

## حذف نوفه براساس خاصیت تنگی و کاربرد آن در مسائل معکوس خطی

علی غلامی<sup>۱</sup> و حمیدرضا سیاه کوهی<sup>۲\*</sup>

<sup>۱</sup> دانشجوی دکتری ژئوفیزیک، گروه فیزیک زمین، مؤسسه ژئوفیزیک، دانشگاه تهران، ایران

<sup>۲</sup> استادیار، گروه فیزیک زمین، مؤسسه ژئوفیزیک، دانشگاه تهران، ایران

(دریافت: ۸۷،۲،۲۸، پذیرش نهایی: ۸۷،۱،۵)

### چکیده

عموماً حضور نوفه در تحقیقات و اندازه‌گیری‌های ژئوفیزیکی امری اجتناب‌ناپذیر است و بسته به نوع و میزان آن، نتایج به‌دست آمده تحت تاثیر قرار می‌گیرند. از این‌رو مسئله تفکیک نوفه از سیگنال، بخشی مهم در پردازش داده‌های ژئوفیزیکی است. از طرف دیگر، محققان در ژئوفیزیک به دنبال به‌دست آوردن مشخصات فیزیکی درون زمین با استفاده از اندازه‌گیری (داده‌های) غیر مستقیم هستند که در سطح یا نزدیک به سطح زمین صورت می‌گیرد. بنابراین برای برآورد کردن مشخصات فیزیکی درون زمین باید یک مسئله معکوس حل شود. متأسفانه، اکثر مسائل معکوسی که در ژئوفیزیک ظاهر می‌شوند بدشروط (ill-condition) هستند و یا به عبارت دیگر جواب غیر یکتا و ناپایدار دارند. برای پایدار و یکتا کردن جواب این گونه مسائل از ابزارهای تنظیم (regularization) استفاده می‌شود. این به آن معنا است که با استفاده از اطلاعات از قبل موجود در مورد جواب مجهول، بتوان مسئله را پایدار کرد و نوسان‌های بسامد زیاد ناشی از نوفه را در جواب مسئله از بین برد. یکی از روش‌های مرسوم برای حل این مسائل، بسط مدل (جواب) مجهول در یک پایه متعامد، جدا کردن ضرایب مدل از ضرایب مربوط به نوفه و در نهایت به‌دست آوردن مدل است. پایه به‌دست آمده از تجزیه مقادیر تکین (Singular Value Decomposition, SVD) مثالی مرسوم در این باب است که به فراوانی مورد استفاده قرار می‌گیرد. از مشکلات اصلی پایه SVD متمرکز نبودن در مکان (زمان) است که باعث ایجاد پدیده گیبس در ناپیوستگی‌ها می‌شود. این امر جدا کردن ضرایب مدل از ضرایب نوفه را دچار مشکل می‌کند. موجک‌ها برخلاف SVD، پایه متعامدی را تشکیل می‌دهند که بردارهای آن در حوزه‌های مکان (زمان) و بسامد تمرکز یافته‌اند، بنابراین در ناپیوستگی‌ها پدیده گیبس بسیار کمتری ایجاد می‌کنند. خصوصیت دیگر آنها موجود بودن الگوریتم سریع برای محاسبه است. این خصوصیات باعث می‌شود که آنها گزینه‌های مناسبی برای حل مسائل معکوس باشند. موضوعاتی که در این مقاله بررسی شده‌اند عبارت‌اند از: ۱- عملکرد تبدیلات تنگ‌کننده (مانند تبدیل موجک) در حذف نوفه و کاربرد آنها در حل دیگر مسائل معکوس خطی. ۲- مقایسه عملکرد سه فیلتر غیرخطی انقباض سخت (hard shrinkage)، انقباض نرم (soft shrinkage) و (Amplitude-scale-invariant Bayes Estimator, ABE) به منظور برآورد ضرایب سیگنال در حوزه تنگ (sparse) برای سطوح متفاوت نوفه. ۳- عرضه روشی کارآمد برای برآورد کردن انحراف معیار نوفه (این مسئله در تحقیقاتی که داده‌برداری در آنها تکرار نمی‌شود حائز اهمیت است). انحراف معیار به‌دست آمده برای یافتن پارامتر تنظیم در روش‌های مبتنی بر موجک معرفی شده به کار برده می‌شود. در نهایت عملکرد الگوریتم‌های تدوین شده در مقایسه با روش SVD برای وارون کردن عملگر انتگرال‌گیری به منظور یافتن نرخ تغییرات یک تابع نشان داده می‌شود.

واژه‌های کلیدی: حذف نوفه، تبدیل موجک، وارون‌سازی خطی، SVD

## Sparsity-based denoising and its application in linear inverse problems

Gholami, A.<sup>1</sup> and Siahkoohi, H. R.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Ph. D. Student of Geophysics, Earth Physics Department, Institute of Geophysics, University of Tehran, Iran

<sup>2</sup>Assistant Professor, Earth Physics Department, Institute of Geophysics, University of Tehran, Iran

(Received: 17 May 2008, Accepted: 24 Jan 2009)

### Abstract

Generally, the presence of noise in geophysical measurements is inevitable and depending on the type and the level it affects the results of geophysical studies. So, denoising is an

important part of the processing of geophysical data. On the other hand, geophysicists make inferences about the physical properties of the earth interior based on the indirect measurements (data) collected at or near the surface of the earth. So, an inverse problem must be solved in order to take estimates of the physical properties in the earth. The vast majority of inverse problems which arise in geophysics are ill-posed; in other words, they have not unique and stable solutions. Regularization tools are used to find a unique and stable solution for such problems. The regularization uses a priori information about the solution to make it stable and to suppress high-frequency oscillations generated by the noise. One of the common ways to perform the regularization is expanding the unknown model (i.e. solution) with respect to an orthonormal basis, separating the model coefficients from that of the noise, and finally recovering the model.

In singular value decomposition, the specific physical nature of the model under study is not considered when defining the basis. For homogeneous operators, such basis does not provide a parsimonious approximation of models which are smooth in some regions while having sharp local changes in others. This is due to the non-localized properties of the SVD basis vectors in space (time) domain.

Wavelet-vaguelette decomposition (WVD) was introduced as a first approach for adapting wavelet methods to the framework of ill-posed inverse problems. It is a linear projection method based on wavelet-like function systems which have similar properties as the singular value decompositions. WVD are compared to the SVD construct near the orthogonal basis where the vectors are well localized in space (time) and frequency, thus producing less Gibbs-phenomenon at discontinuities. This property and existence of fast algorithm to compute the basis make wavelets a suitable candidate for solving inverse problems.

Vaguelette-wavelet decomposition (VWD) is an alternative to WVD for solving ill-posed inverse problems. It is a linear projection method based on wavelet function systems. In VWD the noisy data are expanded in a wavelet series, generated wavelet coefficients are thresholded to obtain an estimate of the wavelet expansion of noise free data, and then the resulting coefficients are transformed back for smoothed data. Later on, the smoothed data are inverted for the desired model.

In this paper we discuss: 1. The performance of sparsifying transforms (e.g. wavelet transform) for the denoising problem and their application to solve other linear inverse problems including WVD and VWD. 2. Comparing nonlinear Amplitude-scale-invariant Bayes Estimator (ABE) and hard- and soft-shrinkage filters to estimate signal coefficients in sparse domain for different levels of noise. 3. Introducing an efficient method to estimate the standard deviation of noise which is an important task in the experiments with single realization. The obtained standard deviation is then used to determine the regularization parameter in both wavelet- and SVD- based inversion methods.

Finally, inversion of integration operator to find the variation rate of a function is used to show the performance of the introduced methods in comparison to the popular SVD method. The results indicate that a simple non-linear operation of weighting and thresholding of wavelet coefficients can consistently outperform classical linear inverse methods.

