

بررسی دقت روش‌های فشرده و آبرفشرده در گسسته‌سازی مکانی معادلات آب کم‌عمق خطی شده

وحید اصفهانیان^{۱*} و سرمد قادر^۲

^۱دانشیار دانشکده مهندسی مکانیک، پردیس دانشکده‌های فنی، دانشگاه تهران، ایران

^۲استادیار گروه فیزیک فضا، مؤسسه ژئوفیزیک، دانشگاه تهران، ایران

(دریافت: ۸۴/۸/۸، پذیرش نهایی: ۸۵/۱۱/۱۸)

چکیده

در این مقاله در نظر است که دقت روش آبرفشرده در مقایسه با روش‌های فشرده و همچنین روش‌های رایج مرکزی مرتبه دوم و چهارم سنجیده شود. دقت این روش‌ها در یک مسئله خطی مورد بررسی قرار می‌گیرد، مسئله خطی انتخاب شده در اینجا، مسئله تنظیم زمین‌گرد است. از آنجا که در مدل‌سازی‌های عددی شاره‌های جوی برای گسسته‌سازی مکانی از شبکه‌های متفاوتی استفاده می‌شود، به همین دلیل در این مقاله دو شبکه رایج و پرکاربرد A و C برای بررسی انتخاب شده‌اند. در نهایت با توجه به نتایج حاصل از این تحلیل مشخص می‌شود که کاربرد روش آبرفشرده برای گسسته‌سازی مکانی مسئله تنظیم زمین‌گرد خطی منجر به جواب‌هایی با دقت بیشتری خواهد شد.

واژه‌های کلیدی: روش آبرفشرده، روش فشرده، دقت عددی، تنظیم زمین‌گرد، شبکه‌های A و C آراکاو

۱ مقدمه

از جمله قدیمی‌ترین و رایج‌ترین روش‌های عددی که برای حل معادلات حاکم بر جریان سیالات مورد استفاده قرار می‌گیرد، روش تفاضل محدود است. روابط این روش برای برآورد مشتقات تابع ϕ و ارتباط آنها با تابع ϕ به کمک بسط تیلور تابع ϕ به دست می‌آیند. اشکال عمده روش‌های سنتی تفاضل محدود آن است که، دارای دقت از مرتبه بالا نیستند و اگر در نظر باشد که بر دقت آنها افزوده شود یا باید بر تعداد نقاط درگیر در شبکه افزود یا آن‌که فاصله نقاط شبکه را کمتر کرد. این دو راه در محدوده خاصی اعتبار دارند، مثلاً کوچک کردن بیش از حد فاصله نقاط شبکه در حل عددی، باعث ایجاد ناپایداری ناشی از خطای گرد کردن می‌شود.

به همین دلیل برای بالا بردن دقت باید به دنبال راه‌های دیگری گشت، از جمله می‌توان به جای آن که بر تعداد نقاط درگیر شبکه اضافه کرد تعداد مشتقات درگیر در هر نقطه را افزایش داد، از این فکر در روش‌های فشرده

را استفاده می‌شود. در سال ۱۹۷۲، کریس پیشنهاد کرد که علاوه بر تابع مورد نظر، مشتقات آن تابع هم خود در نقش توابع مجهول در نظر گرفته شوند و به این ترتیب دستگاه معادلاتی شامل تابع و مشتقاتش به دست می‌آید، که به طور همزمان حل می‌شوند. پس از آن هرش (۱۹۷۵) مقاله کلیدی خود را با عنوان "حل‌های تفاضلی مرتبه بالا در مسائل مکانیک سیالات با استفاده از فنون تفاضل فشرده" منتشر کرد. با آن‌که روش‌های فشرده نسبت به روش‌های سنتی از دقت بیشتری برخوردارند ولی در هر حال محدوده دقت آنها، چندان بزرگ و نامحدود نیست. همچنین به کار بردن روش‌های فشرده با مرتبه‌های بالا چندان آسان نیست.

روش تفاضل محدوده آبر فشرده (super compact)، روش جدید تفاضل محدود است، معادلات این روش را می‌توان برای هر مرتبه از دقت که لازم باشد، نوشت. در این روش نیز چون روش‌های فشرده، برای بالا بردن دقت

است. برای به دست آوردن روابط از بسط تیلور تابع ϕ استفاده می‌شود که در نهایت دو رابطه به دست خواهد آمد. رابطه اول که رابطه اصلی این روش است، تابع ϕ را به سایر مشتقات این تابع ارتباط می‌دهد و رابطه دوم یک رابطه کمکی است که هر مشتق تابع ϕ را به سایر مشتقات ربط می‌دهد. در به دست آوردن روابط، از قراردادهای زیر استفاده می‌شود:

$$\begin{aligned}\delta_x^+ \phi_j &= \phi_{j+1} - \phi_j \\ \delta_x^- \phi_j &= \phi_j - \phi_{j-1} \\ \delta_x^0 &= \frac{1}{2}(\delta_x^+ + \delta_x^-) \\ \delta_x^2 &= \delta_x^+ \delta_x^- = \delta_x^- \delta_x^+ \\ h_j &= x_{j+1} - x_j \\ \sigma_j &= \frac{h_{j+1}}{h_j} \\ \phi_j^{<k>} &= h_j^k \left(\frac{\partial^k \phi}{\partial x^k} \right)_j\end{aligned}\quad (1)$$

رابطه اصلی این روش به صورت زیر:

$$\begin{aligned}(\alpha \delta_x^+ + \beta \delta_x^-) \phi_j &= \frac{1}{1!} [\alpha + \beta \sigma_j] \phi_j^{<1>} + \frac{1}{2!} [\alpha + \beta \sigma_j^2] \\ &\phi_j^{<2>} + \dots + \frac{1}{n!} [\alpha + (-1)^{n+1} \beta \sigma_j^n] \phi_j^{<n>}\end{aligned}\quad (2)$$

