

## ردیابی موج با استفاده از اصل زمان همرسی و معکوس زمان سیرهای باقی مانده

محمدعلی ریاحی\* و سعید اکبری\*

مؤسسه ژئوفیزیک دانشگاه تهران، صندوق پستی ۶۴۶۶-۱۴۱۵۵

(دریافت مقاله: ۸۲۸/۱۸، پذیرش مقاله: ۸۴۳/۱۰)

### چکیده

در سال‌های اخیر روش‌های مختلفی برای محاسبه زمان سیر امواج لرزه‌ای در محیط‌های پیچیده سرعتی ارائه شده است (موزر، ۱۹۸۹ و ویدال، ۱۹۸۸). در این میان ردیابی موج با روش تفاضل متناهی (finite difference) نتایج قابل قبولی داشته است. در این مطالعه برای محاسبه زمان سیر امواج لرزه‌ای در یک مدل سلولی، از تقریب تفاضل که ویدال (۱۹۸۸) آن را ارائه کرده برای حل معادله آیکونال استفاده شده است. به منظور ارزیابی کارایی این روش، انواع متفاوتی از مدل‌های سرعتی مورد بررسی قرار گرفت که در همه موارد نتایج به دست آمده با مبانی نظری موجود تطابق لازم را داشت. سپس با استفاده از روش کم‌ترین مربعات میرا و الگوریتم گرادیان بندادی معرفی شده از سوی اسکیلز (۱۹۸۷) مرحله معکوس باقی‌مانده‌های زمان سیر برای ایجاد یک مقطع سرعتی از محیط زیرسطحی، صورت گرفت. برای ارزیابی کیفیت مقطع نهایی به دست آمده، از شاخص‌های آماری ماتریس دقت، ماتریس کوواریانس، ماتریس عدم قطعیت و جذر میانگین مربعی خطا استفاده شده است. این روش در مورد داده‌های حقیقی به دست آمده از محل زیرساخت یک سد وزنی بتونی به کار برده شده است. در توموگرام نهایی به دست آمده، در قسمت پایین، یک منطقه کم سرعت مشاهده شد که ممکن است بتوان آن را به سست بودن سنگ‌های تشکیل دهنده این زون نسبت داد. به منظور ارزیابی روش مورد استفاده در این مقاله، از روش بک پروجکشن (back projection) در محدوده مورد مطالعه استفاده شد و توموگرام نهایی به دست آمده از این روش با توجه به شاخص جذر میانگین مربعی، خطا به دست آمده در مقایسه با روش زمان همرسی (reciprocal time) از دقت قابل قبول برخوردار نبود.

واژه‌های کلیدی: توموگرافی، تقریب تفاضل متناهی، ردیابی مسیر موج، روش کم‌ترین مربعات میرا، الگوریتم گرادیان بندادی

### ۱ مقدمه

لرزه‌ای را در محدوده وسیعی از مسائل مانند بررسی‌های بزرگ مقیاس پوسته‌ای تا مسائل مهندسی با ابعاد چند متر می‌توان به کار برد. در مورد چشمه لرزه‌ای نیز که انرژی مکانیکی مورد نیاز برای انتشار موج در محیط را فراهم می‌کند، انواع متفاوتی را می‌توان در نظر گرفت. این چشمه‌ها در حالت طبیعی ممکن است ناشی از زلزله باشند و یا در موارد مصنوعی برای ایجادشان از انفجارات کنترل شده و محدود یا پرتاب وزنه و ضربه استفاده کرد. برداشت داده‌ها به منظور توموگرافی لرزه‌ای نیز متنوع است و موقعیت خطوط لرزه‌نگاری را می‌توان به صورت سطح به سطح، سطح به چاه، چاه به سطح، گالری به گالری و ... در نظر گرفت. با این که نوع داده‌ها و متغیرهای مدل در کاربردهای

ریشه اصلی واژه توموگرافی (tomography) در زبان یونانی به معنای برش است. عبارت توموگرافی لرزه‌ای را کلیتون (۱۹۸۴) بدین صورت تعریف کرده است: "توموگرافی را می‌توان بازسازی یک محیط با استفاده از دانسته‌های به دست آمده از اینگرال‌های خطی مسیر در آن محیط نامید، که در لرزه‌شناسی، تعیین تغییرات سرعت در محیط با این تعریف سازگار است."

نخستین کاربرد توموگرافی لرزه‌ای را آکی و همکاران (۱۹۷۴) در مورد ساختمان زمین در منطقه گسل سن آندریاس ارائه کردند. پس از آن با توجه به تسهیلات و موفقیت‌های فراوانی که این روش در تعیین ساختمان زمین و تفسیر داده‌های لرزه‌ای ارائه کرده است، مورد توجه ویژه ژئوفیزیک‌دانان قرار گرفت. توموگرافی

می توان با انتخاب یک الگوریتم ریاضی، زمان سیر امواج و مسیر آن‌ها را در مدل مورد نظر به روش مستقیم محاسبه کرد. در مرحله معکوس می توان پارامترهای واقعی مدل را به دست آورد. همچنین با تشکیل ماتریس قدرت تفکیک (resolution matrix) نتایج به دست آمده از مدل سازی را ارزیابی کرد. به منظور به انجام رساندن مراحل مستقیم و معکوس، ابتدا با استفاده از معادله زیر و بر اساس الگوریتم ویدال (۱۹۸۸) زمان سیر امواج محاسبه شد:

$$t_i t_i = \frac{1}{v^2} \quad (1)$$

که در آن،  $t_i$  مشتق زمان نسبت به فاصله و  $v$  سرعت انتشار امواج کشان در محیط و اندیس  $i$  محورهای مختصات را در دستگاه کارترین نشان می دهد. در معادله (۱) وقتی که تابع  $v$  برای محیط مشخص باشد، با استفاده از روش های عددی قابل حل است. الگوریتم ویدال (۱۹۸۸) بر اساس الگوی تفاضل متناهی میانرو (centered finite difference) در حل معادله آیکونال استفاده شده است. در الگوی مذکور زمان سیر موج از روی سه گوشه یک شبکه مربعی به گوشه چهارم برون یابی می شود. در الگوریتم ویدال برای امواج تخت، زمان سیر امواج از رابطه زیر محاسبه می شود (ویدال، ۱۹۸۸).

$$t_i = \frac{h}{2} (S_{Bi} + S_{Ai}) \quad (2)$$

که در آن،  $S_A$  نشان دهنده کندی در محل چشمه،  $S_{Bi}$  معرف کندی در اطراف محل چشمه،  $A$  نشان دهنده محل چشمه (که زمان سیر صفر به آن نسبت داده می شود)،  $B_i$  چهار نقطه از همسایه های چشمه،  $h$  طول ضلع سلول و  $S$  کندی مربوط به رئوس شبکه است. همچنین در این الگوریتم برای جبه امواج غیرتخت از رابطه زیر استفاده می شود (ویدال، ۱۹۸۸).

