

معرفی یک روش نوین برای محاسبه سامانه‌های ارتفاعی براساس حل مسئله مقدار مرزی ژئودتیک با مرزهای ثابت

عبدالرضا صفری

استادیار، گروه مهندسی نقشه‌برداری، پردیس دانشکده‌های فنی، دانشگاه تهران، ایران

(دریافت: ۸۶۱۰/۴، پذیرش نهایی: ۸۸۲/۲۲)

چکیده

مسئله تعیین ارتفاع همواره مورد علاقه کاربران حوزه‌های گوناگون تحقیقاتی و اجرایی است. اعداد ژئوپتانسیل نقشی اساسی در تعریف سامانه‌های ارتفاعی متفاوت دارند. در این مقاله روشی نوین برای تعیین اعداد ژئوپتانسیل و به تبع آن سامانه‌های ارتفاعی گوناگون بر مبنای حل مسئله مقدار مرزی ژئودتیک با مرزهای ثابت معرفی شده است. روش معرفی شده به صورت موفقیت آمیزی در مورد قسمت مرکزی ایران آزمایش شد. میانگین اختلاف ارتفاع ارتومتریک محاسبه شده براساس روش پیشنهادی و ارتفاع ارتومتریک در نقاط GPS/Leveling یک میلی‌متر با انحراف معیار ۵۵ سانتی‌متر حاصل شد.

واژه‌های کلیدی: سامانه‌های ارتفاعی، اعداد ژئوپتانسیل، مسئله مقدار مرزی ژئودتیک، شتاب گرانی

A new method for height determinations based on solving the geodetic fixed boundary value problem

Safari, A.

Assistant Professor, Department of Surveying and Geomatics Engineering, Faculty of Engineering, University of Tehran, Iran

(Received: 25 Dec 2007, Accepted: 12 May 2009)

Abstract

The simple method for height determination is spirit leveling. The leveled height differences are path-dependent. Ergo height from spirit leveling is not unique. The problem can be solved by converting the path-dependent leveled height differences into unique path-independent height differences (Vanicek and Krakiwsky, 1986).

The difference between the potentials of two close equipotential surface can be written as:

$$\delta W \doteq -g\delta h \quad (1)$$

Practically, instead of potential, it is better to use geopotential numbers C_i :

$$C_i = -(W_i - W_0) \quad (2)$$

Having derived geopotential numbers, we can compute various height systems such as dynamic height, orthometric height and normal height. According to (1), with gravity measured along the leveling line, the potential difference as a path-independent quantity can be determined. In this method we can only compute geopotential numbers for points where we can establish a leveling path.

On the other hand with geoid height at hand and the availability of geodetic height from GPS, we can compute orthometric height. With computation of mean gravity, orthometric height can be converted to geopotential number. But there are still some open problems with computation of geoid and mean gravity. The aim of this paper is the presentation of a new method for computation of geopotential numbers based on solving the fixed geodetic boundary value problem.

With the availability of GPS coordinates for the point on the Earth's surface, the outer boundary of the Earth can be regarded as a known and fixed boundary. With boundary observations on the Earth's surface at hand, we deal with a fixed geodetic boundary value problem. The problem is defined as follows:

$$\left\{ \begin{array}{ll}
 1. \operatorname{div} \operatorname{grad} w(x) = 2\omega^2 & \forall x \in \Sigma_{ext} \\
 \text{(outside the Earth's masses)} & \\
 2. \operatorname{div} \operatorname{grad} w(x) = -4\pi G\sigma + 2\omega^2 & \forall x \in \overline{\Sigma_{int}} \\
 \text{(internal space plus boundary of the planet the Earth)} & \\
 3. E\{\|\operatorname{grad} w\|\} = \gamma & \forall x \in \Sigma \\
 \text{(boundary value data of type modulus of gravity)} & \\
 9. w(x) = \frac{1}{2} \omega^2 \|x - \langle x | e_\omega \rangle e_\omega\|_2^2 + \frac{GM}{\|x\|_2} + \mathcal{O}_w\left(\frac{1}{\|x\|_2^3}\right) & \|x\|_2 \rightarrow \infty \\
 \text{(regularity condition at infinity)} &
 \end{array} \right.$$

where w is the gravity potential of the Earth, γ the norm of the gravity vector on the Earth's surface, σ mass density, ω the angular velocity and W_0 geoid potential.

The first step towards the solution of the proposed fixed geodetic boundary value problem is the linearization of the problem. After linearization we obtained a linear boundary value problem as follows:

$$\left\{ \begin{array}{ll}
 \operatorname{div} \operatorname{grad} \delta W = 0 & \forall x \in \Sigma_{ext} \\
 \delta \Gamma = \frac{\partial \delta W}{\partial \lambda_\Sigma} & \forall x \in \Sigma \\
 \delta W = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\|x\|_2^{l+1}}\right) & \text{for } \|x\|_2 \rightarrow \infty
 \end{array} \right.$$

In this paper we propose a new method for solving the linear boundary value problem based on harmonic splines. The main steps of the new method are as follows:

- Application of the ellipsoidal harmonic expansion complete up to degree and order of 360 and of the ellipsoidal centrifugal field for removal of the effect of the global gravity from gravity intensity at the surface of the Earth.
- The removal from the gravity intensity at the surface of the Earth of the effect of residual masses at a radius of up to 55 km from the computational point.
- Solution of the linear boundary value problem based on harmonic splines.
- Restoration of the removed effects in order to compute potential on the surface of the Earth.

-Subtraction of the geoid potential from the computed potential on the Earth's surface in order to obtain geopotential numbers.

-Computation of various height systems.

Computation of various height systems in the central part of Iran has successfully tested this methodology.

Key words: Height systems, Geopotential numbers, Geodetic boundary value problem, Gravity

۱ مقدمه

اعداد ژئوپتانسیل گرچه دارای این ویژگی مفیدند که برای هر نقطه یکتا هستند و می‌توانند درحکم یک سامانه ارتفاعی به کار روند ولی عیب آنها این است که واحد آنها مجذور متر بر مجذور ثانیه است، در حالی که کاربران اغلب علاقه‌مند به سامانه‌ای ارتفاعی هستند که دارای واحد متر باشد.

برای رفع این عیب، ارتفاع دینامیک نقطه P_i به صورت زیر تعریف شده است (وینیچک و کراکیوسکی، ۱۹۸۶):

$$H_i^D = \frac{C_i}{\gamma_0} \quad (۳)$$

که در رابطه فوق γ_0 شتاب گرانی نرمال در منطقه مورد توجه است. سامانه مبتنی بر ارتفاعات دینامیک، گرچه دارای واحد متر است ولی در آن، نقاط واقع بر یک سطح هم‌پتانسیل دارای ارتفاع دینامیک یکسان هستند و در نتیجه، برای بعضی از کاربردها نظیر بررسی‌های هیدرولوژی مناسب‌اند. برای خیلی از کاربران مفهوم هندسی ارتفاع جذاب‌تر است. به همین دلیل سامانه ارتفاع ارتومتریک تعریف شده است. ارتفاع ارتومتریک در نقطه P_i به صورت زیر تعریف می‌شود (هیسکانن و موریتز، ۱۹۶۷):

$$H_i^O = \frac{C_i}{g_i} \quad (۴)$$

که در رابطه فوق C_i عدد ژئوپتانسیل نقطه P_i و \bar{g}_i شتاب گرانی متوسط در امتداد خط شاقول گذرنده از

مسئله تعیین ارتفاع همواره مورد علاقه کاربران در حوزه‌های گوناگون تحقیقاتی و اجرایی است. ساده‌ترین شیوه به منظور تعیین ارتفاع روش ترازایی است. پس از انتخاب یک نقطه درحکم مبنا، می‌توان ارتفاع سایر نقاط را از راه ترازایی تعیین کرد. ارتفاع حاصل از ترازایی به دلیل وابستگی اختلاف ارتفاع حاصل از ترازایی به مسیر ترازایی یکتا نیست. بنابراین نمی‌توان این روش را به مثابه روشی مناسب برای تعیین ارتفاع نقاط به کاربرد (وینیچک و کراکیوسکی، ۱۹۸۶؛ سانسو و وینیچک، ۲۰۰۶ و جکلی، ۲۰۰۰). مشکل را می‌توان با تبدیل نتایج وابسته به مسیر به نتایج مستقل از مسیر حل کرد. برای دو سطح هم‌پتانسیل نزدیک به هم رابطه زیر برقرار است (وینیچک و کراکیوسکی، ۱۹۸۶):

$$\delta W \cong -g\delta h \quad (۱)$$

می‌توان اختلاف ارتفاع δh را که کمیتی وابسته به مسیر است به اختلاف پتانسیل δW مستقل از مسیر تبدیل کرد. لذا با اندازه‌گیری شتاب گرانی در طول خط ترازایی می‌توان اختلاف پتانسیل بین دو نقطه را که مستقل از مسیر است به دست آورد. بنابراین می‌توان به هر نقطه P_i یک پتانسیل W_i نسبت داد. در عمل بهتر است که به جای پتانسیل W_i از عدد ژئوپتانسیل استفاده کرد. عدد ژئوپتانسیل C_i مربوط به نقطه P_i به صورت زیر تعریف می‌شود (هیسکانن و موریتز، ۱۹۶۷):

$$C_i = -(W_i - W_0) \quad (۲)$$

کرد. در این روش نیز مشکلاتی وجود دارد که از آن جمله می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

- تعیین ژئوئید هنوز یکی از مسائل مطرح در ژئودزی است و تعیین آن با مشکلاتی همراه است. از جمله مشکلاتی که در راه تعیین ژئوئید وجود دارد این است که به منظور انتقال به سمت پایین مشاهدات بایستی جرم‌های خارج ژئوئید را حذف کرد تا امکان انتقال به سمت پایین مشاهدات فراهم شود. با توجه به نبود شناخت دقیق از چگالی پوسته حداقل این جرم‌ها به صورت کامل حذف نمی‌شود و لذا به لحاظ نظری شرایط لازم برای انتقال به سمت پایین مشاهدات برقرار نیست. از طرف دیگر حتی با وجود برقراری این شرایط انتقال به سمت پایین، مشاهدات که با انتگرال آبل-پواسون و مشتقات آن صورت می‌گیرد یک مسئله بدطرح بوده و حل آن همواره مشکلات مسائل بدطرح را به همراه خواهد داشت (مارتینک، ۱۹۹۶؛ اردلان و گرافارند، ۲۰۰۴ و صفری و همکاران، ۲۰۰۵).