و رابطه کمکی این روش به شکل زیر است:

$$\begin{aligned}\sigma_{j+1}^1 \phi_{j+1}^{<1>} - 2\phi_j^{<1>} + \frac{1}{\sigma_j} \phi_{j-1}^{<1>} &= \frac{1}{1!} (1 - \sigma_j) \phi_j^{<1+1>} \\ &+ \dots + \frac{1}{(n-1)!} (1 + (-1)^{n-1} \sigma_j^{n-1}) \phi_j^{<n>}\end{aligned}\quad (3)$$

به ازاء هر عدد n دلخواه با کمک روابط (۲) و (۳) می‌توان تعداد n معادله به دست آورد که این مجموعه معادلات روابط روش آبرفشرده از مرتبه n ام را به دست می‌دهند. برای سادگی نمایش می‌توان این مجموعه را به کمک ماتریس به صورت زیر نمایش داد:

در هر نقطه، علاوه بر خود تابع، مشتقاتش را نیز درگیر می‌کنند. از جمله تحقیقات صورت گرفته در ارتباط با این روش می‌توان به کارهای یان‌ون و دکسون (۱۹۹۶)، دکسون و یان‌ون (۲۰۰۱)، قادر (۱۳۷۹ و ۱۳۸۴) و اصفهانیان و همکاران (۲۰۰۴ و ۲۰۰۵) اشاره کرد.

مدل‌سازی عددی معادلات حاکم بر شارهای (سیالات) جوی و اقیانوسی به علت ماهیت شدیداً غیرخطی این معادلات و همچنین وجود امواج متفاوت در آنها، روش‌های با قدرت تفکیک زیاد را طلب می‌کند. یک هدف مهم این مقاله نشان دادن توانایی بیشتر روش آبرفشرده برای رسیدن به دقت‌های بالاتر در گسسته‌سازی مکانی معادلات حاکم، در مقایسه با سایر روش‌های رایج تفاضل محدود است. همچنین در این مقاله، شکل مناسب‌تر (اپراتوری) معادلات روش آبرفشرده به دست آورده می‌شود. ذکر این نکته ضروری است که اگر این صورت از معادلات قابل به دست آوردن نمی‌بود عملی ساختن تحلیل‌های معرفی شده در این مقاله با دشواری‌های فراوانی مواجه می‌شد.

در ادامه مقاله، ابتدا به معرفی روش آبرفشرده پرداخته می‌شود، سپس روابط این روش برای یک شبکه یکنواخت به صورت اپراتوری نوشته می‌شوند که این عمل کار تحلیل دقت را آسان می‌کند. سپس روابط این روش برای حالتی که با شبکه C همخوان باشند، به دست آورده می‌شوند. در نهایت با استفاده از یک روش آبرفشرده مرتبه ششم، آنالیز دقت این روش برای یک مسئله خطی تنظیم زمین‌گرد (geostrophic adjustment) روی دو شبکه متفاوت A و C صورت می‌گیرد و نتایج حاصل با نتایج موجود مربوط به روش‌های فشرده مرتبه چهارم و مرتبه ششم و همچنین روش‌های مرتبه دوم و مرتبه چهارم مرکزی مقایسه می‌شود.

۲ روش آبرفشرده

روابط این روش را یان‌ون و دکسون (۱۹۹۶) ارائه کرده

باشند، در این صورت رابطه (۴) به شکل زیر درمی‌آید:

$$-\frac{1}{2}LF_{j-1} + (A+L)F_j - \frac{1}{2}LF_{j+1} = \delta_x^0 \phi_j E \quad (۷)$$

و همچنین رشته F و ماتریس A به شکل زیر خواهند بود:

$$F = \begin{pmatrix} \phi^{<1>} \\ \phi^{<3>} \\ \vdots \\ \phi^{<2M-1>} \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} \frac{1}{1!} & \frac{1}{3!} & \frac{1}{5!} & \dots & \frac{1}{(2M-1)!} \\ 0 & \frac{1}{2!} & \frac{1}{4!} & \dots & \frac{1}{[2(M-1)]!} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2!} & \dots & \frac{1}{[2(M-2)]!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{2!} \end{pmatrix} \quad (۸)$$

ماتریس‌های A و L، M×M و رشته F، M بعدی‌اند. برای حالت M=1 داریم:

$$\phi_j^{<1>} = \delta_x^0 \phi_j \quad (۹)$$

که همان رابطه تفاضل محدود مرکزی مرتبه دوم برای برآورد مشتق اول است. برای حالت M=2 رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\frac{1}{6}\phi_{j-1}^{<1>} + \frac{2}{3}\phi_j^{<1>} + \frac{1}{6}\phi_{j+1}^{<1>} = \delta_x^0 \phi_j \quad (۱۰)$$

که همان رابطه فشرده مرتبه چهارم برای مشتق اول است. در مرزها نیز می‌توان روابط آبرفشرده را به صورت پیش‌رو و پس‌رو با همان دقت روابط مرکزی نوشت. نتایج حاصل از تحلیل فوریه خطا برای روابط متفاوت روش آبرفشرده برای برآورد مشتقات اول و دوم در یک شبکه یعنی $\sigma_j = 1$ در شکل‌های ۱ و ۲ آمده است.