**Key words:** Denoising, Wavelet transform, Linear inversion, SVD

## ۱ مقدمه

غیرمستقیمی هستند که در سطح یا نزدیک به سطح زمین صورت می‌گیرد. غیرمستقیم بودن داده‌ها به آن معنا است

در ژئوفیزیک محققان به دنبال به دست آوردن پارامترهای فیزیکی درون زمین با استفاده از اندازه‌گیری‌ها (داده‌های

صفر و واریانس  $\sigma^2$  هستند. در رابطه (۱) با داشتن  $d$  و  $K$  به دنبال  $m_{true}$  هستیم.

به سادگی دیده می‌شود اگر  $K = I$  (که  $I$  ماتریس همانی است) رابطه (۱) به مسئله حذف نوفه تبدیل می‌شود. روش‌های متفاوتی برای حذف نوفه‌های تصادفی وجود دارد (بوکلی و همکاران، ۱۹۸۸؛ وان‌ویجک و همکاران، ۲۰۰۲ و الریچ و ساشی، ۲۰۰۶). در این مقاله دیدگاهی متفاوت بر مبنای خاصیت تنکی سیگنال‌ها تحت یک تبدیل خاص برای حذف نوفه در نظر گرفته می‌شود (دونوهو و جانستون، ۱۹۹۴؛ ویداکویک، ۱۹۹۹ و کندیر و دونوهو، ۲۰۰۴). هنگامی که موفقیت تبدیلات چندمقیاسی نظیر تبدیل موجک برای تنک کردن سیگنال‌ها و جداکردن سیگنال از نوفه بررسی شد به بررسی راهکارهای حل رابطه (۱) در حالت کلی براساس خاصیت تنکی مدل پرداخته می‌شود.

روش‌های متفاوتی برای حل رابطه (۱) وجود دارد. روند کلی این روش‌ها در شکل ۱ نشان داده شده است. با توجه به شکل ۱ دیده می‌شود که با اعمال عملگر مستقیم روی مدل اصلی داده‌های بدون نوفه تولید می‌شوند که با اضافه شدن نوفه تصادفی، داده‌ها در راستای قائم حرکت داده شده‌اند. بنابراین چیزی که ما در عمل ثبت (برداشت) می‌کنیم همان بردار  $d$  است که با رابطه (۱) کاملاً تطابق دارد. مرسوم ترین روش برای رسیدن به جواب مسئله این است که مستقیم بخواهیم از  $d$  به  $m_{true}$  برسیم که مسیر آن با بردار سیاه‌رنگ در شکل ۱ نشان داده شده است. روش مرسوم تنظیم تیخونف (تیخونف و آرسنین، ۱۹۷۷) در این چارچوب قرار می‌گیرد. دیدگاه دیگر که مسیر آن با بردارهای آبی‌رنگ نشان داده شده است، بدین صورت است که ابتدا داده‌های نوفه‌ای وارون شوند، نتیجه آن مدلی است که در اثر نوفه کاملاً نوسانی است و شامل مدل اصلی به همراه نوفه‌ای است که در حوزه مدل تصویر شده است، سپس سعی

که خود پارامترهای مورد نظر اندازه‌گیری نمی‌شوند و ما تغییر یافته آنها را تحت یک عملگر خاص مشاهده می‌کنیم. اگر داده‌ها را با بردار  $d$  و پارامترهای مدل را با بردار  $m$  نشان دهیم، رابطه بین آنها را می‌توان به صورت  $d = g(m)$  نوشت. که  $g$  همان عملگر بیان شده است. به فرایند به‌دست آوری بردار  $m$  از روی بردار  $d$  با معلوم بودن ارتباط  $g$  وارون‌سازی گفته می‌شود. اما در این بین دو مشکل اساسی وجود دارد. اول اینکه، همان‌طور که می‌دانیم پارامترهای فیزیکی زمین در یک حجم سه‌بعدی توزیع شده‌اند و به طور پیوسته تغییر می‌کنند، پس دارای درجه آزادی بی‌نهایت هستند، که ما آنها را با بردار  $m$  تقریب می‌زنیم. از طرف دیگر تعداد داده‌ها خیلی کم است و در سطح یا نزدیک به سطح زمین توزیع شده‌اند. بنابراین ما با مسائل کم‌تعیین شده روبه‌رو هستیم. یعنی باید پارامترهای خود را از تعداد کمی داده به‌دست آوریم. دوم اینکه، داده‌های ما با عدم قطعیت همراه هستند، یعنی به‌طور کلی رابطه بین داده‌ها و مدل به‌صورت  $d = g(m) + e$  است. بردار  $e$  شامل خطاهای تقریب و گسسته‌سازی یا به‌طور کلی مدل‌سازی و خطاهای تصادفی است. (اسکیلز و اشنایدر، ۱۹۸۸) در این مقاله فقط خطاهای تصادفی را در نظر می‌گیریم و از دیگر خطاها چشم می‌پوشیم. همچنین در این مقاله مسائلی مورد نظر ما هستند که رابط بین مدل و داده‌ها خطی باشند. در این صورت عملگر  $g$  را می‌توان به صورت یک ماتریس نشان داد. پس به‌طور کلی مسئله ما به صورت زیر است.

$$d = Km_{true} + e \quad (1)$$

که در این رابطه  $d \in \mathbb{R}^n$  مشاهدات،  $m_{true} \in \mathbb{R}^m$  پارامترهای مورد نظر (توجه شود که برای حالت‌های دو و سه‌بعدی نیز می‌توان پارامترها را به صورت یک بردار مرتب کرد)،  $K \in \mathbb{R}^{n \times m}$  عملگر مستقیم، و  $e \in \mathbb{R}^n$  نوفه سفید با توزیع گوسی، میانگین

می‌شود با ابزارهای حذف نوفه اثر این نوفه از روی مدل حذف شود. روش مرسوم تجزیه مقادیر تکین (SVD) (هانسن، ۱۹۹۹) در این چارچوب قرار می‌گیرد. به علت ضعف‌هایی که پایه SVD برای بازسازی مدل‌های ناهمگن از خود نشان می‌دهد و همچنین توانایی که موجک‌ها برای نمایش سیگنال‌های طبیعی ناهمگن دارند، در ۱۹۹۵ روشی شبیه به SVD بر پایه موجک توسط دونوهو عرضه شد (Wavelet-Vaguelette Decomposition, WVD) (دونوهو، ۱۹۹۵ و غلامی و سیاهکوهی، ۲۰۰۷). در ۱۹۹۸ روش دیگری مطرح شد که مسیر آن در شکل ۱ با بردارهای سرخ‌رنگ دنبال می‌شود و به روش (Vaguelette- Wavelet Decomposition, VWD) (آبرامویچ و سیلورمن، ۱۹۹۸) معروف است. در این روش ابتدا اثر نوفه از روی داده‌ها حذف می‌شود، سپس الگوریتم معکوس روی نتیجه حاصل اعمال می‌شود.

در این مقاله ابتدا به حذف نوفه براساس خاصیت تنکی پرداخته می‌شود، سپس روش‌های مستقیم، دو مرحله‌ای و وارون‌سازی-حذف نوفه بر مبنای SVD و WVD و دو مرحله‌ای حذف نوفه-وارون‌سازی بر مبنای VWD معرفی می‌شوند. نشان داده می‌شود که چگونه می‌توان از خصوصیات تبدیل موجک برای حل مسائل

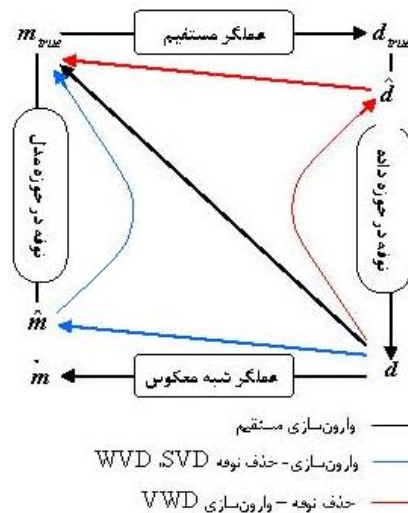
## ۲ حذف نوفه تصادفی براساس خاصیت تنکی

فرض کنید می‌خواهیم سیگنال  $g$  را از روی نسخه نوفه‌ای آن،  $f = g + e$ ، به دست آوریم که همانند رابطه (۱) تعریف می‌شود. براساس خاصیت تنکی و انقباض ضرایب در حوزه تنک یک برآورد  $\hat{g}$  از  $g$  در سه مرحله اساسی تعریف شده در زیر به دست می‌آید.