- تبدیل ارتفاع ارتومتریک حاصل از این روش به عدد ژئوپتانسیل، نیازمند تعیین شتاب گرانی متوسط در امتداد خط شاقولی بین نقطه مورد نظر در روی سطح زمین و ژئوئید است که تعیین این شتاب گرانی متوسط یکی از مشکلاتی است که هنوز ژئودزین‌ها با آن مواجه هستند. لذا خطای تعیین شتاب گرانی متوسط به سایر سامانه‌های ارتفاعی نیز منتقل می‌شود.

ایجاد سامانه‌های تعیین موقعیت ماهواره‌ای باعث تعریف نوعی از مسائل مقدار مرزی ژئودتیک شد که به مسائل مقدار مرزی ژئودتیک با مرز ثابت معروف هستند (کوخ و پوپ، ۱۹۷۲؛ فریدن و کرستن، ۱۹۸۰؛ بیاهامر و سونسون، ۱۹۸۳؛ درمانیس، ۱۹۹۳؛ سانسو، ۱۹۹۵؛ اردلان و گرافارند، ۲۰۰۴ و صفری و همکاران، ۲۰۰۵). در این مسائل بر خلاف مسائل مقدار مرزی ژئودتیک با مرز آزاد، سطح خارجی زمین معلوم فرض شده و لذا تنها

نقطه P_i است. یکی از مشکلات اصلی در تعیین ارتفاع ارتومتریک، تعیین شتاب گرانی متوسط در امتداد خط شاقول گذرنده از نقطه است.

در برخی از کشورها، سامانه ارتفاعی دیگری مورد استفاده قرار می‌گیرد که سامانه ارتفاعی نرمال نامیده می‌شود. سامانه ارتفاعی نرمال با رابطه زیر تعریف می‌شود. (هیسکانن و موریتز، ۱۹۶۷):

$$H_i^N = \frac{C_i}{\bar{\gamma}_i} \quad (5)$$

که در آن C_i عدد ژئوپتانسیل نقطه P_i و $\bar{\gamma}_i$ شتاب گرانی متوسط نرمال در امتداد خط شاقول گذرنده از نقطه P_i است.

همان‌طوری که ملاحظه می‌شود، تعیین هر کدام از این سامانه‌های ارتفاعی دینامیک، ارتومتریک و نرمال، مستلزم داشتن اعداد ژئوپتانسیل در آن نقاط است. روش‌های مرسوم برای تعیین این اعداد ژئوپتانسیل عبارت‌اند از:

الف- تعیین اعداد ژئوپتانسیل از راه ایجاد یک خط ترازایی از دریا‌های آزاد و مشاهدات گرانی روی این خط ترازایی. البته این روش دارای مشکلاتی است که عبارت‌اند از:

- با این روش فقط قادر به تعیین اعداد ژئوپتانسیل در نقاطی هستیم که در آنها امکان ترازایی دقیق وجود داشته باشد.

- تعیین اعداد ژئوپتانسیل نیازمند تعیین دقیق صفر ارتفاعی است. اما تعیین موقعیت صفر ارتفاعی دارای مشکلاتی است.

ب- روش دیگر برای به دست آوردن اعداد ژئوپتانسیل، تعیین ژئوئید در منطقه است. با در اختیار داشتن ژئوئید در منطقه و امکان دسترسی به سامانه‌های تعیین موقعیت جهانی (Global Positioning Systems) قادر هستیم که ارتفاع ارتومتریک را در منطقه تعیین کنیم و سپس با رابطه (۴) این ارتفاع ارتومتریک را به عدد ژئوپتانسیل تبدیل

- سطح Σ دارای یک میدان برداری مشتق‌پذیر (یا مشتق‌پذیر μ -هولدر) نرمال یکه ν (یا به صورت دقیق‌تر ν_{Σ}) که دارای جهت به سمت داخل فضای Σ^{ext} است. از جمله این سطوح منظم Σ در علوم زمین، می‌توان به بیضوی، اسفروئید، ژئوئید و سطح منظم زمین اشاره کرد.

با معلوم بودن سطح منظم، ثابت‌های α, β وجود دارد به طوری که:

$$\alpha < \sigma^{\inf} = \inf_{x \in \Sigma} |x| \leq \sup_{x \in \Sigma} |x| = \sigma^{\sup} < \beta \quad (6)$$

از نمادهای A_{int} و B_{int} (به همین ترتیب A_{ext} و B_{ext}) برای مشخص کردن فضای داخلی (به همین ترتیب خارجی) کره A و کره B حول مبداء با شعاع‌های به ترتیب α و β استفاده شده و نمادهای Σ_{int}^{\sup} و Σ_{int}^{\inf} (به همین ترتیب Σ_{ext}^{\sup} و Σ_{ext}^{\inf}) نیز مشخص کننده فضای داخلی (به همین ترتیب خارجی) کره Σ^{\inf} و کره Σ^{\sup} حول مبداء با شعاع‌های به ترتیب σ^{\inf} و σ^{\sup} است.

مجهول در این مسائل مقدار مرزی، پتانسیل گرانی زمین است. در این مقاله یک روش جدید برای حل این گونه مسائل با استفاده از اسپیلاین‌های هارمونیک معرفی می‌شود. در این روش سطح بیرونی زمین به منزله مرز در نظر گرفته می‌شود. سپس اعداد ژئوپتانسیل روی سطح زمین محاسبه می‌شود. مزیت این روش این است که مستقیماً پتانسیل گرانی زمین روی سطح زمین تعیین می‌شود و لذا محاسبه عدد ژئوپتانسیل و سامانه‌های ارتفاعی به سادگی صورت می‌گیرد.

در بخش دوم این مقاله بعضی مقدمات ریاضی برای معرفی اسپیلاین‌های هارمونیک معرفی می‌شود. در بخش سوم ساختار فضای هیلبرت کرنل باز آفرین و جواب بهینه درونیابی مطرح می‌شود. در بخش چهارم کاربرد اسپیلاین‌های هارمونیک برای حل مسئله مقدار مرزی با مرز ثابت و محاسبه سامانه‌های ارتفاعی در ناحیه مرکزی ایران به طور موفقیت آمیزی آزمایش شده است.

۲ مقدمات ریاضی

در این بخش بعضی مقدمات ریاضی برای معرفی اسپیلاین‌های هارمونیک معرفی می‌شود.

۲-۲ هارمونیک‌های خارجی

فرض کنید $\{Y_{n,j}\}, n=0,1,\dots, j=1,\dots, 2n+1$ یک سامانه متعامد یکه L^2 از هارمونیک‌های کروی (سطحی) باشد به طوری که (فریدن و اشنايدر، ۱۹۹۸):

$$\begin{aligned} (Y_{n,k}, Y_{p,q})_{L^2(A)} &= \int_A Y_{n,k} \left(\frac{x}{|x|} \right) Y_{p,q} \left(\frac{x}{|x|} \right) d\omega(x) \\ &= \alpha^2 \delta_{np} \delta_{kq} \end{aligned} \quad (7)$$

که در آن $d\omega$ مشخص کننده عنصر سطح است. در این صورت سامانه هارمونیک‌های خارجی $\{H_{-n-1,j}(\alpha; \cdot)\}, \alpha > 0, n=0,1,\dots, j=1,\dots, 2n+1$ تعریف شده با رابطه زیر:

۱-۲ سطوح منظم
سطح $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ را منظم (یا منظم μ -هولدر، $0 \leq \mu \leq 1$) می‌نامند اگر دارای ویژگی‌های زیر باشد (فریدن و میشل، ۲۰۰۴):

- سطح Σ فضای اقلیدسی سه‌بعدی را به منطقه کراندار Σ_{int} (فضای داخلی) و منطقه غیر کراندار Σ_{ext} (فضای خارجی) تعریف شده با $\Sigma = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Sigma_{int}}, \overline{\Sigma_{int}} = \Sigma_{int} \cup \Sigma$ تقسیم می‌کند.
- فضای Σ_{int} شامل مبداء است.