معادله (۷) را می‌توان به صورت ساده‌تری نیز بیان کرد که کار تحلیل را در بخش‌های بعدی برای ما آسان خواهد ساخت. برای این منظور معادله (۷) را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\left[A - \frac{L}{2} \delta_x^2 \right] F_j = \delta_x^0 \phi_j E \quad (۱۱)$$

$$-\frac{1}{2}L \left(\frac{1}{\sigma_j} \right) F_{j-1} + (A+L)F_j - \frac{1}{2}L(\sigma_j+1)F_{j+1} = \frac{1}{2}(\alpha\delta_x^+ + \beta\delta_x^-)\phi_j E \quad (۴)$$

در معادله (۴)، L و A ماتریس‌های n بعدی و F و E بردارهای n بعدی به قرار زیرند:

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\alpha + \beta\sigma}{1!} & \frac{\alpha + \beta\sigma^2}{1!} & \dots & \frac{1 + (-1)^{n+1}\beta\sigma^n}{n!} \\ 0 & \frac{1 - \sigma}{1!} & \dots & \frac{1 + (-1)^{n-1}\sigma^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1 + (-1)^{n-2}\sigma^{n-2}}{(n-2)!} \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1 - \sigma}{1!} \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \sigma & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sigma^{n-1} & 0 \end{pmatrix} \quad (۵)$$

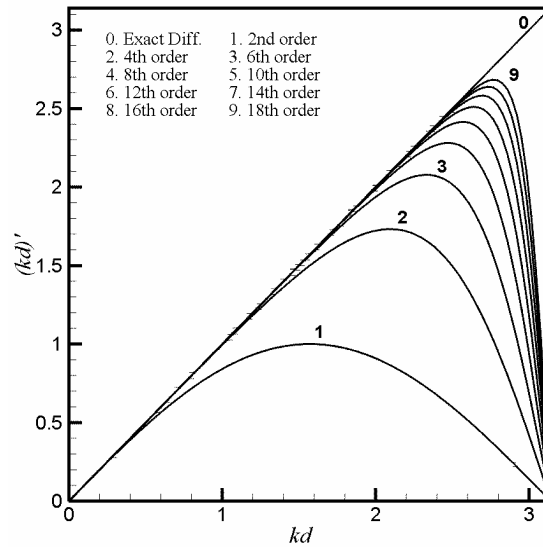
$$F = \{\phi^{<1>}, \phi^{<2>}, \dots, \phi^{<n>}\}^T, E = \{1, 0, \dots, 0\}^T \quad (۶)$$

اگر در معادله (۴) مقدار σ را برابر با یک قرار دهیم در این صورت معادلات این روش، مستقل از جهت محورهای مختصات و تعداد تقسیمات شبکه خواهند بود و در واقع معادلات این روش برای یک شبکه یکنواخت به دست می‌آیند.

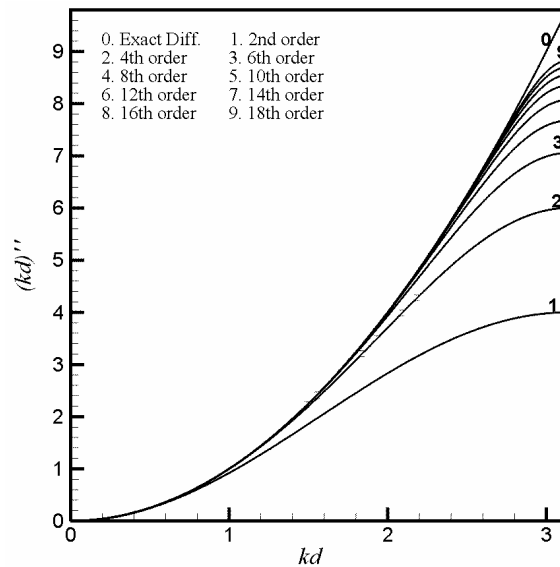
با توجه به اینکه ضرایب α و β به صورت اختیاری در نظر گرفته شده‌اند می‌توان گستره وسیعی از روابط روش آبرفشرده را با توجه به α و β های متفاوت به دست آورد. در این قسمت به یک نمونه از این انتخاب‌ها که منجر به روابط این روش برای مشتقات فرد می‌شود، اشاره می‌شود.

۲-۱ روابط ابرفشرده برای مشتقات فرد

در این حالت فرض می‌کنیم که $\alpha = \beta = 1$ و $\sigma_j = 1$



شکل ۱. تغییرات عدد موج برآورد مشتق اول برحسب عدد موج در مقایسه با جواب دقیق برای مرتبه‌های متفاوت روش آبرفشرده.



شکل ۲. تغییرات عدد موج برآورد مشتق دوم برحسب عدد موج در مقایسه با جواب دقیق برای مرتبه‌های متفاوت روش آبرفشرده.

$$F_j = (Q^{-1} \delta_x^\circ) \phi_j E, \quad Q = A - \frac{L}{2} \delta_x^2 \quad (13)$$

دو معادله (۱۳) و (۷) با یکدیگر معادل هستند. حال با استفاده از معادله (۱۳) می‌توان برآورد مشتق اول را برای مرتبه‌های متفاوت دقت به‌دست آورد. به‌طور مثال در حالت $M = 2$ برآورد مرتبه چهارم مشتق اول به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

در نتیجه با توجه به معادله بالا می‌توان رابطه زیر را به‌دست آورد:

$$F_j = \left(\frac{\delta_x^\circ}{A - \frac{L}{2} \delta_x^2} \right) \phi_j E \quad (12)$$

در نهایت می‌توان معادله (۱۲) را به‌شکل زیر نوشت:

رابطه (۱۶) بیان‌کننده برآورد مشتق اول از مرتبه $2N$ است. این رابطه را نیز می‌توان به صورت ساده‌تری در شکل اپراتوری زیر خلاصه کرد:

$$F_j = \frac{1}{2} \left(Q^{-1} E \left(\phi_{j+\frac{1}{2}} - \phi_{j-\frac{1}{2}} \right) \right), Q = \tilde{A} - \frac{L}{2} \delta_x^2 \quad (18)$$

