

مدل‌سازی پیشرو داده‌های مقاومت‌سنجی مغناطیسی میدان کل (TFMMR) به روش اجزای محدود برای ساختارهای دوبعدی

اکبر لوافان* و نادر فتحیان‌پور*

*دانشکده مهندسی معدن، دانشگاه صنعتی اصفهان، صندوق پستی ۸۴۱۵۴

پذیرش مقاله: ۸۲/۶/۲۵

دریافت مقاله: ۸۰/۹/۱۹

چکیده

مقاومت‌سنجی مغناطیسی میدان کل (TFMMR) یکی از پارامترهایی است که از برداشت‌های صحرایی روش مغناطیسی در پهنه زیرسامد شنوایی SAM (Sub-Audio Magnetics) استخراج می‌شود. در حالت کلی SAM فنی با قدرت تفکیک بالا است که اطلاعات خواص الکتریکی و مغناطیسی محیط‌های زیر سطحی را از راه اندازه‌گیری میدان مغناطیسی کل، شامل میدان مغناطیسی القایی ناشی از عبور جریان گالوانی با بسامد کمتر از ۲۰۰ هرتز درون زمین را تعیین می‌کند.

پاسخ‌های آنومالی (بی‌هنجاری) توده‌های با اشکال هندسی ساده در مقاله دیگری توسط یکی از نگارندگان این مقاله به تفصیل ارائه شده است اما همان‌طور که در آن مقاله اشاره رفته است، مدل‌های ساده تنها حالت‌های ایده‌آلی هستند که معمولاً در طبیعت کمتر یافت می‌شوند و در عمل مجبور به یافتن پاسخ آنومالی‌های اشکال پیچیده با اشکال نامنظم هستیم که در این خصوص چاره‌ای جز استفاده از روش‌های عددی نداریم. در این مقاله، در ابتدا مبانی نظری پارامتر TFMMR و معادلات حاکم بر رفتار میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی اندازه‌گیری شده در این روش برای مدل‌های دو بعدی در حوزه مکانی و عدد موج به اختصار ارائه شده‌اند. سپس ضمن انتخاب روش عددی مناسب برای مدل‌سازی پیشرو برای پارامتر TFMMR در مورد توده‌های دوبعدی با منبع میدان سه‌بعدی (الکترودهای جریان نقطه‌ای)، مسائل و مشکلاتی که در ارتباط با (۱) مسئله تکین بودن جمله مربوط به منبع جریان (الکتروود جریان) در معادلات با مشتقات جزئی حاکم بر میدان، (۲) نقطه تکین تبدیل معکوس فوریه و (۳) محاسبات عددی مؤلفه‌های میدان مغناطیسی، مورد بحث قرار گرفته و راه‌حل‌هایی برای آنها ارائه شده است. در خاتمه با ذکر چند مثال، دقت و اعتبار نتایج عددی نیز از راه مقایسه با روابط تحلیلی مورد ارزیابی قرار گرفته است.

کلیدواژه‌ها: مقاومت‌سنجی مغناطیسی میدان کل TFMMR، زیرسامد شنوایی SAM، جریان گالوانی، ژئومغناطیسی، قدرت تفکیک، نقطه تکین

۱ مقدمه

مقاومت‌سنجی مغناطیسی (MMR) توسط ادواردز در سال ۱۹۷۴، پایه‌های فیزیکی و ریاضی این روش مورد مطالعه قرار گرفت که نتایج آنها در مقالات متعددی تشریح شده‌اند (ادواردز و همکاران، ۱۹۷۸؛ نیقیان و همکاران، ۱۹۸۴). به دنبال معرفی روش MMR پارامتر مقاومت‌سنجی مغناطیسی میدان کل (TFMMR) پارامتری با قدرت تفکیک زیاد است، برای اولین بار توسط کتچ و همکاران (۱۹۹۴) معرفی شد. لذا به دلیل جدید و ناشناخته بودن پارامتر TFMMR در ایران، در این مقاله نکات مهم در محاسبه پاسخ‌های عددی به روش اجزای محدود در مدل‌سازی پیشرو به همراه نتایج مدل‌سازی عددی داده‌های مقاومت‌سنجی

امروزه به‌خوبی معلوم شده است که میدان مغناطیسی کل اندازه‌گیری شده در سطح زمین، دارای چشمه‌های متفاوتی است. به‌طور کلی هر نوع توزیع جریان یا حرکت بار الکتریکی می‌تواند در میدان کل اندازه‌گیری شده سهم داشته باشد. مبانی میدان‌های مغناطیسی و الکتریکی ناشی از جریان پایدار الکتریکی در محیط‌های با هدایت ویژه معین در منابع متفاوتی مطرح و معادلات حاکم بر آنها تشریح شده است (چنگ، ۱۹۸۹). به استثنای ژادانوف و کلر (۱۹۹۴) در اکثر مقالات چاپ شده ژئوفیزیکی، رفتار میدان مغناطیسی ناشی از جریان الکتریکی پایدار به‌طور کافی مورد تجزیه و تحلیل قرار نگرفته‌اند. پس از معرفی روش

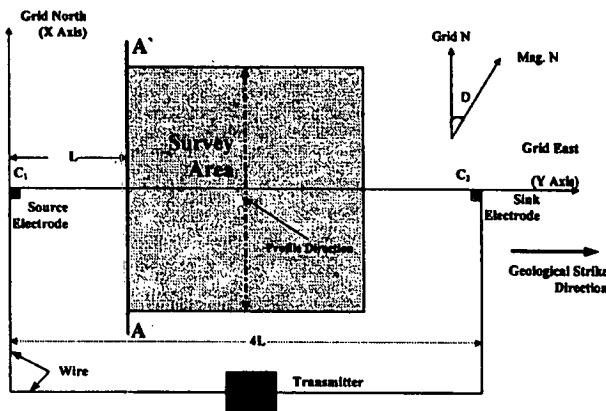
مغناطیسی میدان کل (TFMMR) ارائه می‌شود.

۲ آشنایی مختصری با پارامتر TFMMR

مفاهیم ریاضی و فیزیکی پارامتر اندازه‌گیری شده مقاومت‌سنجی مغناطیسی میدان کل (TFMMR) توسط کتچ و همکاران (۱۹۹۴) و متعاقب آن فتحیان پور و کتچ (۱۹۹۵) ارائه شده است. به‌طور کلی پارامتر TFMMR روشی برای نموداری کردن همزمان مشخصه‌های الکتریکی (هدایت ویژه) و مغناطیسی (خودپذیری مغناطیسی) از راه اندازه‌گیری میدان مغناطیسی کل است. پارامتر TFMMR یکی از پارامترهایی است که در آن تغییرات میدان کل مغناطیسی زمین در زیر حد بسامد شنوایی (بین ۵ تا ۲۰ هرتز) با یک مگنتومتر پمپ نوری روی پروفیل‌ها برداشت می‌شوند. تجزیه و تحلیل طیفی میدان مغناطیسی اندازه‌گیری شده ما را قادر به استخراج پارامترهای مورد نیاز، شامل پارامترهای با قدرت تفکیک زیاد، مقاومت‌سنجی مغناطیسی میدان کل TFMMR، پلاریزاسیون القایی مغناطیسی میدان کل TFMMIP، القای الکترومغناطیسی میدان کل TFEM و میدان ژئومغناطیسی زمین TF از راه تفاوت در بسامد میدان مغناطیسی القایی ناشی از جریان گالوانیک معمولاً مربعی‌شکل و میدان کل ژئومغناطیسی زمین از راه به‌کارگیری فیلترهای دیجیتال می‌کند (فتحیان پور و کتچ، ۱۹۹۵).

