انجام شد. در بررسی مدل‌سازی وارون با داده‌های واقعی، خط پروازی را انتخاب کرده‌ایم که در آن از ۵۰۴۲ نقطه برداشت داده (ایستگاه) صورت گرفته است. همچنین فاصله ایستگاه‌های اندازه‌گیری در طول پروفیل ۹ متر می‌باشد. با توجه به الگوریتم ارائه شده برای مدل‌سازی وارون داده‌های مصنوعی، پس از پردازش اولیه، داده‌ها وارد الگوریتم وارون‌سازی می‌شود. همان‌طور که بیان شد داده هریک از ایستگاه‌ها به صورت مجزاء وارون می‌شود. در ادامه مقطع مربوط به مدل‌سازی وارون یک پروفیل از این داده‌ها را مشاهده می‌کنیم (شکل ۶). این مقطع شامل وارون‌سازی همه ایستگاه‌های برداشت‌شده در طول پروفیل با فاصله ۹ متر می‌باشد. همان‌طور که از مقطع مشخص است به دلیل فاصله نزدیک ایستگاه‌های سونداژ هوابرد، تغییرات زیادی در امتداد لایه‌های آشکار شده مشاهده می‌شود که بعضاً این تغییرات زیاد و ناگهانی کاذب می‌باشند.



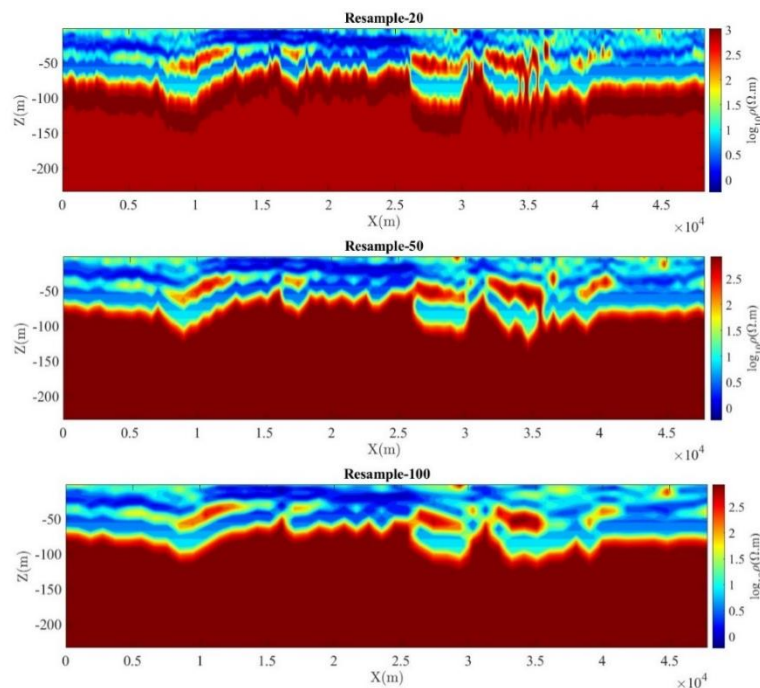
شکل ۵. منطقه مورد مطالعه پروژه BHMAR، بروکن هیل، جنوب غربی استرالیا (رنگ قرمز و زرد).



شکل ۶. مقطع مقاومت ویژه مربوط به مدل‌سازی وارون یک نمونه از پروفیل‌های برداشت‌شده در پروژه SkyTEM-BHMAR-2009 با ۵۰۴۲ نقطه برداشت.

به‌صورتی انجام می‌شود که از هر ۲۰، ۵۰ و ۱۰۰ نمونه در راستای طول پروفیل خط پرواز به ترتیب یکی انتخاب شود (شکل ۷).