در حالت $N=3$ برآورد مرتبه ششم مشتق اول با استفاده از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\phi_j^{<1>} = \left(\frac{320(12 + \delta_x^2)}{1920 + 240\delta_x^2 + \delta_x^4} \right) \left(\phi_{j+\frac{1}{2}} - \phi_{j-\frac{1}{2}} \right) / 2 \quad (19)$$

۳ روابط فشرده

از آنجا که در این مقاله در نظر است تا دقت روش آبرفشرده با روش‌های فشرده مقایسه شود در اینجا به روابط دو روش فشرده مرتبه چهارم و مرتبه ششم که در این تحلیل شرکت دارند اشاره می‌شود. رابطه فشرده مرتبه چهارم که به رابطه فشرده هرش نیز معروف است همان رابطه ارائه شده در معادله (۱۰) است. هنگامی که در نظر باشد از این روابط فشرده در یک شبکه C آراکاوا استفاده کرد، می‌بایست دنبال رابطه‌ای مشابه رابطه زیر بود (چانگ و شیرر، ۱۹۸۵):

$$\alpha_1 y'_{j-1} + \alpha_1 y'_j + \alpha_1 y'_{j+1} = \beta_1 y_{j+\frac{1}{2}} + \beta_1 y_{j-\frac{1}{2}}$$

با استفاده از بسط تیلور و در نظر گرفتن حداقل خطای

برشی، می‌توان رابطه مرتبه چهارم زیر را به دست آورد:

$$\frac{1}{24} (y'_{j-1} + 22y'_j + y'_{j+1}) = \left(y_{j+\frac{1}{2}} - y_{j-\frac{1}{2}} \right) / d + O(d^4) \quad (20)$$

با روندی مشابه می‌توان به رابطه فشرده مرتبه ششم زیر رسید:

$$\phi_j^{<1>} = \left(\frac{6\delta_x^{\circ}}{6 + \delta_x^2} \right) \phi_j \quad (14)$$

و همچنین در حالت $M=3$ برآورد مرتبه ششم مشتق اول با استفاده از رابطه زیر به دست خواهد آمد:

$$\phi_j^{<1>} = \left(\frac{10(12 + \delta_x^2)\delta_x^{\circ}}{120 + 30\delta_x^2 + \delta_x^4} \right) \phi_j \quad (15)$$

در این قسمت در نظر داریم تا روابط روش ابرفشرده را برای حالتی که با شبکه C همخوان باشند به دست آوریم. در واقع روابط این روش به گونه‌ای که ارتباط بین تابع را در نقاط کسری (به طور مثال نقطه $(j+1/2)$ یک شبکه با مقادیر مشتقات در نقاط صحیح (یعنی نقطه j) نشان دهد، به دست آورده می‌شوند. برای رسیدن به این منظور کافی است که بسط تیلور گسسته تابع ϕ را در نقاط $j+1/2$ و $j-1/2$ حول نقطه j به دست آوریم و سایر مراحل را مانند روش اولیه به دست آوردن روش آبرفشرده ادامه دهیم (قادر، ۱۳۸۴). در نهایت رابطه زیر را می‌توان برای مشتقات فرد به دست آورد:

$$-\frac{1}{2} L F_{j-1} + (\tilde{A} + L) F_j - \frac{1}{2} L F_{j+1} = \frac{1}{2} \left(\phi_{j+\frac{1}{2}} - \phi_{j-\frac{1}{2}} \right) E \quad (16)$$

بردارها و ماتریس‌های موجود در معادله (۱۶) مشابه قبل هستند، به جز ماتریس \tilde{A} که به صورت زیر تعریف شده است:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2} \right) \frac{1}{1!} & \left(\frac{1}{2} \right)^3 \frac{1}{3!} & \dots & \left(\frac{1}{2} \right)^{2N-1} \frac{1}{(2N-1)!} \\ \circ & \frac{1}{2!} & \dots & \frac{1}{[2(N-1)!]} \\ \circ & \circ & \frac{1}{2!} & \dots \\ \circ & \circ & \dots & \frac{1}{2!} \end{pmatrix} \quad (17)$$

در معادله بالا u و v مؤلفه‌های سرعت افقی، f بیان‌کننده پارامتر کوریولیس و h معرف انحراف ارتفاع سطح شاره از مقدار پایه (میانگین) H است. با استفاده از فرض جواب موجی به صورت زیر:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{h} \end{pmatrix} \exp[i(kx - \omega t)]$$

که k عدد موج و ω بسامد است و جای‌گذاری این مقادیر در معادله (۲۲) می‌توان به یک معادله بسامدی رسید که دارای دو جواب مربوط به امواج گرانی-لختی و یک جواب مربوط موج ایستور راسبی است. ما در اینجا به دو جواب مربوط به امواج گرانی-لختی توجه می‌کنیم که با رابطه بسامدی زیر بیان می‌شود (رابطه پراکنش یا پاشندگی dispersion relation):

$$\left(\frac{\omega}{f}\right)^2 = 1 + \lambda^2 k^2, \quad \lambda^2 = \frac{gH}{f^2} \quad (23)$$