الف- انتقال داده‌های نوفه‌ای  $f$  به حوزه تنک کننده و به دست آوردن ضرایب تبدیل.

ب- جدا کردن ضرایب سیگنال از ضرایب مربوط به نوفه.

ج- آن‌گاه  $\hat{g}$  با برگردان ضرایب سیگنال به حوزه اولیه به دست می‌آید.



شکل ۱. دیدگاه‌های متفاوت برای حل مسائل معکوس خطی.

فقط یک بار صورت می گیرد کار ساده ای نیست، در ادامه (بخش برآورد پارامتر تنظیم) روشی برای برآورد واریانس داده ها در حوزه موجک عرضه می شود.

عملکرد رابطه (۲) برای حذف نوفه به شدت تحت

تأثیر تنکی ضرایب تبدیل،  $Wf$ ، قرار دارد. در اینجا

تنک بدان معنا است که تعداد اندکی از ضرایب غیر صفر

و بقیه ضرایب صفر یا نزدیک به صفر باشند. بنابراین اگر

عملگر  $W$  برای سیگنال  $f$  تنک کننده باشد، انرژی

موجود در  $f$  را در تعداد اندکی از ضرایب متمرکز

می کند. از آنجا که نوفه تصادفی نسبت به هیچ یک از

بردارهای یک پایه متعامد ترجیحی ندارد (جانستون،

۲۰۰۲) انرژی آن بین کلیه ضرایب تقسیم می شود. پارامتر

تنظیم در فیلترهای فوق، حد آستانه ای را تعریف می کند

که بزرگ تر از اندازه بزرگ ترین ضریب مربوط به نوفه

باشد (دونوهو و جانستون، ۱۹۹۴). پس به سادگی با

انتخاب ضرایبی که اندازه آنها از حد آستانه تعیین شده

بزرگ تر است (فیلتر انقباض سخت) نسبت سیگنال به نوفه

(SNR) را تا حد زیادی می توان بهبود داد. شکل ۲ این

مطلب را به خوبی نشان می دهد. شکل ۲- الف سیگنال

قطعه ای ثابت  $g$  را نشان می دهد. سیگنال نوفه ای  $f$  در

شکل ۲- ب نشان داده شده است (نوفه اضافه شده با

میانگین صفر و  $\sigma = 1$  است). پایه های موجک هار و

فوریه را برای حذف نوفه از روی سیگنال  $f$  با هم مقایسه

می کنیم. شکل های ۲- پ و ۲- ت به ترتیب اندازه

ضرایب موجک و فوریه سیگنال اصلی  $g$  را نشان

می دهند. همان طور که دیده می شود سیگنال اصلی  $g$

تحت تبدیل این موجک کاملاً تنک است و کل انرژی

سیگنال فقط در هفت تا از ضرایب متمرکز شده است. از

طرف دیگر عناصر پایه فوریه در مکان (زمان) متمرکز

نیستند و به همین علت در ناپیوستگی های سیگنال ایجاد

گیس می کنند، این باعث شده است تا انرژی نقاط

ناپیوستگی ها تقریباً در همه ضرایب پخش شود و دامنه

در این مقاله عملگر تبدیل تنک کننده با ماتریس  $W$

نشان داده می شود و چون تبدیل موجک متعامد را برای

تنک کردن سیگنال به کار می بریم، می توان نوشت

$$W^T W = W W^T = I \quad \text{که در آن } T \text{ نشان دهنده}$$

ترانهاد است. پس، سه مرحله فوق را می توان در رابطه زیر

خلاصه کرد.

$$\hat{g} = W^T \delta_{\tau}(Wf) \quad (2)$$

در رابطه (۲)  $\delta_{\tau}(x)$  یک فیلتر غیرخطی، و  $\tau$  پارامتر

تنظیم است. ما سه فیلتر غیرخطی را در این مقاله مقایسه

می کنیم. دو فیلتر مرسوم برای  $\delta_{\tau}(x)$  فیلترهای انقباض

سخت و انقباض نرم هستند. (مالات، ۱۹۹۸) در انقباض

سخت ضرایبی که اندازه آنها از حد آستانه  $\tau$  کمتر باشد

با صفر جایگزین می شوند.

$$\delta_{\tau}^{Hard}(x) = \begin{cases} x & |x| \geq \tau \\ 0 & otherwise \end{cases} \quad (3)$$

اما در انقباض نرم اندازه همه ضرایب به مقدار  $\tau$  کوچک

می شود.

$$\delta_{\tau}^{Soft}(x) = \begin{cases} x - \tau & x \geq \tau \\ x + \tau & x \leq -\tau \\ 0 & |x| < \tau \end{cases} \quad (4)$$

فیلتر غیرخطی دیگر، ABE (فیگور دو و نواک، ۱۹۹۹)،

به صورت زیر تعریف می شود.

$$\delta_{\tau}^{ABE}(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - \tau}{x} & x^2 \geq \tau \\ 0 & otherwise \end{cases} \quad (5)$$

در فیلترهای انقباض سخت و انقباض نرم مقدار

$\tau = \sigma \sqrt{2 \log_e(N)}$  است (دونوهو و جانستون،

۱۹۹۴) که  $N$  تعداد ضرایب تبدیل است. در فیلتر ABE

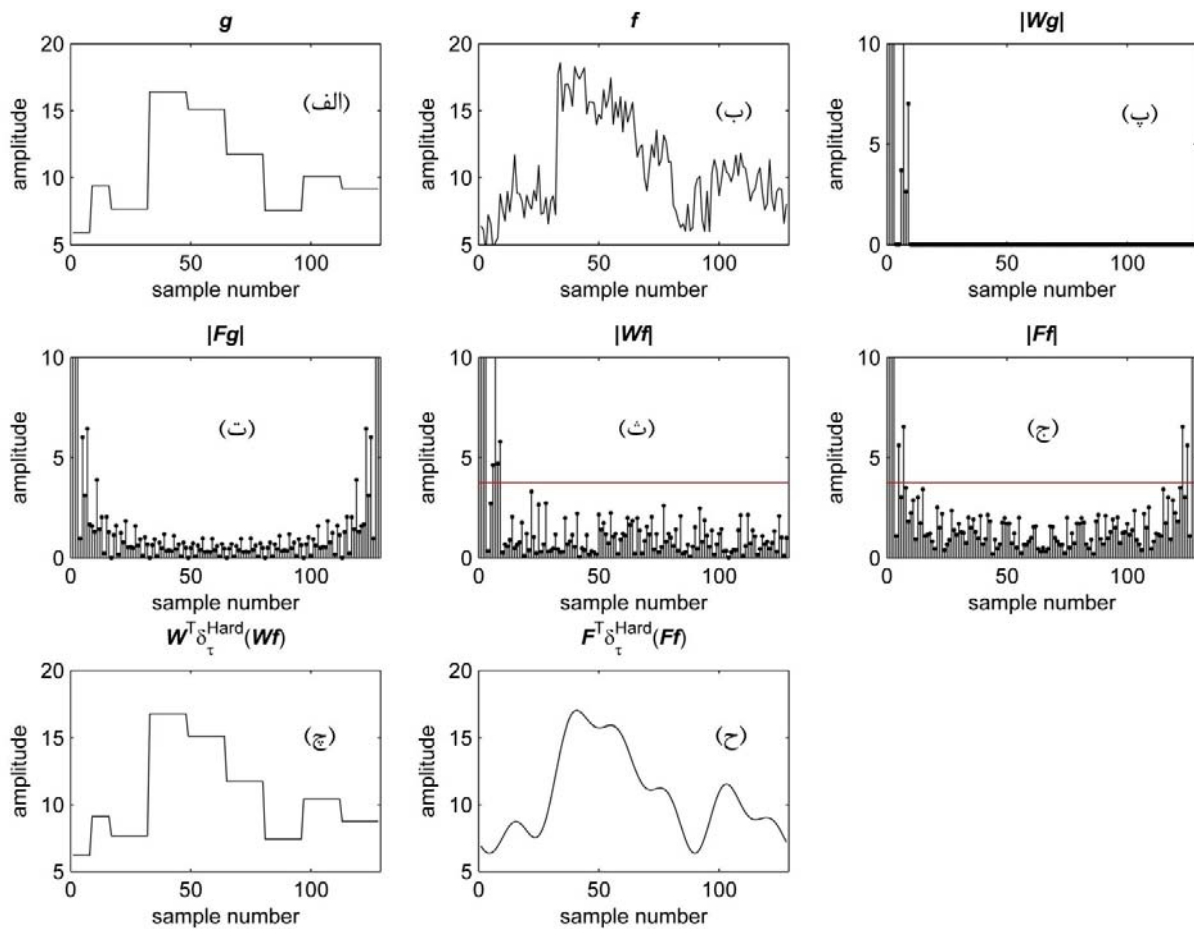
داریم  $\tau = 3\sigma^2$ . می بینیم که پارامتر تنظیم در هر سه