$$t_3 = t_s + S \sqrt{(X_s + h)^2 + (Z_s + h)^2} \quad (3)$$

مختلف توپوگرافی متفاوت است، اما در همه موارد، عموماً مراحل زیر طی می شود:

- ۱- پارامتری کردن مدل
- ۲- ایجاد یک قالب ریاضی برای حل مسئله مستقیم با توجه به متغیرهای مدل و داده ها
- ۳- تعیین روش معکوس
- ۴- تعیین کیفیت و دقت نتایج نهایی

در این مطالعه در مرحله مدل سازی مستقیم، با استفاده از اصول زمان همرسی، هویگنس، فرما و روش جبهه موج، ردیابی اولین موج رسیده به گیرنده ها انجام شده است و پس از پارامتری کردن مدل با استفاده از روش کم ترین مربعات میرا و گرادیان بندادی، مرحله معکوس انجام یافته است و مقادیر تصحیحی مدل تعیین شده اند. پس از رسیدن شاخص های آماری به حد مورد نظر، مدل نهایی ارائه شده است. در این مقاله کاربرد روش توپوگرافی با استفاده از ردیابی مسیر موج روی مدل های سرعتی مصنوعی و داده های حقیقی به دست آمده از بخشی از محل زیرساخت یک سد وزنی بتونی کارایی این روش مورد بررسی قرار گرفت.

## ۲ مبانی نظری

به منظور مدل سازی، پارامتر مدل که تابعی وابسته به ویژگی های فیزیکی مدل است در مقابل با تابع عمق مدل در نظر گرفته می شود. در حالتی که اطلاعات اولیه ناشی از مطالعات ژئوفیزیکی مانند داده های شکست مرزی، چاه به چاه و ... وجود داشته باشد برخی از پارامترهای مدل مانند سرعت، از پیش تعیین شده اند. این اطلاعات موجب کاهش تعداد پاسخ ها برای مدل نهایی می شود. در مدل هایی که محیط به صورت شبکه ای منظم با طول ضلع برابر و یا نابرابر در نظر گرفته می شوند، در رأس های هر سلول در شبکه مذکور پارامتر سرعت یا کندی (slowness) نسبت به عمق در نظر گرفته می شود. سپس

نقاط تعیین می‌شود. با محاسبه طول مسیر موج در فاصله بین این نقاط، می‌توان طول مسیری را که هر پرتو موج در هر سلول طی می‌کند، محاسبه کرد. آنگاه اختلاف زمانی مربوط به هر گیرنده با توجه به مقدار مشاهده شده در عمل و مقدار محاسبه شده تعیین می‌شود. این مراحل برای همه زوج‌های چشمه و گیرنده موجود در مدل تکرار می‌شود، برای اطلاعات بیشتر در مورد این روش به پایان‌نامه اکبری (۱۳۷۹) مراجعه شود.

در یک مدل سلولی ارتباط بین داده‌ها و پارامترهای مدل با رابطه زیر بیان می‌شود (منکه، ۱۹۸۴):

$$d_i = \sum G_{ij} m_j \quad (4)$$

که در آن،  $d_i$  پاسخ مشاهده شده یا قابل محاسبه از مدل به آمین ورودی خارجی یا محرک مانند انرژی تولید شده توسط ضربه یا انفجار و  $m_j$  پارامتر یا تابع وابسته به ویژگی‌های فیزیکی ساختار  $j$  آمین سلول مدل است. همچنین  $G_{ij}$  کرنل داده‌ها و به عبارت دیگر ماتریس مشتقات است. این رابطه در مورد توموگرافی به صورت زیر بازنویسی می‌شود (مجو، ۱۹۹۴):

$$t_i = \sum L_{ij} S_j \quad (5)$$

که در آن،  $L_{ij}$  ماتریسی است که هر عنصر آن معرف طول قطعات یک پرتو در سلول‌های متفاوت است، به طوری که تعداد سطرهای آن برابر تعداد امواج مورد مطالعه و تعداد ستون‌های آن برابر تعداد سلول‌های مدل است. همچنین  $S_j$  کندی مربوط به سلول  $j$  ام و  $t_i$  زمان سیر کلی مربوط به مسیر پرتو موج  $i$  ام است.

در مرحله مستقیم توموگرافی زمان سیر با معلوم بودن ماتریس  $L_{ij}$  و کندی  $S_j$  مقادیر  $t_i$  مورد محاسبه قرار می‌گیرند و در مرحله معکوس با توجه به اختلاف زمان سیر مشاهده شده و محاسبه شده و نیز طول مسیر اولیه مفروض برای هر موج در مدل، کندی واقعی مربوط به هر سلول محاسبه می‌شود. با توجه به تعریف ارائه شده در

که در آن، پارامترهای  $X_s$  و  $Z_s$  مختصات افقی و قائم چشمه،  $t_s$  زمان اصلی چشمه،  $h$  طول ضلع سلول و  $S$  کندی میانگین رئوس سلول است. با استفاده از روابط (۲) و (۳) در الگوریتم ویدال (۱۹۸۸) در نتیجه میدان زمانی ناشی از گسترش موج در محیط محاسبه می‌شود. پس از این که زمان سیر امواج برای همه نقاط شبکه با استفاده از تقریب تفاضل متناهی محاسبه شد، برای تعیین مسیر پرتو موج از اصل زمان همرسی با فرض بر این که مسیر پرتو موج همواره بر جبهه موج عمود است استفاده شده است.

### ۳ زمان همرسی

در محیط‌هایی که سرعت انتشار موج در محیط دارای تغییرات شدید است، مسیرهای مختلفی برای عبور موج وجود خواهد داشت. بنابراین در این حالت ممکن است زمان رسید دو موج مستقیم و شکست مرزی هم‌زمان باشد و یافتن مسیر هر یک به صورت جداگانه موجب افزایش تعداد مشاهدات مستقل شود. در این صورت معمولاً شناسایی مسیرهای مختلف موج با سعی و خطا صورت می‌پذیرد (موزر، ۱۹۸۹). از آنجا که در روش زمان همرسی موج، به طور مستقیم مسیر پرتو موج شناسایی می‌شود، بنابراین در مواردی که محیط دارای ساختار پیچیده سرعتی باشد، نیازی به استفاده از روش سعی و خطا نیست. در این روش با استفاده از اصل فرما فرض می‌شود که مسیر موج دارای کم‌ترین زمان سیر موج از چشمه تا گیرنده است و با دنبال‌گیری کم‌ترین زمان سیر کلی، از چشمه و گیرنده در محیط، می‌توان مسیر آن را تعیین کرد. به این ترتیب مسیر پرتو موج با تعداد معینی از نقاط مشخص می‌شود. سپس برای این نقاط بهترین منحنی ممکن، برازش داده می‌شود و منحنی مربوط به مسیر موج را با خطوط افقی و عمودی در یک شبکه منظم با فواصل کم‌تر از فاصله اصلی شبکه، قطع داده و مختصات این

پارامترهای مدل و داده‌ها را بیان می‌کند. عبارت داخلی کروسه در سمت راست معادله معرف ضرب داخلی بردارها است.  $F(z)$  مسلماً مثبت است و فقط وقتی صفر می‌شود که  $Z=X$  باشد (اسکیلز، ۱۹۸۷ و نالت، ۱۹۸۷). آنچه الگوریتم گرادیان بندادی را در حل ماتریس‌های پراکنده و بزرگ موفق می‌سازد، عبارت است از:

۱- ماتریس  $B$  به صورت برگشتی محاسبه شده، و نیازی به ذخیره آن‌ها در حافظه رایانه نیست.