که λ به شعاع تغییر شکل راسبی معروف است (Rossby radius of deformation). همچنین محاسبه سرعت گروه ($\Omega = \delta\omega / \delta k$) برای معادله پراکنش بالا نتیجه زیر را به دست می‌دهد:

$$\left(\frac{\Omega}{f}\right)^2 = \frac{\lambda^4 k^2}{1 + \lambda^2 k^2}$$

آنچه که در بالا به دست آمد در واقع جواب تحلیلی مسئله ما است، یعنی مشتقات و عدد موج به صورت دقیق محاسبه می‌شوند. ولی اگر مسئله را به صورت عددی حل کنیم چون در هنگام محاسبه مشتقات از روابطی با مرتبه‌های متفاوت استفاده می‌کنیم، بنابراین عدد موج نیز در واقع تغییر می‌کند و با عدد موج اصلاح شده متناظر با روش عددی به کار رفته جایگزین خواهد شد. در اینجا چون فقط تأکید بر گسسته‌سازی مکانی است در نتیجه، محاسبه مشتقات نسبت به زمان به صورت تحلیلی صورت می‌گیرد.

$$\frac{1}{240} (27y'_{j-1} + 186y'_j + 27y'_{j+1}) = \frac{189}{240} \left(y_{j+\frac{1}{2}} - y_{j-\frac{1}{2}} \right) / d + \frac{51}{240} \left(y_{j+\frac{3}{2}} - y_{j-\frac{3}{2}} \right) / (3d) + O(d^6) \quad (21)$$

با مقایسه رابطه روش فشرده مرتبه ششم (۲۱) و رابطه آبرفشرده مرتبه ششم (۱۹) مشاهده می‌شود که در روش آبرفشرده تعداد نقاط کم‌تری درگیرند و علاوه بر این مطلب، خطای برشی روش آبرفشرده از روش فشرده کوچک‌تر است (در مورد این مطلب در اینجا بحث نشده است) و این دو نکته برتری روش آبرفشرده را مشخص می‌کنند.

۴ تنظیم زمین‌گرد

در این قسمت در نظر است که روش مرتبه ششم آبرفشرده را برای گسسته‌سازی مکانی یک مسئله تنظیم زمین‌گرد در دو شبکه A و C به کار برده شود و دقت این روش را با روش‌های مرتبه دوم، مرتبه چهارم مرکزی و فشرده، مورد مقایسه قرار گیرد.

آراکاوا و لمب (۱۹۷۷) نشان دادند که برای یک روش مرتبه دوم برای گسسته‌سازی مکانی یک مسئله تنظیم زمین‌گرد به نحوه چیدن متغیرها روی نقاط شبکه بستگی دارد. ما نیز در اینجا به بررسی دو نوع شبکه متفاوت A و C می‌پردازیم. مجموعه معادلاتی که برای بررسی مسئله تنظیم زمین‌گرد به کار می‌بریم عبارت از معادلات یک‌بعدی خطی شده یک شاره همگن و کم‌عمق روی یک صفحه f (پارامتر کوریولیس) است. این معادلات به صورت زیرند (آراکاوا و لمب ۱۹۷۷ و ویلیامز، ۱۹۸۰):

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial h}{\partial x} - fu &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + fu &= 0 \\ \frac{\partial h}{\partial x} + H \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (22)$$

۱-۴ شبکه A

نحوه چیدن متغیرها در یک شبکه A یک‌بعدی در شکل ۳-الف نمایش داده شده‌است. شکل گسسته معادله (۲۲) در این شبکه به صورت زیر در می‌آید:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j + g\left(\frac{\delta h}{\delta x}\right)_j - fu_j = 0$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j + fu_j = 0 \quad (24)$$

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)_j + H\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j = 0$$

رابطه (۲۳) برای این شبکه به صورت زیر در می‌آید:

$$\left(\frac{\omega}{f}\right)^2 = 1 + \lambda^2 k_1^2 \quad (25)$$

در معادله بالا k_1 معرف عدد موج اصلاح شده است که آن را با توجه به نوع و دقت روش عددی استفاده شده برای گسسته‌سازی مشتق می‌توان محاسبه کرد. برای مثال در یک روش مرتبه دوم مرکزی، k_1 به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$k_1 = \frac{\sin(kd)}{d}$$

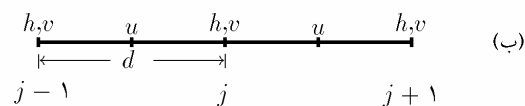
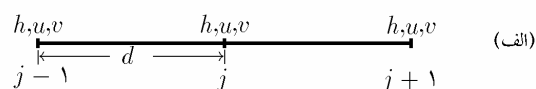
در رابطه بالا d بیان‌کننده فاصله نقاط شبکه است. حال می‌توان روش آبرفشرده مرتبه ششم را به معادله (۲۴) برای محاسبه مشتقات اعمال کرد، برای رسیدن به این منظور برای محاسبه مشتقات مکانی از رابطه (۱۵) استفاده می‌کنیم. در نهایت مقدار k_1 در معادله (۲۵) به صورت زیر به دست خواهد آمد:

$$k_1 = \frac{1}{d} \frac{10\sin(2kd) + 100\sin(kd)}{2\cos(2kd) + 52\cos(kd) + 66}$$

شکل ۴ نشان‌دهنده مقایسه حل دقیق ω/f (یعنی معادله ۲۳) با حل عددی (معادله ۲۵) برای دقت‌های متفاوت در گسسته‌سازی مکانی است، در اینجا از شعاع تغییر شکل راسبی $\lambda = 2d$ استفاده شده است. با توجه به نمودار می‌توان مشاهده کرد که جواب‌های دقیق‌تر

(خصوصاً برای امواج کوتاه) مربوط به روش آبرفشرده است. البته جواب‌های حاصل از روش فشرده مرتبه چهارم برای امواج متوسط و بلند نسبت به جواب‌های حاصل از روش مرتبه دوم مرکزی دقیق‌ترند.