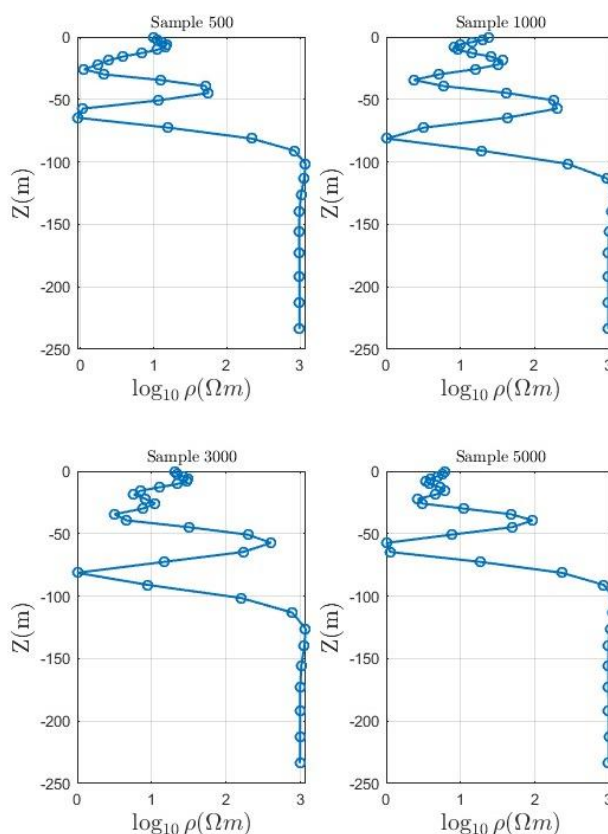
از آنجایی که داده‌های برداشت شده بسیار به یکدیگر نزدیک هستند، در این مرحله برای داده‌های ورودی یک پروفیل، بازنمونه‌برداری انجام می‌دهیم تا نمایش دوبعدی تصویر یکنواخت‌تری به دست آید. بازنمونه‌برداری



شکل ۷. نمایش دوبعدی مربوط به مدل‌سازی وارون یک نمونه از پروفیل‌های برداشت‌شده در پروژه SkyTEM-BHMAR-2009 با ۵۰۴۲ نقطه برداشت‌شده با بازنمونه‌برداری‌های به ترتیب از مقطع بالا تا پایین با فاصله ۲۰، ۵۰ و ۱۰۰.

پایین‌تر، جزئیات اضافی و نوساناتی وارد مدل می‌شوند که لزوماً منشأ زمین‌شناسی ندارند. بنابراین، نرخ بهینه بازنمونه‌برداری با بررسی مجموعه‌ای از نتایج و انتخاب حالتی تعیین می‌شود که تعادل مناسبی بین حفظ جزئیات ضروری و هموار بودن مدل نهایی برقرار کند. برای نمایش بهتر نتایج وارون‌سازی، تغییرات مقاومت‌ویژه برای سونداژهای ۵۰۰، ۱۰۰۰، ۳۰۰۰ و ۵۰۰۰ بر حسب عمق، در شکل ۸ ارائه شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، الگوی کلی تغییرات پروفیل‌های عمقی در تمامی سونداژها تا حدودی مشابه است؛ به‌طوری‌که پس از یک لایه مقاوم در عمق حدود ۵۰ متر، از عمق تقریبی ۱۰۰ متر به بعد، مقدار مقاومت‌ویژه افزایش می‌یابد که این افزایش به دلیل وجود سنگ بستر مقاوم در محدوده مورد مطالعه است.

در این حالت تعداد نمونه‌ها کاهش می‌یابد و درون‌یابی دقت کمتری خواهد داشت، اما از آنجایی که یک بررسی بزرگ‌مقیاس در حال انجام است، می‌توان از تغییرات ناگهانی چشم‌پوشی کرد تا تغییرات یکنواخت‌تری برای لایه‌های زمین چه به صورت عمقی و چه به صورت جانبی مشاهده کرد. به نظر می‌رسد بازنمونه‌برداری با نرخ ۵۰ گزینه مناسبی برای نمایش دوبعدی باشد. انتخاب نرخ بازنمونه‌برداری بر اساس ارزیابی رفتار مدل‌های حاصل از وارون‌سازی برای مقادیر مختلف این پارامتر انجام شده است. نتایج نشان داد که تغییر نرخ بازنمونه‌برداری بر میزان همواری و سطح جزئیات مدل نهایی تأثیر مستقیم دارد. در نرخ‌های بالاتر، برخی جزئیات مهم مدل حذف شده و مدل بیش از حد هموار می‌شود، در حالی که در نرخ‌های