۲- ماتریس  $B$  فقط در ضرب‌های ماتریسی- برداری ظاهر می‌شود و به صورت سطر به سطر محاسبه صورت می‌گیرد.

معمولاً برای ارزیابی کیفیت مدل نهایی از جذر مربع میانگین خطاها استفاده می‌شود. که در توموگرافی لرزه‌ای جذر میانگین مربعات زمان سیر باقی مانده ( $t_{rms}$ ) مطابق رابطه زیر است (مجو، ۱۹۹۴):

$$t_{rms} = \frac{1}{n} \sum \frac{(t_i^{obs} - t_i^{cal})}{\sigma^2} \quad (9)$$

در معادله (۹) پارامتر  $t_{rms}$  جذر میانگین مربعات زمان سیر باقی مانده،  $t_i^{obs}$  زمان رسیدهای مشاهده شده،  $t_i^{cal}$  زمان رسیدهای محاسبه شده،  $n$  تعداد داده‌ها و  $\sigma^2$  کوواریانس داده‌ها است که از رابطه زیر به دست می‌آید (منکه، ۱۹۸۴):

$$[Covd] = \sigma_d^2 I \quad (10)$$

مقادیر  $t_{rms}$  معمولاً برای جذر میانگین مربعات خطاها بین صفر و یک است و در صورت وجود اختلاف زیاد این مقدار، مدل به دست آمده قابل اطمینان نیست. در یک سامانه خطی، کیفیت مدل نهایی حاصل از داده‌ها را می‌توان با شاخص آماری دیگری به نام ماتریس قدرت تفکیک (resolution matrix) مطابق رابطه زیر مورد سنجش قرار داد (جکسون و ماتسورا، ۱۹۸۵):

$$R = (A^T C_t^{-1} A + D C_m^{-1})^{-1} A^T C_t^{-1} A \quad (11)$$

در معادله (۱۱) پارامتر  $A$  ماتریس مشتقات جزئی است که

رابطه (۵) برای یافتن پارامتر کندی، رابطه مذکور به صورت زیر بازنویسی می‌شود (مجو، ۱۹۹۴):

$$S_j = \sum L_{ij}^{-1} t_i \quad (6)$$

رابطه (۶) هنگامی صادق است که خطای محاسبه و یا مشاهده در داده‌ها وجود نداشته باشد، اما در حضور خطا می‌توان پارامترهای مدل را از رابطه زیر به دست آورد (مجو، ۱۹۹۴):

$$S_j = \sum [L_{ij}^T L_{ij}]^{-1} L_{ij}^T t_i \quad (7)$$

معادله (۷) بازنویسی دیگری از معادله (۶) است با این تفاوت که ترانهاده و معکوس ترانهاده ماتریس  $L_{ij}$  در سمت راست معادله (۶) ضرب شده است. با این کار می‌توان اثر خطا را به حساب آورد (مجو، ۱۹۹۴). در حل معادله (۷) می‌توان از روش‌های مختلفی استفاده کرد که در موارد ساده‌ای که تعداد معادلات و ابعاد ماتریس‌ها کوچک باشند، استفاده از روش‌های معمول، مانند روش معکوس ماتریسی (matrix inversion) ممکن است. اما هنگامی که تعداد معادلات رو به افزایش می‌گذارد، استفاده از روش‌های مقدماتی کارساز نیست و از روش‌های دیگری مثل روش معکوس مربعات میرا با الگوریتم گرادیان بندادی (conjugate gradient) در حل معادلات ماتریسی موجود با ضرایب میرایی بهینه استفاده می‌شود، به طوری که تعداد تکرار را برای برازش داده‌ها با مدل واقعی به میزان زیادی کاهش می‌دهد. در بیشتر مسائل توموگرافی، ماتریس‌های موجود در رابطه (۷) پراکنده‌اند و گاهی تا نود درصد حجم آن‌ها صفر است.

الگوریتم گرادیان بندادی برای حل دستگاه معادلات  $Bx=f$  وقتی که ماتریس  $B$  متقارن و مثبت باشد، به کار می‌رود. اساس روش گرادیان‌های بندادی، کمینه کردن فرم تابعی زیر است (اسکیلز، ۱۹۸۷):

$$F(z) = [x - z, B(x - z)] \quad (8)$$

معادله (۸)، رابطه خطی بین ماتریس کرنل داده‌ها،

انتظاری برای  $q$  برابر تعداد مشاهدات  $n$  است. اما در عمل مقدار  $q$  را در محدوده زیر نیز قابل قبول می‌دانند (منکه، ۱۹۸۴):

$$n - p < q \leq n + \sqrt{2n} \quad (15)$$

که در آن،  $n$  تعداد مشاهدات و  $p$  تعداد پارامترهای مدل است، نمودار طرح‌واره (شماتیک) الگوریتم از برنامه رایانه‌ای، تعریف ورودی‌ها و خروجی‌ها، موقعیت توابعی که در محاسبات مورد استفاده قرار گرفته‌اند و شروط کنترلی در شکل ۱، ارائه شده است.

سپس با توجه به میدان زمانی کلی به دست آمده، جبهه‌های موج را برای زمان‌های مختلف، با توجه به کم‌ترین مقادیر زمان سیر کلی، از چشمه و گیرنده محاسبه می‌کنیم و موقعیت نزدیک‌ترین نقطه این دو جبهه موج را تعیین می‌نماییم. به این ترتیب مسیر موج با تعداد معینی از نقاط، مشخص می‌شود (شکل ۲). سپس، برای این نقاط بهترین منحنی ممکن را برازش می‌دهیم و منحنی مربوط به مسیر موج را با خطوط افقی و عمودی در یک شبکه منظم با فواصل کم‌تر از شبکه اصلی، قطع می‌دهیم و مختصات این نقاط تقاطع را تعیین می‌نماییم. با محاسبه طول مسیر موج در فاصله بین این نقاط، می‌توان طول مسیری را که هر موج در هر سلول طی می‌کند، محاسبه کرد. آنگاه اختلاف زمانی مربوط به هر گیرنده را با توجه به مقدار مشاهده شده در عمل و مقدار محاسبه شده محاسبه نمود. این مراحل در مورد همه زوج چشمه و گیرنده موجود در مدل تکرار می‌شود. سپس با توجه به الگوریتم گرادیان بندادی و فرمول کم‌ترین مربعات میرا که در آن ماتریس کرنل داده‌ها به صورت ماتریس تعمیم یافته با در نظر گرفتن درصدی از خطا برای ترمیم پارامترهای مدل استفاده می‌شود نتایج به شکل زیر است (منکه، ۱۹۸۴).

