

تجزیه و تحلیل حساسیت داده‌های جاذبی برای ماهواره گرانی‌سنجی GRACE-1

علیرضا آزموده اردلان^{۱*} و حسن هاشمی فراهانی^۲^۱ دانشیار گروه مهندسی نقشه‌برداری، قطب علمی مهندسی نقشه‌برداری و مقابله با سوانح طبیعی، پردیس دانشکده‌های فنی، دانشگاه تهران، ایران
^۲ دانشجوی دکتری ژئودزی، گروه مهندسی نقشه‌برداری، پردیس دانشکده‌های فنی، دانشگاه تهران، ایران

(دریافت: ۸۵۵/۱، پذیرش نهایی: ۸۶/۱۷)

چکیده

یکی از مطالعات ضروری در گرانی‌سنجی ماهواره‌ای، "تجزیه و تحلیل طیفی" یا "تجزیه و تحلیل حساسیت" مشاهدات ماهواره نسبت به طیف‌های متفاوت میدان پتانسیل جاذبه زمین است. در این مقاله یک روش آماری برای تجزیه و تحلیل حساسیت ماهواره‌های گرانی‌سنجی در ساختار HL-SST پیشنهاد و برای ماهواره گرانی‌سنجی GRACE-1 برحسب مشاهده از نوع پتانسیل جاذبه از طریق "فن انتگرال انرژی" با استفاده از ۳۴۵ روز مشاهدات جاذبی این ماهواره در سال ۲۰۰۴ به کار برده شده است. با در نظر گرفتن بسط مشاهدات به هارمونیک‌های کروی نرمالیزه تا درجه و مرتبه $n_{max} = 60$ ، 486743 معادله مشاهده خطی برای محاسبه 3721 ضریب هارمونیک کروی نرمالیزه تا درجه و مرتبه یاد شده در نظر گرفته شد و بر اساس آن ماتریس ضرایب این معادلات (A) و ماتریس وزن مشاهدات (P) تشکیل شد و به کمک آنها، ماتریس کوواریانس مجهولات $C_x = (A^T P A)^{-1}$ با 483022 درجه آزادی برآورد شد. مدل ژئوپتانسیلی EGM96 به مثابه جامعه آماری و شاخصی برای اندازه ضرایب هارمونیک کروی نرمالیزه در نظر گرفته می‌شود، و برای تشخیص ضرایبی که ماهواره گرانی‌سنجی به آنها حساس نیست، از طریق آزمون آماری میانگین، مورد استفاده قرار گرفته است. به کارگیری فن یاد شده برای تک ماهواره گرانی‌سنجی GRACE-1، درجه و مرتبه $n_{max} = 50$ را در حکم حداکثر درجه و مرتبه بسط هارمونیک‌های کروی قابل برآورد با این ماهواره مشخص کرد.

واژه‌های کلیدی: گرانی‌سنجی ماهواره‌ای، GRACE-1، تجزیه و تحلیل حساسیت، انتگرال انرژی، هارمونیک‌های کروی، مدل ژئوپتانسیل

۱ مقدمه

است، صدق می‌کند.

$$\nabla^2 U(x) = \text{div grad } U(x) = 0 \quad (1)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^3 / D \cup \partial G_e^+$$

در این معادله $U(x)$ تابع پتانسیل جاذبه بیرونی زمین، x بردار موقعیت سه‌بعدی نقطه مورد نظر، D فضای درونی زمین و ∂G_e^+ مرز بیرونی زمین است. جواب ویژه معادله دیفرانسیل لاپلاس در دستگاه مختصات کروی $\{\lambda, \phi, r\}$ تحت شرایط ویژه، در خارج از کره مرز، با فرض نبود چگالی در این فضا، بسط پتانسیل جاذبه به سری هارمونیک‌های کروی است (هایسکنن و موریتز، ۱۹۶۷).

مدل‌سازی جهانی میدان جاذبه زمین دارای کاربردهای بسیاری در حوزه ژئودزی فیزیکی است و در کلیه مسائل مقدار مرزی ژئودزی در حوزه میدان گرانشی، نظیر مدل‌سازی محلی تابعک‌های متفاوت میدان، دسترسی به مدل جهانی میدان جاذبه زمین، به منظور محاسبه اثرات جهانی میدان، ضروری است (اردلان، ۱۹۹۹). روش معمول مدل‌سازی جهانی میدان جاذبه زمین، محاسبه ضرایب هارمونیک کروی (یا بیضوی) در بسط میدان پتانسیل جاذبه به سری هارمونیک‌های کروی (یا بیضوی) است. میدان پتانسیل جاذبه بیرونی زمین $U(x)$ (میدان پتانسیل جاذبه در فضای خالی از جرم) در معادله دیفرانسیل سه‌بعدی لاپلاس، که در رابطه (۱) ارائه شده

مشاهدات گرانی در شبکه‌ای با وسعت جهانی، با رزولوشن مکانی حداقل $\Delta = \pi/n_{\max}/2$ مورد نیاز خواهد بود. در غیر این صورت چنانچه نمونه‌برداری با رزولوشن مکانی کمتر از Δ صورت گیرد، نتایج حاصل در معرض اثر آلاسینگ بوده و ضرایب برآورد شده مفهوم فیزیکی خود را از دست خواهند داد. لذا در مدل‌سازی میدان جاذبه، ماکسیمم درجه ضرایب هارمونیک کروی قابل برآورد عاری از اثر آلاسینگ، برابر با $180^\circ/\Delta^\circ$ است. نکته مهم در رابطه (۲) وجود فاکتور میرایی $(R/r)^n$ در این بسط است. با توجه به این فاکتور، می‌بایست مشاهدات گرانی استفاده شده، برای مدل‌سازی جهانی میدان جاذبه، در ارتفاعی از سطح کره مرز جمع‌آوری شده باشند، که میدان حاصل از بسط (۲) تا درجه و مرتبه n_{\max} بدان حساس باشد. بنابراین یکی از بررسی‌های مهمی که قبل از مدل‌سازی جهانی میدان جاذبه می‌باید صورت گیرد، بررسی حساسیت داده‌های گرانی بر طیف میدان جاذبه و یا به عبارت دیگر تعیین حداکثر درجه و مرتبه معنی‌دار در بسط مشاهدات گرانی به سری هارمونیک‌های کروی (یا بیضوی) است. این موضوع، که "تجزیه و تحلیل حساسیت" یا "طیف‌سنجی" نام دارد، هدف تحقیق حاضر است و در قالب بررسی خاصی، برای یکی از زوج ماهواره گرانی‌سنجی GRACE (GRACE-1) به کار رفته است.

اندازه‌گیری‌های گرانی را می‌توان از نقطه نظر سکوی مشاهده در سه بخش (۱) سطحی، (۲) هوایی و (۳) ماهواره‌ای، جای داد. برای مدل‌سازی جهانی میدان جاذبه، روش‌های گرانی‌سنجی ماهواره‌ای، برای برآورد صحیحی از طول موج‌های بلند و متوسط میدان جاذبه (متناظر با ضرایب درجه و مرتبه کم و متوسط میدان)، از با ارزش‌ترین اطلاعات به شمار می‌آید، به طوری که به جرأت می‌توان بیان داشت که در صورت نبود آنها، با توجه به وسعت زمین، مدل‌سازی جهانی و منطقه‌ای میدان

$$U(\lambda, \phi, r) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r} \right)^{n+1} \quad (2)$$

$$\times \sum_{m=0}^n \{ \bar{a}_{nm} \bar{C}_{nm}(\lambda, \phi) + \bar{b}_{nm} \bar{S}_{nm}(\lambda, \phi) \}$$