شکل ۸. نمایش پروفیل‌های عمقی مقاومت‌ویژه بر حسب عمق برای سونداژهای ۵۰۰، ۱۰۰۰، ۳۰۰۰ و ۵۰۰۰. این سونداژها از پروفیلی با ۵۰۴۲ سونداژ انتخاب شده‌اند که قبلاً مقطع آن را در شکل ۷ نمایش داده شد.

۴. نتیجه‌گیری

در دهه‌ی گذشته، سیستم‌های الکترومغناطیس هوابرد به‌طور قابل توجهی جایگاه خود را به‌عنوان ابزاری قابل اعتماد برای برداشت‌های بزرگ مقیاس تثبیت کرده‌اند. چشم‌انداز آینده در مدل‌سازی الکترومغناطیس هوابرد، توسعه الگوریتمی است که بتواند داده‌های کاوش را مستقیماً دریافت کرده، آنها را به‌صورت خودکار و عینی پردازش کند، وارون‌سازی مناسبی از داده‌ها ارائه دهد، نقشه‌های مقاومت ویژه را به‌صورت خودکار به نقشه‌های ژئوالکتریکی تبدیل کند، و در نهایت، مقادیر عدم قطعیت پارامترهای مدل را به‌طور کلی برآورد کند. پژوهش حاضر با تمرکز بر توسعه، پیاده‌سازی و آزمون الگوریتم‌های عددی برای مدل‌سازی پیشرو و وارون‌سازی داده‌های الکترومغناطیس هوابرد انجام شد. نتایج این تحقیق نشان می‌دهد که الگوریتم استفاده‌شده قادر است هم در شرایط کنترل‌شده (مدل‌های مصنوعی) و هم در شرایط پیچیده زمین‌شناسی واقعی (برداشت‌های هوابرد در استرالیا) عملکرد قابل اتکایی ارائه دهد. در بخش نخست، با استفاده از مدل‌های مصنوعی چندلایه، پاسخ‌های زمین در سناریوهای مختلف مقاومت ویژه و ضخامت لایه‌ها شبیه‌سازی شدند. نتایج مدل‌سازی پیشرو نشان داد که تفاوت در رسانندگی لایه‌ها و توزیع عمقی آنها تأثیر مستقیمی بر نرخ افت میدان‌های ثانویه دارد. مقایسه مدل‌های ۳ لایه و ۵ لایه با ضخامت‌های متفاوت آشکار کرد که حضور لایه‌های رسانای سطحی سبب افزایش شدت میدان در زمان‌های ابتدایی و افت سریع آن می‌شود، در حالی که لایه‌های مقاوم یا رساناهای عمقی، پاسخ ضعیف‌تر اما پایدارتر ایجاد می‌کنند. این یافته‌ها تطابق مناسبی با تئوری پاسخ‌های الکترومغناطیسی در محیط‌های لایه‌ای دارد. در مرحله بعد، نتایج وارون‌سازی داده‌های مصنوعی نشان داد که روند کلی تغییرات مقاومت ویژه با دقت خوبی بازسازی می‌شود، هرچند جزئیات موضعی یا تغییرات سریع رسانندگی به‌طور کامل آشکار نمی‌شوند. به‌ویژه در مدل‌های با ضخامت‌های کمتر، الگوریتم