$$G^{-B} = [G^T G + \varepsilon^2 I]^{-1} G \quad (16)$$

دارای ابعاد  $M$  در  $N$  است که  $M$  تعداد داده‌ها و  $N$  تعداد پارامترهای مدل است.  $C_m$  ماتریس کوواریانس مدل،  $C_t$  ماتریس کوواریانس داده‌ها و  $D$  پارامتر میرایی عمومی است و معمولاً مقدار آن برابر یک است. عناصر قطری ماتریس دقت دارای اندازه‌ای بین صفر و یک است و نشان‌دهنده همخوانی مدل واقعی و مدل به دست آمده از روش معکوس است. پارامترهای مدل که مقادیر قطری ماتریس دقت آن‌ها بزرگ‌تر از ۰/۵ شد قابل اطمینان‌اند (زلت و اسمیت، ۱۹۹۲). ساده‌ترین راه تخمین خطا در مدل، محاسبه کوواریانس پارامترهای مدل است. ماتریس عدم قطعیت (uncertainty matrix) و یا ماتریس کوواریانس وابست به کوواریانس خطاهای آزمایش و روش تأثیر این خطاها در ایجاد خطای مدل است و مطابق رابطه زیر بیان شده است (زلت و اسمیت، ۱۹۹۲):

$$C = (I - R) C_m \quad (12)$$

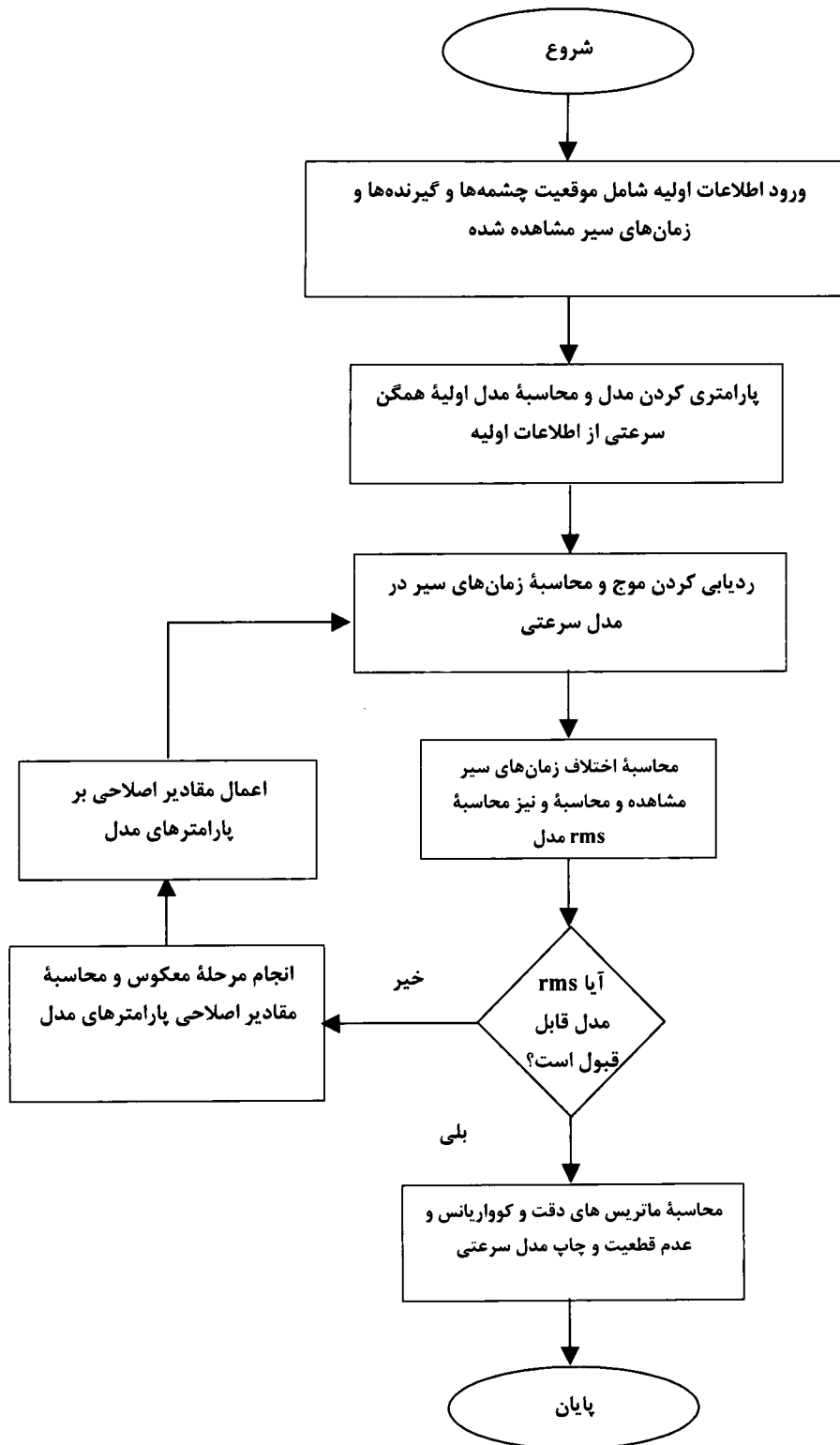
که در آن،  $C_m$  ماتریس کوواریانس کرنل داده‌ها و  $C$  ماتریس کوواریانس پاسخ سامانه و یا ماتریس عدم قطعیت است. ماتریس کوواریانس کرنل داده‌ها ( $C_m$ ) از رابطه زیر به دست می‌آید (منکه، ۱۹۸۴).

$$[C_m] = \sigma_d^2 [G^T G]^{-1} \quad (13)$$

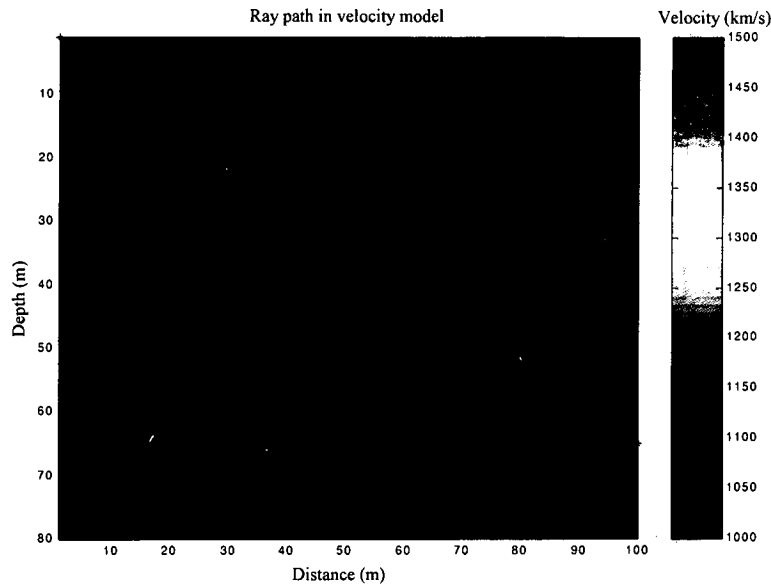
که در آن،  $G$  ماتریس کرنل داده‌ها و به عبارت دیگر ماتریس مشتقات و پارامتر  $\sigma_d^2$  کوواریانس داده‌ها است. با فرض این که داده‌های  $t_i$  به صورت نرمال حول مقادیر انتظاری توزیع شده باشند و نیز دانستن کوواریانس‌های خطای حاصل از اندازه‌گیری داده‌ها ( $\sigma_d$ )، می‌توان میزان برازش داده‌های مشاهده شده در عمل و داده‌های محاسبه شده در روش مستقیم را با محاسبه متغیر آماری  $q$  تعریف کرد (منکه، ۱۹۸۴):