در حالت کلی تمامی آرایه‌های به‌کار گرفته شده در روش‌های مقاومت‌سنجی و MMR را می‌توان در فن TFMMR به‌کار گرفت. اما در حال حاضر یکی از مؤثرترین آرایه‌هایی که بیشتر مورد استفاده قرار می‌گیرد، آرایه گرادبانی (مستطیلی) یا نعل اسبی است. علت راندمان بالای آرایه گرادبانی بیشتر به قدرت بالای نسبت سیگنال به نوفه و همچنین ثابت نگاه‌داشتن سیم‌ها و الکتروادهای جریان در جمع‌آوری تعداد بسیار زیاد داده‌ها است (شکل ۱). دستگاه‌های مورد استفاده برای اندازه‌گیری‌های TFMMR، مشابه روش‌های MMR و MIP است که بیشتر شامل یک فرستنده جریان قطع و وصلی (فرستنده‌های

متداول IP و مقاومت‌سنجی) و همچنین گیرنده‌ای با نام مگنتومتر TM-4 (با دریاه‌های از نوع پمپ نوری) است که بتواند با سرعت بالایی میدان مغناطیسی را اندازه‌گیری کند. مگنتومتر TM-4 سامانه بسیار پیشرفته جمع‌آوری داده‌های مغناطیسی بر اساس میکروپروسور است که می‌توان با آن، حداکثر ۴۰۰ نمونه در ثانیه از میدان مغناطیسی نمونه‌گیری کرد (کتچ و همکاران، ۱۹۹۴).



شکل ۱. ترکیب آرایش مستطیلی به‌کار گرفته شده در برداشت‌های TFMMR.

۳ مبانی نظری میدان‌های مگنتواستاتیک (مغناطواستاتیک)

به روش‌های مختلفی می‌توان میدان‌های مغناطیسی ناشی از جریان مستقیم (DC) یا بسامد بسیار کم را در محیط‌هایی با هدایت ویژه معین مورد بررسی قرار داد. در روش‌های سنتی بررسی میدان‌های مگنتواستاتیک با استفاده از مدل‌های تک‌قطبی مغناطیسی صورت می‌گرفت. اما روش واقعی‌تر دیگری که می‌توان برای حل مسائل مگنتواستاتیک به‌کار گرفت، استفاده از فرمول‌بندی مسئله مقدار مرزی بر اساس رفتار جریان الکتریکی در محدوده تعریف شده است. از آنجایی که در متن‌های ژئوفیزیکی، از فرمول‌بندی نوع دوم نظریه الکترومغناطیسی استفاده می‌شود، بنابراین در اینجا نیز می‌توان با معادلات ماکسول شروع و با تلفیق نتایج با قانون بیوساوار و به‌کارگیری شرایط مرزی برای سامانه‌های مگنتواستاتیک که شامل پیوستگی مؤلفه مماسی میدان مغناطیسی در فصل مشترک دو محیط و پیوستگی مؤلفه قائم چگالی جریان

ماکسول در رژیم پایدار و استفاده از قانون پایستگی جریان الکتریکی به راحتی معادله حاکم بر رفتار تابع پتانسیل الکتریکی ناشی از الکترودهای جریان نقطه‌ای (سه‌بعدی) را می‌توان برای توده‌های دوبعدی به صورت زیر به دست آورد (دی و مورسون، ۱۹۷۹).

$$\nabla\{\sigma(x,z)U(x,y,z)\} + \sigma(x,z)\nabla^2 U(x,y,z) - U(x,y,z)\nabla^2\sigma(x,z) = -2I\delta(r-r_s) \quad (5)$$

برای حذف اثر بعد امتدادی (در اینجا محور y) می‌توان از یک تبدیل فوریه یک بعدی که به صورت زیر تعریف می‌شود، استفاده نمود.

$$\bar{U}(x, k_y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} U(x, y, z) e^{-ik_y y} dy \quad (6)$$

$$U(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{U}(x, k_y, z) e^{ik_y y} dy \quad (7)$$

با استفاده از خاصیت تبدیل فوریه مشتق توابع (بریسول، ۱۹۸۶) به نتیجه‌نهایی زیر که یک معادله هلمهولتز دو بعدی در حوزه عددی موج است، می‌رسیم.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\sigma \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} \right) - \frac{K_y^2}{P} \bar{U} = -I\delta(r-r_s) \quad (8)$$

لذا برای به دست آوردن مقادیر تابع پتانسیل الکتریکی در حوزه مکانی، لازم است معادله فوق را برای چندین مقدار K_y (معادل عدد موج فاصله در امتداد y) حل کنیم و سپس با استفاده از یک تبدیل فوریه معکوس، مقدار پتانسیل را محاسبه نماییم. بدیهی است که انتخاب تعداد بهینه K_y برای دستیابی به دقت زیاد نقش مهمی در توسعه روش‌های عددی حل معادله ۸ خواهد داشت.

۵ فرمول‌بندی میدان مغناطیسی در حوزه عدد موج

به منظور محاسبات دقیق و مؤثر میدان مغناطیسی ناشی از مدل‌های دوبعدی، بهتر است محاسبات در حوزه عدد موج انجام شود. در این صورت برای مؤلفه میدان مغناطیسی (B_x, B_y, B_z) کافی است تبدیل فوریه معادلات ۲ تا ۴ را نسبت به بعد y محاسبه

الکتریکی در مرز دو محیط است استفاده نمود. شکل مطلوب دیگری که برای محاسبه پاسخ پارامتر TFMMR می‌توان مورد استفاده قرار داد (فرمول اصلاح شده بیوساوار) که به صورت زیر است (ادواردز و همکاران، ۱۹۷۸).

$$B(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\nabla' U(r') \times \nabla' \sigma(r')}{|r-r'|} dv' \quad (1)$$

از معادله ۱ مشخص می‌شود که انتگرال حجمی فوق را بایستی تنها روی سطوح ناپیوستگی‌ها که گرادیان هدایت ویژه $(\nabla' \sigma(r'))$ غیر صفر است، ارزیابی کرد. در محاسبه پاسخ TFMMR برای هر ساختمان زمین‌شناسی دو بعدی، تمام مؤلفه‌های میدان مغناطیسی لازم است که در دستگاه مختصات کارتزین می‌توان آنها را از راه بسط معادله تعمیم یافته بیوساوار به صورت زیر محاسبه نمود.

$$B_x(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\left(\frac{\partial \sigma(x',z')}{\partial z'} \frac{\partial U(r')}{\partial y'} \right) dv'}{|r-r'|} \quad (2)$$

$$B_y(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\left(\frac{\partial \sigma(x',z')}{\partial z'} \frac{\partial U(r')}{\partial z'} - \frac{\partial \sigma(x',z')}{\partial z'} \frac{\partial U(r')}{\partial x'} \right) dv'}{|r-r'|} \quad (3)$$

$$B_z(r) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\left(\frac{\partial \sigma(x',z')}{\partial x'} \frac{\partial U(r')}{\partial y'} \right) dv'}{|r-r'|} \quad (4)$$

همان‌طور که در معادلات ۲ تا ۴ ملاحظه می‌شود، برای محاسبه میدان مغناطیسی ناشی از عبور جریان در ساختمان‌های زیر سطحی باید توزیع پتانسیل الکتریکی در کل نیم‌فضای زیرسطحی در دست باشد که بدین منظور در بخش بعدی روابط اساسی مورد نیاز برای حل عددی تابع پتانسیل الکتریکی ناشی از الکترودهای جریان نقطه‌ای ارائه می‌شود.