در رابطه (۲) شعاع کره در برگیرنده همه جرم‌های زمینی (کره مرز) است که به آن "ضریب مقیاس ژئوپتانسیل" نیز گفته می‌شود (مک‌کارتی و پتیت، ۲۰۰۳). در این رابطه، ضریب $(R/r)^n$ تضعیف و یا میرایی میدان را نسبت به ارتفاع از سطح کره مرز توصیف می‌کند. همچنین \bar{a}_{nm} و \bar{b}_{nm} ضرایب نرمالیزه هارمونیک کروی و توابع $\bar{C}_{nm}(\lambda, \phi)$ و $\bar{S}_{nm}(\lambda, \phi)$ هارمونیک‌های کروی نرمالیزه سطحی (کسینوسی و سینوسی) از درجه و مرتبه n و m هستند. در ضمیمه ۲، روابط مورد نیاز برای محاسبه این توابع ارائه شده است. بدیهی است، محاسبه بسط پتانسیل جاذبه تا درجه و مرتبه بی‌نهایت نیازمند مشاهدات گرانی (مشمول بر مشتقات پتانسیل گرانی) با تراکم بی‌نهایت است و بدین لحاظ عملاً می‌بایست این بسط را تا درجه و مرتبه محدودی (n_{\max}) قطع کرد. برش یا قطع بسط هارمونیک‌های کروی تا درجه و مرتبه ماکسیمم n_{\max} منجر به دستیابی به مدلی جهانی برای میدان جاذبه زمین، متناظر با طول موج $2\pi R/n_{\max}$ برای توابع هارمونیک کروی در سطح کره مرز می‌شود (کلمبو، ۱۹۸۱). تعیین ضرایب هارمونیک کروی با استفاده از رابطه (۲) مستلزم حل یک دستگاه معادلات خطی مشتمل بر مشاهدات مشتقات پتانسیل جاذبه و $(n_{\max} + 1)^2$ مجهول (ضرایب هارمونیک کروی نرمالیزه) می‌شود. مجموعه این ضرایب، مدل ژئوپتانسیلی نامیده می‌شود. با توجه به (کلمبو، ۱۹۸۱) بسامد نایکوئیست در مورد هارمونیک‌های کروی سطحی که π/Δ است، و در آن Δ ابعاد رزولوشن مکانی داده‌های گرانی است. بنابراین اگر محاسبه ضرایب هارمونیک کروی تا درجه و مرتبه n_{\max} هدف باشد،

خورشیدی و اثرات گرمایی) حذف می‌شود. ماموریت گرانی‌سنجی ماهواره‌ای CHAMP اولین مأموریتی بود که با این ساختار در جولای ۲۰۰۰ وارد مرحله اجرایی شد (رابیگر و همکاران، ۱۹۹۶). آرایش LL علاوه بر ماهواره‌های سامانه تعیین موقعیت با ارتفاع مدارى بالا، مشتمل بر دو ماهواره گرانی‌سنجی با ارتفاع مدارى پایین در حدود 200km تا 500km از سطح زمین است. این زوج ماهواره گرانی‌سنجی در یک مدار به دنبال یکدیگر با فاصله چند صد کیلومتری در حرکت‌اند. در این فن، علاوه بر تعبیه کلیه تجهیزات ساختار HL در هر یک از دو ماهواره گرانی‌سنجی، این زوج ماهواره در ساختار LL به یک سامانه فاصله‌یابی بین ماهواره‌های نیز مجهز است که فاصله بین دو ماهواره، تغییرات زمانی و نرخ تغییرات زمانی آن را اندازه‌گیری می‌کند. زوج ماهواره گرانی‌سنجی GRACE در نقش اولین مأموریت گرانی‌سنجی ماهواره‌ای با ساختاری تلفیقی از دو آرایش HL-SST و LL-SST در مارس ۲۰۰۲ با موفقیت پرتاب و وارد مرحله اجرایی شد.

به دلیل وجود فاکتور میرایی در جواب معادله دیفرانسیل لاپلاس، بدیهی است، که مشاهدات گرانی‌سنجی ماهواره‌ای، صرفاً طیف محدودی از میدان جاذبه، متناظر تا درجه و مرتبه محدود n_{max} را حس کند. با توجه به اهمیت این موضوع در مدل‌سازی جهانی میدان جاذبه، در این تحقیق سعی بر یافتن روشی برای تجزیه و تحلیل حساسیت داده‌های گرانی‌سنجی ماهواره‌ای، به‌طور خاص با استفاده از کمیت‌های مشاهداتی پتانسیل جاذبه در ساختار HL-SST، شده و تجربه حاصل برای تجزیه و تحلیل حساسیت ماهواره گرانی‌سنجی GRACE-1 به کار رفت. نتیجه این بررسی می‌تواند، زمانی که فقط یکی از دو ماهواره GRACE در مدل‌سازی میدان گرانی به کار برده می‌شوند؛ که این وضعیت برای دستیابی به طول موج‌های بلند اجتناب‌ناپذیر است،

گرانی غیرممکن می‌کند. در مقابل، در بررسی میدان جاذبه زمین، با استفاده از داده‌های گرانی سطحی و هوایی، رفتار محلی میدان گرانی به‌خوبی قابل مدل‌سازی است، این طیفی است که در مشاهدات ماهواره‌ای قابل رؤیت نیست. با وجود اینکه اطلاعات سطحی و هوایی معمولاً دارای رزولوشن مکانی زیادی هستند، اما به ندرت از پوششی یکنواخت برخوردارند. در حالی که در روش‌های گرانی‌سنجی ماهواره‌ای، با وجود رزولوشن مکانی کم‌تر، یکنواختی پوششی خوبی در مقیاس جهانی برقرار است. لذا داده‌های جمع‌آوری شده در ماموریت‌های گرانی‌سنجی ماهواره‌ای، در بررسی‌های جهانی میدان جاذبه زمین، جایگزین ناپذیرند. در سال‌های اخیر با ظهور ماموریت‌های گرانی‌سنجی ماهواره‌ای CHAMP، GRACE و GOCE، که مبتنی بر فن‌های ردیابی ماهواره‌ای SST (satellite-to-satellite tracking) و گرادیمتری SGG (satellite gravity gradiometry) است، استفاده از روش‌های گرانی‌سنجی ماهواره‌ای به منظور مدل‌سازی جهانی میدان جاذبه، در کانون توجه ژئودزی قرار گرفته است (رومل و همکاران، ۲۰۰۲). در گرانی‌سنجی ماهواره‌ای دو ساختار مهم برای فن ردیابی ماهواره به ماهواره SST عبارت‌اند از: ساختار High-Low (HL) و ساختار Low-Low (LL). آرایش HL شامل ماهواره‌های تعیین موقعیت ژئودزی با ارتفاع مدارى بالا (مانند سامانه GPS) و یک ماهواره گرانی‌سنجی با ارتفاع مدارى نسبتاً پایین است. در این ساختار به کمک مشاهدات سامانه‌های تعیین موقعیت ماهواره‌ای، بردار موقعیت و بردار سرعت ماهواره گرانی‌سنجی محاسبه شده و با به‌کارگیری یک شتاب‌سنج دقیق سه محوره که در مرکز جرم ماهواره کار گذاشته شده است، اثر شتاب‌های غیر جاذبی (شتاب‌های مزاحم در مدل‌سازی میدان گرانی، نظیر شتاب‌های ناشی از نیروهای غیر پایستار مانند اصطکاک جوی، فشار پرتوهای

۲ معادلات مشاهدات در گرانی‌سنجی ماهواره‌ای به

روش HL-SST

یکی از روش‌های موجود به منظور تأمین داده‌های مرزی مورد نیاز در مدل‌سازی میدان جاذبه با استفاده از مشاهدات فن ماهواره‌ای HL-SST، "معادله انتگرال انرژی" است. فکر استفاده از این روش برای یک ماهواره گرانی‌سنجی، نخستین بار از سوی (بیرهامر، ۱۹۶۸) مطرح شد. از طریق این فن، در غیاب نیروهای غیر پایستار و نیروهای جاذبی سایر اجسام آسمانی (اثرهای کشندی)، مجموع انرژی جنبشی و پتانسیل جاذبه زمین مقداری ثابت است و در صورت لحاظ کردن نیروی اصطکاک، انرژی کاهش یافته را به صورت انرژی گرمای حاصل از اصطکاک می‌توان جستجو کرد. همچنین نیروی جاذبی سایر اجسام آسمانی نظیر ماه و خورشید را نیز می‌توان در قالب اثرات قاعده‌مند کشندی در نظر گرفت. براساس این فن، انتگرال انرژی، مقدار پتانسیل جاذبه در موقعیت ماهواره را با سرعت ماهواره مرتبط می‌سازد. اندازه‌گیری‌های مورد نیاز به منظور اعمال این فن، که همگی از راه مشاهدات HL-SST مهیا هستند، عبارت‌اند از: (۱) بردار موقعیت ماهواره r و (۲) بردار سرعت ماهواره $\dot{r} = \Delta r / \Delta t$. از آنجا که در ساختار HL روی ماهواره گرانی‌سنجی، سامانه‌های تعیین موقعیت ژئودتیک (مثلاً GPS و بازتابنده‌های سامانه SLR) نصب شده است، مشاهدات این سامانه‌ها اطلاعات کاملی در ارتباط با بردار موقعیت لحظه‌ای ماهواره در مدار و نیز بردار سرعت ماهواره به دست می‌دهند. در خصوص کاربرد انتگرال انرژی با استفاده از ماهواره CHAMP برای مدل‌سازی میدان گرانی زمین، برای نمونه می‌توان به (فُلدواری و همکاران، ۲۰۰۳)، (گرلاخ و همکاران، ۲۰۰۳)، (رایگبر، ۱۹۹۶) و (ورموث و همکاران، ۲۰۰۴) رجوع کرد. همچنین در مورد بررسی‌های صورت گرفته با استفاده از داده‌های ماهواره GRACE از راه این فن، در ارتباط با