$$q = \sum \frac{(t_i^{obs} - G_{ij} m_{ij})^2}{\sigma_d^2} \quad (14)$$

پارامتر  $q$  در معادله (۱۴)، برای تأیید یا رد یک مدل به دست آمده در روش معکوس تأثیر به‌سزایی دارد. مقدار



شکل ۱. نمودار طرح‌واره (شماتیک) الگوریتم از برنامه رایانه‌ای، تعریف ورودی‌ها و خروجی‌ها، موقعیت توابعی که در محاسبات مورد استفاده قرار گرفته‌اند و شروط کنترلی.



شکل ۲. مسیر پرتو موج با توجه به میدان زمانی کلی به دست آمده از حل معادله آیکونال در یک مدل دولایه با حضور یک زون پرسرعت در یک لایه کم سرعت. ابتدا جبهه‌های موج برای زمان‌های مختلف، با توجه به کم‌ترین مقادیر زمان سیر کلی، از چشمه و گیرنده محاسبه می‌شوند و سپس موقعیت نزدیک‌ترین نقطه این دو جبهه موج تعیین می‌شوند. به این ترتیب مسیر موج با تعداد معینی از نقاط، مشخص می‌شود.

که در آن،  $R$  ماتریس دقت و  $cov(m)$  کواریانس مدل است.

$$cov(m) = \sigma^2 [G^T G]^{-1} \quad (19)$$

که در آن،  $\sigma^2$  واریانس آماری داده‌ها است.

#### ۴ مدل‌سازی

برای بررسی کارایی و دقت الگوریتم به کار رفته در این مقاله، در تعیین و تفکیک بی‌هنجاری احتمالی، از مدل‌های سرعتی مصنوعی که در شکل‌های ۳ و ۴ نشان داده شده بهره گرفته‌ایم. این مدل‌ها بیان کننده بی‌هنجاری‌های پایه‌اند، به طوری که شکل ۳ یک زون پرسرعت در یک زمینه مدل کم سرعت و در شکل ۴ یک زون کم سرعت با گرادیان سرعتی در داخل مدل با زمینه پرسرعت در نظر گرفته شده نشان داده شده است. پس از اعمال الگوریتم، گرادیان بندادی روی مدل سرعتی نشان

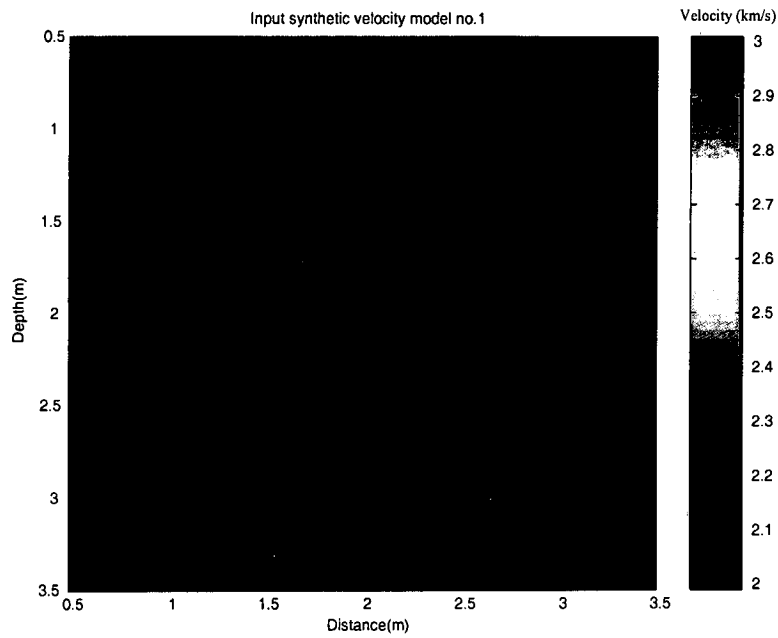
که در آن،  $G^B$  ماتریس تعمیم یافته کرنل داده‌ها و  $\epsilon^2$  میزان وزن خطای اضافه شده برای ترمیم پارامترهای مدل است. مقادیر اصلاحی برای پارامترهای مدل را که همان مقادیر سرعت یا کندی در هر سلول‌اند، تعیین و در مدل سرعتی اولیه اعمال می‌شوند.

برای ارزیابی کیفیت نهایی مقطع به دست آمده، از شاخص‌های آماری ماتریس دقت (معادله ۱۷) و ماتریس کوواریانس، ماتریس عدم قطعیت و جذر میانگین مربعی خطا استفاده شده است.

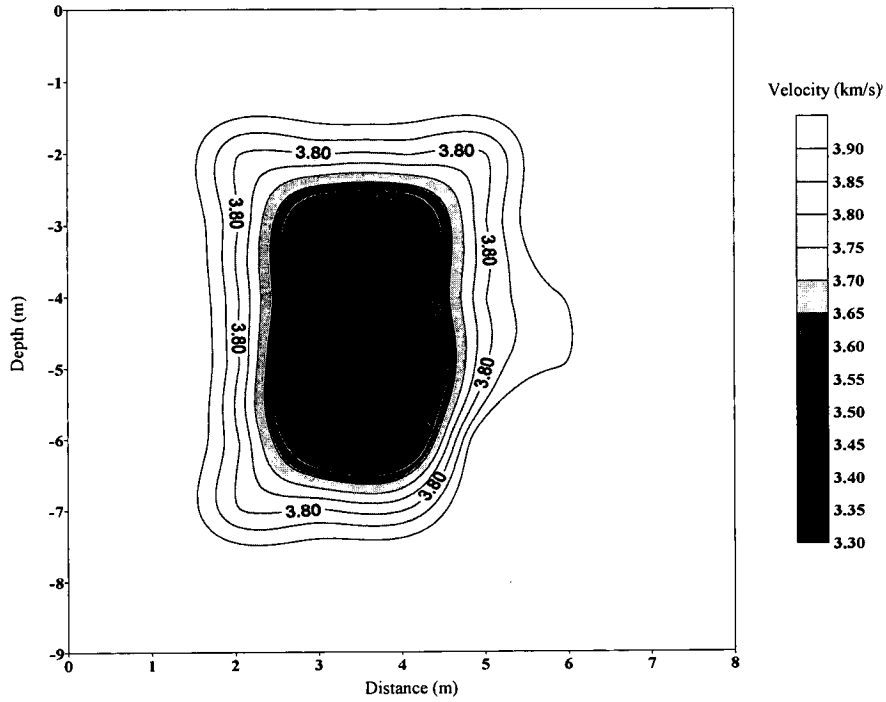
$$R = [A^T C_t^{-1} A + D C_m^{-1}]^{-1} A^T C_t^{-1} A \quad (17)$$