- سطح Σ بسته و فشرده بوده و فاقد نقاط دوگانه (Double Points) است.

مسئله دیریکله خارجی (Exterior Dirichlet problem):

تابع $F \in C(\Sigma)$ معلوم است تابع $U \in Pot^{(0)}(\overline{\Sigma_{ext}})$ را بیابید به نحوی که:

$$U_{\Sigma}^{+}(x) = \lim_{\substack{\tau \rightarrow 0 \\ \tau > 0}} U(x + \tau\nu(x)) = F(x), \quad x \in \Sigma. \quad (11)$$

مسئله نیومن خارجی (Exterior Neumann problem):

تابع $G \in C(\Sigma)$ معلوم است، تابع $U \in Pot^{(1)}(\overline{\Sigma_{ext}})$ را بیابید به نحوی که:

$$\frac{\partial U^{+}}{\partial \nu_{\Sigma}}(x) = \lim_{\substack{\tau \rightarrow 0 \\ \tau > 0}} \nu(x) \cdot (\nabla U)(x + \tau\nu(x)) = G(x), \quad x \in \Sigma. \quad (12)$$

مسئله مشتق مایل خارجی (Exterior Oblique Derivative problem):

تابع $H \in C^{(0,\mu)}(\Sigma)$ معلوم است تابع $U \in Pot^{(1,\mu)}(\overline{\Sigma_{ext}})$ را بیابید به نحوی که:

$$\frac{\partial U^{+}}{\partial \nu_{\Sigma}}(x) = \lim_{\substack{\tau \rightarrow 0 \\ \tau > 0}} \lambda(x) \cdot (\nabla U)(x + \tau\lambda(x)) = H(x), \quad x \in \Sigma. \quad (13)$$

که در آن λ (یا به صورت دقیق تر λ_{Σ}) یک میدان برداری (یکه) $C^{(1,\mu)}$ روی Σ است که در رابطه زیر صدق می کند:

$$\inf_{x \in \Sigma} (\lambda(x) \cdot \nu(x)) > 0 \quad (14)$$

چنانچه میدان λ بر میدان نرمال ν بر روی Σ منطبق باشد، معادله (۱۳) تبدیل به شرط مرزی مسئله نیومن خارجی کلاسیک می شود.

۴-۲ مسئله مقدار مرزی گسسته

فرض کنید که Σ یک سطح منظم باشد. مسئله مقدار مرزی گسسته می تواند به صورت زیر بیان شود: فرض کنید که داده های $(x_i, F(x_i)), i = 1, \dots, N$ از تابع $F \in C(\Sigma)$ متناظر به یک مجموعه X_N از نقاط x_1, \dots, x_N معلوم باشد (فریدن و میشل، ۲۰۰۴).

$$H_{-n-1,j}(\alpha; x) = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\alpha}{|x|} \right)^{n+1} Y_{n,j} \left(\frac{x}{|x|} \right), \quad x \in \overline{A_{ext}} \quad (8)$$

در شرایط زیر صدق می کند:

- توابع $H_{-n-1,j}(\alpha; \cdot) \in C^{(\infty)}(\overline{A_{ext}})$ متعلق به دسته توابع ∂A_{ext} است. که در آن $\overline{A_{ext}} = A_{ext} \cup \partial A_{ext}$ نماد نشان دهنده مرز A_{ext} است.

- توابع $H_{-n-1,j}(\alpha; \cdot)$ در معادله لاپلاس $\Delta_x H_{-n-1,j}(\alpha; x) = 0$ صدق می کند.

$$H_{-n-1,j}(\alpha; \cdot)|_A = \frac{1}{\alpha} Y_{n,j}$$

$$\int_A H_{-n-1,j}(\alpha; x) H_{-n-1,l}(\alpha; x) d\omega(x) = \delta_{n,k} \delta_{j,l}$$

قضیه جمع برای هارمونیک های خارجی به ازای تمام $(x, y) \in \overline{A_{ext}} \times \overline{A_{ext}}$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\sum_{j=1}^{2n+1} H_{-n-1,j}(\alpha; x) H_{-n-1,j}(\alpha; y) = \frac{2n+1}{4\pi\alpha^2} \left(\frac{\alpha^2}{|x||y|} \right)^{n+1} P_n \left(\frac{x}{|x|} \cdot \frac{y}{|y|} \right) \quad (9)$$

که در رابطه فوق مشخص کننده چند جمله ای های لژاندر P_n از درجه n است.

۳-۲ مسائل مقدار مرزی

فضای همه توابع $U \in C^{(2)}(\Sigma_{ext})$ که در فضای خارجی Σ_{ext} در معادله لاپلاس صدق می کنند و در بی نهایت منظم هستند (به عبارت دیگر هنگامی که $|U(x)| = O(|x|^{-1}), |\nabla_x U(x)| = O(|x|^{-2}), |x| \rightarrow \infty$ با $Pot(\Sigma_{ext})$ نشان داده می شود. به ازای $k = 0, 1, \dots$ تعریف می کنیم (فریدن و اشنایدر، ۱۹۹۸):

$$Pot^{(k)}(\overline{\Sigma_{ext}}) = pot(\Sigma_{ext}) \cap C^{(k)}(\overline{\Sigma_{ext}}) \quad (10)$$

مسائل مقدار مرزی به صورت زیر تعریف می شود (فریدن و میشل، ۲۰۰۴):

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{2n+1} A_n^{-1} F^{\wedge_{L^2(A)}}(n, k) \times H_{-n-1, k}^{\alpha} \Big|_{\overline{\Sigma_{ext}^{inf}}}, F \in L^2(A) \quad (17)$$

به طوری که:

$$\|V\|_{\mathcal{H}} = \|F\|_{L^2(A)} \quad (18)$$

قضیه ۳-۱: فضای \mathcal{H} تعریف شده با رابطه (۱۶) و مجهز به ضرب داخلی $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}}$ یک فضای هیلبرت جدایی پذیر دارای کرنل بازآفرین (Reproducing Kernel) زیر است (فریدن، ۱۹۹۹):

$$K_{\mathcal{H}}(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{2n+1} A_n^{-2} H_{-n-1, k}^{\alpha}(x) H_{-n-1, k}^{\alpha}(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{2n+1} A_n^{-2} \left(\frac{\alpha}{\sigma_{inf}} \right)^{2n} H_{-n-1, k}^{\sigma_{inf}}(x) H_{-n-1, k}^{\sigma_{inf}}(y), \quad (19)$$

که در آن $(x, y) \in \overline{\Sigma_{ext}^{inf}}$ است. دستگاه توابع $\left\{ A_n^{-1} \left(\frac{\alpha}{\sigma_{inf}} \right)^n H_{-n-1, k}^{\sigma_{inf}} \right\}$ یک پایه برای فضای هیلبرت \mathcal{H} است.

نامساوی زیر:

$$|V(x)| \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n^{-2} \frac{2n+1}{4\pi\alpha^2} \left(\frac{\alpha^2}{(\sigma_{inf})^2} \right)^{n+1} \right)^{\frac{1}{2}} \|V\|_{\mathcal{H}} \quad (20)$$

به ازای هر $x \in \overline{\Sigma_{ext}^{inf}}$ و به ازای تمام $V \in \mathcal{H}$ برقرار است. بنابراین شرط لازم و کافی برای اینکه \mathcal{H} دارای یک کرنل بازآفرین باشد برقرار است (ارونسجین، ۱۹۵۰) و بنابراین رابطه زیر برقرار است:

$$V(x) = (K_{\mathcal{H}}(x, \cdot), V)_{\mathcal{H}}, \quad x \in \overline{\Sigma_{ext}^{inf}} \quad (21)$$

از رابطه (۲۰) لم زیر به دست می آید:

مسئله دیریکله خارجی گسسته: تقریب U_N از جواب $U_N \in Pot^{(0)}(\overline{\Sigma_{ext}})$, $U^+ = F$, در فضای بیرونی کره A به شعاع α حول مبدا هارمونیک باشد و روی سطح Σ تابع $F_N = U_N|_{\Sigma}$ دقیقاً همان مقادیر را در نقاط داده شده حاصل کند به عبارت دیگر $U_N(x_i) = U(x_i)$, $i = 1, \dots, N$ باشد و خطای مطلق بین F_N و F روی Σ کوچک باشد.

مسئله نیومن خارجی گسسته: یک تقریب U_N از جواب $U \in Pot^{(1, \mu)}(\overline{\Sigma_{ext}})$, $\frac{\partial U}{\partial \lambda_{\Sigma}} = F$, $0 < \mu \leq 1$, در

آن $\lambda: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ (یا دقیق تر $\lambda_{\Sigma}: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$) باشد و دارای این ویژگی است که $\inf_{x \in \Sigma} (\lambda(x) \cdot \nu(x)) > 0$ را به نحوی بیاید که U_N در فضای بیرونی کره A به شعاع α حول مبدا هارمونیک باشد و روی سطح Σ تابع $F_N = \frac{\partial U_N^+}{\partial \lambda_{\Sigma}}$ دقیقاً همان مقادیر را در نقاط داده شده

حاصل کند، به عبارت دیگر $U_N(x_i) = U(x_i)$, $i = 1, \dots, N$ باشد و خطای مطلق بین F_N و F روی Σ کوچک باشد.