طیف‌های قابل تشخیص را مشخص سازد. روش به کار رفته در این تحقیق مبتنی بر مراحل زیر است: (۱) استفاده از داده‌های واقعی ساختار HL-SST، جمع‌آوری شده توسط تک ماهواره گرانی‌سنجی GRACE-1. (۲) اعمال فن "معادله انتگرال انرژی حرکت" و محاسبه دقت مشاهدات از نوع پتانسیل جاذبه در موقعیت ماهواره از راه قانون انتشار خطاها. (۳) استفاده از بسط پتانسیل جاذبه به سری هارمونیک‌های کروی نرمالیزه و تشکیل یک دستگاه معادلات خطی از مشاهدات در موقعیت مداری ماهواره. (۴) برآورد ماتریس کوواریانس پارامترهای مجهول شامل $(n_{\max} + 1)^2$ ضریب هارمونیک کروی نرمالیزه تا درجه و مرتبه ماکسیمم n_{\max} از راه فن کمترین مربعات. (۵) استفاده از یکی از مدل‌های ژئوپتانسیلی موجود به مثابه شاخصی برای اندازه ضرایب ژئوپتانسیلی. (۶) انتخاب سطح اطمینان 99.9% و حساس شمردن مشاهدات با اطمینان 99.9% بر اساس آزمون آماری میانگین در سطح اطمینان یادشده. نوآوری‌های این تحقیق را می‌توان در استفاده از یک فن آماری برای تشخیص حساسیت مشاهدات ماهواره‌ای و استفاده از داده‌های واقعی ساختار HL-SST در تشکیل معادلات مشاهدات و برآورد ماتریس کوواریانس ضرایب هارمونیک کروی نرمالیزه برشمرد.

با این مقدمه به بخش بعدی وارد می‌شویم و ابتدا معادله مشاهده از نوع پتانسیل جاذبه از طریق انتگرال انرژی در گرانی‌سنجی ماهواره‌ای در ساختار HL-SST را معرفی، سپس به ارائه روش پیشنهادی به منظور تجزیه و تحلیل حساسیت داده‌های جاذبی این ساختار از نوع پتانسیل جاذبه، می‌پردازیم و در ادامه با استفاده از روش ارائه شده، حساسیت مشاهدات جاذبی ماهواره GRACE-1 را مورد بررسی قرار خواهیم داد. بحث و بررسی نتایج حاصل، پایان بخش مقاله حاضر خواهد بود.

ماهواره گرانی‌سنجی در نظر می‌گیریم. پراکندگی مشاهدات می‌بایست به گونه‌ای باشد که حداقل فاصله نمونه‌برداری مورد نیاز را بر اساس بسامد نایکوئیست در قضیه نمونه‌برداری تأمین کند. معادلات مشاهدات براساس بسط هارمونیک‌های کروی نرمالیزه در موقعیت ماهواره، یک دستگاه معادلات خطی برحسب مجهولات مشتمل بر $(n_{\max} + 1)^2$ مجهول ضرایب هارمونیک کروی نرمالیزه را تشکیل می‌دهد. پس از محاسبه ماتریس ضرایب A و ماتریس وزن مشاهدات P ، به روش سرشکنی کمترین مربعات، ماتریس کوواریانس مجهولات $C_{\hat{x}}$ قابل برآورد خواهد بود.

$$C_{\hat{x}} = (A^T P A)^{-1} \quad (5)$$

۳ روش پیشنهادی تجزیه و تحلیل حساسیت در

گرانی‌سنجی ماهواره‌ای با ساختار HL-SST

تجزیه و تحلیل حساسیت مشاهدات گرانی‌سنجی ماهواره‌ای از جمله زمینه‌های تحقیقاتی در گرانی‌سنجی است که مورد توجه کافی قرار نگرفته و بررسی کتابخانه‌ای ما فقط منابع زیر را در این خصوص مشخص کرد. (کخ، ۲۰۰۴)، (مارینکوویچ و همکاران، ۲۰۰۳)، (ریوبلت و همکاران، ۲۰۰۳الف، ۲۰۰۳ب)، (شفر، ۱۹۹۸ و ۲۰۰۰)، (آستینف و سانسر، ۲۰۰۵) و (فرمیرسن و همکاران، ۲۰۰۳). روشی که در این بخش ارائه خواهد شد، روشی متفاوت است که آن را می‌توان در زمره روش‌های آماری تجزیه و تحلیل حساسیت جای داد. در این روش فرض اولیه بررسی حساسیت، دسترسی یا اطلاع از مقیاس (اندازه) ضرایب هارمونیک کروی است، که امروزه با در اختیار بودن مدل‌های ژئوپتانسیلی، فرضی واقع‌بینانه محسوب می‌شود. ما در تجزیه و تحلیل خود از مدل EGM96 (لیمونه و همکاران، ۱۹۹۸) استفاده کردیم که براساس تحقیقات صورت گرفته در گروه مهندسی نقشه‌برداری دانشگاه تهران، از موفق‌ترین مدل‌های

مدل‌سازی جهانی میدان جاذبه زمین و همین‌طور تعیین ژئوئید به مثابه مصداقی از مدل‌سازی محلی میدان گرانی، می‌توان به (گارسیا، ۲۰۰۲)، (هاجلا، ۱۹۷۴)، (هان، ۲۰۰۳)، (هان و همکاران، ۲۰۰۳)، (جکلی، ۱۹۸۸ و ۱۹۹۹) و (شویتزر و همکاران، ۱۹۹۷ و ۲۰۰۰) اشاره کرد. معادله انرژی حرکت بدون حضور نیروهای غیر پایستار (به عنوان مثال ناشی از اصطکاک جو و فشار تشعشعات خورشیدی) و نیروهای جاذبی سایر اجسام آسمانی نظیر ماه و خورشید، به صورت زیر است (جکلی، ۱۹۹۹):

$$U + V = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - E_0 \quad (3)$$

در اینجا U پتانسیل جاذبه زمین در موقعیت ماهواره و V سهم میدان گریز از مرکز است. جمله اول در سمت راست معادله فوق، انرژی جنبشی به ازای جرم واحد بوده و در آن $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ مؤلفه‌های بردار سرعت ماهواره گرانی‌سنجی در مدار است. همچنین در معادله (۳) E_0 ثابت انرژی دستگاه بوده، که در فرایند مدل‌سازی به مثابه یک مجهول قابل برآورد خواهد بود. در صورت در نظر گرفتن کار نیروی اصطکاک، ثابت انرژی دستگاه E_0 به اندازه ΔE افت انرژی یافته که از طریق محاسبه کار انجام شده توسط نیروی اصطکاک، به کمک اندازه‌گیری شتاب‌های مزاحم قابل برآورد است (گراخ و همکاران، ۲۰۰۳). همان‌طور که در رابطه (۳) ملاحظه می‌شود، با برقراری رابطه بین انرژی جنبشی و پتانسیل، می‌توان پتانسیل جاذبه در موقعیت ماهواره را برحسب اندازه بردار سرعت ماهواره محاسبه کرد. همچنین از راه قانون انتشار خطاها می‌توان واریانس مشاهده‌ها را نیز به صورت زیر برآورد کرد.

$$\sigma_1 = \sqrt{\dot{x}^2 \sigma_x^2 + \dot{y}^2 \sigma_y^2 + \dot{z}^2 \sigma_z^2} \quad (4)$$

به منظور تشکیل مدل ریاضی، بسط هارمونیک‌های کروی نرمالیزه تا درجه و مرتبه n_{\max} را در موقعیت

ژئوپتانسیلی در مدل‌سازی تابعک‌های میدان گرانی زمین محسوب می‌شود (اردلان و همکاران، ۲۰۰۶). روش مورد استفاده به صورت خلاصه در فلوچارت شکل ۱ نشان داده شده است.



شکل ۱. فلوچارت تعیین حساسیت به روش پیشنهادی.