به طوری که  $C_m$  و  $C_t$  به ترتیب ماتریس‌های کواریانس داده (معادله ۱۸) و ماتریس کواریانس مدل (معادله ۱۹)،  $A$  کرنل داده‌ها و همچنین  $D$  فاکتور میرایی است.

$$cov(d) = [I - R] cov(m) \quad (18)$$

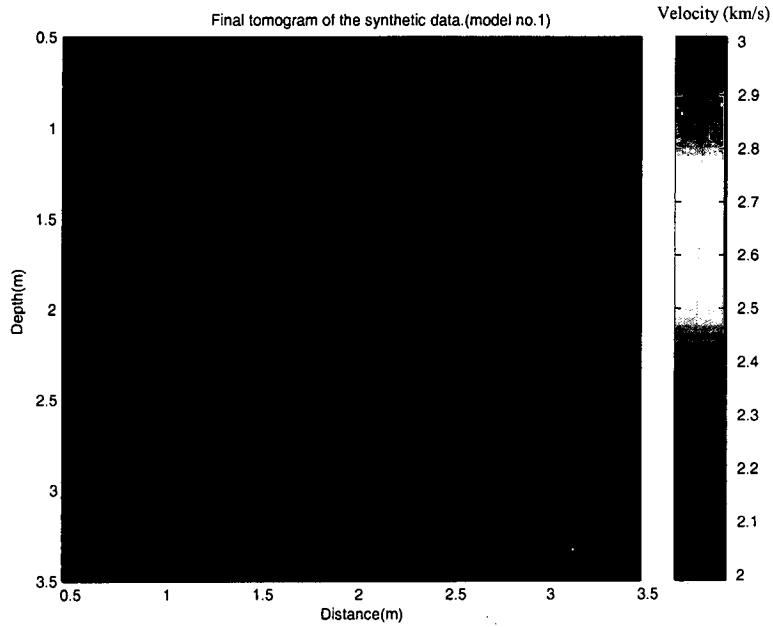


شکل ۳. مدل مصنوعی، یک زون پر سرعت در زمینه‌ای کم سرعت. سرعت زون بی‌هنجاری ۳ km/s. سرعت زمینه ۲ km/s و ابعاد مدل ۳×۵ است.

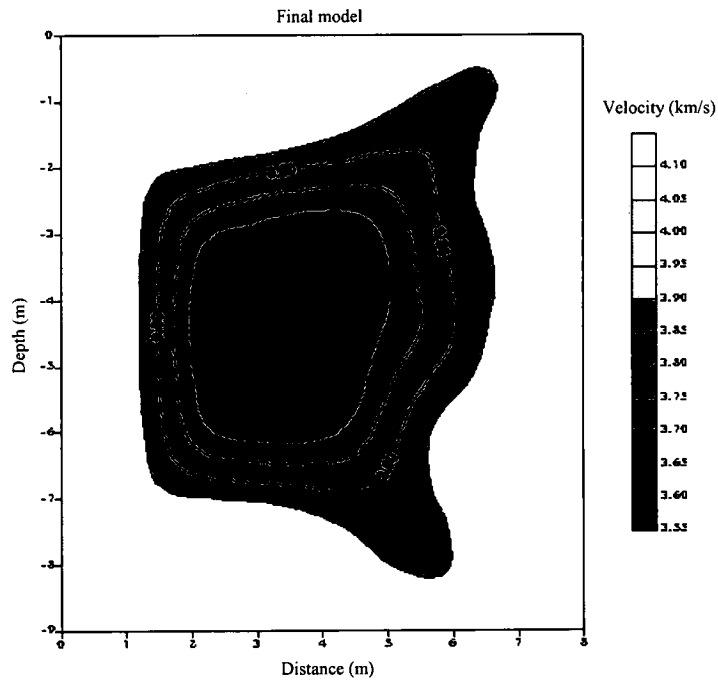


شکل ۴. مدل مصنوعی، یک زون کم سرعت در زمینه‌ای کم سرعت. سرعت زون بی‌هنجاری ۳ km/s. سرعت زمینه ۴ km/s و ابعاد مدل ۳×۵ است.





شکل ۵. مدل نهایی حاصل از مدل مصنوعی شکل ۳. نتیجه به دست آمده در تکرار سوم محاسبات و با جذر مربعی میانگین خطا برابر ۰/۰۱ است. این مدل با توجه به شاخص آماری به دست آمده تطابق خیلی خوبی با مدل ورودی را نشان می‌دهد.



شکل ۶. مدل نهایی حاصل از مدل مصنوعی شکل ۴. نتیجه به دست آمده در تکرار پنجم محاسبات و با جذر مربعی میانگین خطا برابر ۰/۰۷ است. این مدل با توجه به شاخص آماری به دست آمده تطابق نسبتاً خوبی با مدل ورودی را نشان می‌دهد.

داده شده در شکل ۳ با انجام سه بار تکرار محاسبات، جذر خطای مربعی حدود ۰/۰۱ و برای مدل سرعتی نشان داده شده در شکل ۴ با انجام پنج تکرار محاسبات، جذر خطای مربعی حدود ۰/۰۷ به دست آمد و نتایج مدل سازی در شکل های ۵ و ۶ نشان داده شده اند. چنان که مشاهده می شود شکل های ۳ و ۵ کاملاً شبیه اند و نیز شکل های ۴ و ۶ تطابق خیلی خوبی دارند. علت تفاوت در شکل های ۴ و ۶ وجود گرادیان سرعتی زون پر سرعت است. مقادیر شاخص های آماری ماتریس قدرت تفکیک، ماتریس کوواریانس و عدم قطعیت، به دست آمده برای پارامترهای مدل که در جدول های ۱ تا ۳ نشان داده شده است، بیان کننده محدودۀ قابل قبول از مدل به دست آمده اند. مدل به دست آمده (شکل ۷) از تکرار چهارم محاسبات و با جذر مربعی میانگین خطا برابر ۰/۷ است. در این توמוگرام یک زون کم سرعت مشاهده می شود که احتمالاً می توان آن را به سست بودن سنگ های تشکیل دهنده این زون نسبت داد. نتایج به دست آمده از مدل سازی روی داده های واقعی نشان می دهد که استفاده از روش معکوس مربعات میرا، با الگوریتم گرادیان بندادی (conjugate gradient) در حل معادلات ماتریسی موجود با ضرایب میرایی بهینه، موجب می شود تا تعداد تکرار برای برازش داده ها با مدل واقعی به میزان زیادی کاهش پیدا کند.