فیلتر فقط به انحراف معیار داده ها،  $\sigma$ ، بستگی دارد. گرچه

برآورد واریانس داده ها هنگامی که عمل برداشت داده

از نتیجه به سیگنال‌های بازسازی شده در شکل‌های ۲-ج و ۲-ح می‌رسیم. دیده می‌شود که سیگنال اصلی به خوبی در حوزه موجک هار بازسازی شده است اما ناپوستگی‌های تیز موجود در سیگنال بازسازی شده در حوزه فوریه را از دست داده‌ایم. زیرا انرژی مربوط به این نقاط در ضرایبی از فوریه قرار داشتند که اندازه آنها کوچک‌تر از مقدار تعیین شده برای پارامتر تنظیم بوده است و هنگام اعمال فیلتر از بین رفته‌اند.

آنها را غیر صفر کند. شکل‌های ۲-ث و ۲-ج به ترتیب اندازه ضرایب موجک و ضرایب فوریه سیگنال  $f$  را نشان می‌دهند. در شکل دیده می‌شود که نوفه موجود در سیگنال، تقریباً همه ضرایب را به یک اندازه تحت تأثیر قرار داده است. خط سرخ‌رنگ در این شکل‌ها مقدار پارامتر تنظیم  $\tau = \sigma\sqrt{2\log_e(N)}$  را نشان می‌دهد (در این مثال  $\sigma$  معین در نظر گرفته شده است) با اعمال فیلتر انقباض سخت بر این ضرایب و گرفتن عکس تبدیل



**شکل ۲.** نمایش جدا کردن سیگنال از نوفه براساس خاصیت تنگی سیگنال. (الف) سیگنال اصلی، (ب) سیگنال اصلی ترکیب شده با نوفه تصادفی با میانگین صفر و  $\sigma = 1$  است، (پ) سیگنال اصلی در حوزه موجک هار، (ت) سیگنال اصلی در حوزه فوریه، (ث) سیگنال نوفه‌ای در حوزه موجک هار، (ج) سیگنال نوفه‌ای در حوزه فوریه، (چ) سیگنال بازسازی شده در حوزه موجک هار، (ح) سیگنال بازسازی شده در حوزه فوریه. در شکل‌های (ث) و (ج) خط سرخ‌رنگ حد آستانه انقباض ضرایب،  $\tau = \sigma\sqrt{2\log_e(N)}$  را نشان می‌دهد همچنین ماتریس‌های  $W$  و  $F$  به ترتیب عملگرهای مستقیم تبدیل موجک هار و تبدیل فوریه هستند. برای توضیحات بیشتر درباره شکل به متن مقاله مراجعه کنید.

$$\hat{m}_\alpha = (K^T K + \alpha R^T R)^{-1} K^T d \quad (۷)$$

اگرچه از لحاظ عددی حل رابطه (۷) سخت نیست و روش‌های زیادی برای حل آن وجود دارند، اما این رابطه همواری یکنواختی را بر مدل اعمال می‌کند، به طوری که در حضور نوفه نمی‌تواند ناپیوستگی‌های موجود در مدل اصلی را به خوبی بازسازی کند.

### ۳-۲ روش وارون‌سازی - حذف نوفه

اگر عملگر وارون را با  $K^{-1}$  نشان دهیم (اگر  $K$  وارون‌پذیر نباشد، به جای  $K^{-1}$  از عملگر شبه‌وارون (می‌یر، ۲۰۰۱) استفاده می‌شود) می‌توان یک مدل نوفه‌ای را به صورت زیر به دست آورد.

$$\begin{aligned} \hat{m} &= K^{-1} d = K^{-1} (K m_{true} + e) \quad (۸) \\ &= m_{true} + K^{-1} e \end{aligned}$$

در مرحله بعدی اثر  $K^{-1} e$  از روی  $\hat{m}$  برداشته می‌شود. این یک مسئله حذف نوفه است. اما اگر عملگر  $K$  بدشرط باشد، آن‌گاه  $K^{-1} e$  می‌تواند خیلی بزرگ باشد، به طوری که  $m_{true}$  را کاملاً تحت تأثیر قرار دهد. فرض کنید ماتریس‌های  $S$ ،  $U$  و  $V$  حاصل تجزیه مقادیر تکین ماتریس  $K$  باشند (کندیز و دونوهو، ۲۰۰۴). که  $U$  و  $V$  ماتریس‌هایی متعامد شامل بردارهای ویژه و  $S$  یک ماتریس قطری شامل مقادیر تکین است که به ترتیب از بزرگ به کوچک قرار گرفته‌اند آن‌گاه جواب SVD به صورت زیر است.

$$\hat{m}_{tsvd}^K = V S^{-1} F_K U^T d \quad (۹)$$

در رابطه (۹)  $F_K$  یک ماتریس قطری، و  $K$  پارامتر تنظیم است و به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$F_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \text{ and } i \leq \kappa \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (۱۰)$$

۳ دیدگاه‌های متفاوت برای حل رابطه (۱) در حالت کلی در بخش قبل مسئله حذف نوفه تصادفی از روی سیگنال با استفاده از خاصیت تنکی سیگنال اصلی تحت یک تبدیل خاص بررسی شد. دیدیم که اگر سیگنال اصلی تحت یک تبدیل مشخص، تنک باشد، به سادگی و با دقت زیادی می‌توان آن را از روی نسخه نوفه‌ای آن بازسازی کرد. به طور کلی سیگنال‌های یک‌بعدی با تعداد محدودی ناپیوستگی به خوبی تحت تبدیل موجک تنک هستند (مالات، ۱۹۹۸)، بنابراین موجک‌ها ابزارهای توانمندی برای حذف نوفه هستند. حال باید دید این ابزارها چگونه به حل رابطه کلی (۱) به ما کمک می‌کنند. این بحث در بخش‌های بعدی بررسی می‌شود.

### ۳-۱ روش وارون‌سازی مستقیم

دیدگاه اولیه برای حل رابطه کلی (۱) کمینه کردن اختلاف بین مشاهدات و داده‌های پیش‌بینی شده است که منجر به مدل نوفه‌ای و ناپایدار  $m$  در شکل ۱ می‌شود. در روش تیخونف با اعمال محدودیت بر اندازه یا همواری مدل سعی در پایدار و یکتا کردن جواب می‌شود. تنظیم تیخونف به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\hat{m}_\alpha = \operatorname{argmin}_m \|d - Km\|_2^2 + \alpha \|Rm\|_2^2 \quad (۶)$$

در رابطه (۶)  $\alpha > 0$  پارامتر تنظیم و  $R$  عملگر تنظیم نام دارند. عملگر تنظیم براساس فرضیات (اطلاعات) ما در مورد مدل انتخاب می‌شود. با انتخاب آن به صورت ماتریس یکانی مدلی را انتظار داریم که اندازه آن کوچک باشد و با انتخاب آن به صورت یک عملگر مشتق‌گیری گسسته، انتظار مدلی هموار می‌رود. مرسوم‌ترین آنها عملگرهای مشتق‌گیری درجه اول و دوم هستند (هانسن، ۱۹۹۹). با گرفتن مشتق طرف راست رابطه (۶) نسبت به  $m$  و قرار دادن نتیجه برابر صفر خواهیم داشت.