۴ پتانسیل الکتریکی در حوزه‌های مکانی و عدد موج

موضوع توزیع پتانسیل در محیط‌هایی با هدایت ویژه معین ناشی از عبور جریان پایدار (DC) را افراد زیادی مورد بررسی قرار داده‌اند (دی و مورسون، ۱۹۷۹؛ اسنایدر، ۱۹۷۶). با به کارگیری معادلات

دور از ناهمگنی‌ها است که می‌توان با استفاده از ترکیب شرایط مرزی برای زمینه همگن به این مهم دست یافت.

۷ انتخاب مجموعه اعداد موج مورد نیاز

مسئله مهمی که در مدل‌سازی ۲/۵ بعدی (منظور پاسخ مدل زمین دوبعدی به منبع میدان سه‌بعدی یعنی الکتروود نقطه‌ای جریان است) مطرح می‌شود، انتخاب تعداد و مقادیر عدد موج برای بازیابی طیف تابع پتانسیل تبدیل یافته لازم است. چون بخش عمده‌ای از زمان محاسبات در الگوریتم عددی به حل دستگاه معادلات ماتریس کل المان‌ها اختصاص می‌یابد، اهمیت انتخاب تعداد عدد موج و مقدار K_y ‌ها بیشتر نمایان می‌شود. از آنجایی که پاسخ تحلیلی پتانسیل تبدیل یافته روی یک نیم‌فضای همگن دقیقاً به شکل یک تابع اصلاح یافته بسط از درجه صفر (K_0) است، بنابراین می‌توان موقعیت نقاط نمونه‌گیری روی محور K_y را طوری انتخاب کرد که تابع $K_0(rK_y)$ به‌خوبی بازیابی شود. برخلاف روش‌های مقاومت‌سنجی DC که در آن همیشه موقعیت الکتروودهای پتانسیل از الکتروودهای جریان فاصله دارند، در اندازه‌گیری‌های TFMMR لازم است تا مقدار آنومالی را در نزدیکی محل الکتروود نیز به‌دست آوریم. این بدان معنی است که طیف مؤلفه‌های میدان مغناطیسی آنومالی دارای دامنه وسیعی از فواصل بین نقاط اندازه‌گیری و الکتروود جریان‌اند که می‌توان آن‌را به‌خوبی در رفتار تابع اصلاح شده بسط (K_0) مشاهده کرد، به‌طوری که رفتار مجانب‌وار تابع فوق در حالت حدی فواصل کوچک و فواصل بزرگ به‌شرح زیر است (آبراموویس و استگان، ۱۹۷۲).

$$K_0(k_y|x|) \rightarrow -\ln(K_y|x|) \quad (12)$$

$$k_y|x| \rightarrow 0 \quad \text{آنگاه}$$

$$K_0(k_y|x|) \rightarrow \left[\frac{\pi}{2K_y|x|} \right]^{1/2} e^{-K_y|x|} \quad (13)$$

$$k_y|x| \rightarrow \infty \quad \text{آنگاه}$$

کنیم. آنگاه با استفاده از قضیه کانولوشن (بریسول، ۱۹۸۶) و رابطه تبدیل فوریه تابع $\frac{1}{x}$ که به توابع بسط از نوع دوم (K_0) ختم می‌شود، می‌توان به نتایج زیر برای هر سه مؤلفه میدان مغناطیسی در حوزه عدد موج رسید (فتحیان پور، ۱۹۹۷).

$$\bar{B}_x(x, k_y, z) = \frac{-\mu_0}{2\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty K_y \frac{\partial \sigma(x', z')}{\partial z'} \bar{U}(x', k_y, z') K_0(k_y r') dx' dz' \quad (9)$$

$$\bar{B}_y(x, k_y, z) = \frac{-\mu_0}{2\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \left[\frac{\partial \sigma(x', z')}{\partial z'} \frac{\partial \bar{U}(x', k_y, z')}{\partial x'} - \frac{\partial \sigma(x', z')}{\partial x'} \frac{\partial \bar{U}(x', k_y, z')}{\partial z'} \right] K_0(k_y r') dx' dz' \quad (10)$$

$$\bar{B}_z(x, k_y, z) = \frac{\mu_0}{2\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty K_y \frac{\partial \sigma(x', z')}{\partial x'} \bar{U}(x', k_y, z') K_0(k_y r') dx' dz' \quad (11)$$

بنابراین با داشتن این معادلات برای محاسبه میدان‌های مغناطیسی و همچنین انتشار پتانسیل الکتریکی در حوزه عدد موج می‌توان طیف مؤلفه‌های متفاوت میدان مغناطیسی را به تعدادی محدود از مقادیر K_y محاسبه و سپس با یک تبدیل فوریه معکوس عددی مؤلفه‌های میدان را در حوزه مکانی به‌دست آورد.

۶ شرایط مرزی

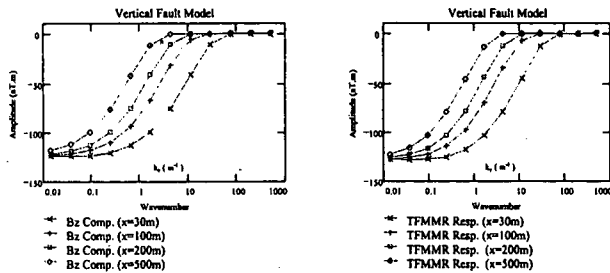
در مدل‌سازی داده‌های TFMMR بایستی سه شرط مرزی زیر را اعمال نمود

۱- پتانسیل تبدیل یافته \bar{U} بایستی در عرض مرز جداکننده المان‌های با مقاومت ویژه متفاوت پیوسته باشد یعنی $\bar{U}_1 = \bar{U}_2$ و در نهایت $\bar{U} = 0$ برای $X = \pm\infty$ و $Z = \pm\infty$.

۲- مؤلفه چگالی جریانی عمود بر سطح مشترک دو محیط باید پیوسته باشد ($j_{n1} = j_{n2}$) و به دلیل آنکه هوا کاملاً عایق است،

شرط مرزی نیومن به‌صورت $\frac{\partial \bar{U}}{\partial z} = 0$ در سطح زمین ($z=0$) اعمال می‌شود.

نکته قابل توجه بهینه‌سازی ابعاد شبکه اجزای محدود در نقاط



شکل ۲. طیف پارامتر TFMMR ناشی از یک گسل قائم در نقاطی در طول محور X.

شکل ۲ نشان‌دهنده طیف پارامتر TFMMR در نقاطی در طول محور X ناشی از یک مدل گسل قائم است.