در این مرحله با توجه به نتایج به دست آمده از مدل سازی روی داده های مصنوعی، داده های حقیقی مربوط به بخشی از زیرساخت یک سد بتونی وزنی مدل سازی شد. ابعاد سلول های مدل سرعتی برابر ۴ متر در نظر گرفته شد که این امر برای اجتناب از تبدیل مدل به یک مسئله فروبرازش (under fitting problem) صورت گرفت. در ردیابی و تعیین طول مسیر پرتو امواج در هر سلول از مقیاس کوچک تر از ۰/۱ متر استفاده شد و

جدول ۱. ماتریس قدرت تفکیک نهایی پارامترهای مدل برای داده های حقیقی. ابعاد سلول ها ۴ متر. مقادیر مربوط به هر سلول در مکان متناظر (در موقعیت عمقی و افقی هر سلول) مدل ارائه شده اند.

موقعیت هر سلول عمق به متر	2	6	10	14	18	22
-2	0.987	0.965	0.946	0.937	0.980	0.998
-6	0.987	0.968	0.950	0.944	0.983	0.997
-10	0.986	0.968	0.965	0.962	0.976	0.995
-14	0.982	0.949	0.961	0.964	0.976	0.997
-18	0.983	0.957	0.977	0.981	0.986	0.996

جدول ۲. ماتریس کواریانس نهایی پارامترهای مدل برای داده‌های حقیقی، ابعاد سلول‌ها ۴ متر. مقادیر مربوط به هر سلول در مکان متناظر (در موقعیت عمقی و افقی هر سلول) مدل ارائه شده‌اند.

موقعیت هر سلول عمق به متر	2	6	10	14	18	22
-2	1.27e-3	3.47e-3	5.43e-3	6.29e-3	2.00e-3	2.19e-3
-6	1.29e-3	3.23e-3	4.96e-3	5.59e-3	1.69e-3	2.53e-3
-10	1.43e-3	3.19e-3	3.46e-3	3.80e-3	2.38e-3	4.62e-3
-14	1.80e-3	5.10e-3	3.85e-3	3.62e-3	2.38e-3	3.21e-3
-18	1.74e-3	4.35e-3	2.26e-3	1.88e-3	1.45e-3	4.23e-3

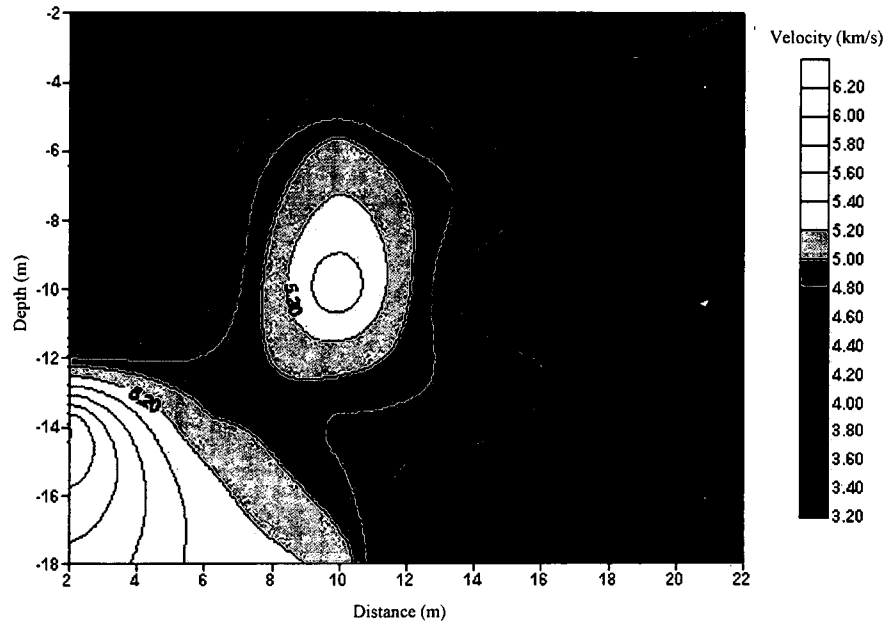
جدول ۳. ماتریس عدم قطعیت نهایی پارامترهای مدل برای داده‌های حقیقی، ابعاد سلول‌ها ۴ متر. مقادیر مربوط به هر سلول در مکان متناظر (در موقعیت عمقی و افقی هر سلول) مدل ارائه شده‌اند.

موقعیت هر سلول عمق به متر	2	6	10	14	18	22
-2	3.56e-2	5.89e-2	7.37e-2	7.93e-2	4.48e-2	1.48e-2
-6	3.59e-2	5.68e-2	7.04e-2	7.48e-2	4.11e-2	1.59e-2
-10	3.77e-2	5.65e-2	5.88e-2	6.16e-2	4.88e-2	2.15e-2
-14	4.24e-2	7.14e-2	6.20e-2	6.02e-2	4.88e-2	1.79e-2
-18	4.17e-2	6.59e-2	4.76e-2	4.34e-2	3.80e-2	2.06e-2

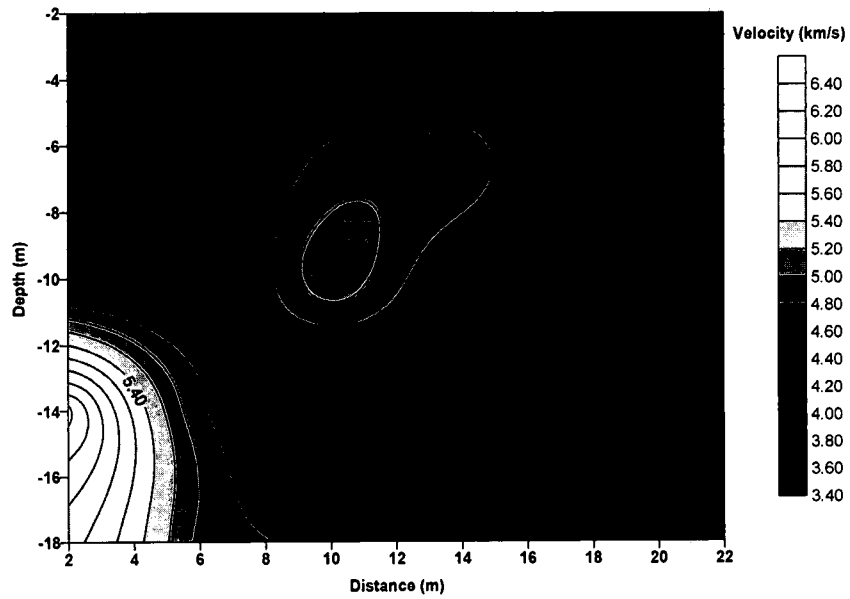
است.