۳ ساختار فضای هیلبرت کرنل بازآفرین

فرض کنید که $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ یک سطح منظم و دنباله (A_n) یک دنباله $\left(\left(\frac{\alpha}{\sigma_{inf}} \right)^n \right)$ جمع پذیر باشد (فریدن و میشل، ۲۰۰۴). فرض کنید که $A_n \neq 0$ به ازای تمام $n \geq 0$ و

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) A_n^{-2} \quad (15)$$

فضای زیر را در نظر بگیرید:

$$\mathcal{H} \left(\left(A_n \left(\frac{\sigma_{inf}}{\alpha} \right)^n \right); \overline{\Sigma_{ext}^{inf}} \right) = \mathcal{H} \left((A_n); \overline{A_{ext}} \right) \Big|_{\overline{\Sigma_{ext}^{inf}}} \quad (16)$$

فضای تعریف شده با رابطه (۱۶) به اختصار با \mathcal{H} نمایش داده می شود. فضای \mathcal{H} فضای هیلبرت پتانسیل های با نمایش زیر است:

$$N_x^{(2)} : V \mapsto N_x^{(2)} V = \frac{\partial^2}{\partial \lambda_\Sigma^2} V(x), \quad V \in \mathcal{H} \quad (29)$$

به عبارت دیگر به ازای تمام توابع $V \in \mathcal{H}$ رابطه $N_x^{(2)} V = (V, \lambda_\Sigma \cdot (\nabla \otimes \nabla) K_{\mathcal{H}}(\cdot, x) \lambda_\Sigma)_{\mathcal{H}}$ برقرار است.

۱-۳ درون یابی اسپیلاین هارمونیک (مسئله درون یابی) مسئله درون یابی را می توان به صورت زیر تعریف کرد (فریدن و میشل، ۲۰۰۴):

فرض کنید از جواب $U : \overline{\Sigma_{ext}} \rightarrow \mathbb{R}$ مسئله مقدار مرزی $LU = F$ اطلاعات $(x_i, F(x_i)) \in \Sigma \times \mathbb{R}, i = 1, \dots, N$ معلوم باشد. تابع U_N را به نحوی بیابید که:

$$\|U_N\|_{\mathcal{H}} = \inf_{V \in \mathcal{I}_N^F} \|V\|_{\mathcal{H}} \quad (30)$$

که در آن:

$$\mathcal{I}_N^F = \{V \in \mathcal{H} | L_{x_i} V = F(x_i), i = 1, \dots, N\} \quad (31)$$

مسئله درون یابی در چارچوب فضاهاى هیلبرت کرنل بازآفرین \mathcal{H} می توان از راه استاندارد حل کرد. مراحل لازم یادآوری می شود. ابتدا اسپیلاین های هارمونیک (که گاهی اسپیلاین های لاپلاس نام دارند) معرفی می شوند (فریدن، ۱۹۸۷a، ۱۹۸۷b و ۱۹۸۷c).

تعریف ۱-۳: فرض کنید که $X_N = \{x_1, \dots, x_N\} \subset \Sigma$ باشد. هر تابع $U_N \in \mathcal{H}$ به فرم زیر:

$$U_N(x) = \sum_{i=1}^N L_{x_i} K_{\mathcal{H}}(x_i, x) a_i, \quad x \in \overline{\Sigma_{ext}} \quad (32)$$

که در آن ضرایب $a_1, \dots, a_N \in \mathbb{R}$ دلخواه است و توابع $L_{x_1} K_{\mathcal{H}}(x_1, \cdot), \dots, L_{x_N} K_{\mathcal{H}}(x_N, \cdot)$ مستقل خطی هستند یک اسپیلاین هارمونیک در \mathcal{H} نسبت به دستگاه $X_N \subset \Sigma$ و تابعک های L_{x_1}, \dots, L_{x_N} نامیده می شود.

نتایج زیر به راحتی قابل اثبات است:

لم ۱-۳: به ازای هر $x \in \overline{\Sigma_{ext}^{inf}}$ تابعک خطی D_x تعریف شده با رابطه زیر:

$$D_x : V \mapsto D_x V = V(x), \quad V \in \mathcal{H} \quad (22)$$

روی \mathcal{H} کراندار است (فریدن و اشنایدر، ۱۹۹۸). به عبارت دیگر $\|D_x V\| = |V(x)| \leq C \|V\|_{\mathcal{H}}$ که در آن C از رابطه زیر برآورد می شود:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n^{-2} \frac{2n+1}{4\pi\alpha^2} \left(\frac{\alpha^2}{(\sigma^{inf})^2} \right)^{n+1} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (23)$$

به ازای $x \in \overline{\Sigma_{ext}^{inf}}$ تابع زیر

$$y \mapsto K_{\mathcal{H}}(y, x), \quad y \in \overline{\Sigma_{ext}^{inf}} \quad (24)$$

یک عنصر از فضای \mathcal{H} است و به ازای تمام $V \in \mathcal{H}$

$$D_x V = V(x) = (V, K_{\mathcal{H}}(x, \cdot))_{\mathcal{H}}. \quad (25)$$

با کمک لم ۱ نتیجه زیر را می توان به دست آورد.

لم ۲-۳: فرض کنید که x نقطه ای از سطح منظم Σ باشد. در این صورت تابع زیر:

$$y \mapsto \lambda_\Sigma(y) \cdot K_{\mathcal{H}}(y, x), \quad y \in \overline{\Sigma_{ext}^{inf}} \quad (26)$$

نمایش تابعک خطی زیر است:

$$N_x : V \mapsto N_x V = \frac{\partial V}{\partial \lambda_\Sigma}(x), \quad V \in \mathcal{H}, \quad (27)$$

به عبارت دیگر به ازای تمام مقادیر $V \in \mathcal{H}$ رابطه $N_x V = (V, \lambda_\Sigma \cdot K_{\mathcal{H}}(\cdot, x))_{\mathcal{H}}$ برقرار است.

به منظور استفاده بعدی، لم زیر را بیان می کنیم:

لم ۳-۳: فرض کنید که x نقطه ای از سطح منظم Σ باشد. در این صورت تابع زیر:

$$y \mapsto \lambda_\Sigma(y) \cdot \nabla_y \otimes \nabla_y K_{\mathcal{H}}(y, x) \lambda_\Sigma(y) \quad (28)$$

که در آن $y \in \overline{\Sigma_{ext}^{inf}}$ نمایش تابعک خطی زیر است:

مسئله نیومن خارجی گسسته: فرض کنید که

$$\frac{\partial U^+}{\partial \lambda_\Sigma} = F \quad U \in \mathcal{H}|\overline{\Sigma_{ext}}$$

درون‌یابی زیر

$$\|U_N\|_{\mathcal{H}} = \inf_{V \in \mathcal{I}_N^F} \|V\|_{\mathcal{H}}$$

که در آن:

$$\mathcal{I}_N^F = \left\{ V \in \mathcal{H} \mid \frac{\partial V}{\partial \lambda_\Sigma}(x_i) = F(x_i), i=1, \dots, N \right\} \quad (35)$$

خوش طرح است. به عبارت دیگر دارای جواب یکتا است

و جواب، تابع پیوسته‌ای از داده‌های $F(x_1), \dots, F(x_N)$

است. جواب صورت صریح زیر را دارد:

$$U_N^F(x) = \sum_{n=1}^N \frac{\partial}{\partial \lambda_\Sigma(x_i)} K_H(x_i, x) a_i, \quad x \in \overline{\Sigma_{ext}} \quad (36)$$

که در آن ضرایب a_1, \dots, a_N در معادلات خطی زیر

صدق می‌کنند:

$$\sum_{n=1}^N \frac{\partial}{\partial \lambda_\Sigma(x_i)} \frac{\partial}{\partial \lambda_\Sigma(x_j)} K_H(x_j, x_i) a_i = F(x_j), \quad j=1, \dots, N \quad (37)$$

۲-۳ اسپیلین‌های هموارسازی (Smoothing Splines)

عملاً مشاهدات با خطا آلوده هستند. در این حالت

درون‌یابی بایستی با هموارسازی جایگزین شود (فریدن،

۱۹۸۱ و ۱۹۹۹؛ موریتز، ۱۹۸۰ و وهبا، ۱۹۹۰). به‌طور

دقیق‌تر چنانچه کمیت‌های $F(x_1), \dots, F(x_N)$ با خطا

همراه باشند در نتیجه برای تابع درون‌یابی:

$$L_{x_i} V \approx F(x_i), \quad i=1, \dots, N \quad (38)$$

منظور از هموارسازی این است که کمیت زیر:

$$\mu(V) = \sum_{i=1}^N \sum_{l=1}^N (L_i V - F_i) B_{il} (L_l V - F_l) + \lambda \|V\|_{\mathcal{H}} \quad (39)$$

لم ۳-۴: یک اسپیلین هارمونیک U_N^F در \mathcal{H} نسبت به

X_N وجود دارد که داده‌ها را درون‌یابی می‌کند. به عبارت

دیگر $L_{x_i} U_N^F = F(x_i), i=1, \dots, N$ است.

