مجلهٔ فیزیک زمین و فضا، دوره ۳۶، شماره ۲، ۱۳۸۹، صفحهٔ ۲۵- ۳۹

فیلتر خطی برای ادامهٔ فراسو و فروسو به کمک تبدیل موجک و کاربرد آن در پردازش داده‌های مغناطیسی

احمد امینی[۱]، یاسر فاضل بیدگلی[۲] و حسن حاجی‌حسینی رکن‌آبادی[۳]

[۱] دانشجوی کارشناسی ارشد ژئوفیزیک، گروه فیزیک زمین، مؤسسهٔ ژئوفیزیک، دانشگاه تهران، ایران
[۲] دانشجوی کارشناسی ارشد ژئوفیزیک، گروه فیزیک زمین، مؤسسهٔ ژئوفیزیک، دانشگاه تهران، ایران
[۳] دانشجوی کارشناسی ارشد ژئوفیزیک، گروه فیزیک زمین، مؤسسهٔ ژئوفیزیک، دانشگاه تهران، ایران

(دریافت: ۸۵/۴/۳ ، پذیرش نهایی: ۸۸/۲/۲۲)

چکیده

تبدیل‌های موجک عرصهٔ جدیدی برای پردازش داده‌های مغناطیسی فراهم می‌آورند. این تبدیل‌ها، اطلاعات حاصل از وابستگی فضایی عدد موج‌ها را حفظ می‌کنند و به‌این‌صورت می‌توان به کمک ضرایب موجک، فیلترهای متغیر با فضا را طراحی کرد. در این بررسی، به کمک تبدیل موجک پیوسته، فیلتر خطی یک‌بُعدی و دوبُعدی متقارن شعاعی با پاسخ‌های عدد موجی وابسته به فضا، ساخته می‌شود. یکی از کاربردهای این فیلتر استفاده به‌منزلهٔ عملگر ادامهٔ فراسو و فروسو است. بسیاری از فیلترها برای استفاده در حوزهٔ فضایی یا عدد موجی، غیر کاربردی هستند؛ فیلتر موجک، چارچوب قوی و مؤثر جدیدی را برای بهبود این‌گونه فیلترها فراهم می‌آورد. مشکلات موجود ناشی از وجود نوفه که به‌شدت ادامهٔ فروسو را تحت تاثیر قرار می‌دهد، با این فیلتر کاهش می‌یابد. در انتها این فیلتر با دیگر روش‌های متداول برای ادامهٔ فراسو و فروسو مقایسه می‌شود.

واژه‌های کلیدی: فیلتر خطی، ادامهٔ فراسو و فروسو، داده‌های مغناطیسی، تبدیل موجک پیوسته، عدد موج

Linear filter for upward- down ward continuation by using wavelet transform and its application in magnetic data processing

Amini, A.[1], Fazel Bidgoli, Y.[2] and Rokn Abadi, H. H. H.[3]

[1] M. Sc. Student of Geophysics, Earth Physics Department, Institute of Geophysics, University of Tehran, Iran
[2] M. Sc. Student of Geophysics, Earth Physics Department, Institute of Geophysics, University of Tehran, Iran
[3] M. Sc. Student of Geophysics, Earth Physics Department, Institute of Geophysics, University of Tehran, Iran

(Received: 24 June 2006 , Accepted: 12 May 2009)

Abstract

Linear filters are used for a wide range of magnetic science including noise attenuation, spatial derivatives, upward and downward continuation and reduction to the pole. The majority of these filters are spatially-invariant, meaning that the filter has a constant wave number response over the whole signal. In contrast, many signals which encountered real problems such as magnetic signals, typically exhibit a spatially-varying wave number content which motivates us to design filters with spatially-varying wave number responses. This leads to better preservation of anomaly gradients in the calculated derivatives than is possible using conventional Fourier or space domain smoothing techniques.

*نگارنده رابط: تلفن: ۰۸۶۶-۴۲۲۷۳۲۱ دورنگار: ۰۸۶۶-۴۲۲۷۳۲۱ E-mail: ahmad_amini78@yahoo.com

Fourier transform because of its stability, the simple physical interpretation of the transform coefficients and the diagonalisation of spatially invariant linear operators in the Fourier domain play an important role in magnetic processing. However, Fourier filters cannot be designed to adapt to local properties of the signal or to generate spatially-varying filters.

One of the methods for generating spatially-varying filters is based on the continuous wavelet transform (CWT) which provides new powerful tools in magnetic data processing. The wavelet transform is ideal for analysing signals such as magnetic signals that contain short duration, transient features. Wavelet techniques can be used to provide solutions to problems that are difficult or impossible to solve using conventional global techniques such as Fourier-based methods. The wavelet transform preserves both spatial and wave number information about a signal allowing us to design a range of spatially-varying filters that act on the wavelet coefficients. This method provides robust and efficient new frameworks for designing filters that are impractical to implement using conventional space or wave number domain techniques. This method is compared with other techniques in upward-downward continuation. We demonstrate the application of spatially-varying scale filters to the problem of upward and downward continuation from a level observation surface to a new irregular-height surface. Downward continuation is the most difficult of these operations as it is highly numerically unstable and is very sensitive to high wave number noise. For comparison, conventional methods of downward continuation, such as the Taylor-series and chessboard methods are used which for stabilizing a global low-pass filter are applied to the data to attenuate any high wave number noise that may create difficulties in the continuation procedure. The wavelet implementation produces a superior result compared with conventional techniques such as Taylor-series and chessboard algorithms.