وارون‌سازی قادر به بازتاب صحیح روند افزایشی یا کاهش مقاومت ویژه بود، اما محدودیت در تفکیک جزئیات لایه‌ای نیز به چشم می‌خورد. این موضوع بیانگر آن است که روش وارون‌سازی به‌کاررفته در این پژوهش برای بازسازی روندهای کلی ساختاری مناسب است و در ترکیب با اطلاعات کمکی (زمین‌شناسی یا دیگر داده‌های ژئوفیزیکی) می‌تواند نتایج دقیق‌تری ارائه دهد. تحلیل داده‌های واقعی پروژه بروکن هیل بخش کلیدی این پژوهش بود. در داده‌های واقعی، الگوریتم وارون‌سازی توانست نیم‌رخ‌های دوبعدی و سونداژهای یک‌بعدی مقاومت ویژه را بازسازی کند که به‌خوبی با ویژگی‌های زمین‌شناسی منطقه سازگار بودند. از دیدگاه کاربردی، مقاله حاضر چند دستاورد مهم را به همراه داشت؛ طراحی و آزمون یک کد عددی کارآمد برای مدل‌سازی پیشرو و وارون‌سازی داده‌های الکترومغناطیس هوابرد، اعتبارسنجی الگوریتم با داده‌های مصنوعی و نشان‌دادن دقت آن در بازسازی روند کلی مقاومت ویژه، کاربرد موفق کد در داده‌های واقعی بروکن هیل و آشکارسازی ساختارهای رسانا و مقاوم زیرسطحی. به‌طور کلی، نتایج این مقاله نشان می‌دهد که استفاده از داده‌های الکترومغناطیس هوابرد همراه با الگوریتم وارون‌سازی توسعه‌یافته می‌تواند ابزاری قدرتمند در اکتشاف منابع معدنی، مدیریت منابع آب زیرزمینی و مطالعات هیدروژئولوژیکی باشد. با این حال، برخی محدودیت‌ها نظیر حساسیت به نوفه، دشواری در تفکیک جزئیات زیرسطحی و نیاز به اطلاعات کمکی و از طرف دیگر توسعه روش‌های کمی‌سازی عدم قطعیت همچنان باقی است. برای ادامه پژوهش، پیشنهاد می‌شود که توسعه الگوریتم، ترکیب با قیدهای زمین‌شناسی و ژئوفیزیکی، و بررسی کارایی روش در محیط‌های با نوفه بالا مدنظر قرار گیرد. همچنین ادغام نتایج این روش با داده‌های لرزه‌ای و توموگرافی الکتریکی می‌تواند به افزایش دقت و کاهش عدم قطعیت در تفسیر مدل‌های زیرسطحی کمک کند. در مجموع، پژوهش حاضر گامی مهم

روش‌های بیزی و سایر روش‌های مبتنی بر تحلیل عدم قطعیت می‌تواند به ارزیابی بازه اطمینان پارامترهای مدل و افزایش قابلیت اعتماد نتایج وارون‌سازی کمک کند و به عنوان یکی از مسیرهای توسعه پژوهش در آینده مدنظر قرار گیرد.