### ۳-۳ روش حذف نوفه - وارون سازی

در این روش ابتدا اثر نوفه از روی داده‌ها حذف می‌شود، سپس با اعمال الگوریتم معکوس جواب VWD حاصل می‌شود (آبرامویچ و سیلورمن، ۱۹۹۸).

$$\hat{m}_{VWD}^T = K^{-1} W^T \delta_T(Wd) \quad (12)$$

که  $\delta_T(x)$  یک فیلتر غیرخطی، و دوباره  $T$  پارامتر تنظیم است. در این روش مقداری نوفه از مرحله حذف نوفه در داده‌ها باقی می‌ماند بنابراین در عمل به جای اعمال  $K^{-1}$  در رابطه (۱۲)، داده‌های به دست آمده از مرحله حذف نوفه ورودی تنظیم تیخونف (رابطه ۶) مطرح است. این کار تا حدودی اثرات نوفه باقی مانده را از بین می‌برد.

### ۴ برآورد پارامتر تنظیم

برآورد پارامتر تنظیم یکی از مراحل اساسی در حل مسائل معکوس محسوب می‌شود. همان‌طور که دیدیم در روش‌های بر مبنای موجک، این پارامتر به انحراف معیار استاندارد داده‌ها بستگی دارد. بنابراین ابتدا باید واریانس داده‌ها را برآورد کنیم. روش‌های متفاوتی برای برآورد واریانس داده‌ها وجود دارد (بوکلی و همکاران، ۱۹۸۸ و وان‌ویجک و همکاران، ۲۰۰۲). در این مقاله ما از روشی که واریانس را در حوزه موجک برآورد می‌کند استفاده می‌کنیم. فرض کنید  $c = Wd$  بردار ضرایب موجک مربوط به داده‌ها برای یک موجک خاص باشد. آن‌گاه انحراف معیار استاندارد داده‌ها را می‌توان به صورت زیر برآورد کرد (دونوهو و جانستون، ۱۹۹۴).

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{0.6745} \text{median}(|c^{J-1}|) \quad (13)$$

که در رابطه (۱۳)  $c^{J-1}$  بردار ضرایب تبدیل موجک در مقیاس  $J-1$  است، که  $J$  شماره ریزترین مقیاس در تبدیل موجک مورد نظر است. به دو دلیل رابطه (۱۳) برآورد خوبی از انحراف معیار داده‌ها عرضه می‌کند: اول اینکه در مقیاس  $J-1$  نسبت سیگنال به نوفه کم است، و اگر داده‌ها

با انتخاب پارامترهای تنظیم  $K$  و  $\alpha$  جواب‌های حاصل از روابط (۷) و (۹) می‌توانند خیلی به هم نزدیک باشند (هانسن، ۱۹۹۹). بنابراین در این مقاله تنها از روش SVD برای مقایسه با روش‌های بر مبنای موجک استفاده می‌شود.

حال فرض کنید  $W$  ماتریس عملگر تبدیل موجک مستقیم باشد، آن‌گاه جواب VWD به صورت زیر است (دونوهو، ۱۹۹۵).

$$\hat{m}_{VWD}^K = W^T \Gamma^{-1} \delta_T(Hd) \quad (11)$$

در رابطه (۱۱)  $H = \Gamma W K^{-1}$  و ماتریس قطری  $\Gamma$  باعث می‌شود که ستون‌های ماتریس  $H$  حاوی انرژی واحد باشند. هر کدام از ستون‌های ماتریس  $H$  را یک ویگلت (vaguelette) می‌نامند.  $\delta_T(x)$  یک فیلتر غیرخطی، و دوباره  $T$  پارامتر تنظیم است. رابطه (۱۱) را هنگامی می‌توان به کار برد که عملگر مستقیم  $K$  همگن باشد، مانند عملگر انتگرال‌گیری، دیکانولوشن و تبدیل رادون (دونوهو، ۱۹۹۵). این بدان معنا است که اگر  $K$  بر روی یک موجک اعمال شود، نتیجه آن خصوصیات یک موجک را داشته باشد. در این صورت آنرا ویگلت می‌نامند.

دو عامل هستند که رابطه (۱۱) را در عمل کارآمد می‌کنند. یکی موجود بودن الگوریتم سریعی، با عنوان الگوریتم هرمی، برای اعمال اثر ماتریس  $W$  (مالات، ۱۹۹۵)، و دیگری متمرکز بودن پایه‌های موجک در حوزه‌های زمان (مکان) - بسامد است. عامل دوم باعث می‌شود که این پایه‌ها بتوانند ناپیوستگی‌ها را به خوبی تقریب بزنند. اکثر زمان مورد نیاز برای اعمال رابطه (۱۱) مربوط به محاسبه  $K^{-1}d$  است که برای ماتریس‌های بزرگ با روش‌های بازگشتی همانند گرادیان‌های مزدوج (اسکیلز، ۱۹۸۷) قابل محاسبه است.



به فراوانی در زمینه‌های گوناگون علوم ظاهر می‌شود. در ژئوفیزیک برای به‌دست آوردن مدل توزیع سرعت در زمین، در فیزیک برای یافتن سرعت ذره با داشتن موقعیت آن، و در علوم دیگر هر جا که نیاز به دانستن نرخ تغییرات یک فرایند باشد با رابطه (۱۵) سروکار دارند.

اما در حضور نوفه، آنقدر هم که به نظر می‌رسد حل رابطه (۱۵) ساده نیست زیرا عملگر انتگرال‌گیری بسامدهای زیاد موجود در مدل را تضعیف می‌کند. بنابراین تغییرات کوچک ایجاد شده در داده‌ها باعث ایجاد نوسانات بزرگی در مدل نهایی می‌شود. با استفاده از ابزارهای تنظیم سعی می‌شود که از حضور این نوسانات در مدل جلوگیری شود و در عین حال ناپیوستگی‌های موجود در مدل حفظ شود. در هر کدام از روش‌های SVD، WVD، و VWD با برآورد سیگنال از نوفه در یک حوزه خاص (SVD، ویگلت، موجک) سروکار داریم. بنابراین هر چه مدل اصلی در حوزه مربوطه تنگ‌تر باشد این جداسازی بهتر صورت می‌گیرد. سیگنال‌هایی که حاوی ناپیوستگی باشند در حوزه SVD تنگ نخواهند بود زیرا برای عملگر مستقیم در رابطه (۱۵) پایه‌های SVD مانند پایه‌های فوریه هستند (کلان و همکاران، ۲۰۰۶). این پایه‌ها گرچه در حوزه بسامد خوب تمرکز یافته‌اند اما در حوزه مکان (زمان) تمرکزی ندارند و در ناپیوستگی‌ها پدیده گیس ایجاد می‌کنند.

در این مقاله از خانواده موجک‌های Daubechies (دابیچی، ۱۹۹۲) برای اعمال تبدیل موجک استفاده شده است. موجک مناسب در روش VWD موجکی است که درجه همواری Sobolev آن کمتر یا برابر درجه همواری عملگر مستقیم باشد (کلان و همکاران، ۲۰۰۶)، از طرفی در روش WVD مدل اصلی در حوزه موجک بسط داده می‌شود اما در روش VWD داده‌ها، و چون داده‌ها یک درجه نسبت به پارامترهای مدل هموارترند (به علت انتگرال‌گیری) موجک‌های مورد استفاده نیز با یک درجه

خیلی ناهموار نباشند در این مقیاس بیشتر نوفه وجود خواهد داشت. دلیل دوم این است که ۵۰٪ ضرایب تبدیل در این مقیاس قرار می‌گیرند.