به منظور تشخیص ضرایب غیر حساس در فرایند مدل‌سازی، آزمون‌های آماری (۶) و (۷) به ترتیب برای ضرایب \bar{a}_{nm} و \bar{b}_{nm} تشکیل داده شد.

$$\begin{cases} H_0 : \bar{a}_{nm} \neq 0, & \alpha \\ H_1 : \bar{a}_{nm} = 0 \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} H_0 : \bar{b}_{nm} \neq 0, & \alpha \\ H_1 : \bar{b}_{nm} = 0 \end{cases} \quad (7)$$

در روابط (۶) و (۷) ضرایب هارمونیک‌های کروی نرمالیزه و α سطح معنی‌دار بودن آزمون آماری است. برای عملی ساختن این آزمون آماری، آماره $(\bar{a}_{nm} - \mu_{\bar{a}_{nm}}) / \sigma_{\bar{a}_{nm}}$ را می‌توان تشکیل داد. این آماره

با فرض معلوم بودن $\mu_{\bar{a}_{nm}}$ و $\sigma_{\bar{a}_{nm}}$ دارای تابع توزیع نرمال استاندارد $N(0,1)$ خواهد بود. بنابراین، قاعده تصمیم را چنین می‌توان نوشت: فرض صفر رد خواهد شد، اگر $\mu_{\bar{a}_{nm}}$ کوچک‌تر از $\xi_{N(0,1),1-\alpha/2} \times \sigma_{\bar{a}_{nm}}$ یا بزرگ‌تر از $-\xi_{N(0,1),1-\alpha/2} \times \sigma_{\bar{a}_{nm}}$ باشد، که $\xi_{N(0,1),1-\alpha/2}$ معکوس تابع توزیع تجمعی نرمال استاندارد در سطح اطمینان است. در این حالت ناحیه بحرانی برای رد فرض صفر به صورت زیر خواهد شد:

$$[\mu_{\bar{a}_{nm}} - \xi_{N(0,1),1-\alpha/2} \sigma_{\bar{a}_{nm}}, \mu_{\bar{a}_{nm}} + \xi_{N(0,1),1-\alpha/2} \sigma_{\bar{a}_{nm}}] \quad (8)$$

حال اگر سطح معنی‌دار آزمون α را برابر با $\alpha = 0.0027$ و یا متناظر آن، سطح اطمینان تصمیم‌گیری $(1-\alpha)\%$ را برابر با 99.73% در نظر بگیریم $3 \doteq \xi_{N(0,1),1-\alpha/2}$ می‌شود و ناحیه بحرانی برای رد فرض صفر به صورت زیر درمی‌آید.

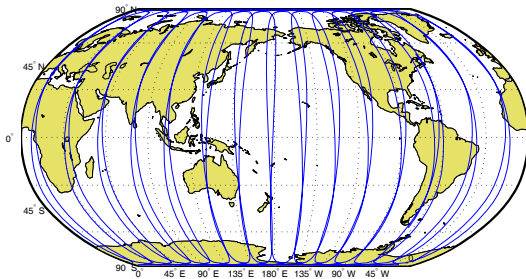
$$[\mu_{\bar{a}_{nm}} - 3\sigma_{\bar{a}_{nm}}, \mu_{\bar{a}_{nm}} + 3\sigma_{\bar{a}_{nm}}] \quad (9)$$

در روابط فوق $\sigma_{\bar{a}_{nm}}$ از طریق ماتریس کوواریانس، $C_{\hat{x}}$ ، $\mu_{\bar{a}_{nm}}$ با استفاده از یکی از مدل‌های ژئوپتانسیلی موجود قابل محاسبه است. مشابه این آزمون را می‌توان برای ضریب \bar{b}_{nm} در نظر گرفت. در حقیقت با توجه به قاعده تصمیم، هر ضریبی که در فرض یک (۶) و (۷) صدق کند، با احتمال $(1-\alpha)\%$ مدل ریاضی، بدان حساس نیست. حاصل این آزمون آماری در نهایت، مشخص ساختن ضرایبی است که مشاهدات جاذبی ساختار HL-SST قادر به درک آن با احتمال $(1-\alpha)\%$ است. پشتوانه این آزمون آماری، این واقعیت است که بزرگی انحراف معیار برآورد شده یک کمیت، نسبت به خود آن کمیت را می‌توان به نشانه نبود اثرات آن کمیت در مشاهدات مورد استفاده، تلقی کرد.

آن حدود شش سال پیش‌بینی شده است (کیس و همکاران، ۲۰۰۴). جدول ۱ مشخصات مداری این ماهواره را در ابتدا و انتهای عمر آن نشان می‌دهد. همان‌گونه که ملاحظه می‌شود، پارامترهای مداری این ماهواره به دلیل اصطکاک جوی در طی مأموریت آن تغییر می‌یابد. شکل ۳ نحوه شکل‌گیری مدارهای ماهواره گران‌سنجی GRACE در دوره یک روزه را نشان می‌دهد.

جدول ۱. مشخصات مداری ماهواره گران‌سنجی GRACE در ابتدا و انتهای مأموریت آن (کیس و همکاران، ۲۰۰۴).

پارامتر مداری	ابتدای مأموریت	انتهای مأموریت
نصف قطر اول مدار	(6878 ± 10) km	(6678 ± 10) km
ارتفاع از سطح زمین	(500 ± 10) km	(300 ± 10) km
خروج از مرکز مدار	0.005	0.005
زاویه میل مدار	89°	89°

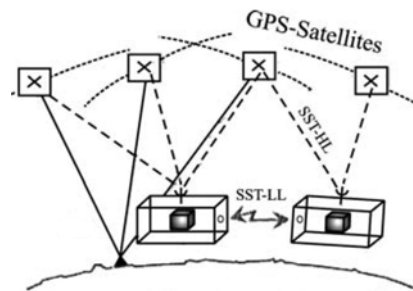


شکل ۳. نحوه شکل‌گیری مدارهای زوج ماهواره گران‌سنجی GRACE در دوره یک روزه.

همچنین پراکندگی نقاط مشاهداتی در طول بازه زمانی یک ماهه با نرخ نمونه‌برداری $1/60$ Hz، مشتمل بر 41293 نقطه مشاهداتی در شکل ۴ نشان داده شده است، که اطلاعاتی را با رزولوشن مکانی برابر با 1.5° متناظر با رزولوشن مکانی مورد نیاز برای مدل‌سازی جهانی میدان جاذبه زمین تا درجه و مرتبه $n_{\max} = 120$

۴ بررسی موردی: تجزیه و تحلیل حساسیت ماهواره گران‌سنجی GRACE-1

در طراحی مأموریت گران‌سنجی ماهواره‌ای GRACE از تلفیق دو ساختار HL و LL استفاده شده است. شکل ۲ این آرایش تلفیقی را مشتمل بر دو ماهواره گران‌سنجی مشابه، موسوم به GRACE-1 و GRACE-2 نمایش می‌دهد.



شکل ۲. زوج ماهواره گران‌سنجی GRACE (کلر و شریفی، ۲۰۰۵).

این پروژه ماهواره‌ای، مأموریت مشترک مؤسسه ملی هوا-فضای آمریکا (NASA) و مرکز هوا-فضای آلمان (DLR) است. هدف اصلی این مأموریت جمع‌آوری داده‌های جاذبی مورد نیاز به منظور انجام مطالعات جهانی میدان جاذبه زمین و تغییرات زمانی آن است. در کنار این هدف اصلی، جمع‌آوری داده‌های مورد نیاز به منظور تحقیق در خصوص تأثیر شکست گشت‌سپهری (تروپوسفری) و یونسپهری (یونسفری) بر روی سیگنال‌های سامانه تعیین موقعیت ماهواره‌ای مانند GPS به مثابه هدف فرعی این مأموریت معرفی شده است. بخش فضایی این مأموریت شامل دو ماهواره مشابه است که به دنبال یکدیگر در مداری قطبی به فاصله تقریبی (200 ± 50) km نسبت به هم در حرکت‌اند. ارتفاع متوسط مداری 400 km، خروج از مرکز مدار $e < 0.005$ و زاویه میل مدار 89° (مدار قطبی) است. عمر اسمی این زوج ماهواره با توجه به ارتفاع بسیار کم

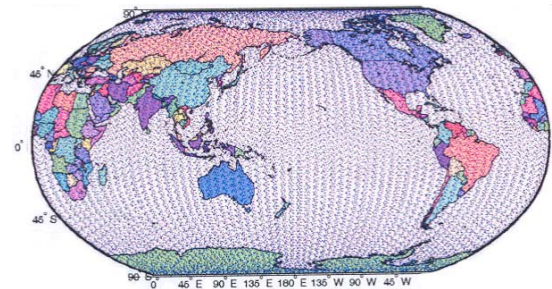
و به همراه محتوای هر یک از آنها ارائه می‌کند (کیس و همکاران، ۲۰۰۴).