مراجع

- Ackman, T. E. (2003). An introduction to the use of airborne technologies for watershed characterization in mined areas. *Mine Water and the Environment*, 22, 62–68.
- Auken, E., Boesen, T., & Christiansen, A.V., (2017). A review of airborne electromagnetic methods with Focus on Geotechnical and Hydrological applications from 2007 to 2017. *Advanced Geophysics*, 58, 47–93.
- Auken, E., Westergaard, J., Christiansen, A.V., & Sorensen, K. (2007), Processing and inversion of SkyTEM data for high resolution hydrogeophysical surveys: 19th International Geophysical Conference and Exhibition, Australian Society of Exploration Geophysicists, Extended Abstracts.
- Blatter, D., Key, K., Ray, A., Foley, N., Tulaczyk, S., & Auken, E., (2018). Trans-dimensional Bayesian inversion of airborne transient EM data from Taylor Glacier, Antarctica. *Geophysical Journal International*, 214(3), 1919–1936
- Brodie, R.C., & Richardson, M., (2015). Open Source Software for 1D Airborne Electromagnetic Inversion. In: 24th International Geophysical Conference and Exhibition (Perth), Extended Abstracts, pp. 1–3.
- Chave, A. D. (1983). Numerical integration of related Hankel transforms by quadrature and continued fraction expansion. *Geophysics*, 48(12), 1671–1686.
- Constable, S. C., Parker, R. L., & Constable, C. G., (1987). Occam's inversion: a practical algorithm for generating smooth models from electromagnetic sounding data. *Geophysics* 52 (3), 289–300.
- Christiansen, A. V., Auken, E., & Sørensen, K. I. (2006). The transient electromagnetic method. In R. Kirsch (Ed.), *Groundwater Geophysics: A Tool for Hydrogeology* (pp. 179–224). Springer.
- Unio, E. (2009). Comparison of ground TEM and VTEM responses over kimberlites in the Kalahari of Botswana. In 20th Geophysical Conference and Exhibition, ASEG, Extended Abstracts.
- Farquharson, C. G. (2000). Background for Program EM1DFM. University of British Columbia, Geophysical Inversion Facility.
- Farquharson, C. G., Oldenburg, D. W., & Routh, P. S. (2003). Simultaneous 1-D inversion of loop-loop electromagnetic data for magnetic susceptibility and electrical conductivity. *Geophysics*, 68(6), 1857–1869.
- Fitterman, D. V., & Yin, C. (2004). Effect of bird maneuver on frequency-domain helicopter EM response. *Geophysics*, 69(5), 1203–1215.
- Gamey, T. J., Doll, W. E., Duffy, A., & Millhouse, D. S. (2000). Evaluation of improved airborne techniques for detection of UXO. In *Proceedings of the Symposium on the Application of Geophysics to Engineering and Environmental Problems (SAGEEP)* (pp. 57–66). Environmental and Engineering Geophysical Society.
- Ghosh, D. P. (1971). The application of linear filter theory to the direct interpretation of geoelectrical resistivity sounding. *Geophysical Prospecting*, 19(2), 192–217.
- Guptasarma, D., & Singh, B. (1997). New digital linear filters for Hankel J0 and J1 transforms. *Geophysical Prospecting*, 45(5), 745–762.
- Hansen, T. M., (2020). Efficient probabilistic inversion using the rejection sampler-exemplified on airborne EM data. *Geophysical Journal International*, 224, 543–557.
- Heagy, L. J., Kang, S., Cockett, R., & Oldenburg, D. W., (2020). Open-source software for simulations and inversions of airborne electromagnetic data, *Exploration Geophysics*, 51(1), 38–44.
- Huang, H., & Fraser, D. C. (2001). The resistivity of layered earth from airborne electromagnetic measurements. *Geophysics*, 66(2), 508–520.
- Koefoed, O. (1972). A note on the linear filter method of interpreting resistivity sounding data: *Geophysical Prospecting*, 20(2), p403–405.
- Konishi, N. (1998). Landslide surveys in Tertiary soft-rock areas using HEM. *Exploration Geophysics*, 29, 234–239.
- Lawrie, K.C., Munday, T.J., Dent, D.L., Gibson, D.L., Brodie, R.C., Wilford, J., Reilly, N.S., Chan, R.N., & Baker, P. (2000a). A geological systems approach to understanding the

در جهت بومی‌سازی و توسعه ابزارهای عددی برای تحلیل داده‌های الکترومغناطیس هوابرد به‌شمار می‌رود و نتایج آن نشان‌دهنده کارایی و قابلیت اعتماد الگوریتم طراحی شده در محیط‌های واقعی است. این دستاورد می‌تواند در آینده نزدیک زمینه‌ساز استفاده گسترده‌تر از این روش در پروژه‌های اکتشافی و مدیریتی در ایران و سایر مناطق جهان شود. همچنین استفاده از