۸ محاسبه مؤلفه‌های میدان مغناطیسی

در ارزیابی مؤلفه‌های میدان مغناطیسی در حوزه عدد موج، ابتدا پتانسیل الکتریکی تبدیل یافته در حوزه عدد موج برای هر قطعه مرزی بین محیط‌های با هدایت ویژه الکتریکی متفاوت از راه مقادیر آن در گوشه‌های المان‌ها به‌طور خطی تخمین زده می‌شود. یک چنین درون‌یابی خطی باعث کاهش دقت در محاسبات میدان مغناطیسی می‌شود چرا که در روش اجزای محدود به کار گرفته شده، توزیع پتانسیل روی هر المان به‌طور خطی تغییر می‌کند. بنابراین مؤلفه‌های میدان مغناطیسی در حوزه عدد موج با دقتی برابر با پتانسیل‌های الکتریکی تبدیل یافته محاسبه می‌شوند. برای محاسبه مؤلفه‌های میدان مغناطیسی می‌توان از راه گسستن انتگرال‌های معادلات ۲ تا ۴ و جمع کردن، اثر هر کدام از المان‌های با هدایت ویژه متفاوت را به‌دست آورد. عبارات معادل به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند.

$$\bar{B}_x(x, k_y, z) = -\frac{\mu_0}{2\pi} k_y \sum_{i=1}^N \left[(\sigma_{i2} - \sigma_{i1}) n_z \frac{\bar{u}_{i1} + \bar{u}_{i2}}{2} \int_{x_{il}, z_{il}}^{x_{i2}, z_{i2}} K_0(k_y r') dl' \right] \quad (16)$$

$$\bar{B}_z(x, k_y, z) = -\frac{\mu_0}{2\pi} \sum_{i=1}^n \left[(\sigma_{i2} - \sigma_{i1}) n_z \frac{\bar{u}_{i1} - \bar{u}_{i2}}{\Delta l} n_x + \dots \right]$$

بنابراین پتانسیل کل یک تکنیکی لگاریتمی در نزدیکی مبدأ و یک افت نمائی را در مقادیر بزرگ عدد موج نشان می‌دهد. لذا در اندازه‌گیری‌های TFMMR که در آنها پروفیل‌های اندازه‌گیری میدان مغناطیسی خارج از سطح مقطع شبکه‌بندی شده اجزای محدود است ($y \neq 0$) آنگاه بر اساس تئوری نمونه‌برداری مقدار مینیمم عدد موج باید طوری انتخاب شود که

۱- بتواند طیف نقاطی را که در طول سطح مقطع اند بازیابی کند و
۲- طول موج‌هایی را هم که مساوی یا بزرگ‌تر از دورترین پروفیل (y_{max}) هستند، به‌خوبی نمونه‌برداری کند. بنابراین از نظر نظری مقدار مینیموم K_y بایستی از نامساوی‌های زیر پی‌روی کند.

$$K_{ymin} \leq \frac{\pi}{y_{max}}, \quad K_{ymin} \leq \frac{\pi}{r_{max}} \quad (14)$$

که در آن r_{max} دورترین نقطه در سطح مقطع است. در عمل مشاهده شد که با انتخاب $K_{ymin} \leq \frac{\pi}{10y_{max}}$ می‌توان به‌خوبی

طیف طول موج‌های بزرگ موجود در میدان اندازه‌گیری شده را بازیابی نمود. در الگوریتم به کار گرفته شده به منظور تعیین بزرگ‌ترین عدد موج موجود در طیف پتانسیل تبدیل شده، کوچک‌ترین بعد موجود در مسئله که غالباً نزدیک‌ترین نقطه اندازه‌گیری میدان به محل الکتروود جریان (r_{min}) است، بر طبق تعریف عدد موج "نایکیست" تعیین شده است. به‌طوری که مقدار تابع تبدیل یافته برای مقدار "نایکیست" قابل صرف‌نظر کردن باشد. لذا معیار زیر برای تعیین عدد موج "نایکیست" به کار گرفته شد.

$$K_0(k_{yNyquist} r_{min}) \leq 0.001 \Rightarrow k_{yNyquist} r_{min} \leq 7 \Rightarrow k_{yNyquist} = \frac{7}{r_{min}} \quad (15)$$

و در نهایت با داشتن مقادیر کمینه و بیشینه عدد موج (k_{ymin} و $k_{yNyquist}$) یک مجموعه ۱۰ عددی که به‌طور لگاریتمی توزیع شده‌اند، ایجاد می‌شود و برای محاسبه هر سه مؤلفه میدان مغناطیسی به کار می‌رود.

محدود انتخاب شده است.

۱۰ مدل سازی مستقیم داده های TFMMR با استفاده از

روش اجزای محدود

الگوریتم عددی به کار گرفته شده، شامل تخمین اجزای محدود پتانسیل الکتریکی روی تمامی نیم فضای زمین، برای تعداد معینی از اعداد موج است. سپس از طریق انتگرال گیری عددی خطی، مقادیر میدان مغناطیسی تبدیل یافته محاسبه می شود و در نهایت نتایج در حوزه مکانی را می توان از راه تبدیل فوریه معکوس عددی روی داده های تبدیل یافته میدان به دست آورد. توالی جریان عملیات، در الگوریتم به کار گرفته شده به روش اجزای محدود در شکل ۳ آمده است.

۱۱ مبانی روش اجزای محدود

مبانی به کارگیری روش اجزاء محدود در حل مسائل فیزیکی به خصوص ژئوفیزیکی، در کتاب های بسیار زیادی به بحث گذاشته شده است (زینکیویچ و تیلور، ۱۹۹۴، و هوبنر و تورنتن ۱۹۸۲). این روش بر اساس جایگزینی تمام محیط پیوسته مسئله با تعدادی زیر ناحیه که در آنها تابع نامعلوم را می توان با دسته ای از تابع های درون یابی ساده با ضرایب نامعلوم تعریف کرد، استوار است. بنابراین مسئله مقدار مرزی اولیه را که حاوی تعداد نامحدودی درجه آزادی است به یک مسئله با تعداد معینی از درجه آزادی تبدیل می کنیم (جین، ۱۹۹۳). در حالت کلی تجزیه و تحلیل اجزای محدود یک مسئله مقداری مرزی دارای مراحل اصلی زیر است.

۱- فرمول بندی مسئله مقدار مرزی با استفاده از روش های اصول تغییرات (کوگون، ۱۹۷۱) و یا باقیمانده های وزنی (هومن، ۱۹۸۸).

۲- تبدیل دامنه مسئله به اجزای گسسته و یا زیر ناحیه های با تعداد معین (المان ها یا اجزا)

۳- انتخاب توابع پایه و یا درون یابی مناسب

۴- فرمول بندی دستگاه معادلات اجزای محدود

$$(\sigma_{i2} - \sigma_{i1}) n_x \frac{\bar{u}_{i1} - \bar{u}_{i2}}{\Delta l} n_z \int_{x_{i1}, z_{i1}}^{x_{i2}, z_{i2}} K_0(k_y r') dl' \quad (17)$$