لم ۳-۵: به ازای همه درون‌یاب‌های $V \in \mathcal{I}_N^F$ و همه

اسپیلین‌های U_N رابطه زیر برقرار است:

$$\|U_N - V\|_{\mathcal{H}}^2 = \|U_N^F - V\|_{\mathcal{H}}^2 + \|U_N - U_N^F\|_{\mathcal{H}}^2 \quad (33)$$

لم ۳-۶: چنانچه $V \in \mathcal{I}_N^F$ باشد در این صورت رابطه زیر

برقرار است:

$$\|V\|_{\mathcal{H}}^2 = \|U_N^F\|_{\mathcal{H}}^2 + \|U_N^F - V\|_{\mathcal{H}}^2 \quad (34)$$

قضیه ۳-۲: فرض کنید که از تابع $F \in \mathcal{H}|\Sigma$ نقاط داده

$(x_i, F(x_i)) \in \Sigma \times \mathbb{R}, i=1, \dots, N$ معلوم باشد. در

این صورت عبارات زیر برقرار هستند:

مسئله دیریکله خارجی گسسته: فرض کنید که

$U \in \mathcal{H}|\overline{\Sigma_{ext}}, U^+ = U|\Sigma = F$ باشد. در این صورت

مسئله درون‌یابی زیر

$$\|U_N\|_{\mathcal{H}} = \inf_{V \in \mathcal{I}_N^F} \|V\|_{\mathcal{H}}$$

که در آن:

$$\mathcal{I}_N^F = \{V \in \mathcal{H} \mid V(x_i) = F(x_i), i=1, \dots, N\}$$

خوش طرح است. به عبارت دیگر این مسئله دارای جواب

یکتا است و جواب تابع پیوسته‌ای از داده‌های

$F(x_1), \dots, F(x_N)$ است. این جواب یکتا با رابطه زیر

بیان می‌شود:

$$U_N^F(x) = \sum_{n=1}^N K_H(x_i, x) a_i, \quad x \in \overline{\Sigma_{ext}}$$

که در آن ضرایب در رابطه زیر صدق می‌کنند:

$$\sum_{n=1}^N K_H(x_i, x_j) a_i = F(x_j), \quad j=1, \dots, N$$

۴ بررسی موردی: تعیین سامانه‌های ارتفاعی متفاوت در منطقه مرکزی ایران

در این بخش کاربرد اسپیلاین‌های هارمونیک برای تعیین اعداد ژئوپتانسیل و در نتیجه تعیین سامانه‌های ارتفاعی متفاوت معرفی می‌شود.

برای این منظور ابتدا مسئله مقدار مرزی ژئودتیک با مرز ثابت در نظر گرفته می‌شود. در مسئله مقدار مرزی با مرز ثابت فرض می‌شود که مختصات ژئودتیک ایستگاه‌های مشاهداتی با استفاده از سامانه‌های تعیین موقعیت ماهواره‌ای، معلوم است. بنابراین سطح زمین Σ درحکم یک سطح ثابت در نظر گرفته می‌شود. تعریف مسئله مقدار مرزی غیرخطی با مرز ثابت در جدول ۱ داده شده است (فریدن و کرسن، ۱۹۸۰؛ اردلان و گرافارند، ۲۰۰۴ و صفری و همکاران، ۲۰۰۵).

در جدول ۱ کمیت Σ بیان‌کننده سطح فیزیکی زمین، Σ_{int} (به‌همین ترتیب Σ_{ext}) مشخص‌کننده فضای داخلی (به‌همین ترتیب فضای خارجی) زمین و $\overline{\Sigma_{int}} = \Sigma_{int} \cup \Sigma$ نرم اندازه شتاب گرانی اندازه‌گیری شده، $w(x)$ پتانسیل زمین و ω سرعت دوران زمین است.

برای حل این مسئله مقدار مرزی باید ابتدا آنرا خطی کرد. برای این منظور از ایده مطرح شده (سانسو و سونا، ۱۹۹۳) استفاده شد. براساس این ایده که مبتنی بر استفاده از مدل‌های ژئوپتانسیلی و مدل‌های رقومی زمین است، در هر نقطه واقع بر سطح زمین، پتانسیل گرانی زمین و یا تابعک‌های آنرا می‌توان به سه قسمت تقسیم کرد: (۱) سهم جاذبه ناشی از مدل ژئوپتانسیل جهانی تا درجه و مرتبه L (که در این مقاله $L = 360$ انتخاب شده است) و اثر گریزازمرکز. (۲) اثر جرم‌های در فاصله نزدیک نقطه مورد محاسبه با استفاده از مدل‌های رقومی زمین که با انتخاب $L = 360$ ، این فاصله برابر ۵۵ کیلومتر خواهد

که در آن $V \in \mathcal{H}$ کمینه شود. در رابطه فوق λ یک ثابت مثبت است و $b = B_{ii}$ یک ماتریس معین مثبت است.

ضرایب از دستگاه خطی زیر تعیین می‌شوند:

$$(K_H + \lambda I)a = F, \quad F = (F_1, \dots, F_N) \quad (40)$$

بایستی توجه داشت که K_H و B معین مثبت و لذا ماتریس $K_H + \lambda B^{-1}$ معین مثبت است. دستگاه معادلات بالا دارای جواب یکتا است.

۳-۳ مثال‌هایی از انواع کرنل‌ها

به ازای بعضی دنباله‌های جمع‌پذیر خاص $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ می‌توان نمایش کرنل بازآفرین را با استفاده از قضیه جمع برای هارمونیک‌های کروی به صورت توابع مقدماتی به دست آورد. در این بخش مثال‌هایی از این مورد مطرح می‌شود (فریدن و میشل، ۲۰۰۴).

الف- کرنل از نوع آبل-پواسون با $A_n = 1, n = 0, 1, \dots$:

$$K_{\mathcal{H}}(x, y) = \frac{1}{4\pi} \frac{|x|^2 |y|^2 - \alpha^4}{\left(|x|^2 |y|^2 - 2(x \cdot y)\alpha^2 + \alpha^4\right)^{\frac{3}{2}}} \quad (41)$$

ب- کرنل از نوع تکیه با $A_n = (2n+1)/2, n = 0, 1, \dots$:

$$K_{\mathcal{H}}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\left(|x|^2 |y|^2 - 2(x \cdot y)\alpha^2 + \alpha^4\right)^{\frac{1}{2}}} \quad (42)$$

ج- کرنل از نوع لگاریتمی با $A_n = (2n+1)(n+1), n = 0, 1, \dots$:

$$K_{\mathcal{H}}(x, y) = \frac{1}{4\pi\alpha^2} \ln \left(1 + \frac{2\alpha^2}{\left(|x|^2 |y|^2 - 2(x \cdot y)\alpha^2 + \alpha^4\right)^{\frac{1}{2}} + |x||y| - \alpha^2} \right) \quad (43)$$

شعاع ۵۵ کیلومتر اطراف نقطه مورد محاسبه را درحکم میدان مرجع در نظر می‌گیریم. برای بررسی جزئیات خطی کردن این مسئله به اردلان و گرافارند (۲۰۰۴) و صفری و همکاران (۲۰۰۵) مراجعه کنید. در جدول ۲ مسئله مقدار مرزی خطی شده آمده است. که در جدول ۲، $\delta\Gamma$ شتاب گرانی تفاضلی و δW پتانسیل گرانی تفاضلی است. در جدول ۲ امتداد بردار شتاب گرانی مرجع λ_Σ با رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$\lambda_\Sigma = \frac{\nabla W_R}{|\nabla W_R|} \quad (۴۴)$$

بود. (۳) اثرات ناشی از درجه و مرتبه زیاد L ناشی از جرم‌های درونی. همان‌طور که ملاحظه می‌شود محاسبه اثرات اول و دوم به سادگی با استفاده از مدل‌های ژئوپتانسیل و مدل‌های رقومی زمین امکان‌پذیر است؛ در حالی که اثر سوم با استفاده از حل مسئله مقدار مرزی به دست می‌آید.

براساس ایده بالا، برای خطی کردن مسئله مقدار مرزی آورده شده در جدول ۱، اثر میدان جاذبه حاصل از بسط هارمونیک‌های بیضوی تا درجه و مرتبه ۳۶۰، اثر میدان جاذبه گریزازمرکز و اثر جرم‌های در فاصله نزدیک تا

جدول ۱. مسئله مقدار مرزی غیرخطی با مرز ثابت.

$1. \operatorname{div} \operatorname{grad} w(x) = 2\omega^2$ <p>(outside the Earth's masses)</p>	$\forall x \in \Sigma_{ext}$
$2. \operatorname{div} \operatorname{grad} w(x) = -4\pi G\sigma + 2\omega^2$ <p>(internal space plus boundary of the planet the Earth)</p>	$\forall x \in \overline{\Sigma}_{int}$
$3. E \left\{ \ \operatorname{grad} w\ \right\} = \gamma$ <p>(boundary value data of type modulus of gravity)</p>	$\forall x \in \Sigma$
$9. w(x) = \frac{1}{2} \omega^2 \left\ x - \langle x e_\omega \rangle e_\omega \right\ _2^2 + \frac{GM}{\ x\ _2} + \mathcal{O}_w \left(\frac{1}{\ x\ _2^3} \right)$ <p>(regularity condition at infinity)</p>	$\ x\ _2 \rightarrow \infty$

جدول ۲. مسئله مقدار مرزی خطی با مرز ثابت.