هدف از بررسی عددی صورت گرفته در این تحقیق، تجزیه و تحلیل حساسیت مشاهده جاذبی ماهواره گرانی‌سنجی GRACE-1 از نوع پتانسیل جاذبه از راه اعمال فن انتگرال انرژی حرکت در ساختار HL-SST است. در حقیقت در این بررسی ماهواره گرانی‌سنجی GRACE-1 را می‌توان از نقطه نظر نوع کمیات مشاهداتی، دقیقاً مشابه ماهواره گرانی‌سنجی CHAMP در نظر گرفت. برای این منظور، با استفاده از روش پیشنهادی، که پیش‌تر توضیح داده شد، تنها به بردار موقعیت و بردار سرعت ماهواره به همراه دقت آنها برای ماهواره گرانی‌سنجی GRACE-1 در نقاط مشاهداتی نیاز است، که می‌توان از راه مجموعه فایل‌های GNV1B-A با نرخ نمونه‌برداری 1/60Hz به آن دست یافت. در این مجموعه داده، موقعیت تک ماهواره گرانی‌سنجی در قالب مختصات کارتزین {X,Y,Z} در دستگاه زمین مرجع ارائه شده است. رابطه انتقال بین سامانه مختصات زمین مرجع به سامانه مختصات مرجع لخت (دستگاه مختصات آسمانی) به صورت زیر است.

$$\begin{aligned} e^e &= T_i^e e^i \\ &= (W R(\Theta) N P)_i^e e^i \end{aligned} \quad (10)$$

در رابطه (۱۰) e^e و e^i به ترتیب بردارهایی که در دستگاه مختصات زمین مرجع و دستگاه مختصات لخت است. همچنین در این رابطه W ناشی از حرکت قطبی، $R(\Theta)$ اثر دوران روزانه زمین، N ناشی از ناوش (nutation) اجباری و P به خاطر حرکت قهقراپی (precession) بوده که جزئیات کامل به منظور محاسبه عملی این ترانسفورماسیون در مرجع مک‌کارتی و پتیت (۲۰۰۳) ارائه شده است. به منظور تشکیل بسط پتانسیل جاذبه زمین در موقعیت مشاهداتی ماهواره گرانی‌سنجی، به سری هارمونیک‌های کروی نرمالیزه، ابتدا می‌باید مختصات

را تأمین می‌کند. همان‌طور که ملاحظه می‌شود، با افزایش طول بازه مشاهداتی، پراکندگی مکانی داده‌ها، توان تفکیک مکانی بالاتری را تأمین می‌کند، که برای مدل‌سازی جهانی میدان جاذبه زمین تا درجه و مرتبه بالاتر مورد نیاز است. علاقمندان به جزئیات بیشتر در این خصوص، می‌توانند به منابعی نظیر (هان، ۲۰۰۳)، (رایگبر و همکاران، ۲۰۰۵) و (رومل و همکاران، ۲۰۰۲) مراجعه کنند.



شکل ۴. پراکندگی نقاط مشاهداتی ماهواره گرانی‌سنجی GRACE در طول یک ماه.

روی هر یک از ماهواره‌های GRACE، گیرنده‌ای دو بسامدی ۲۴ کاناله سامانه GPS نصب شده، که با استفاده از مشاهدات این سامانه و همچنین اندازه‌گیری‌های سامانه SLR، بردار موقعیت و بردار سرعت هر دو ماهواره با دقت بالایی محاسبه و در اطلاعات ارائه شده برای این مأموریت، درج می‌شود. مشاهدات سامانه GPS به صورت تفاضلی دوگانه فاز موج حامل عاری از یون سپهری (L3) بین دو ماهواره GPS، تک ماهواره گرانی‌سنجی GRACE و ایستگاهی زمینی جمع‌آوری شده است، که برای توضیحات بیشتر در این خصوص می‌توان به (تاپلی و همکاران، ۲۰۰۵) رجوع کرد. پردازش و تولید اطلاعات جاذبی زوج ماهواره مأموریت GRACE توسط JPL صورت گرفته که به داده‌های Level-1B معروف است. جدول ۲ این اطلاعات را به تفکیک

کوورینانس بین ضرایب و σ_i انحراف معیار ضرایب است. از آنجاکه به کارگیری آزمون‌های آماری (۶) و (۷) مبتنی بر استقلال مجهولات‌اند، لذا کوچک بودن مقدار عددی عضوهای غیر قطری در ماتریس ضرایب همبستگی (شکل ۵)، مؤید امکان اعمال آزمون‌های آماری (۶) و (۷) است.

مدل ژئوپتانسیلی EGM96 شامل ضرایب هارمونیک کروی نرمالیزه تا درجه و مرتبه 360 (لیموینه و همکاران، ۱۹۹۸) به مثابه شاخص اندازه ضرایب در این تحقیق استفاده شد. در جدول ۴ مقادیر ضرایب مدل ژئوپتانسیل EGM96 تا درجه و مرتبه 10 به همراه دقت محاسبه شده برای آنها در فرایند محاسبات سرشکنی ارائه شده است. به کارگیری روش آماری پیشنهادی، ارائه شده در بخش سوم مقاله، در مورد ماهواره گرانی‌سنجی GRACE-1 در ساختار HL-SST، برای کمیت مشاهداتی پتانسیل جاذبه زمین، درجه و مرتبه $n_{max} = 50$ را درحکم حداکثر درجه و مرتبه بسط هارمونیک‌های کروی قابل برآورد با این ماهواره، با در نظر گرفتن سطح اطمینان 99.9% مشخص کرد. به عبارت دیگر نتیجه تحقیق حاضر این است که، کمیت مشاهداتی از نوع پتانسیل جاذبه در ماهواره گرانی‌سنجی GRACE-1 براساس معادله انتگرال اثرژی، قادر به درک طیف میدان جاذبه زمین، بزرگ‌تر از درجه و مرتبه $n_{max} = 50$ نیست.

۵ نتیجه‌گیری

در این تحقیق با توجه به اهمیت مبحث "تجزیه و تحلیل حساسیت" مشاهدات ماهواره‌های گرانی‌سنجی نسبت به طیف‌های متفاوت میدان پتانسیل جاذبه زمین، یک روش آماری ارائه و در ساختار HL-SST با استفاده از داده‌های ماهواره گرانی‌سنجی GRACE-1 برحسب مشاهده از نوع پتانسیل جاذبه به کار برده شد. نتیجه این تحقیق درجه و مرتبه $n_{max} = 50$ را به مثابه حداکثر

نقاط مشاهداتی در دستگاه زمین مرجع، به مختصات کروی $\{\lambda, \phi, r\}$ تبدیل شوند. به منظور تشکیل مدل ریاضی، بسط هارمونیک‌های کروی نرمالیزه تا درجه و مرتبه $n_{max} = 60$ در نظر گرفته شد، و برای عملی ساختن محاسبات از ۳۴۵ روز داده‌های تک ماهواره گرانی‌سنجی GRACE-1 در سال ۲۰۰۴ مشتمل بر 486743 مشاهده در دستگاه معادلات خطی برای محاسبه 3721 ضریب هارمونیک کروی نرمالیزه تا درجه و مرتبه 60 استفاده شد. رزولوشن مکانی داده‌های انتخاب شده، حداقل فاصله نمونه‌برداری مورد نیاز را بر اساس بسامد نایکوئیست در قضیه نمونه‌برداری برای درجه و مرتبه $n_{max} = 60$ تأمین می‌کند. دقت متوسط مشاهدات جاذبی از نوع پتانسیل جاذبه از رابطه (۴) برابر با $0.14(m^2/s^2)$ به دست آمد. در انجام محاسبات انجام شده در این بررسی از مقادیر بنیادی جدول ۳ استفاده شده است.