$$\bar{B}_z(x, k_y, z) = \frac{\mu_0}{2\pi} k_y$$

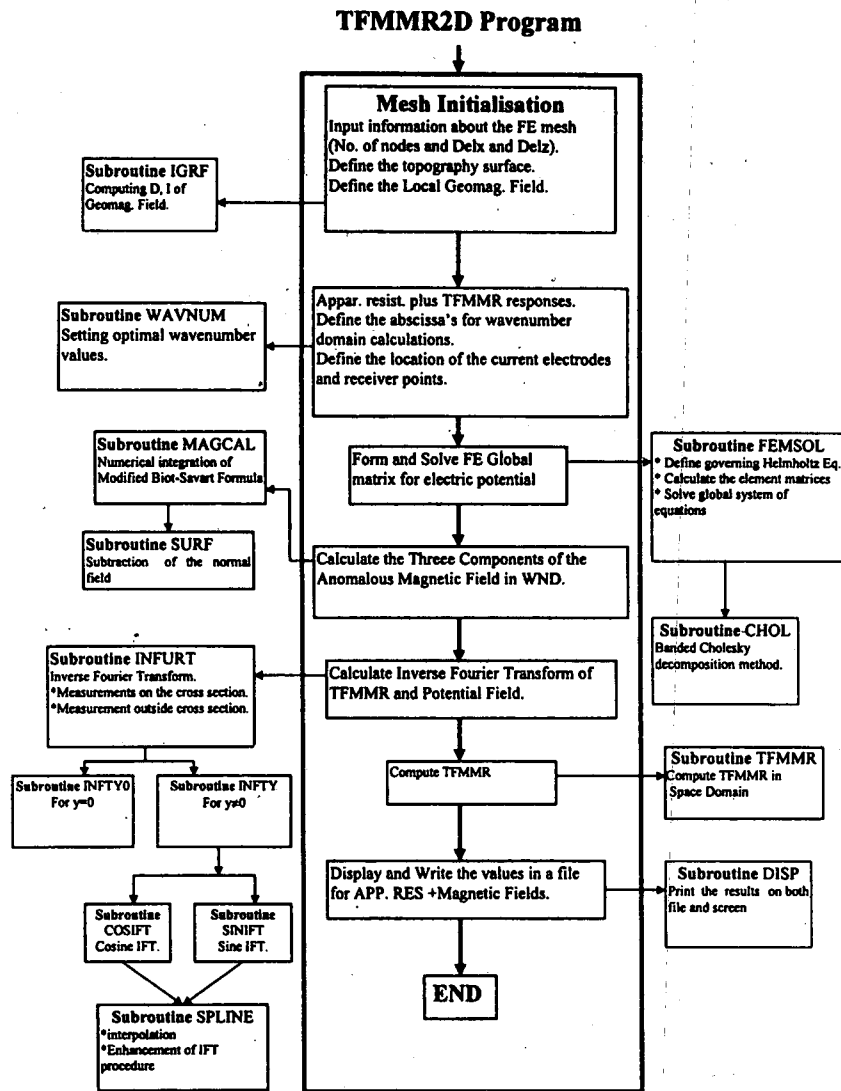
$$\sum_{i=1}^n \left[(\sigma_{i2} - \sigma_{i1}) n_x \frac{\bar{u}_{i1} + \bar{u}_{i2}}{2} \int_{x_{i1}, z_{i1}}^{x_{i2}, z_{i2}} K_0(k_y r') dl' \right] \quad (18)$$

که در آن $r' = \sqrt{(x - x_i)^2 + (z - z_i)^2}$ و (x_{i1}, z_{i1}) و (x_{i2}, z_{i2}) مختصات نقاط ابتدایی و انتهایی قطعه i ام و n تعداد قطعات مرزی که محیط های با هدایت ویژه های متفاوت را از هم جدا می کنند. σ_{i2} و σ_{i1} هدایت های ویژه دو طرف قطعه مرزی i ام است، $dl' = (dx_i^2 + dz_i^2)^{1/2}$ و $\Delta l = (\Delta x_i^2 + \Delta z_i^2)^{1/2}$ طول قطعه مرزی، \bar{u}_{i1} و \bar{u}_{i2} پتانسیل های الکتریکی تبدیل یافته در حوزه عدد موج در نقاط انتهایی قطعه و n_x و n_z کسینوس های هادی قطعه مرزی در امتداد های x و z است. مؤلفه های گرادین هدایت ویژه الکتریکی از راه مشتقات امتدادی آنها قابل محاسبه است.

۹ انتخاب روش عددی مناسب برای محاسبات پاسخ های

نظری TFMMR

در حالت کلی روش های عددی متداول از قبیل تفاضل محدود، اجزای محدود و معادله انتگرالی را که در حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی به کار می روند می توان به کار گرفت. اما از آنجایی که الگوریتم های روش اجزای محدود دارای انعطاف پذیری و قابلیت های بیشتری نسبت به سایر روش های عددی است و از طرف دیگر می توان با روش اجزای محدود مقدار پتانسیل را در تمام نقاط مرزی بین دو محیط که به شکل های متفاوتی ظاهر می شوند به طور مستقیم به دست آورد و همچنین اثر توپوگرافی را مدل نمود، روش اجزای محدود اولویت پیدا می کند. لذا برای حل عددی پاسخ های میدان مغناطیسی و در نهایت استخراج پارامتر TFMMR، روش اجزای



شکل ۳. الگوریتم مدل‌سازی عددی داده‌های TFMMR به روش اجزاء محدود.

طراحی شبکه اجزای محدود (مش) است که می‌تواند نقش مؤثری در دقت نتایج به‌دست آمده داشته باشد. اولین قدم در این خصوص انتخاب ناحیه‌ای به اندازه کافی بزرگ به نحوی است که مرزهای خارجی آن رفتار تحلیلی مقادیر پتانسیل الکتریکی را در مورد زمین همگن شبیه‌سازی نمایند. در مرحله دوم ابعاد شبکه المان‌ها در نزدیکی سطوح مرزی بین محیط‌های متفاوت باید به اندازه کافی کوچک انتخاب شود تا بتوان تغییرات شدید را نیز با

۵- حل دستگاه معادلات برای مقادیر نامعلوم

در این مقاله به‌دلیل سادگی روش باقیمانده‌های وزنی در فرمول‌بندی، از این روش به‌منظور محاسبه مقادیر تبدیل یافته پتانسیل الکتریکی استفاده شده است.

۱۲ تقسیم ناحیه به زیرناحیه‌ها

یکی از مهم‌ترین جنبه‌های به‌کارگیری روش اجزای محدود

ناحیه در عمق‌های دور از ناهمگنی‌ها افزایش داد. با این حال بعد قائم نایستی بزرگ‌تر از $1/4$ عمق خود المان شود.

۸- مرزهای جانبی و عمقی نیم‌فضا حداقل بایستی ۵۰۰ برابر کوچک‌ترین بعد موجود در مسئله از مرکز شبکه اجزای محدود دور باشند تا شرایط مرزی به خوبی اعتبار داشته باشد.

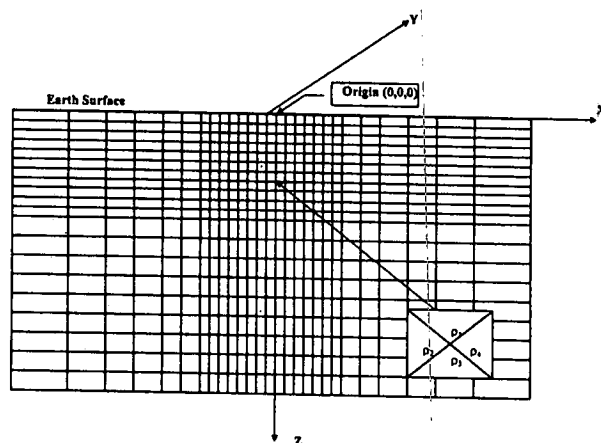
۱۳ محاسبه معادلات ماتریسی المان‌ها و حل دستگاه معادلات

ماتریس کل

یکی از مراحل مهم در به کارگیری روش اجزای محدود، ایجاد و ترکیب معادلات ماتریسی المان‌ها در یک معادله ماتریسی مجزا و در اینجا به صورت $G\bar{U} = S$ است که در آن G ماتریس با باند قطری معین و متقارن $M \times M$ و \bar{U} بردار مقادیر پتانسیل تبدیل یافته در شبکه اجزای محدود است. ماتریس کلی از راه قرار دادن المان‌های ماتریسی در محل‌های مناسب با توجه به شماره‌گذاری کلی المان‌ها تشکیل می‌شود. الگوریتم‌های عددی متفاوتی برای حل دستگاه معادلات خطی همانند معادلات ماتریسی روش اجزای محدود وجود دارد (گلوب و ون‌لون، ۱۹۸۸). اما چون ماتریس نهایی متقارن و با نوار قطری محدود است، آنگاه روش‌های با پهنای عددی محدود همانند روش‌های حذفی گوس برای ماتریس‌های نواری و یا روش چولسکی می‌توانند از نقطه‌نظر محاسباتی و دقت مؤثر باشند و چون روش چولسکی حساسیت بسیار کمی به خطاهای گرد کردن دارد، لذا این روش به عنوان بهترین روش حل معادلات به کار گرفته شد.