$\operatorname{div} \operatorname{grad} \delta W = 0$	$\forall x \in \Sigma_{ext}$
$\delta\Gamma = \frac{\partial \delta W}{\partial \lambda_\Sigma}$	$\forall x \in \Sigma$
$\delta W = \mathcal{O} \left(\frac{1}{\ x\ _2^{l+1}} \right)$	for $\ x\ _2 \rightarrow \infty$

در رابطه فوق W_R مشخص کننده میدان گرانی مرجع در سطح زمین است. این میدان همان طور که اشاره شد، شامل بسط هارمونیک‌های تا درجه و مرتبه ۳۶۰، میدان گریزازمرکز بیضوی و اثر جاذبه جرم‌های در شعاع ۵۵ کیلومتر اطراف نقطه مورد محاسبه است. امتداد λ_{Σ} عموماً عمود بر سطح زمین که مرز Σ است، نیست. بنابراین مسئله مقدار مرزی یک مسئله مایل است.

به منظور آزمایش روش معرفی شده یک بررسی موردی براساس داده‌های واقعی اندازه بردار شتاب گرانی بانک داده BGI و داده‌های اندازه‌گیری شده سازمان نقشه‌برداری در محدوده $48.10 \leq \lambda \leq 58.83$ شرقی و $28.90 \leq \phi \leq 36.22$ شمالی صورت گرفت. شکل ۱ نشان‌دهنده توزیع این داده‌ها است. شکل ۲ تغییرات شتاب گرانی اندازه‌گیری شده در منطقه آزمایش را نشان می‌دهد. شکل ۳ نشان‌دهنده تغییرات شتاب گرانی تفاضلی است. شتاب گرانی تفاضلی بعد از حذف اثر میدان جاذبه حاصل از بسط هارمونیک‌های بیضوی تا درجه و مرتبه ۳۶۰، اثر میدان گریزازمرکز و اثر جرم‌های در فاصله نزدیک از روی شتاب گرانی مشاهده شده حاصل می‌شود (صفری و همکاران، ۲۰۰۵). در مرحله بعد، از این شتاب گرانی تفاضلی برای حل مسئله مقدار مرزی خطی با مرز ثابت استفاده می‌شود. برای این کار از یک درون‌یاب آبل-پواسون ($A_n = 1$) با $\left(\frac{\alpha}{\sigma_{\text{inf}}} = 0.985\right)$ استفاده شد. شکل ۴ تغییرات پارامتر هموارسازی براساس روش GCV را نشان می‌دهد (هانسن، ۱۹۹۸ و وهبا، ۱۹۹۰). براساس این روش پارامتر هموارسازی بهینه برابر 5.5725×10^{-21} حاصل شد. شکل ۵ نشان‌دهنده تغییرات پتانسیل گرانی محاسبه شده روی سطح زمین است. به منظور به دست آوردن پتانسیل گرانی واقعی روی سطح زمین، اثر میدان پتانسیل حاصل از بسط هارمونیک‌های بیضوی تا درجه و مرتبه ۳۶۰ حاصل از مدل EGM96 (لموین و همکاران،

۱۹۹۶)، اثر میدان گریزازمرکز و اثر جرم‌های در فاصله نزدیک روی پتانسیل روی پتانسیل روی نقطه مورد محاسبه بازگردانده می‌شود. شکل ۶ نشان‌دهنده تغییرات اثر جرم‌های نزدیک روی پتانسیل ثقل در روی سطح زمین است. اثر میدان پتانسیل حاصل از بسط هارمونیک‌های بیضوی تا درجه و مرتبه ۳۶۰، اثر میدان گریزازمرکز در شکل ۷ نشان داده شده است. شکل ۸ نشان‌دهنده تغییرات پتانسیل ثقل واقعی روی سطح زمین است. به منظور محاسبه اعداد ژئوپتانسیل در منطقه آزمایش با توجه به رابطه $C_i = W_0 - W_i$ در هر نقطه عدد ژئوپتانسیل آن نقطه محاسبه شد. پتانسیل W_0 براساس داده‌های ارتفاع‌سنجی حاصل از ماهواره‌های توپکس-پوزایدون (Topex/Poseidon) محاسبه شده و برابر $62636855.611 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$ است (گروتن، ۲۰۰۴).

شکل ۹ تغییرات اعداد ژئوپتانسیل روی سطح زمین را نشان می‌دهد. با داشتن اعداد ژئوپتانسیل در هر نقطه می‌توان سامانه‌های ارتفاعی گوناگون را محاسبه کرد. برای محاسبه ارتفاع دینامیک از رابطه:

$$H_i^D = \frac{C_i}{\gamma_0} \quad (45)$$

استفاده شد. که در آن γ_0 از رابطه زیر که حاصل از بیضوی GRS1980 است محاسبه شده است (ولنهوف و موریتز، ۲۰۰۵):

$$\gamma_0 = 9.780327(1 + 0.005302 \sin^2 \phi - 0.0000058 \sin^2 2\phi) \quad (46)$$

در رابطه فوق $\phi = 35^\circ$ (شمالی) در نظر گرفته شد. شکل ۱۰ نشان‌دهنده تغییرات ارتفاع دینامیک در منطقه آزمایش است. برای محاسبه ارتفاع نرمال در منطقه آزمایش می‌توان از رابطه زیر

$$H_i^N = \frac{C_A}{\bar{\gamma}_i} \quad (47)$$

$$H_i^O = \frac{C_i}{\bar{g}_i} \quad (49)$$

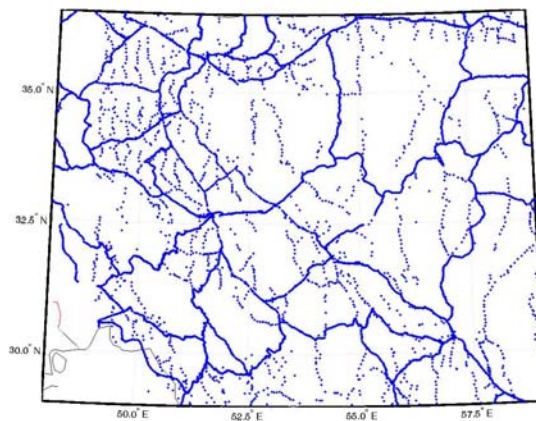
ارتفاع ارتومتریک را به دست آورد. که در رابطه فوق \bar{g}_i از رابطه $\bar{g}_i = g_i + 0.0424h_i$ زیر محاسبه شده است. در شکل ۱۲ تغییرات ارتفاع ارتومتریک براساس اندازه بردار شتاب گرانی بانک داده BGI و داده‌های اندازه‌گیری شده سازمان نقشه‌برداری نشان داده شده است. برای آزمایش روش معرفی شده ارتفاع ارتومتریک محاسبه شده با این روش با ارتفاع ارتومتریک در تعداد ۱۵ نقطه GPS/Leveling (تنها نقاط GPS/Leveling موجود در منطقه آزمایش که در آنها شتاب گرانی اندازه‌گیری شده است) مقایسه شد که نتیجه آن در جدول ۳ آورده شده است.

استفاده کرد. که در آن $\bar{\gamma}_0$ از رابطه زیر به دست می‌آید (وینچک و کراکیوسکی، ۱۹۸۶):

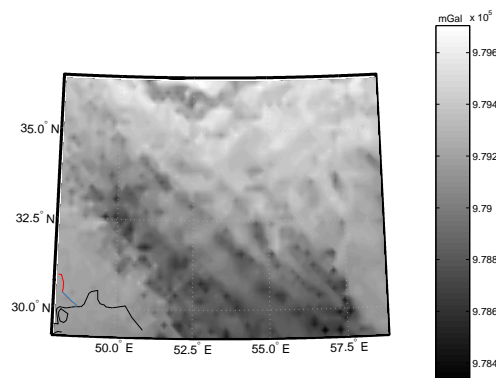
$$\bar{\gamma}_i = \gamma_{0_i} - 0.1543h_i \quad (48)$$

که در آن γ_{0_i} مقدار شتاب گرانی نرمال در نقطه مورد نظر است که برای محاسبه آن از رابطه (۴۵) به ازای ϕ نقطه مورد نظر محاسبه شده است. h_i ارتفاع ژئودتیک نقطه مورد نظر است. شکل ۱۱ نشان‌دهنده تغییرات ارتفاع نرمال در منطقه آزمایش است.