به‌طور کلی دو دیدگاه اساسی برای برآورد پارامتر تنظیم در روش SVD وجود دارد. دیدگاه اول شامل روش‌هایی است که بر مبنای اطلاعات اولیه در مورد نوفه استوار هستند، مانند روش اصل اختلاف (Discrepancy Principle) (موروزف، ۱۹۶۶). دیدگاه دیگر شامل روش‌هایی است که بدون این اطلاعات اولیه کار می‌کنند، مانند روش منحنی L (هانسن، ۱۹۹۹). در این مقاله از آنجا که ما با روش‌های بر مبنای موجک، واریانس داده‌ها را برآورد می‌کنیم، بنابراین از نتیجه رابطه (۱۳) استفاده می‌کنیم تا با استفاده از روش اصل اختلاف، پارامتر تنظیم را در روش SVD محاسبه کنیم. در روش اصل اختلاف پارامتر  $K$  کوچک‌ترین مقداری است که رابطه زیر برقرار باشد (هانسن، ۱۹۹۹).

$$\|d - K\hat{m}_{tsvd}^K\|_2 \leq \sqrt{n}\hat{\sigma} \quad (14)$$

در رابطه (۱۴)  $\hat{m}_{tsvd}^K$  از رابطه (۹) به‌دست می‌آید.

## ۵ بررسی کارآیی روش

در این بخش عملکرد الگوریتم‌های معرفی شده در بالا یعنی SVD، WVD، و VWD را روی داده‌های مصنوعی برای برآورد مشتق یک تابع مورد آزمون قرار می‌گیرند. بنابراین مسئله به صورت زیر است.

$$d(x) = \int_0^x m_{true}(t) dt + e(x) \quad (15)$$

که در حالت گسسته می‌توان آنرا به صورت رابطه (۱) نوشت.

از آنجا که داده‌ها،  $d$ ، حاصل انتگرال پارامترهای مدل هستند، بنابراین اگر نوفه‌ای در کار نباشد با مشتق‌گیری از آنها می‌توان پارامترهای مدل را برآورد کرد. رابطه (۱۵)

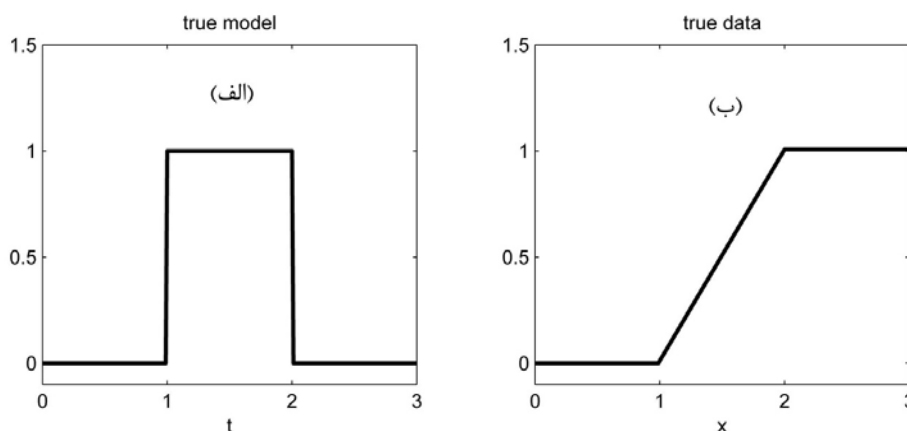
نرم و ABE برای سطوح متفاوت نوفه برای روش‌های

WVD و VWD

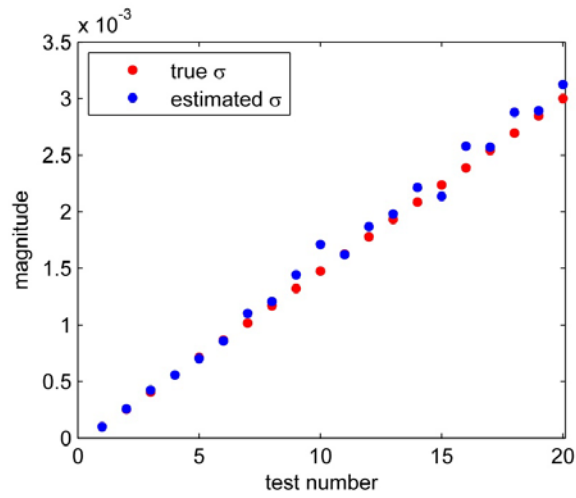
به ترتیب در شکل‌های ۵-الف و ۵-ب نشان داده شده است. شکل ۵ دیده می‌شود که فیلتر ABE در هر دو روش برای سطوح متفاوت نوفه نسبت به فیلترهای سخت و نرم بهتر عمل می‌کند. نتیجه حاصل از وارون کردن داده‌ها برای یک سطح نوفه خاص،  $\sigma = 0.02$ ، با روش‌های WVD، VWD و SVD در شکل ۶ نشان داده شده است. برای روش‌های WVD و VWD فیلتر ABE به کار برده شده است. در این مورد انحراف معیار برآورد شده برابر  $\hat{\sigma} = 0.02099$  بود که به مقدار واقعی آن بسیار نزدیک است. همچنین پارامتر تنظیم برای روش SVD، به دست آمده از فرمول اصل اختلاف (رابطه (۱۴))، برابر  $K = 45$  شد. همان‌طور که در شکل ۶ دیده می‌شود، پدیده گپس در اطراف ناپیوستگی‌های مدل به دست آمده با روش SVD کاملاً مشهود است که این امر به علت متمرکز نبودن عناصر پایه SVD در مکان است. این پدیده در مدل‌های حاصل از روش‌های WVD و VWD بسیار کمتر مشاهده می‌شود. در نهایت مقایسه‌ای بین عملکرد سه روش WVD، VWD و SVD بر مبنای  $MSE = m^{-1} \|\hat{m} - m_{true}\|_2^2$  برای سطوح متفاوت نوفه صورت گرفت که نتیجه آن را در شکل ۷ می‌بینید.

تفاوت در همواری انتخاب می‌شوند. بنابراین برای برآورد واریانس داده‌ها و روش وارون WVD از موجک db2 و برای روش وارون VWD از موجک db3 استفاده شده است. در ادامه برای احتراز از محدود کردن کاربرد الگوریتم برای یک شاخه علمی خاص (مثل ژئوفیزیک) سعی شده است تا توابع پایه‌ای انتخاب شوند.

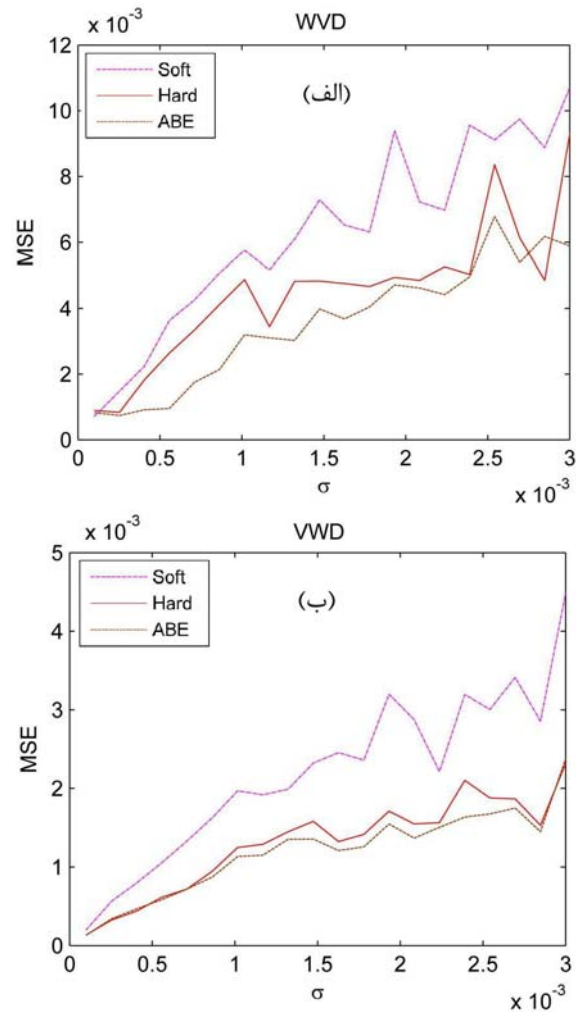
مثال ۱: در این مثال به برآورد کردن یک تابع جعبه‌ای پرداخته می‌شود. مدل اصلی و داده‌های بدون نوفه حاصل از آن به ترتیب در شکل ۳-الف و ۳-ب نشان داده شده است. در این مثال تعداد پارامترهای مدل ۲۵۶ و تعداد داده‌ها ۱۲۸ در نظر گرفته شده است. به منظور آزمودن عملکرد الگوریتم عرضه شده برای برآورد واریانس داده‌ها، مقایسه عملکرد فیلترهای متفاوت معرفی شده برای انقباض ضرایب و همچنین مقایسه روش‌های متفاوت برای سطوح مختلف نوفه در حل مسئله، داده‌های حاصل را با سطوح متفاوت نوفه (با مشخصات گفته شده در رابطه (۱)) ترکیب کردیم. شکل ۴ نتایج حاصل از عملکرد الگوریتم معرفی شده برای برآورد واریانس داده‌ها در حوزه موجک برای سطوح متفاوت نوفه را نشان می‌دهد. همان‌طور که ملاحظه می‌شود روش عرضه شده، واریانس داده‌ها را با به خوبی برآورد می‌کند. نتایج حاصل از مقایسه عملکرد سه فیلتر غیرخطی انقباض سخت، انقباض