۱۴ محاسبه عددی مؤلفه‌های میدان مغناطیسی

معادلات ۱۶ تا ۱۸ عبارات مورد نیاز برای محاسبه عددی مؤلفه‌های میدان مغناطیسی را دربر می‌گیرند. در ارزیابی روابط ۱۶ تا ۱۸ برای مؤلفه‌های میدان مغناطیسی نقاط تکنیکی به‌خصوص در ارزیابی توابع اصلاح شده بسط زمانی که r' به صفر میل می‌کند رخ می‌دهد. این تکنیکی حقیقی نیست و یکی از روش‌های حذف این تکنیکی با حفظ دقت تخمین‌های انجام



شکل ۴. شماتی از یک شبکه اجزاء محدود تیبیک جهت مدل‌سازی عددی داده‌های TFMMR.

دقت کافی تعیین نمود و در نهایت بخش مرکزی شبکه که حاوی تمامی ناهمگنی‌هاست نسبت به مرزهای دور، از شبکه ریزتری برخوردار است (شکل ۴). معیارهای زیر برای طراحی شبکه اجزای محدود پس از آزمایشات متعدد مناسب تشخیص داده شدند.

- ۱- ابعاد افقی و قائم المان‌ها نباید از $1/4$ کوچک‌ترین طول موجود در مسئله بزرگ‌تر باشد.
- ۲- ابعاد مساوی المان‌ها در دو طرف ناپوستگی‌های زیرزمینی، منجر به دقت بیشتر نتایج می‌شود.
- ۳- ابعاد المان‌ها نباید بزرگ‌تر از دو برابر المان‌های مجاور خود باشد.
- ۴- درجه ریزبافتی ناپوستگی‌ها را می‌توان به عنوان تابعی از فاصله آنها از الکتروود جریان کاهش داد.
- ۵- ابعاد المان را می‌توان به صورت تابعی از شیب‌های توپوگرافی کاهش داد و برای شیب‌های حدود ۴۵ درجه $1/8$ برابر کوچک‌ترین طول مسئله مناسب است.
- ۶- هر منطقه با هدایت ویژه متفاوت باید حداقل ۴ المان پهنای ۳ المان ضخامت داشته باشد.
- ۷- بُعد قائم المان را می‌توان به طور نمایی تا رسیدن به مرزهای

$$B_x(x, y, z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \bar{B}_x(x, k_y, z) \sin(k_y y) dk_y \quad (19)$$

$$B_y(x, y, z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \bar{B}_y(x, k_y, z) \cos(k_y y) dk_y \quad (20)$$

$$B_z(x, y, z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \bar{B}_z(x, k_y, z) \sin(k_y y) dk_y \quad (21)$$

$$U(x, y, z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \bar{u}(x, k_y, z) \cos(k_y y) dk_y \quad (22)$$

در ارزیابی انتگرال‌های فوق دو مشکل در حالت $y \neq 0$ وجود دارد. اول آنکه پتانسیل تبدیل یافته و مؤلفه y میدان مغناطیسی دارای یک تکینگی در محل الکتروود جریان (یعنی جایی که $x = x_s$ و $z = z_s$) است و دوم میدان‌های تبدیل یافته در جایی که K_y به سمت صفر میل می‌کند رفتار لگاریتمی از خود نشان می‌دهند. در مورد اول می‌توان طیف میدان را در فاصله بسیار کوچک ε از محل الکتروود به جای خود الکتروود (یعنی $x = x_s + \varepsilon$) ارزیابی نمود که در اینجا ε را اغلب کوچک‌تر از $\frac{y_{\min}}{20}$ انتخاب می‌کنیم. یک چنین پروسه‌ای دارای خطای حداکثر ۰/۴ درصد برای مدل نیم‌فضای همگن است. برای حل تکینگی به وجود آمده در طیف میدان‌های تبدیل یافته اقدام به جداسازی بخش حاوی تکینگی و بخش منظم و سپس انتگرال‌گیری روی هر بخش به‌طور تحلیلی شد. پس از اجرای برنامه به دفعات بسیار مشخص شد که این فن یکی از دقیق‌ترین و پرسرعت‌ترین روش‌های ارزیابی پاسخ‌های TFMMR است.

همان‌طور که در رفتار مؤلفه‌های B_x و B_y مشاهده می‌شود، هیچ‌گونه تکینگی در محل مبدأ محور عدد موج وجود ندارد، به طوری که $\lim_{k_y \rightarrow 0} k_y K_0(k_y r) = 0$ است، بدان معنا که طیف این مؤلفه‌ها دارای هیچ مؤلفه DC نیست. برای برطرف کردن تکینگی مؤلفه B_y و پتانسیل الکتریکی u انتگرال فوری معکوس به دو بخش حاوی نقطه تکینگی و بخش منظم به صورت زیر تبدیل می‌شود.

$$B_y(x, y, z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{k_1} \bar{B}_y(x, k_y, z) \cos(k_y y) dk_y +$$

شده را در اینجا ارائه می‌دهیم. حذف تکینگی تابع K_0 تابع بسل اصلاح شده از مرتبه صفر در نزدیکی مبدأ رفتار لگاریتمی از خود نشان می‌دهد. اما واضح است که میدان مغناطیسی در نقطه اندازه‌گیری معین است و این حقیقت را که تکینگی نه حقیقی بلکه کاذب است می‌توان از راه تقسیم خط مرزی به قطعات بسیار کوچک (dl) به طوری که $\lim dl$ به صفر میل کند نشان داد. آنگاه حد عبارت حاوی تابع بسل اصلاح شده در نقطه مبدأ خود به سمت صفر میل می‌کند یعنی

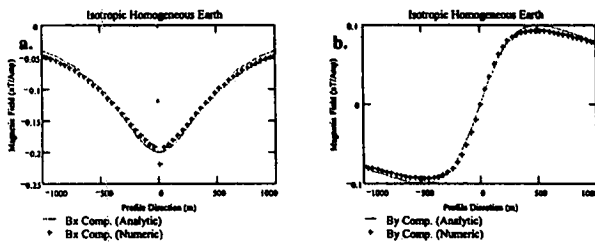
$$\lim_{r \rightarrow 0} K_0(k_y r) dl = -\ln(k_y r) dl \rightarrow 0$$

$$dl \rightarrow 0$$

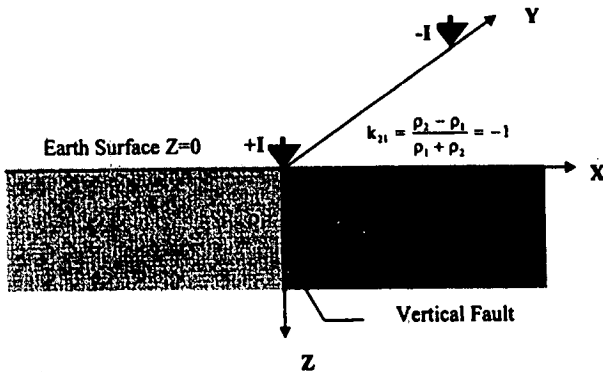
لذا کافی است که در ارزیابی انتگرال‌های حاوی تابع بسل اصلاح شده از یک روش انتگرال‌گیری که در آن نقطه انتهایی قطعه ارزیابی نشود، استفاده کرد. بدین منظور روش انتگرال‌گیری گوسی γ نقطه‌ای به منظور تخمین انتگرال تابع بسل روی قطعات مرزی به کار گرفته شد. با مقایسه نتایج تحلیلی (فرم بسته) و نتایج عددی مشاهده شد که خطای این محاسبات از ۰/۱ درصد هم کمتر است.