بک پروژکشن، به بیان ریاضی، نوعی به نقشه در آوردن خاص از فضای پروژکشن مکانی روی یک صفحه است. اگر همه پروژکشن‌ها از مقادیر  $f(x,y)$  جمع شده باشند و آن‌ها را روی یکدیگر قرار دهند، عمل بک پروژکشن صورت گرفته است (استوارت، ۱۹۹۱). تصور پایه‌ای در این روش آن است که هر نقطه‌ای که پرتو از چشمه تا گیرنده از آن عبور می‌کند دارای مقداری از کل تصویر پروژکشن است و به عبارت دیگر مجموع مقادیر در طول پرتو است. مقطع، از مجموع همه مقادیر نقطه‌های مشخص شده همچنان که از هر پرتو به دست آمده‌اند محاسبه می‌شود. عبارت دیگری از این مفهوم آن است که مقدار نهایی نقطه‌ها، مجموع مقادیر تصویر شده برای هر پرتویی است که از بین آن‌ها عبور کرده است. به بیان ریاضی

به منظور ارزیابی نتایج به دست آمده از روش ردیابی پرتوموج، با استفاده از اصل زمان همرسی در این مقاله، روش بک پروژکشن (back projection) که یکی از روش‌های معروف و متداول در توموگرافی لرزه‌ای است و کاربرد فراوانی دارد در مرحله مدل‌سازی روی داده‌های حقیقی مورد استفاده قرار گرفت. مدل به دست آمده با استفاده از روش بک پروژکشن در شکل ۷ نشان داده شده است. این مدل پس از تکرار چهارم محاسبات و با جذر مربعی میانگین خطا برابر ۱/۰۲ است. همان‌طور که در توموگرام به دست آمده (شکل ۸) می‌توان مشاهده کرد علاوه بر مقدار جذر مربعی میانگین خطای ضعیف (۱/۰۲)، قدرت تفکیک نواحی مورد مطالعه نیز رضایت‌بخش نیست. برای اطلاعات خوانندگان مختصری از نظریه روش بک پروژکشن در ادامه شرح داده شده



شکل ۷. توموگرام نهایی حاصل از داده‌های واقعی. ابعاد سلول‌ها ۴ متر. مدل به‌دست آمده در تکرار چهارم محاسبات و با جذر مربعی میانگین خطا برابر ۰/۷ است. شاخص آماری به‌دست آمده برای این مدل در محدوده قابل قبول است.



شکل ۸. توموگرام نهایی حاصل از داده‌های واقعی با استفاده از روش بک‌پروجکشن. ابعاد سلول‌ها ۴ متر. مدل به‌دست آمده در تکرار پنجم محاسبات و با جذر مربعی میانگین خطا برابر ۱/۲ است.

می‌توان نوشت (استوارت، ۱۹۹۱):

$$f(x, y) = \sum_0^{\pi} P(l_i, \theta_i) \Delta\theta \quad (20)$$

که در آن،  $l$  مسیر پرتو و  $\theta$  زاویه پوشش پرتو است. اگر تعداد بی‌نهایت اندازه‌گیری در یک مجموعه کامل زاویه‌ای وجود داشته باشد، می‌توان با استفاده از روش بک پروجکشن تابع نرم شده  $f(x, y)$  را به دست آورد.

#### ۶ نتیجه‌گیری

نتایج به دست آمده در این مطالعه نشان داد که روش تفاضل متناهی یک تقریب کارآمد و مؤثر در حل معادله آیکونال موج است و با مسائل مطرح در ردیابی مسیر موج در مدل‌های سرعتی با تباین سرعتی زیاد، سازگار است. همچنین روش معکوس کم‌ترین مربعات میرا با الگوریتم گرادیان بنیادی در حل معادلات ماتریسی موجود با ضریب میرایی بهینه، تعداد تکرار را برای برازش داده‌ها با مدل واقعی به میزان زیادی کاهش می‌دهد. این کاهش به گونه‌ای است که مقادیر شاخص‌های آماری در تکرارهای کم بیانگر قابل اعتماد بودن نتایج به دست آمده است. در این مورد می‌توان به مقادیر به دست آمده شاخص‌های جذر میانگین مربعی خطا، ماتریس قدرت تفکیک، ماتریس کوواریانس و ماتریس عدم قطعیت در مورد داده‌های واقعی استفاده شده در این مقاله، اشاره نمود. در توموگرام نهایی به دست آمده از داده‌های حقیقی مربوط به بخشی از زیرساخت یک سد وزنی بتونی، یک زون کم‌سرعت مشاهده شد که می‌توان آن را به سست بودن سنگ‌های تشکیل دهنده این زون نسبت داد. به منظور ارزیابی روش مورد استفاده در این مقاله، از روش بک پروجکشن در محدوده مورد مطالعه استفاده شد و توموگرام نهایی به دست آمده از این روش با توجه به شاخص جذر میانگین مربعی خطای به دست آمده، در مقایسه با روش زمان همرسی از دقت قابل قبولی برخوردار نبود.

#### تشکر و قدردانی

در این‌جا از آقای دکتر مهدویان از شرکت مهندسی مشاور مه‌اب قدس و آقای مهندس رجایی از شرکت مهندسی مشاور سایبر که در تهیه داده‌های حقیقی برای مدل‌سازی در این مطالعه همکاری و مساعدت مبذول فرموده‌اند، سپاسگزاری می‌شود. بر خود لازم می‌دانیم از حوزه معاونت محترم پژوهشی دانشگاه به خاطر حمایت از اجرای این تحقیق در قالب طرح پژوهشی شماره ۶۵۲/۶/۸۸۸ تشکر و قدردانی به عمل آوریم.

#### منابع

اکبری، س.، ۱۳۷۹، توموگرافی لرزه‌ای با استفاده از روش تفاضل متناهی (مستقیم و معکوس)، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، مؤسسه ژئوفیزیک دانشگاه تهران.

- Aki, K., Christofferson, A., and Husebye, E. S., 1974, Three dimensional seismic-velocity anomalies in the crust and upper mantle under the U. S. G. S California seismic array (abstract): EOS, Trans. Am. Geophys. Union., 56, 1145.
- Clayton, R. W., 1984, Seismic tomography (abstract): EOS, Trans. Am. Geophys. Union., 65, 236.
- Jackson, D. D., and Matsu'ura, M., 1985, A bayesian approach to non linear inversion: J. Geophys. Res., 90, 581-91.
- Meju, M. A., 1994, Geophysical data analysis: Understanding inverse theory and practice: Course notes series, Vol. 6, SEG.
- Menke, W., 1984, Geophysical data analysis: Discrete inverse theory, Academic Press, Orlando.
- Moser, T. J., 1989, Efficient seismic ray tracing using graph theory, 59th Ann. Internat. Mtg. Soc. Expl. Geophys. Expanded abstracts., 1106-1108.
- Nolet, G.(ed.), 1987, Seismic tomography, Reidel Publication Company.
- Scales, J., 1987, Tomographic inversion via the conjugate gradient method: Geophys., 52, 179-185.
- Stewart, R. R., 1991, Exploration seismic tomography: fundamentals, Soc. Expl. Geophys, Oklahoma.

Vidale, J., 1988, Finite-difference calculation of travel times: *Bull. Seis. Soc. Am.*, **78**, 2062-2076.

Zelt, C. A., and Smith, R. B., 1992, Seismic travelttime inversion for 2-D crustal velocity structure: *Geophys. J. Int.*, **108**, 16-34.