همچنین شکل ۵ سرعت گروه را برای روش‌های مرتبه دوم مرکزی، مرتبه چهارم مرکزی، فشرده مرتبه چهارم، مرتبه ششم مرکزی، فشرده مرتبه ششم و آبرفشرده مرتبه ششم در مقایسه با مقدار دقیق سرعت گروه در شبکه A نشان می‌دهد. در شکل یادشده، فقط بخش مثبت سرعت گروه نشان داده شده‌است. همان‌گونه که مشاهده می‌شود از دیدگاه سرعت گروه نیز روش آبرفشرده در مقایسه با سایر روش‌ها برای مسئله تنظیم زمین‌گرد عملکرد مناسب‌تری را نشان می‌دهد.



شکل ۳. نحوه قرارگیری متغیرها در شبکه‌های A و C یک‌بعدی. (الف) شبکه A (ب) شبکه C.

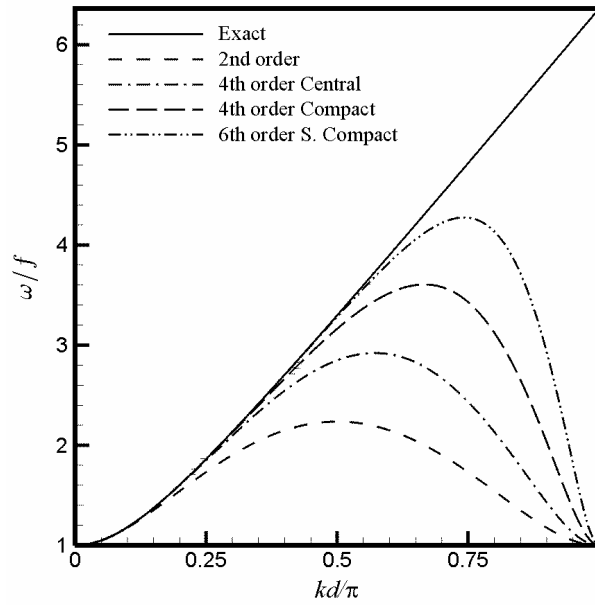
۲-۴ شبکه C

نحوه چیدن متغیرها در یک شبکه C یک‌بعدی در شکل ۳-ب نمایش داده شده‌است. شکل گسسته معادله (۲۲) در این شبکه به صورت زیر در می‌آید:

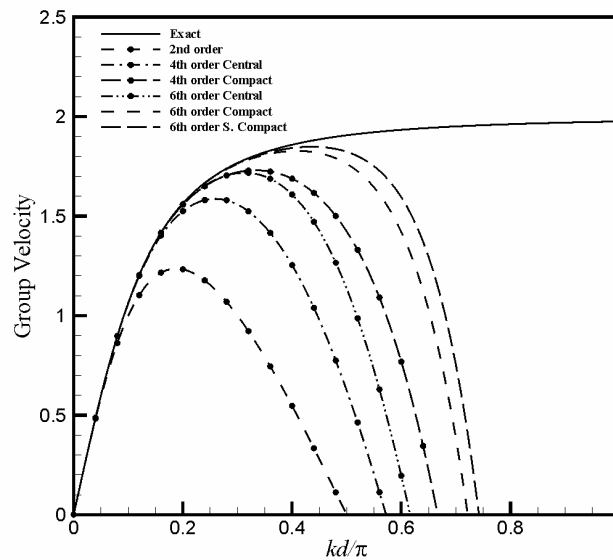
$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{j+\frac{1}{2}} + g\left(\frac{\delta h}{\delta x}\right)_{j+\frac{1}{2}} - fv_{j+\frac{1}{2}}^* = 0$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j + fu_j^* = 0 \quad (26)$$

$$\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)_j + H\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j = 0$$



شکل ۴. مقایسه دقت روش‌های متفاوت سنتی مرتبه دوم و مرتبه چهارم مرکزی با روش فشرده مرتبه چهارم و روش آبرفشرده مرتبه ششم برای مسئله تنظیم زمین‌گرد در شبکه A.



شکل ۵. مقایسه سرعت گروه روش‌های متفاوت برای مسئله تنظیم زمین‌گرد در شبکه A.

به‌دست آورد. اگر از این میان‌یابی استفاده شود، در نتیجه مقدار a در رابطه (۲۷) به صورت زیر به‌دست خواهد آمد:

$$a = \left(\frac{15 \cos(kd/2) + \cos(3kd/2)}{6 \cos(kd) + 10} \right)^2$$

چون در نظر است تا دقت روش آبرفشرده در مقایسه با سایر روش‌ها سنجیده شود، بنابراین باید با فرایند مشابهی، رابطه (۲۷) را برای سایر روش‌ها نیز محاسبه کرد. روابط مربوط به روش‌های مرتبه دوم و مرتبه چهارم مرکزی به‌صورت زیر است:

$$\left(\frac{\omega}{f} \right)^2 = \cos(kd/2) + 4(\lambda/d)^2 \sin^2(kd/2) \quad (28)$$

$$\left(\frac{\omega}{f} \right)^2 = \left[\frac{9}{8} \cos(kd/2) - \frac{1}{8} \cos(3kd/2) \right]^2 + \left(\frac{\lambda}{d} \right)^2 \left\{ \frac{9}{8} [\sin(kd/2)] - \frac{1}{8} \left[\frac{2}{3} \sin(3kd/2) \right] \right\} \quad (29)$$

رابطه مربوط به روش فشرده مرتبه چهارم (۲۰) که در آن برای محاسبه متغیرهای ستاره‌دار از یک میان‌یابی مرتبه چهارم استفاده شده است، به‌صورت زیر است:

$$\left(\frac{\omega}{f} \right)^2 = \frac{16 \cos^2(kd/2)}{[3 + \cos(kd)]^2} + (\lambda/d)^2 \frac{[24 \sin(kd/2)]^2}{[11 + \cos(kd)]^2} \quad (30)$$