۱۵ تبدیل فوری معکوس عددی

پس از آنکه مؤلفه‌های میدان مغناطیسی تبدیل یافته از راه پتانسیل الکتریکی برای تعداد محدودی عدد موج محاسبه شد، لازم است مؤلفه‌های میدان در حوزه مکانی از راه یک الگوریتم عددی تبدیل فوری معکوس زیر (معادلات ۱۹ الی ۲۲) محاسبه شوند. برخلاف روش‌های مقاومت‌سنجی DC که در آن الکتروودهای پتانسیل و جریان در یک خط است، اندازه‌گیری‌هایی TFMMR خارج از مقطع مدل صورت می‌گیرد. لذا رفتار تابع زیر انتگرال تبدیل فوری معکوس به صورت نوسانی درمی‌آید و نیاز به ارزیابی خاص دارد. به راحتی می‌توان نشان داد که مراحل تبدیل فوری معکوس برای مؤلفه‌های متفاوت میدان مغناطیسی و پتانسیل الکتریکی به صورت زیر است.



شکل ۵. مقایسه نتایج عددی و تحلیلی مؤلفه‌های X و Y میدان مغناطیسی مربوط به یک زمین همگن برای پروفیل A-A' از شکل ۱.



شکل ۶. هندسه مدل به کار گرفته شده جهت محاسبه پاسخ مدل گسل قائم.

اجزای محدود متشکل از ۳۰×۴۰ المان مستطیلی در امتدادهای X و Z بوده است. همان‌طور که از این شکل‌ها ملاحظه می‌شود، نتایج عددی برای مؤلفه‌های X و Y تطابق بسیار خوبی با نتایج تحلیلی از خود نشان می‌دهند. میانگین خطای محاسبه شده برای مؤلفه Bx برابر ۳/۸ درصد و برای By ۴/۳ درصد برآورد شده‌اند.

۱۸ مدل گسل قائم

هندسه مدل به کار گرفته شده در شکل ۶ نشان داده شده است. شکل ۷ نمایانگر مقایسه نتایج عددی و تحلیلی هر سه مؤلفه X، Y و Z به علاوه پاسخ TFMMR برای مدل گسل قائم است. ضریب انعکاس دو محیط برای این مدل ۸۲٪ (10 = rho2 / rho1) در نظر گرفته شده است. الکتروود جریان روی اثر گسل در روی سطح زمین و مقطع عمود بر سطح گسل طراحی شده است. در اینجا از دو شبکه اجزای محدود مستطیلی که هر مستطیل آن

$$\int_{-K_1}^{\infty} \bar{B}_Y(x, k_y, z) \cos(k_y y) dk_y \quad (23)$$

که در آن K1 کمینه مقدار Ky (Kym) که برای آن طیف مؤلفه By محاسبه شده است خواهد بود. پس از یک سلسله عملیات، معادله فوق به صورت زیر درمی‌آید (کوئرتال و همکاران ۱۹۹۱، فتحیان پور ۱۹۹۷).

$$B_Y(x, y, z) = \frac{2}{\pi} \frac{B_0}{y} \left[\ln(b_0 k_y) \sin(k_1 y) + SI(k_1 y) \right] + \frac{2}{\pi} \sum_i \left[\frac{A_i \cos(k_y y)}{y^2} + B_Y(x, k_y, z) \frac{\sin(k_y y)}{y^2} \right]_{k_1}^{k_{i+1}} \quad (24)$$

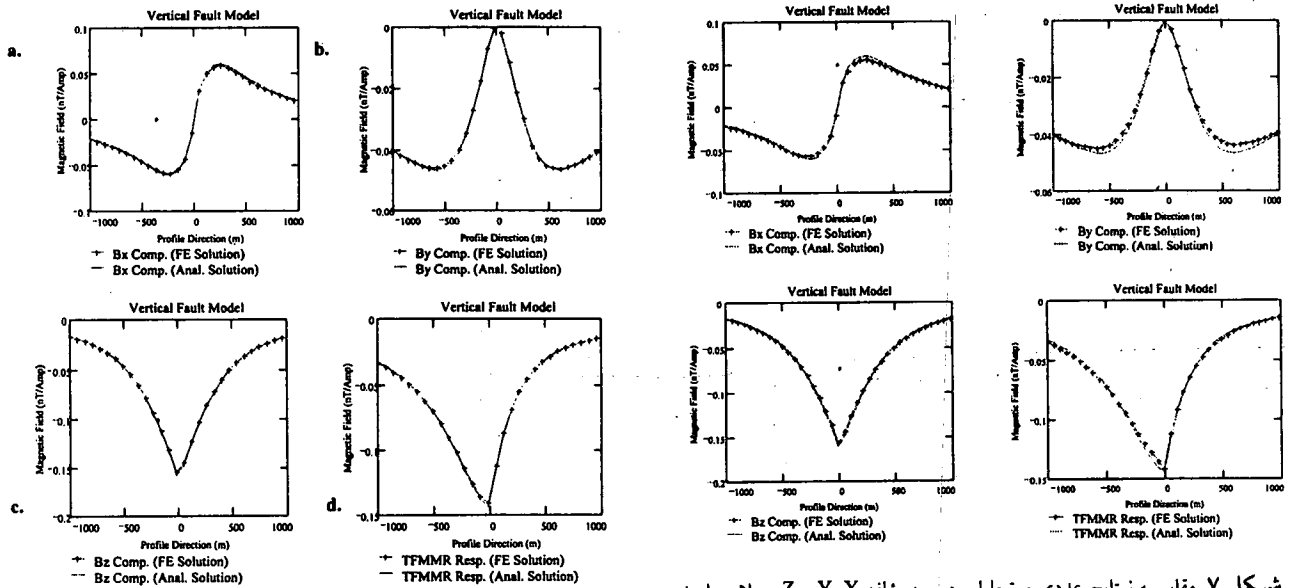
واضح است که نتیجه مشابهی را می‌توان برای تبدیل فوریه معکوس پتانسیل الکتریکی نیز به دست آورد.

۱۶ بررسی اعتبار و دقت روش ارائه شده

در اینجا نتایج عددی برای مؤلفه‌های متفاوت میدان مغناطیسی در زمین همگن و مدل گسل قائم که در مقاله‌ای توسط یکی از نگارندگان (فتحیان پور و کتج، ۱۹۹۵) و همچنین توسط باگنز و همکاران، ۱۹۹۹ به طور تحلیلی محاسبه شده بود، برای بررسی اعتبار و دقت نتایج، مورد مقایسه قرار می‌گیرند. لازم به تذکر است که توزیع خطا در محاسبات TFMMR به صورت تابعی از تخمین‌های انجام شده در هر سه مؤلفه میدان مغناطیسی است که سهم آنها با توجه به میدان ژئومغناطیسی زمین تعیین می‌شود. نتایجی که در اینجا ارائه شده است برای انحراف افقی ۴۵ درجه (d = 25) و زاویه میل ۶۰ درجه از میدان ژئومغناطیس زمین ارائه می‌شود.