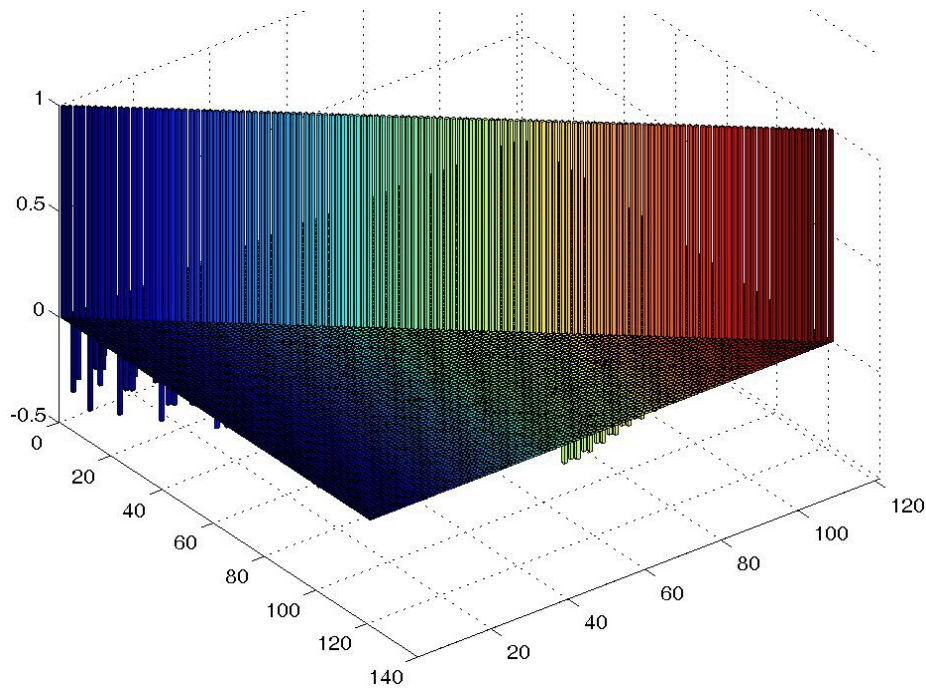
از آنجایی که در این تحقیق، مدل ژئوپتانسیلی EGM96 (لیموینه و همکاران، ۱۹۹۸) درحکم جامعه آماری و شاخصی برای اندازه ضرایب هارمونیک کروی در نظر گرفته شده، لذا مقدار عددی ضریب مقیاس ژئوپتانسیل (شعاع کره مرز) در محاسبات مدل‌سازی تحقیق حاضر، برابر با مقدار به کار رفته برای این کمیت در مدل ژئوپتانسیلی EGM96 لحاظ شده است. پس از محاسبه ماتریس ضرایب A معادلات مشاهدات و ماتریس وزن مشاهدات P، ماتریس کوورینانس مجهولات $C_{\hat{x}}$ برای $3721 = (60 + 1)^2$ مجهول ضریب هارمونیک کروی نرمالیزه، با درجه آزادی 483022 از راه فن کمترین مربعات بدون نیاز به پایدارسازی محاسبات عددی، برآورد شد. شکل ۵ ماتریس ضرایب همبستگی مجهولات مدل ریاضی را برای ضرایب هارمونیک کروی تا درجه و مرتبه $n = 10$ نشان می‌دهد، عضوهای این ماتریس عبارت‌اند از: $\rho_{ij} = \sigma_{ij} / (\sigma_i \sigma_j)$ که در آن σ_{ij}

جدول ۲. مشخصات داده‌های جاذبی GRACE تولید شده با JPL (کیس و همکاران، ۲۰۰۴).

محتوی اطلاعات	نوع داده	
	بردار موقعیت و بردار سرعت زوج ماهواره 1 (A) و 2 (B) در یک دستگاه مختصات مرجع وابسته به زمین	GNV1B-B
بردار شتاب‌های غیر جاذبی زوج ماهواره 1 (A) و 2 (B) در یک دستگاه مختصات وابسته به ماهواره	ACC1B-B	ACC1B-A
پارامترهای دوران از سامانه مختصات وابسته به ماهواره به سامانه مختصات مرجع لختی، برای زوج ماهواره 1 (A) و 2 (B)	SCA1B-B	SCA1B-A
فاصله بین زوج ماهواره، تغییرات فاصله و نرخ تغییرات فاصله	KBR1B-X	

جدول ۳. پارامترهای بنیادی به کار رفته در محاسبات.

مقدار عددی	پارامتر
$3986004.415 \times 10^8 \text{ (km}^3 / \text{s}^2)$	GM: ثابت جاذبه زمینی (گروتن، ۲۰۰۴)
6378136.3 m	R: ضریب مقیاس ژئوپتانسیل مدل EGM96 (لیمونه و همکاران، ۱۹۹۸)
$7.292115 \times 10^{-5} \text{ (rad / sec)}$	ω : سرعت دوران روزانه زمین (گروتن، ۲۰۰۰ و ۲۰۰۴)



شکل ۵. ماتریس ضرایب همبستگی مجهولات تا درجه و مرتبه $n=10$.

جدول ۴. مقادیر ضرایب هارمونیک کروی مدل ژئوپتانسیلی EGM96 تا درجه و مرتبه $n=10$ به همراه دقت محاسبه شده برای آنها.

n	m	\bar{a}_{nm} (از مدل EGM96)	$\sigma_{\bar{a}_{nm}}$ (از محاسبات)	\bar{b}_{nm} (از مدل EGM96)	$\sigma_{\bar{b}_{nm}}$ (از محاسبات)
0	0	6.2495e+007			
1	0				
	1				2.7530e-004
2	0	-3.0258e+004	2.4630e-004		
	1	-1.1686e-002	2.6988e-004	7.4699e-002	2.6981e-004
	2	1.5243e+002	3.0279e-004	-8.7503e+001	3.0291e-004
3	0	5.9823e+001	2.6667e-004	0	0
	1	1.2686e+002	2.8125e-004	1.5531e+001	2.8124e-004
	2	5.6535e+001	3.0336e-004	-3.8686e+001	3.0348e-004
	3	4.5063e+001	3.2909e-004	8.8390e+001	3.2897e-004
4	0	3.3739e+001	2.8768e-004		
	1	-3.3517e+001	2.9798e-004	-2.9588e+001	2.9793e-004
	2	2.1917e+001	3.1507e-004	4.1414e+001	3.1517e-004
	3	6.1918e+001	3.3504e-004	-1.2557e+001	3.3499e-004
	4	-1.1784e+001	3.5699e-004	1.9302e+001	3.5685e-004
5	0	4.2829e+000	3.0973e-004		
	1	-3.8810e+000	3.1766e-004	-5.9009e+000	3.1765e-004
	2	4.0774e+001	3.3118e-004	-2.0208e+001	3.3126e-004
	3	-2.8245e+001	3.4768e-004	-1.3427e+001	3.4765e-004
	4	-1.8455e+001	3.6604e-004	3.1039e+000	3.6587e-004
	5	1.0935e+001	3.8537e-004	-4.1833e+001	3.8523e-004
6	0	-9.3716e+000	3.3324e-004		
	1	-4.7551e+000	3.3991e-004	1.6429e+000	3.3988e-004
	2	3.0106e+000	3.5100e-004	-2.3356e+001	3.5108e-004
	3	3.5730e+000	3.6627e-004	5.6414e-001	3.6621e-004
	4	-5.3879e+000	3.8061e-004	-2.9461e+001	3.8045e-004
	5	-1.6694e+001	3.9958e-004	-3.3528e+001	3.9946e-004
	6	6.0471e-001	4.1607e-004	-1.4823e+001	4.1598e-004
7	0	5.6857e+000	3.5843e-004		
	1	1.7491e+001	3.6392e-004	5.9641e+000	3.6387e-004
	2	2.0607e+001	3.7383e-004	5.8162e+000	3.7392e-004
	3	1.5649e+001	3.8589e-004	-1.3574e+001	3.8585e-004
	4	-1.7193e+001	4.0117e-004	-7.7369e+000	4.0112e-004
	5	1.2109e-001	4.1466e-004	1.1085e+000	4.1444e-004
	6	-2.2427e+001	4.3325e-004	9.4861e+000	4.3317e-004
	7	6.8235e-002	4.4798e-004	1.5275e+000	4.4819e-004
8	0	3.1042e+000	3.8550e-004		
	1	1.4588e+000	3.9031e-004	3.6876e+000	3.9031e-004
	2	5.0182e+000	3.9882e-004	4.0883e+000	3.9892e-004

ادامه جدول ۴.