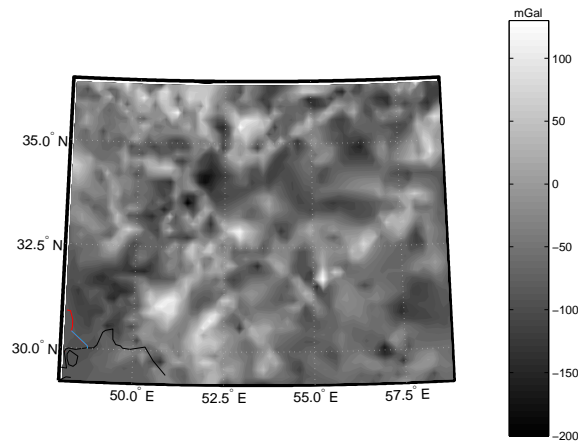
با در اختیار داشتن اعداد ژئوپتانسیل در هر نقطه برای به دست آوردن ارتفاع ارتومتریک می‌توان با اندازه‌گیری شتاب گرانی در هر نقطه و با استفاده از رابطه زیر (وینچک و کراکیوسکی، ۱۹۸۶):



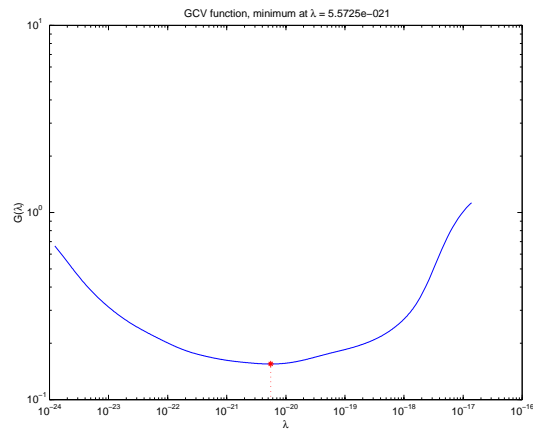
شکل ۱. توزیع نقاط دارای شتاب گرانی در منطقه آزمایش.



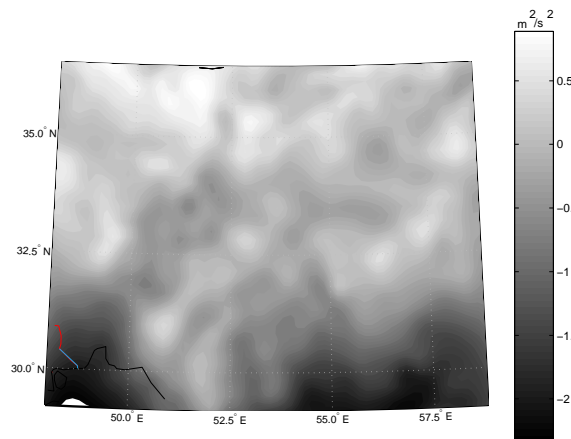
شکل ۲. تغییرات شتاب گرانی در منطقه آزمایش.



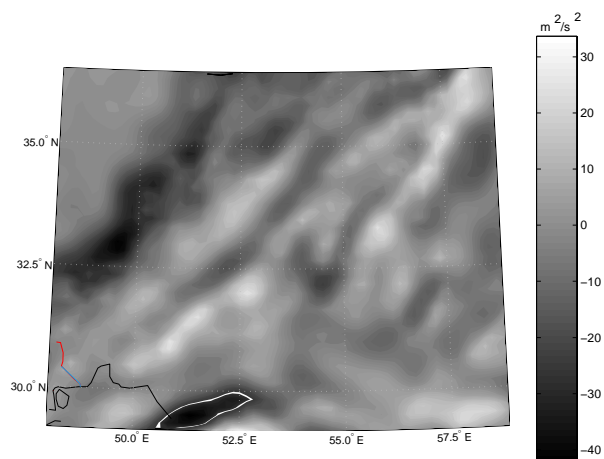
شکل ۳. تغییرات شتاب گرانی تفاضلی در ایستگاه‌های گرانی بعد از حذف اثر میدان گرانی مرجع حاصل از بسط هارمونیک‌های بیضوی تا درجه و مرتبه ۳۶۰ و میدان گریز از مرکز و اثر توپوگرافی با استفاده از انتگرال نیوتن در شعاع ۵۵ کیلومتر اطراف نقطه مورد محاسبه.



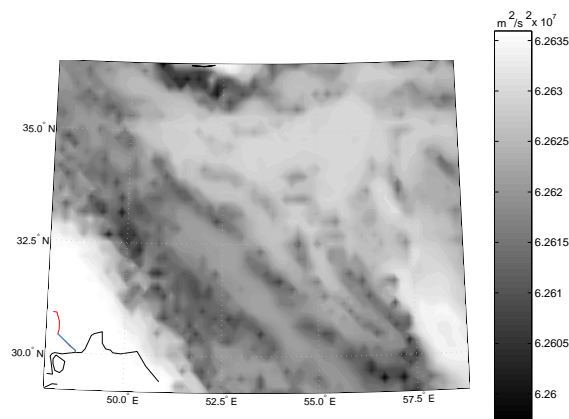
شکل ۴. منحنی GCV و نقطه حداقل منحنی به‌منزله پارامتر هموارسازی 5.5725×10^{-21} .



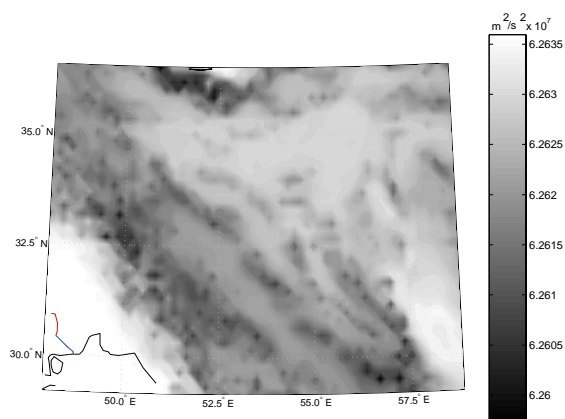
شکل ۵. تغییرات پتانسیل گرانی تفاضلی روی سطح زمین حاصل از اسپیلاین هارمونیک.



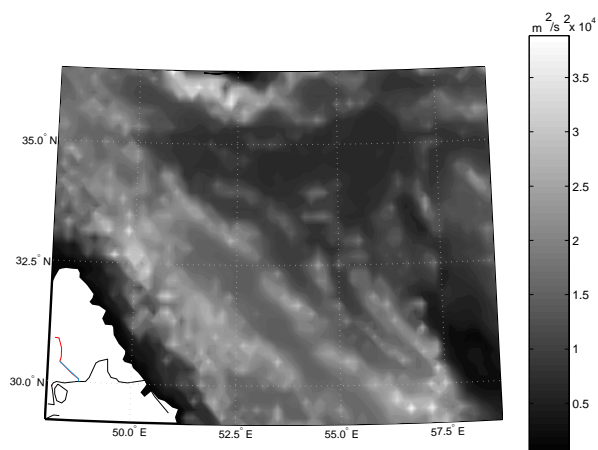
شکل ۶. اثر جرم‌های در فاصله نزدیک روی نقاط در روی سطح زمین.



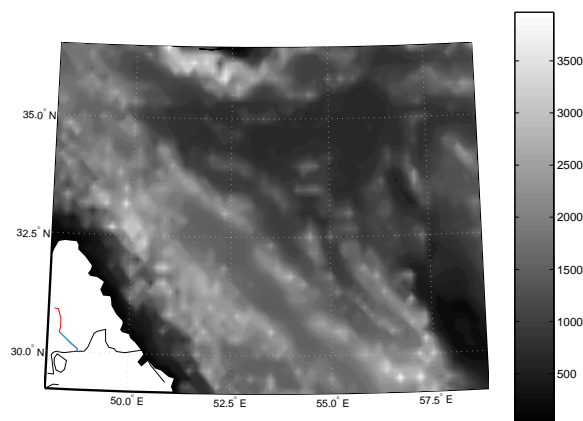
شکل ۷. میدان گرانی مرجع حاصل از بسط هارمونیک‌های بیضوی تا درجه و مرتبه ۳۶۰ و میدان گریز از مرکز در سطح زمین.



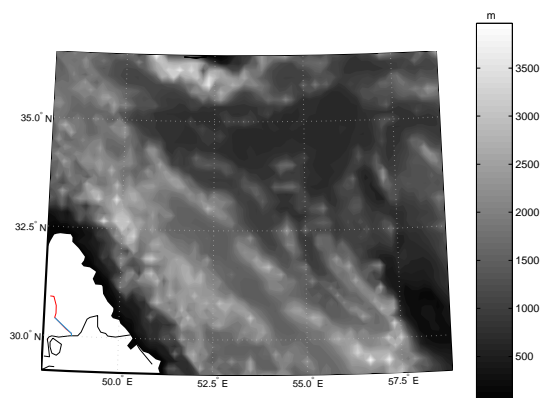
شکل ۸. نقشه تغییرات پتانسیل واقعی در سطح زمین در منطقه آزمایش.



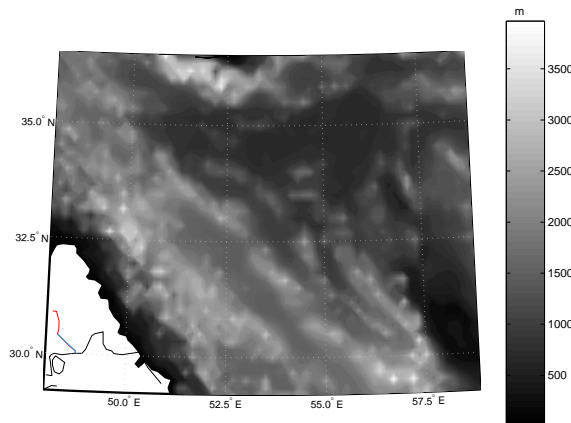
شکل ۹. نقشه تغییرات اعداد ژئوپتانسیل در منطقه آزمایش.