همچنین رابطه مربوط به روش فشرده مرتبه ششم (۲۱) که در آن برای محاسبه متغیرهای ستاره‌دار از میان‌یابی مرتبه ششم استفاده شده، به‌صورت زیر است:

$$\left(\frac{\omega}{f} \right)^2 = \frac{[15 \cos(kd) + \cos(3kd/2)]^2}{[10 + 6 \cos(kd)]^2} + (\lambda/d)^2 \frac{[189 \sin(kd/2) + 17 \sin(3kd/2)]^2}{[93 + 27 \cos(kd)]^2} \quad (31)$$

شکل ۶ نشان‌دهنده مقایسه حل دقیق ω/f (معادله

در رابطه بالا متغیرهایی که با علامت ستاره مشخص شده‌اند در واقع متغیرهایی هستند که آنها را نمی‌توان به‌صورت صریح محاسبه کرد و برای محاسبه آنها می‌بایست از یک میان‌یابی مناسب و متناسب با مرتبه دقت گسسته‌سازی مکانی مشتقات استفاده کرد. در این شبکه رابطه (۲۳) به‌صورت زیر در می‌آید:

$$\left(\frac{\omega}{f} \right)^2 = a + \lambda^2 k_1^2 \quad (27)$$

در رابطه (۲۷) مقدار a با توجه به نوع میان‌یابی انتخاب شده برای محاسبه متغیرهای با علامت ستاره به‌دست خواهد آمد. برای مثال اگر برای محاسبه متغیرهای ستاره‌دار از یک میان‌یابی خطی استفاده شود، مقدار a به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$a = \cos^2\left(\frac{kd}{2}\right)$$

حال در نظر است تا روش آبرفشرده مرتبه ششم را به معادله (۲۶) برای محاسبه مشتقات اعمال کرد، برای رسیدن به این منظور برای محاسبه مشتقات مکانی از رابطه (۱۹) استفاده می‌کنیم. در نهایت مقدار k_1 در معادله (۲۷) به‌صورت زیر خواهد آمد:

$$k_1 = \frac{1}{d} \frac{160 \sin(3kd/4) + 1440 \sin(kd/4)}{\cos(kd) + 236 \cos(kd/2) + 723}$$

حال می‌بایست برای محاسبه متغیرهای ستاره‌دار نیز از روش میان‌یابی مناسب استفاده کرد. ما در اینجا از یک روش میان‌یابی مرتبه ششم (چانگ و شیرر، ۱۹۸۵) استفاده می‌کنیم.

$$\frac{1}{16} (3y_{j+1}^* + 10y_j^* + 3y_{j-1}^*) = \frac{15}{32} \left(y_{j+\frac{1}{2}} + y_{j-\frac{1}{2}} \right) + \frac{1}{32} \left(y_{j+\frac{3}{2}} + y_{j-\frac{3}{2}} \right) + O(d^6)$$

روابط این میان‌یابی را می‌توان با استفاده از بسط تیلور

$$I_2(\omega) = \frac{\left\{ I\left(\left| \tilde{\omega}_m - \omega_m \right|^2 \right) \right\}^{1/2}}{\left\{ I\left(\left| \omega_m \right|^2 \right) \right\}^{1/2}}$$

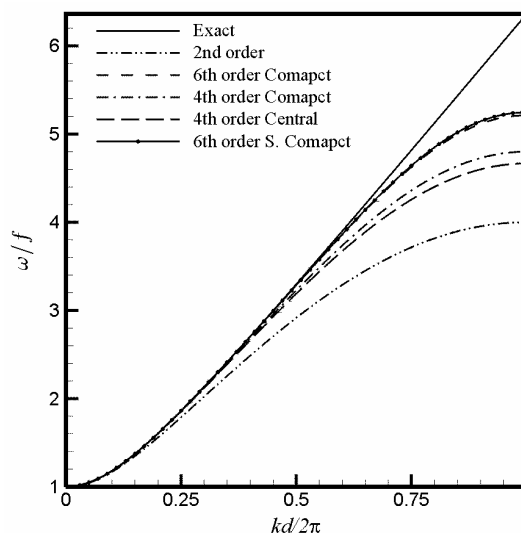
که در آن

$$I(\omega) = \sum_{m=1}^N \omega_m$$

N تعداد نقاط، ω مقدار دقیق پراکنش و $\tilde{\omega}$ پراکنش به دست آمده از روش عددی است. محاسبه نرم یادشده، میزان خطای کلی هر یک از روش‌ها را به دست می‌دهد. جدول ۱ مقایسه خطای کلی هر یک از روش‌ها را نشان می‌دهد. مقادیر به دست آمده، دقت و عمل کرد بهتر روش آبرفشده را در مقایسه با سایر روش‌ها روشن می‌سازد.

(۲۳) با حل‌های عددی مربوط به روش‌های متفاوت ارائه شده در این بخش همراه با روش آبرفشده است. در اینجا نیز از شعاع تغییر شکل راسبی $\lambda = 2d$ استفاده شده است. با توجه به شکل ۶ می‌توان مشاهده کرد که دقیق‌ترین جواب (خصوصاً برای امواج کوتاه) مربوط به روش آبرفشده است.