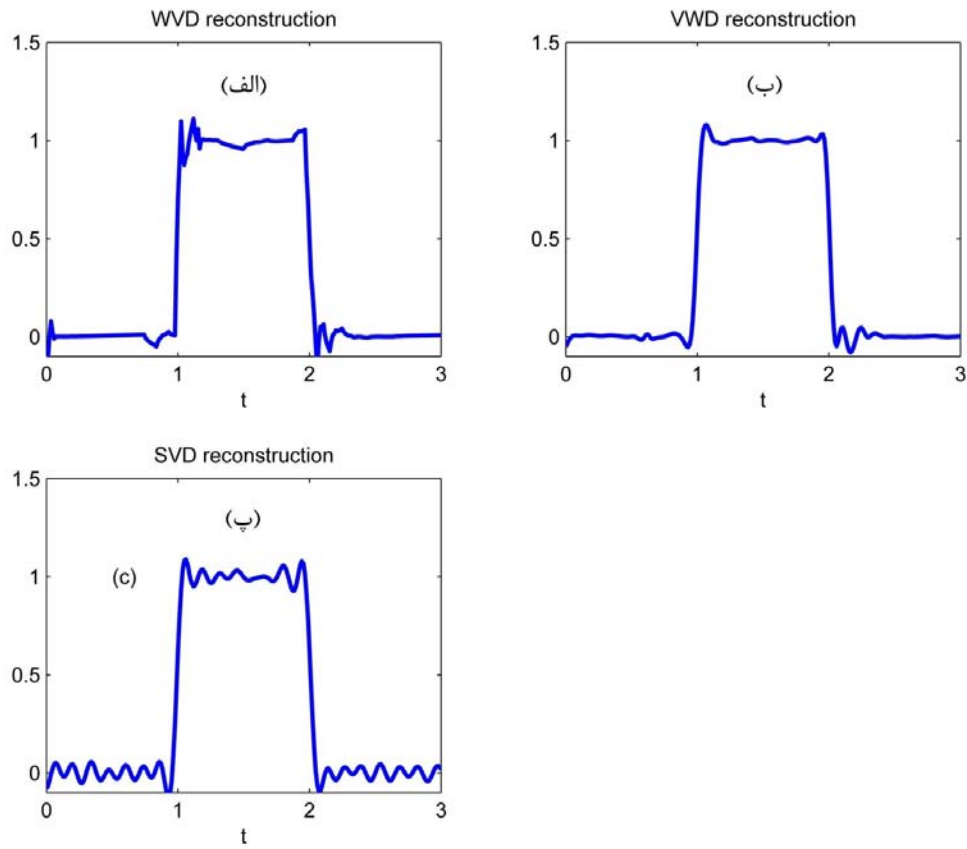
شکل ۳. (الف) مدل اصلی برای مثال ۱ و (ب) داده‌های حاصل از اعمال عملگر انتگرال‌گیری روی آن.



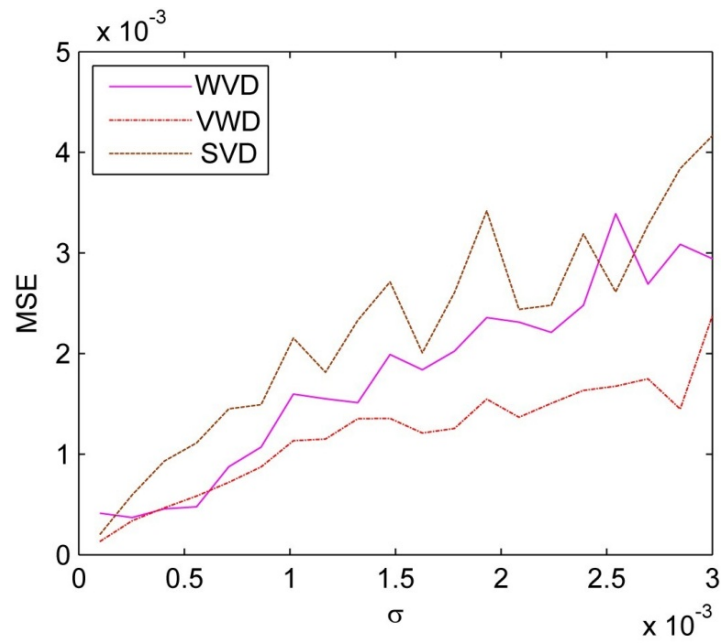
شکل ۴. نتایج حاصل از برآورد نوفه تصادفی در حوزه موجک برای سطوح متفاوت نوفه.



شکل ۵. نتایج حاصل از مقایسه عملکرد سه فیلتر غیرخطی انقباض سخت، انقباض نرم و ABE برای سطوح متفاوت نوفه. (الف) مقایسه صورت گرفته برای روش WVD و (ب) مقایسه صورت گرفته برای روش VWD.



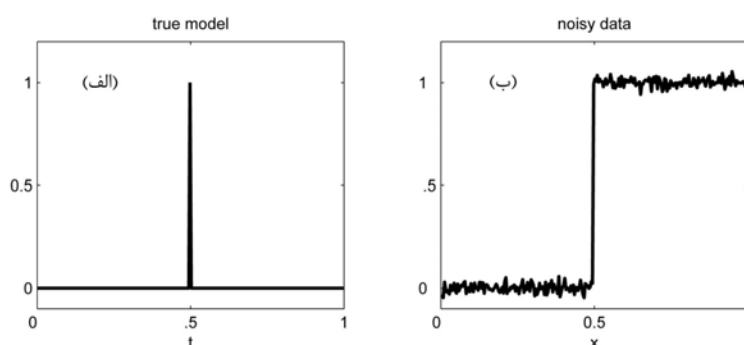
شکل ۶. نتایج حاصل از وارون کردن داده‌های نوفه‌ای ساخته شده در مثال ۱ به همراه نوفه با روش‌های (الف) WVD، (ب) VWD و (پ) SVD.