	3	-1.1991e+000	4.1096e-004	-5.3961e+000	4.1090e-004
	4	-1.5286e+001	4.2327e-004	4.3761e+000	4.2311e-004
	5	-1.5958e+000	4.3795e-004	5.5712e+000	4.3773e-004
	6	-4.1082e+000	4.5148e-004	1.9326e+001	4.5138e-004
	7	4.2047e+000	4.7034e-004	4.6711e+000	4.7054e-004
	8	-7.7551e+000	4.8275e-004	7.5327e+000	4.8245e-004
9	0	1.7293e+000	4.1443e-004		
	1	8.9610e+000	4.1857e-004	1.3551e+000	4.1855e-004
	2	1.3892e+000	4.2661e-004	-2.0136e+000	4.2673e-004
	3	-1.0050e+001	4.3657e-004	-4.6389e+000	4.3651e-004
	4	-5.6257e-001	4.4904e-004	1.2166e+000	4.4890e-004
	5	-1.0384e+000	4.6200e-004	-3.3817e+000	4.6176e-004
	6	3.9181e+000	4.7571e-004	1.3930e+001	4.7563e-004
	7	-7.3973e+000	4.8971e-004	-6.0317e+000	4.8981e-004
	8	1.1776e+001	5.0832e-004	-1.9284e-001	5.0820e-004
	9	-2.9840e+000	5.1928e-004	6.0396e+000	5.1922e-004
10	0	3.2886e+000	4.4547e-004		

به کارگیری این تحقیق در مورد هر ماهواره گرانی سنجی با

هر ساختار دیگری می تواند منجر به تعیین حداکثر درجه و مرتبه بسط هارمونیک های کروی قابل برآورد با این ماهواره، با در نظر گرفتن سطح اطمینان 99.9% شود و مانع از تلاش بیهوده برای برآورد ضرایب درجات بالاتر (که منجر به بد- وضعی (ill-conditioning) دستگاه معادلات مشاهدات می شود) باشد. به علاوه بدین ترتیب مسئله نبود بهره گیری کامل از قابلیت یک مأموریت گرانی سنجی ماهواره ای با در نظر گرفتن ضرایب کمتر از آستانه درک، نیز حل خواهد شد.

- منابع
- Ardalan, A. A., 1996, Spheroidal coordinates and spheroidal eigenspace of the Earth gravity field. M.Sc. thesis. Department of Geodesy and GeoInformatics. Stuttgart University, July 1996.
- Ardalan, A. A., 1999, High Resolution Regional Geoid Computation in the World Geodetic Datum 2000 based upon collocation of linearized observational functionals of the type GPS, gravity potential and gravity intensity, Ph.D. thesis, stuttgart university. <http://opus.uni-stuttgart.de/opus/volltexte/2000/665/>.
- Ardalan, A. A., Safari, A., Poutanen, M., and Bilker-Koivula, M., 2006, Verification of new geopotential models at a test area in Finland. Geophys. Res. Abs., 8, 10078.
- Bjerhammer, A., 1968, On Gravity. Royal institute of Technology, Geodesy Division, Stockholm.
- Case, K., Kruizinga, G. L. H., and Wu S.-C. 2004, GRACE Level 1B Data Product User Handbook. Jet Propulsion Laboratory, California Institute of Technology, JPL D-22027.

تشکر و قدردانی

بدینوسیله نگارندگان مقاله مراتب تشکر و قدردانی خود را از پایگاه داده مؤسسه ملی هوا- فضای امریکا (NASA) به خاطر در اختیار گذاشتن داده های واقعی مأموریت گرانی سنجی GRACE در

- ellipsoidal harmonics. Chelsea Publishing Company, New York.
- Ilk, K. H., Feuchtinger, M., 2003, Gravity Field Recovery by Analysis of Short Arcs of CHAMP, Proceedings of the 2nd Science Workshop of CHAMP, accepted for publication.
- Jekeli, C., 1998, An Analysis of Geopotential Difference Determination from Satellite-to-Satellite tracking. The 2nd joint meeting of the International Gravity Commission and International Geoid Commission, 7-12, September, Trieste, Italy.
- Jekeli, C., 1999, The determination of gravitational potential differences from satellite-to-satellite tracking. *Celest. Mech. Dyn. Astr.*, **75**, 85-101.
- Keller, W., and Sharifi, M. A., 2005, Satellite Gradiometry using a satellite pair. *J. Geodesy.*, **78**, 544-557.
- Koch, K. R., 2004, Determining the maximum degree of harmonic coefficients in geopotential models by Monte Carlo methods. *J. Stud. Geophys. Geod.*, **49**, 259-275.
- Lemoine, F. G., Kenyon, S. C., Factor, J. K., Trimmer, R. G., Pavlis N. K., Chinn D. S., Cox, C. M., Klosko, S. M., Luthcke, S. B., Torrence, M. H., Wang, Y. M., Williamson, R. G., Pavlis, E. C., Rapp, R. H., and Olson, T. R., 1998, The Development of the Joint NASA GSFC and the National Imagery and Mapping Agency (NIMA) Geopotential model EGM96. NASA Technical Paper NASA/TP-1998-206861. Goddard Space Flight Center, Greenbelt.
- McCarthy, D. D., Petit, G., 2003, IERS Conventions, International Earth Rotation and Reference Systems Service (IERS).
- Marinkovic, P., Grafarend, E. W., and Reubelt, T., 2003, Space gravity spectroscopy: the benefits of Taylor-Karman structured criterion matrices, *Adv. Geosci.*, **1**, 113-120.
- Reigber, C., 1988, Lecture Notes on Gravity Field Recovery from Satellite Tracking Data, International Summer School of Theoretical Geodesy, Assisi Italy.
- Reigber, C., King, Z., König, R., and Schwintzer, P., 1996, CHAMP, A minisatellite mission for geopotential and atmospheric research, Spring AGU Meeting, Baltimore, May.
- Reigber, C., Schmidt, R., Flechtner, F., König, R., Meyer, U., Neumayer, K.-H., Schwintzer, P., and Zhu, S. Y., 2003, First GFZ GRACE Gravity Field Model EIGEN-GRACE01S, <http://op.gfz-potsdam.de/grace/results>.
- Colombo, O. L., 1981, Numerical methods for harmonic analysis on the sphere. Report #310 Ohio State University, Columbus Ohio.
- Fischell, R. E., and Pisacane, V. L., 1978, A drag-free lo-lo satellite system for improved gravity field measurements, In: Proceedings of the 9th GEOP Conference, Department of Geod. Sci. Rep. 280, Ohio State University, Columbus, pp. 213-220.
- Földvary, L., Svehla, D., Gerlach, Ch., Wermuth, M., Gruber, T., Rummel, R., Rothacher, M., Frommknecht, B., Peters, T., and Steigenberger, P., 2003, Gravity Model TUM-2Sp Based on the Energy Balance Approach and Kinematic CHAMP Orbits; Proceedings "Second CHAMP Science Meeting", GFZ Potsdam, Sept. 1-4, 2003.
- Garcia, R. V., 2002, Local Geoid Determination from GRACE mission. Report#460 Ohio State University, Columbus Ohio. 43210-1275.
- Gerlach, Ch., Földvary, L., Svehla, D., Gruber, Th., Wermuth, M., Sneeuw, N., Frommknecht B., Oberndorfer, H., Peters, Th., Rothacher, M., Rummel, R., and Steigenberger, P., 2003, A CHAMP-only gravity field model from kinematic orbits using the energy integral; *Geophys. Res. Lett.*, **30**(20), 2037, doi:10.1029/2003GL018025.
- Groten, E., 2000, Parameters of common relevance of astronomy, geodesy, and geodynamics. The geodesists handbook. *J. Geodesy.*, **74**, 134-140.
- Groten, E., 2004, Fundamental parameters and current (2004) best estimates of the parameters of common relevance to astronomy, geodesy, and geodynamics. *J. Geodesy.*, **77**, 724-797.
- Hajela, D. P., 1974, Improved procedure for the recovery of 5° mean gravity anomalies from ATS-6/GEOS-3 satellite-to-satellite range-rate observation. Rep. 276. Department of Geodetic Science, The Ohio State University, Columbus.
- Han, S.-C. 2003, Efficient Global Gravity Determination from Satellite-to-satellite Tracking (SST). Report # 467 Ohio State University, Columbus Ohio. 43210-1275.
- Han, S.-C., Jekeli, C., and Shum, C. K., 2003, Static and temporal gravity field recovery using grace potential difference observables. *Advances in Geosciences 1:19-26*, European Geosciences Union 2003.
- Heiskanen, W. A., and Moritz, H., 1967, *Physical Geodesy*, W. H. Freeman, New York.
- Hobson, E. W., 1965, *The theory of spherical and*