شکل ۱۰. نقشه تغییرات ارتفاع دینامیک در منطقه آزمایش.



شکل ۱۱. نقشه تغییرات ارتفاع نرمال در منطقه آزمایش.



شکل ۱۲. نقشه تغییرات ارتفاع ارتومتریک با استفاده از شتاب گرانی مشاهده شده در منطقه آزمایش.

جدول ۳. اختلاف ارتفاع ارتومتریک محاسبه شده و ارتفاع ارتومتریک در نقاط GPS/Leveling

	<i>Max (m)</i>	<i>Mean (m)</i>	<i>Min (m)</i>	<i>Std (m)</i>
$H^{O(New)} - H^{O(GPS/Levelling)}$	0.75	0.001	-0.78	0.55

مرزی با مرز ثابت با موفقیت مورد آزمایش قرار گرفت.

۵ بحث و نتیجه گیری

دسترسی به سامانه‌های تعیین موقعیت ماهواره‌ای منجر به تعریف نوع جدیدی از مسائل مقدار مرزی موسوم به مسائل مقدار مرزی با مرز ثابت شده است. با استفاده از حل این مسائل، مقدار مرزی بر مبنای استفاده از اسپیلاین‌های هارمونیک، تنها مجهول مسئله (پتانسیل گرانی زمین) تعیین شد. با تعیین پتانسیل گرانی زمین روی سطح زمین و فضای خارج از آن، اعداد ژئوپتانسیل که نقش اساسی در تعریف سامانه‌های ارتفاعی گوناگون بازی می‌کنند نیز به سادگی و با معلوم بودن پتانسیل گرانی ژئوئید در هر نقطه‌ای روی سطح زمین محاسبه شد. با معلوم بودن عدد ژئوپتانسیل در هر نقطه سامانه‌های ارتفاعی گوناگون محاسبه شدند. از جمله مزیت‌های این روش این است که بدون تعیین ژئوئید که محاسبه آن با مشکلات زیادی همراه است، سامانه‌های ارتفاعی دینامیک و ارتومتریک محاسبه شدند. به این ترتیب روش جدیدی برای محاسبه سامانه‌های ارتفاعی بر مبنای حل مسائل مقدار

منابع

Ardalan, A.A. and Grafarend, E.W., 2004, High-resolution regional geoid computation without applying Stokes's formula: a case study of the Iranian geoid. *J. Geodesy* **78**,138-156.

Aronszjain, N., 1950, Theory of reproducing kernels. *Trans. Am. Soc.*, **68**, 337-404.

Ardalan, A.A. and Safari A., 2004, Terrain correction on the multi-cylindrical equal area map projection of the surface of the reference ellipsoid. *J. Geodesy* **78**,114-123.

Backus, G.E., Parker, R. and Constable, C., 1996, *Foundations of Geomagnetism*. Cambridge University Press.

Bjerhammer, A., and Svensson L., 1983, On the geodetic boundary value problem for a fixed boundary surface- A satellite approach. *B. Geod.* **57**, 382-393.

Dermanis, A., 1993, A differential geometric approach to the formulation of geodetic boundary value conditions. *Manuscr. Geodaet.*, **18**, 201-218.

Freedon, W., 1981, On spherical spline interpolation and approximation. *Math. Method. Appl. Sci.*, **3**, 551-575.

Freedon, W., 1981, On approximation by

- of discrete ill-posed problems. Department of mathematical modeling building 305, technical university of Denmark, Dk-2800 Lyngby, Denmark.
- Heiskanen, W. and Moritz H., 1967, *Physical Geodesy*, W. H. Freeman, San Francisco, California, USA.
- Hesse, K., 2003, *Domain Decomposition Methods in Multiscale Geopotential Determination from SST and SGG*, Ph.D. Thesis, University of Kaiserslautern, Germany, Geomathematics Group, Shaker, Aachen. Germany.
- Jekeli, C., 2000, *Heights, the geopotential, and vertical datums*. Geodetic science and surveying, Department of civil and environmental engineering and geodetic science, The Ohio state University, Report No.459.
- Koch, K.R. and Pope A.J. 1972, Uniqueness and existence for the Geodetic Boundary Value Problem using the known surface of the Earth. *B. Geod.*, **106**, 467-475.
- Lemoine, F.G., Smith, D.E., Kunz, L., Smith, R., Pavlis, E.C., Pavlis, N.K., Klosko, S.M., Chinn, D.S., Torrence, M.H., Williamson R.G., Cox, C.M., Rachlin, K.E., Wang, Y.M., Kenyon, S.C., Salmen, R., Trimmer, R., Rapp, R.H. and Nerem, R.S., 1996, The development of the NASA GSFC and NIMA joint geopotential model. In: J. Segawa, H. Fujimoto, and S. Okubo (eds), *Gravity, Geoid and Marine Geodesy*, International Association of Geodesy Symposia, Vol. 117, Springer Berlin Heidelberg pp 461-469., Germany.
- Martinez Z., 1996, Stability investigations of a discrete downward continuation problem for geoid determination in the Canadian Rocky Mountains. *J. Geodesy*, **70**, 805-828.
- Michel, D., 2002, *On the combination of Harmonic Splines and Fast Multipole Methods for CHAMP Data Modeling*. Diploma Thesis, University of Kaiserslautern, Germany, Geomathematics Group.
- Moritz, H. 1980, *Advanced physical geodesy*. Herbert Wichmann Verlag, Karlsruhe, Abacus Press, Tunbridge, Wells, Kent., Germany.
- Safari, A., Ardalani, A.A. and Grafarend, E.W., 2005, A new ellipsoidal gravimetric, satellite altimetry and astronomic boundary value problem, a case study: the geoid of Iran. *J. Geodyn.* **39**, 545-568.
- Sanso, F., 1995, The long road from measurements to boundary value problems in physical geodesy. *Manuscr Geodaet.*, **20**, 326-336.
- harmonics splines. *Manuscr. Geodaet.*, **6**, 193-244.
- Freeden, W., 1987a, A spline interpolation method for solving boundary value problems of potential theory from discretely given data, *Numer. Meth. Part. Diff. Equat*, **3**, 375-398.
- Freeden, W., 1987b, Harmonic splines for solving boundary value problems of potential theory, in: *Algorithms for Approximation* (Mason, J.C., Cox, M.G., eds), The institute of mathematics and its applications, Conferences series, Vol. 10, Clarendon Press, Oxford, 507-529, UK.
- Freeden, W., 1987c, Metaharmonic splines for solving the exterior Dirichlet problem of the Helmholtz Equation, in: *Topics in: Multivariate Approximation Theory* (Chui, C.K., Schumaker, L.L., Utreras, F., eds), Academic Press, Boston, USA., 99-110.
- Freeden, W., 1990, Spherical splines approximation and its application in physical geodesy, in: *Topics in: Geophysical Data Inversion Methods and applications*, View Publication, Braunschweig Germany, 79-104.
- Freeden, W., 1999, *Multiscale modeling of spaceborne Geodata*, B.G. Teubner, Leipzig.
- Freeden, W., Gerevens, T. and Schreiner, M., 1998, *Constructive approximation on the sphere (With Applications to Geomathematics)*, Oxford Science Publications, Clarendon, Oxford., UK.
- Freeden, W., Kersten, H., 1980, *The geodetic boundary value problem using the known surface of the Earth*. RWTH Aachen, Heft 29.
- Freeden, W. and Michel, V., 2004, *Multiscale potential theory with application to geoscience*. Birkhauser, Boston., USA.
- Freeden, W. and Schneider, F., 1998, Wavelet approximation on closed surfaces and their application to boundary-value problems of theory potential, *Math. Method. Appl. Sci.*, **21**, 129-165.
- Groten, E., 1979, *Geodesy and the Earth's Gravity Field*, Dümmler, Bonn., Germany.
- Groten, E., 2004, *Fundamental parameters and current (2004) best estimates of the parameters of common relevance to astronomy, geodesy, and geodynamics*. *J. Geodesy*, **77**, 724-798.
- Gutting, M., 2002, *Multiscale Gravitational Field Modeling From Oblique Derivatives*. Diploma Thesis, University of Kaiserslautern, Germany, Geomathematics Group.
- Hansen, P.C., 1998, *Regularization tools; A MATLAB package for analysis and solution*

344.

Sanso, F. and Sona, G., 1993, The challenge of computing the geoid in the nineties. *Surv Geophys.*, **14**, 339-371.

Sanso, F. and Vanicek, P., 2006, The orthometric height and the holonomy problem. *J. Geodesy* **80**, 225-232.

Vanicek, P. and Krakiwsky, E.J., 1986, *Geodesy: the Concepts*. Elsevier Science Publishers B.V.

Wahba, G., 1990, Spline models for observational data. *CBMS-NSF regional conference series in applied mathematics*, 59, SIAM, Philadelphia.

Wellenhop B.H. and Moritz, H., 2005, *Physical Geodesy*. Springer-Verlag Wien. Austria.