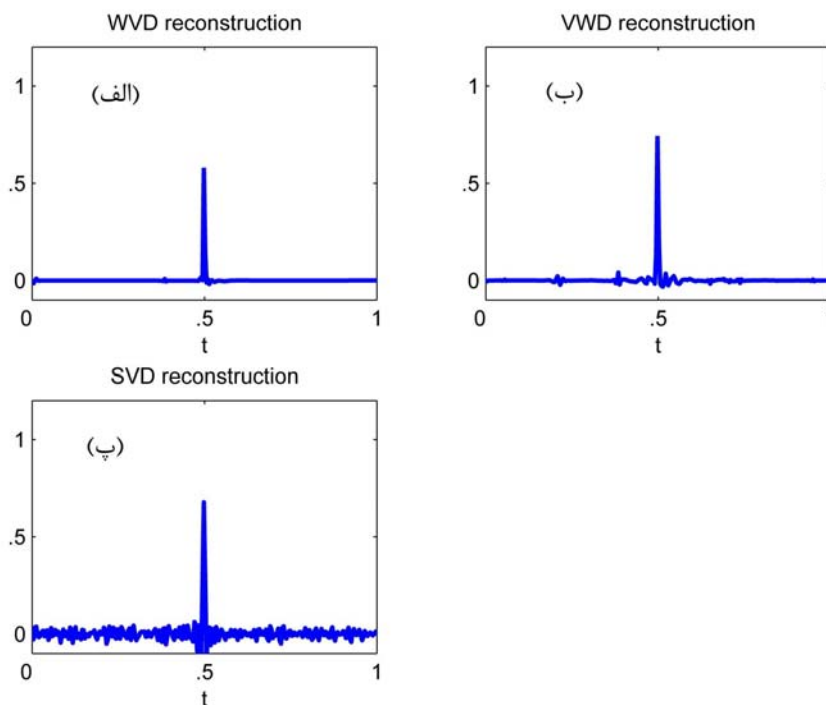
شکل ۷. مقایسه عملکرد روش‌های WVD، VWD و SVD برای وارون کردن عملگر انتگرال‌گیری در حضور سطوح متفاوت نوفه.

پارامتر تنظیم در روش SVD برای این مثال برابر ۱۷۸ می‌شود. مدل اصلی و داده‌های حاصل از آن به همراه نوفه تصادفی با میانگین صفر و انحراف معیار  $\sigma = 0.200$  به ترتیب در شکل ۸-الف و ۸-ب نشان داده شده است. در این مورد نیز تعداد پارامترهای مدل ۲۵۶ و تعداد داده‌ها ۱۲۸ در نظر گرفته شده است. همچنین انحراف معیار برآورد شده برابر  $\hat{\sigma} = 0.208$  بود که می‌بینیم به مقدار واقعی آن بسیار نزدیک است. مقدار به‌دست آمده برای VWD بسیار کمتر است.

پارامتر تنظیم در روش SVD برای این مثال برابر ۱۷۸ می‌شود. مدل اصلی و داده‌های حاصل از آن به همراه نوفه تصادفی با میانگین صفر و انحراف معیار  $\sigma = 0.200$  به ترتیب در شکل ۸-الف و ۸-ب نشان داده شده است. در این مورد نیز تعداد پارامترهای مدل ۲۵۶ و تعداد داده‌ها ۱۲۸ در نظر گرفته شده است. همچنین انحراف معیار برآورد شده برابر  $\hat{\sigma} = 0.208$  بود که می‌بینیم به مقدار واقعی آن بسیار نزدیک است. مقدار به‌دست آمده برای VWD بسیار کمتر است.



شکل ۸. الف) مدل اصلی برای مثال ۲ و ب) داده‌های حاصل از اعمال عملگر انتگرال‌گیری روی آن به همراه نوفه.



شکل ۹. نتایج حاصل از وارون‌کردن داده‌های نوفه‌ای ساخته شده در مثال ۲ به همراه نوفه با روش‌های (الف) VWD، (ب) VWD و (پ) SVD.

## ۵ نتیجه گیری

در این مقاله به بررسی دو دیدگاه متفاوت برای حل مسائل معکوس خطی بر مبنای خاصیت تنکی مدل مورد نظر تحت تبدیل موجک در مقایسه با روش مرسوم SVD پرداخته شد. اگر مدل اصلی حاوی ناپیوستگی باشد، بسط آن در پایه SVD پدیده گیبس ایجاد می کند بنابراین در مدل بازسازی شده به خوبی نمی توان ناپیوستگی ها را بازسازی کرد. الگوریتم های بر مبنای موجک به علت متمرکز بودن موجک ها در حوزه های مکان (زمان) و بسامد پدیده گیبس بسیار کمتری نسبت به روش SVD در ناپیوستگی ها ایجاد می کنند.

برای جدا کردن ضرایب مربوط به سیگنال و نوفه مرسوم است که از فیلترهای غیرخطی انقباض سخت یا نرم استفاده شود. در این مقاله فیلتر غیرخطی دیگری با عنوان ABE معرفی شد و عملکرد هر سه فیلتر برای دو روش معرفی شده بر مبنای خاصیت تنکی در حضور نوفه های با سطوح متفاوت مقایسه شد. نتایج ما در این مقاله، عملکرد بهتر فیلتر ABE را نسبت به فیلترهای انقباض سخت و نرم به وضوح نشان داد.

در حالی که انتخاب پارامتر تنظیم در حل مسائل معکوس مسئله ای چالش برانگیز بوده و هست، در روش های معرفی شده پارامتر تنظیم فقط به انحراف معیار داده ها وابسته است. همچنین در این مقاله روشی برای برآورد کردن انحراف معیار داده ها در حوزه موجک معرفی شد.

## تشکر و قدردانی

این پژوهش با استفاده از اعتبارات شورای پژوهشی دانشگاه تهران در قالب اجرای طرح پژوهشی شماره ۶۲۰۱۰۲۴/۱/۰۱ به انجام رسیده است، بدین وسیله نویسندگان، مراتب تشکر و قدردانی خود را اعلام می دارند.

## منابع

- Abramovich F., and Silverman B.W., 1998, Wavelet decomposition approaches to statistical inverse problems: *Biometrika*, **85**, 115-129.
- Buckley M.J., Eagleson G.K., and Silverman B.W., 1988, The estimation of residual variance in nonparametric regression. *Biometrika*, **75**, 189-199.
- Candes, E. J., and Donoho, D. L., 2004, New Tight Frames of Curvelets and Optimal Representations of Objects with Piecewise C2 Singularities, *Commun Pur Appl. Math.*, **57**, 219-266.
- Daubechies I., 1992, Ten lectures on wavelets, SIAM, Philadelphia., USA.
- Donoho D.L., 1995, Nonlinear solution of linear inverse problems by wavelet- vaguelette decomposition: *Appl. Comput. Harmon. A.*, **2**(2), 101-126.
- Donoho D.L., and Johnstone I.M., 1994, Ideal spatial adaptation via wavelet shrinkage, *Biometrika*, **81**, 425-455.
- Figueiredo, M. and Nowak, R., 1999, Bayesian wavelet-based image estimation using non-informative priors, *Proceedings of the SPIE Conference on Mathematical Modeling, Bayesian Estimation, and Inverse Problems*, 97-108.
- Gholami A., and Siahkoohi H.R., 2007, A hybrid method for linear inversion of geophysical data: EAGE 69th International Conference and Exhibition, London, Expanded Abstracts.
- Hansen P.C., 1999, Rank-deficient and discrete ill-posed problems: numerical aspects of linear inversion: SIAM, Philadelphia. USA.
- Johnstone, I.M., 2002, Function estimation and Gaussian sequence models. Available at: <http://www-stat.stanford.edu/~imj>.
- Klann, E., Maass, P., and Ramlau, R., 2006. Two-step regularization methods for linear inverse problems, *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, **14**, 583-607.
- Mallat S.G., 1998, A wavelet tour of signal processing. Academic Press., UK.
- Meyer C.D., 2001, Matrix analysis and applied linear algebra, SIAM, Philadelphia. USA.
- Morozov V.A., 1966, On the solution of functional equations by the method of regularization, *Sov. Math. Dokl.*, **7**, 414-417.
- Scales, J.A., 1987. Tomographic inversion via the conjugate gradient method, *Geophysics*, **52**, 179-185.
- Scales J.A., and Snieder R.K., 1998. What is noise?, *Geophysics*, **63**(4), 1122-1124.

- Tikhonov A.N., and V.Y., Arsenin, 1977, Solutions of ill-posed problems, Winston, Washington, D.C., USA.
- Ulrych, T.J., and Sacchi, M.D., 2006, Information-Based Inversion and Processing with Applications, Elsevier, Netherlands.
- van Wijk, k., Scales J.A., Navidi W., and Tenorio L., 2002, Data and model uncertainty estimation for linear inversion. *Geophys. J. Int.* **149**, 625-632.
- Vidakovic B. 1999. Statistical modeling by wavelets. John Wiley and Sons, Inc., New York. USA.