- processes involved in land and water salinisation; the Gilmore project area, central-west New South Wales: AGSO Research Newsletter, 32, p13-15.
- Lawrie, K.C., Munday, T.J., Gibson, D.L., Chan, R., Brodie, R., Wilford, J., Reilly, N., & Foster, K. (2000b), Mapping porphyry Au-Cu and epithermal Au mineral systems under complex regolith cover, Lachlan fold belt, N.S.W: 15th Australian geological convention. Sydney, N.S.W. Australia, Geological Society of Australia Sydney N.S.W. Australia.
- Lawson, C.L., & Hanson, D.J. (1974), Solving Least Squares Problems: Englewood Cliffs.
- Lin, J., Jian, C., & Zhang, Y., (2021). Rapid and high-resolution detection of urban underground space using transient electromagnetic method. *IEEE Trans. Industr. Inform.* 18, 2622–2631.
- Lines, L., R. & Treitel, S. (1984). Tutorial: A review of least-squares inversion and its application to geophysical problems: *Geophysical Prospecting*, 32, 159-186.
- Macnae, J. C. (1995). Esoteric and mundane geophysics for diamondiferous pipe exploration. *Exploration Geophysics*, 26(2–3), 131–137.
- Marquardt, D., W. (1963). An algorithm for least squares estimation of non-linear parameters. *Journal of the Society of Industrial and Applied Mathematics*, 11, 431-441.
- Menke, W. 1989, *Geophysical data analysis : discrete inverse theory*, Academic Press.
- Minsley, B. J., Foks, N. L., & Bedrosian, P. A., (2021). Quantifying model structural uncertainty using airborne electromagnetic data. *Geophysical Journal International*, 224, 590–607.
- Oldenburg, D. W., & Li, Y. (1999). Estimating depth of investigation in DC resistivity and IP surveys. *Geophysics*, 64(2), 403–416.
- Palacky, G.J., & West, G.F. (1991). Airborne electromagnetic methods, in Nabighian, M.N. ed., *Electromagnetic methods in applied geophysics*, Volume 2, Application, Parts A and B; Investigations in Geophysics No. 3: Society of Exploration Geophysicists, p811-879.
- Parker, R. L. (1994). *Geophysical inverse theory*. Princeton University Press.
- Raiche, A. (1998). Modelling the time-domain response of AEM systems. *Exploration Geophysics*, 29, no. 1&2, p103-106.
- Reid, J. E., Vrbancich, J., & Worby, A. P. (2003). A comparison of shipborne and airborne electromagnetic methods for Antarctic sea-ice thickness measurements. *Exploration Geophysics*, 34, 46–50.
- Smith, R., Fountain, D., & Allard, M. (2003). The MEGATEM fixed-wing transient EM system applied to mineral exploration: A discovery case history. *First Break*, 21(7), 73–77.
- Sorensen, C., Fisher, A., & Costelloe, M. (2009). Airborne electromagnetic survey results from the Paterson Province, WA: 20th Geophysical Conference and Exhibition, Australian Society of Exploration Geophysicists, Extended Abstracts.
- Wait, J. R. (1982). *Geo-Electromagnetism*. Academic Press.
- Ward, S. H., & Hohmann, G. W. (1988). Electromagnetic theory for geophysical applications. In M. N. Nabighian (Ed.), *Electromagnetic Methods in Applied Geophysics* (Vol. 1: Theory, pp. 131–311). Society of Exploration Geophysicists.
- Witherly, K., & Irvine, R. (2006). The VTEM heli time-domain EM system—Four case studies. In 18th Geophysical Conference and Exhibition, ASEG, Extended Abstracts.
- Wolfgang, P., & Vrbancich, J. (2006). Layered-earth inversions of AEM bathymetry data incorporating aircraft attitude and bird offset—A Torres Strait case study. In 17th Geophysical Conference and Exhibition, ASEG, Extended Abstracts.
- Xiaodong, Y., Xi, Y., Xuben, W., Congde, L., Peng, Z., & Bin, C. (2022). A novel trans-dimensional Bayesian inversion strategy for airborne time-domain electromagnetic data. *Journal of Applied Geophysics*, 199, 104586.
- Yin, C. C., Zhu, J., Qiu, C. K., & Cai, J., (2018). Spatially constrained inversion for airborne EM data using quasi-3D models. *Chinese Journal of Geophysics*, 61(6), 2537–2547
- Zong-Hui, G., Chang-Chun, Y., Yan-Fu, Q., Bo, Zh., Xiu-Yan, R., & Yong-Chao, L., (2018). Transdimensional Bayesian inversion of time domain airborne EM data. *Applied Geophysics*, 15(2), 318–331.