برای آنکه بتوان درک مناسب‌تری از میزان تفاوت دقت بین روش‌های مورد بررسی به دست آورد، در اینجا از یک نرم برای محاسبه میزان خطای هر یک از روش‌ها استفاده می‌شود. از بین نرم‌های متعددی که می‌توان تعریف کرد در تحقیق حاضر از نرم I_2 به صورت زیر استفاده شده است:



شکل ۶. مقایسه دقت روش‌های متفاوت سنتی مرتبه دوم و مرتبه چهارم مرکزی با روش فشرده مرتبه‌های چهارم و ششم و همچنین روش آبرفشده مرتبه ششم برای مسئله تنظیم زمین گرد در شبکه C.

جدول ۱. مقایسه خطای کلی محاسبه‌شده به کمک نرم I_2 برای روش‌های متفاوت در شبکه C.

خطای کلی	روش
2.5126×10^{-1}	مرتبه دوم مرکزی
1.5448×10^{-1}	مرتبه چهارم مرکزی
1.3653×10^{-1}	فشرده مرتبه چهارم
8.6581×10^{-2}	فشرده مرتبه ششم
8.2991×10^{-2}	آبرفشده مرتبه ششم

تشکر و قدردانی

نویسندگان مقاله از دانشگاه تهران به دلیل حمایت از این کار تحقیقاتی تشکر می‌کنند.

منابع

قادر، س.، ۱۳۷۹، شبیه‌سازی عددی معادلات پایداری جریان لایه مرزی آرام بر روی صفحه تخت با استفاده از معادلات PSE به روش عددی آبرفشرده، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه تهران.

قادر، س.، ۱۳۸۴، بررسی و اعمال روش آبرفشرده جهت گسسته‌سازی مکانی معادلات حاکم بر جریان سیال همراه با شبیه‌سازی معادلات آب کم‌عمق، رساله دکتری، دانشگاه تهران.

- Arakawa, A. and Lamb, R., 1977, Computational design of the basic dynamic processes of the ucla general circulation model, *Method. Comput. Phys.* **7**, 174-265.
- Chang, H., and Shirer, H. N., 1985, Compact spatial differencing techniques in numerical modeling, *Mon. Weather. Rev.* **113**, 409-423.
- Dexun, Fu., and Yanwen, Ma., 2001, Analysis of super compact finite difference method and application for simulation of vortex-shock interaction, *Inter. J. Numer. Method Fluid*, **36**, 773-805.
- Esfahanian, V., Ghader, S., and Ashrafi, Kh., 2004, Accuracy analysis of super compact scheme in nonuniform grid with application to parabolized stability equations, *Inter. J. Numer. Method. Fluid*, **46**, 485-505.
- Esfahanian, V., Ghader, S., and Mohebalhojeh, A. R., 2005, On the use of super compact scheme for spatial differencing in numerical models of the Atmosphere, *Q. J. Roy. Meteor. Soc.*, **131**, 2109-2129.
- Haltiner, G. J., and Williams, R. T., 1980, *Numerical prediction and dynamic meteorology*, John Wiley & Sons, Inc., New York.
- Hirsch, S. R., 1975, Higher order accurate difference solutions of fluid mechanics problems by a compact differencing technique, *J. Comput. Phys.*, **19**, 90-109.
- Kreiss, H. O., and Oliger, J., 1972, Comparison of accurate methods for the integration of hyperbolic equations, *Tellus.*, **24**, 199-215.

اگر چه روش فشرده مرتبه ششم دارای اختلاف اندکی با روش آبرفشرده است ولی دقت بیشتر روش آبرفشرده حکایت از کوچک‌تر بودن خطای برشی این روش دارد و علاوه بر این مطلب با توجه به آنچه که در قبل آمد به دلیل اینکه در روش آبرفشرده تعداد نقاط کم‌تری درگیر هستند، این روش از ارجحیت بیشتری برخوردار است. با توجه به نتایج حاصل می‌توان مشاهده کرد که روش آبرفشرده تا طول موج‌های نسبتاً کوچک (یا اعداد موج بزرگ) جوابی مشابه به جواب دقیق را به دست می‌دهد. نتایج حاصل همچنین نشان‌دهنده توانایی بالاتر روش‌های فشرده در تقریب‌زدن امواج متوسط و بلند نسبت به روش مرتبه دوم مرکزی است.

۵ نتیجه‌گیری

در این مقاله نحوه به دست آوردن روش آبرفشرده به گونه‌ای که قابل کاربرد در شبکه‌های A و C باشد، آورده شد. همچنین به روابط روش فشرده با مرتبه‌های چهارم و ششم نیز اشاره شد. سپس این روش‌ها به مسئله تنظیم زمین گرد اعمال شد و جواب حاصل از این روش‌ها برای امواج گرانی-لختی با جواب دقیق، مورد مقایسه قرار گرفت. نتایج تحلیل در هر دو شبکه انتخاب شده نشان می‌دهد که روش آبرفشرده مرتبه ششم در هر دو این شبکه‌ها نسبت به سایر روش‌ها از دقت بیشتری برخوردار بوده و مناسب‌ترین جواب را در اختیار ما قرار می‌دهد. همچنین تحلیل صورت گرفته (در شبکه C) ارجحیت روش آبرفشرده مرتبه ششم را نسبت به روش فشرده مرتبه ششم از لحاظ دقت و تعداد نقاط درگیر نشان می‌دهد. با این حال در اینجا می‌بایست به این نکته اشاره کرد که توانایی روش آبرفشرده را در مقایسه با سایر روش‌های فشرده می‌توان پس از اعمال این روش به معادلات کلی‌تر حاکم بر جو و از جمله آنها معادلات آب کم‌عمق، مورد بررسی بیشتر قرار داد.

Yanwen, Ma., and Dexun, Fu., 1996, Super compact finite difference method (SCFDM) with arbitrary high accuracy, Computational Fluid Dynam. J. **5**, 259-276.