- Schäfer, Ch., 2000 Space gravity spectroscopy. The sensitivity analysis of GPS-tracked satellite missions (case study CHAMP), Ph.D. thesis, Stuttgart university.
- Schwintzer, P., Reigber, Ch., Bode, A., Kang, Z., Zhu, S. Y., Massmann, F. H., Raimondo, J. C., Biancale, R., Balmino, G., Lemoine, J. M., Moynot, B., Marty, J. C., Barlier, F., and Boudon, Y., 1997, Long-wavelength global gravity field models: GRIM4-S4, GRIM4-C4. *J. Geodesy.*, **71**, 189-208.
- Schwintzer, P., Reigber, Ch., Bode, A., Gruber Th., König, R., Massmann, F.-H., Raimondo J. C., Schmidt, R., and Zhu, S. Y., (GFZ Potsdam) 2000, A new global Earth's gravity field model from satellite orbit perturbations: GRIM5-S1. *Geophys. Res. Lett.*, Vol. 27, No. 22, 3611-3614.
- Tapley, B., Chambers, D. P., Bettadpur, S., and Ries, J. C., 2003, Large scale ocean circulation from the GRACE GGM01 geoid, *Geophys. Res. Lett.* 30 (22), 2163, doi: 10.1029/2003 GL018622.
- Tapley, B., Ries, J., Bettadpur, S., Chambers, D., Cheng, M., Condi, F., Gunter, B., Kang, Z., Nagel, P., Pastor, R., Pekker, T., Poole, S., and Wang, F., 2005, GGM02-An improved Earth gravity field model from GRACE, *J. Geodesy.*, **79**, 467-478.
- Tsoulis, D., 1999, Spherical harmonic computations with topographic/isostatic coefficients, IAPG/FESG No. 3, Institute of Astronomical and Physical Geodesy (IAPG), Technical University of Munich, 33 pp.
- Ustinov, E., and Sunseri, R., 2005, Adjoint sensitivity analysis of orbital mechanics: Application to computations of observables' partials with respect to harmonics of the planetary gravity fields *Geophys. Res. Abs.*, **7**, 02481, SRef-ID: 1607-7962/gra/EGU05-A-02481.
- Vermeersen, B., van der Wal W., and Schotman, H., 2003, Sensitivity analysis of regional glacial isostatic adjustment signatures in GOCE gravity field potential solutions, *Geophys. Res. Abs.*, **5**, 02675.
- Wermuth, M., Svehla, D., Gerlach, Ch., Gruber, T., Frommknecht, B., Peters, T., Rothacher, M., Rummel, R., and Steigenberger, P., 2004, A gravity field model from two years of CHAMP kinematic orbits using the energy balance approach, presentation at EGU 1st General Assmbly, 25.4-30.4. 2004, Nice/France.
- Reigber, Ch., Schwintzer, P., Neumayer, K.-H., Barthelmes, F., König, R., Förste, Ch., Balmino, G., Biancale, R., Lemoine, J.-M., Loyer, S., Bruinsma, S., Perosanz, F., and Fayard, T., 2003, The CHAMP-only Earth Gravity Field Model EIGEN-2. *Adv. Space Res.*, **31(8)**, 1883-1888, 2003 (doi: 10.1016/S0273-1177(03)00162-5)
- Reigber, Ch., Jochmann, H., Petrovic, S., Schwintzer P., Barthelmes F., Neumayer K. - H., König R., Förste Ch., Balmino G., Biancale R., Lemoine J. -M., Loyer S., Perosanz, F., 2004, Earth Gravity Field and Seasonal Variability from CHAMP, In: Reigber Ch., Schwintzer P., Wickert J. (eds.), *Earth Observation with CHAMP - Results from Three Years in Orbit*, Springer, Berlin, 25-30.
- Reigber, C., Schmidt, R., Flechtner, F., König, R., Meyer, U., Neumayer, K., Schwintzer, P., and Zhu, S. Y., 2005, An Earth gravity field model complete to degree and order 150 from GRACE: EIGEN-GRACE02S. *J. Geodyn.*, **39**, 1-10.
- Reubelt, T., Austen, G., and Grafarend, E. W., 2003a, Space Gravity Spectroscopy-determination of the Earth's gravitational field by means of Newton interpolated LEO ephemeris Case studies on dynamic (CHAMP Rapid Science Orbit) and kinematic orbits, *Adv. Geosci.*, **1**, 127-135.
- Reubelt, T., Austen, G., and Grafarend, E. W., 2003b, Space gravity spectroscopy by means of interpolated and differentiated CHAMP-orbits, *Geophys. Res. Abs.*, **5**, 03946.
- Rummel, R., 1980, Geoid heights, geoid height differences, and mean gravity anomalies from low-low satellite-to-satellite tracking, an error analysis, Report No.306, Dept. of Geod. Sci., Ohio State University, Columbus.
- Rummel, R., Gelderen, M., van, Koop R, Schrama, EJO, Sanso, F., Brovelli, M., Migliaccio, F., Sacerdote, F., 1993, Spherical harmonic analysis of satellite gradiometry, Netherlands Geodetic Commission, New Series, 39, Delft University of Technology, Faculty of Geodetic Engineering.
- Rummel, R., Balmino, G., Johannessen, J., Visser, P., and Woodworth, P., 2002, Dedicated gravity field missions and aims. *J. Geodyn.*, **33**, 2-20.
- Schäfer, Ch., 1998, A concept for satellite orbit sensitivity analysis, presentation at the IVth Hotine-Marussi Symposium on Mathematical Geodesy (proceedings in preparation), Trento.

$$\bar{P}_{nm}(t) = \sqrt{(2 - \delta_{m0})(2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{1}{2^n n!}} \quad (16)$$

$$(1-t^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{n+m}}{dt^{n+m}} (t^2-1)^n$$

که در آن δ_{m0} تابع کرونگر بوده که به ازای مرتبه $m=0$ و $m \neq 0$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\delta_{m0} = \begin{cases} 1, & m=0 \\ 0, & m \neq 0 \end{cases} \quad (17)$$

در عمل برای محاسبه این توابع از روابط بازگشتی (۱۸) و (۱۹) استفاده می‌شود.

$$\bar{P}_{nm}(t) = \sqrt{\frac{(2n+1)(2n-1)}{(n-m)(n+m)}} t \bar{P}_{n-1,m}(t) - \sqrt{\frac{(2n+1)(n+m-1)(n-m-1)}{(2n-3)(n+m)(n-m)}} \bar{P}_{n-2,m}(t) \quad (18)$$

به ازای $\forall n \neq m$

$$\bar{P}_{nm}(t) = \sqrt{\frac{(2m+1)}{2m}} \sqrt{1-t^2} \bar{P}_{m-1,m-1}(t) \quad (19)$$

به ازای $\forall n = m$ ، با مقادیر اولیه زیر:

$$\bar{P}_{00}(t) = 1 \quad (20)$$

$$\bar{P}_{10}(t) = \sqrt{3}t \quad (21)$$

$$\bar{P}_{11}(t) = \sqrt{3(1-t^2)} \quad (22)$$

برای جزئیات بیشتر در ارتباط با روابط بازگشتی فوق‌الذکر می‌توان به مراجعی نظیر (رومل و همکاران، ۱۹۹۳ و سولیس، ۱۹۹۹) رجوع کرد.

ضمیمه ۱. دستگاه مختصات کروی

ارتباط مستقیم و معکوس مختصات کروی $\{\lambda, \phi, r\}$ با مختصات کارتزین $\{x, y, z\}$ در روابط (۱۱) تا (۱۴) ارائه شده است.

"روابط مستقیم"

$$\begin{aligned} x &= r \cos \phi \cos \lambda \\ y &= r \cos \phi \sin \lambda \\ z &= r \sin \phi \end{aligned} \quad (11)$$

"روابط معکوس"

$$\lambda = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & x > 0 \wedge y \geq 0 \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi & x < 0 \wedge y \neq 0 \\ \arctan \frac{y}{x} + 2\pi & x > 0 \wedge y < 0 \\ \frac{\pi}{2} & x = 0 \wedge y > 0 \\ \frac{3\pi}{2} & x = 0 \wedge y < 0 \end{cases} \quad (12)$$

$$\phi = \arcsin\left(\frac{z}{r}\right) \quad (13)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (14)$$

ضمیمه ۲. هارمونیک‌های کروی نرمالیزه

توابع هارمونیک کروی نرمالیزه از درجه n و مرتبه m در نقطه (λ, ϕ) روی کره مرجع، با روابط (۱۵) تعریف می‌شوند (هابسن، ۱۹۶۵).

$$\begin{cases} \bar{C}_{nm}(\lambda, \phi) \\ \bar{S}_{nm}(\lambda, \phi) \end{cases} = \bar{P}_{nm}(\sin \phi) \times \begin{cases} \cos m\lambda \\ \sin m\lambda \end{cases} \quad (15)$$

در این روابط $\bar{P}_{nm}(t)$ توابع وابسته لژاندر از درجه n و مرتبه m با تعریف بوده، که برای هر آرگومان دلخواه $-1 \leq t \leq 1$ برای درجات $n = 0, 1, 2, \dots$ و مراتب $m = 0, 1, \dots, n$ به صورت زیر قابل محاسبه است (هایسکنن و موریتز، ۱۹۶۷).