۱۷ زمین همسانگرد

شکل ۵ نمایش مقایسه نتایج عددی و تحلیلی برای مؤلفه‌های X و Y میدان مغناطیسی مربوط به یک زمین همگن است. نتایج برای پروفیل AA' از شکل ۱ با به کارگیری تنها یک الکتروود جریان در مبدأ آورده شده است. تعداد ۱۲ عدد موج برای تخمین طیف مؤلفه‌های میدان در حوزه عدد موج به کار گرفته شده‌اند. شبکه



شکل ۷. مقایسه نتایج عددی و تحلیلی هر سه مؤلفه X ، Y و Z به علاوه پاسخ TFMMR برای مدل گسل قائم.

شکل ۸. نتایج عددی پاسخ مؤلفه‌های مختلف میدان مغناطیسی برای مدل گسل قائم با شبکه اجزاء محدود 82×35 و به کارگیری 40 مقدار عدد موج.

۱۹ نتیجه‌گیری

با توجه به جدید بودن پارامتر مقاومت‌سنجی، میدان کل (TFMMR) توسعه یک الگوریتم عددی به منظور محاسبه پاسخ آنومالی‌های توده مختلف زیرسطحی ضروری به نظر می‌رسد. برای دستیابی به معادلات حاکم بر رفتار میدان مغناطیسی از یک جفت تبدیل فوریه مستقیم و معکوس برای حذف مؤلفه Y میدان در امتداد ساختمان‌های زمین‌شناسی دوبعدی، استفاده شده است. الگوریتم ارائه شده در این مقاله با به کارگیری روش اجزای محدود با دقت به نسبت خوبی قادر است از عهده محاسبه پاسخ مدل‌های دوبعدی زمین برآید. مسائل و مشکلاتی که در ارتباط با افزایش دقت در محاسبات عددی و حذف تکنیکی در یک چنین محاسباتی ضرورت دارد، ارائه شده است. از نکات مهم حذف تکنیکی در جمله مربوط به منبع ایجاد میدان، تکنیکی در تبدیل فوریه معکوس و همچنین تکنیکی کاذب در محاسبه آنومالی مؤلفه‌های متفاوت میدان مغناطیسی مورد بحث قرار گرفته و راه‌حل‌های مناسب در هر مورد ارائه شده است. اهمیت انتخاب

حاوی ۴ المان مثلثی است به ترتیب شامل 40×20 ، 82×35 استفاده شده است که در مورد اول خطا برای مؤلفه B_y زیاد است. برای مؤلفه B_x میانگین خطای نسبی حدود ۷٪ برآورد شده است. ملاحظه می‌شود که خطای ماکزیموم چنین مدلی با به کارگیری ۱۲ عدد موج و شبکه اجزای محدود درشت 40×30 به دست آمده است که می‌توان دقت محاسبات را با ریز کردن شبکه اجزای محدود افزایش داد. به طور مثال برای همان مدل گسل قائم یک شبکه اجزای محدود 82×35 گره‌ای با به کارگیری یک مجموعه ۴۰ مقداری عدد موج بررسی قرار گرفته و نتایج در شکل ۸ آورده شده است. همان‌طور که از شکل‌های ۷ و ۸ مشاهده می‌شود اندازه‌گیری میدان مغناطیسی کل به دلیل نبود نیاز به تراز کردن مگنتومتر در هر اندازه‌گیری صحرائی، امکان اندازه‌گیری پیوسته و تأثیرپذیری از کلیه مؤلفه‌ها و به ویژه مؤلفه قائم و در نتیجه قدرت سیگنال قوی‌تر از تک مؤلفه‌ها (به طور مثال حدود سه برابر مؤلفه‌های X و Y در شکل ۸)، نسبت به روش تک مؤلفه‌ای MMR که در آن فقط مؤلفه X اندازه‌گیری می‌شود، دارای برتری است.

- Fathianpour, N., 1997, Analytical and Numerical Modelling of Total Field MagnetoMetric Resistivity (TFMMR) Data., PhD Thesis, Flinders University of South Australia, Australia. 315 pp.
- Fathianpour, N. and Cattach, M. K., 1995, Analytical Solutions for the Total Field Managetometric Resistivity (TFMMR) Thechnique. *Exploration Geophysics*, **26**, 158-166.
- Gloub, G. H. and van Loan. C. F., 1988, Matrix computations. The Johns Hopkins University Press.
- Hohmann, G. W., 1988, Numerical modelling for electromagnetic methods of geophysics. In: *Electromagnetic Methods in Applied Geophysics - Theory*, Volume 1, SEG Publication.
- Huebner, K. H. and Thornton, E. A., 1982, The finite element method for engineers. Second Edition, John Wiley & Sons Inc.
- Jin, J., 1993, The finite element method in electromagnetics. John Wiley & Sons Inc.
- Nabighian, M. N., Oppliger, G. L., Edwards, R. N., Lo, B. B. H. and Cheesman, S. J., 1984, Cross-hole magnetometric resistivity (MMR). *Geophysics*, **49**, 1313-1326.
- Queralt, P., Pous, J. and Marcuello, A., 1991, 2-D resistivity modelling: An approach to arrays parallel to the strike direction. *Geophysics*, **56**, 941-950.
- Snyder, D. D., 1976, A method for modelling the resistivity and IP response of two-dimensional bodies. *Geophysics*, **41**, 997-1015.
- Zhdanov, M. S. and Keller, G. V., 1994, *The Geoelectrical Methods in Geophysical Exploration*. Elsevier. Amsterdam, The Netherlands.
- Zienkiewicz, O. C. and Taylor, R. L. 1994, *The Finite Element Method: basic Formulation and Linear Problems*. Forth Edition. McGraw Hill Book Co., New York.
- تعداد بهینه اعداد موج مورد نیاز و معیارهای طراحی شبکه اجزای محدود به خوبی مورد بحث قرار گرفته و نحوه تعیین آنها ارائه شده است.
- منابع
- Abramowitz, M. & Stegun, I. A., 1972, *Handbook of mathematical functions with formulas , graphs and mathematical tables*. U.S. Gov. printing office, Washington, DC.
- Boggs, D. B., Stanley, J. M. and Cattach, M. K., 1999, Three-dimensional numerical modelling of sub-audio magnetic data: *Expl. Geophys.*, *Austr. Soc. Expl. Geophys.*, **30**, 147-156.
- Bracewell, R. N., 1986, *The Fourier Transform and Its Applications*. McGraw-Hill, Inc. New York.
- Cattach, M. K., Stanley, J. M., Lee, S. J. and Boyd, G. W., 1994, Sub-Audio Magnetics (SAM)-A high resolution technique for simultaneously electrical and magnetic properties. *Exploration Geophysics*, **24**, 287-400.
- Cheng, D. K., 1989, *Field and Wave Electromagnetics*. World Student Series Edition. Addison - Wesley Pub. Co., Inc., USA.
- Coggon, J. H., 1971, Electronic and electrical modelling by the finite element method. *Geophysics*, **36**, 132-155.
- Dey, A. and Morrison, H. F., 1979, Resistivity modelling for arbitrarily shaped two-dimensional structures. *Geophysical Prospecting*, **27**, 106-136.
- Edwards, R. N., 1974, The magnetometric resistivity method and its application to the mapping of a fault. *Can. J. Earth Sci.*, **11**, 1136-1156.
- Edwards, R. N., Lee, H. and Nabighian, M. N., 1978, On the theory of managemetric resistivity (MMR) method. *Geophysics*, **43**, 1176-1203.