In this study, the wavelet approach combined with the exponential smoothing filter produces sharper images than either the chessboard or Taylor-series methods that are clearly evident in the case study and synthetic examples. In contrast, the Taylor-series cosine roll-off filter is designed to ensure that the downward continuation is stable over the largest continuation distance. The chessboard method should theoretically be able to behave like the wavelet method by adjusting the amount of smoothing applied to each downward continuation slice. However, the sliding-rule filter does not appear to be as effective as the wavelet exponential filter. The large differences in the performance of each of these downward continuation methods highlight the significance in the choice of smoothing method. In addition, the wavelet exponential filter has the advantage of being locally adapted to the signal, which means that we do not need to oversmooth the signal when the local downward continuation distances are small but the chessboard method suffers from oversmoothing which is needed to prevent artifacts from continuing downward below the shallowest magnetic sources. One advantage of the wavelet and chessboard methods over the Taylor-series method is simplicity to automatically generate the parameters needed to design the smoothing filters for the wavelet and chessboard methods. In contrast, the Taylor-series method requires some trial-and-error intervention by the user. With a careful choice of smoothing parameters, the Taylor-series method can be designed to perform equally as well as the wavelet method. However, the choice of these parameters is often difficult when the downward continuation distances are large.

Key words: Linear filter, Upward-downward continuation, Magnetic data, Wavelet transform, Wave number

۱ مقدمه

فیلترهای خطی در محدوده‌ای وسیع از فنون مغناطیسی شامل تضعیف نوفه، مشتقات فضایی، ادامهٔ فراسو و فروسو و تصحیح به قطب استفاده می‌شوند. ویژگی خاص این فیلترها، تغییرناپذیری فضایی آنها (پاسخ عدد موجی ثابت روی تمام سیگنال) است. اما داده‌های مغناطیسی معمولاً محتوای عدد موجی متغیر با فضا را نشان می‌دهند که لازمهٔ پردازش دقیق‌تر آنها، طراحی فیلترهایی با پاسخ‌های عدد موجی متغیر با فضا است. این فیلترها خود را با ویژگی‌های محلی سیگنال، به‌جای ویژگی‌های میانگین تمام مجموعه داده‌ها، وفق می‌دهند. فن‌های هامیخت فوریه‌ای متداول را نمی‌توان بر فیلترهای متغیر با فضا اعمال کرد. در اینجا از تبدیل موجک پیوسته (Continuous Wavelet Transform, CWT) برای طراحی فیلتر ادامهٔ فراسوی متغیر با فضا استفاده می‌شود.

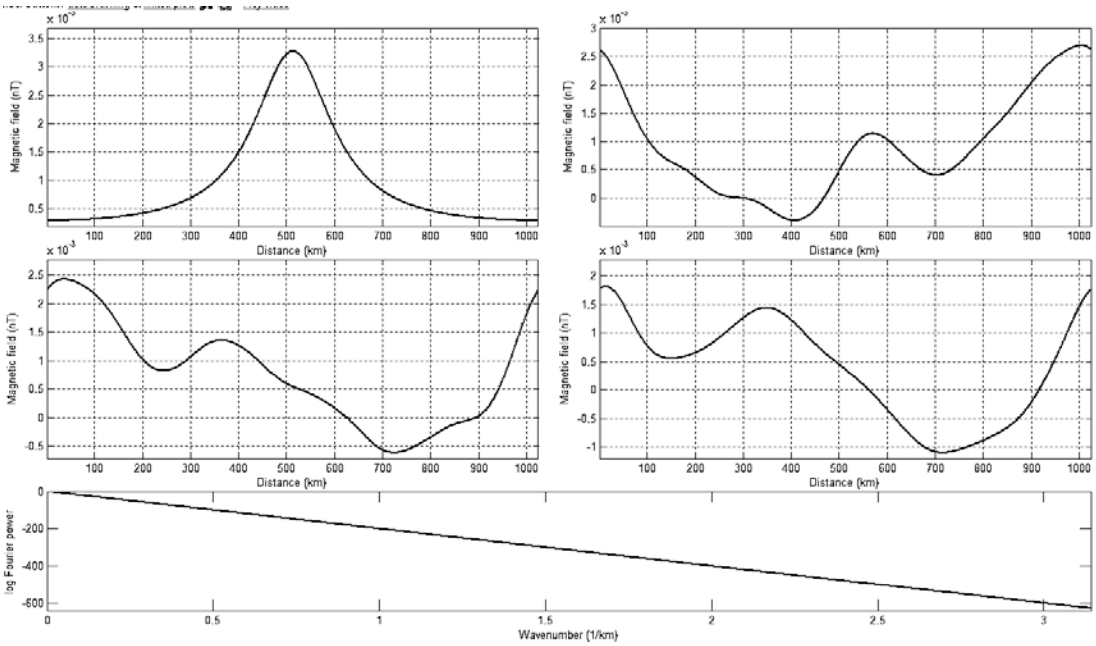
چندین روش برای محاسبهٔ میدان‌های مغناطیسی روی سطح ارتفاعی متغیر با داشتن میدان اندازه‌گیری شده روی یک سطح ارتفاعی ثابت موجود است. در ساده‌ترین حالت، یک فیلتر متغیر با فضا به‌طور مستقیم روی سیگنال اعمال می‌شود. این روش، بار محاسباتی سنگینی را به همراه دارد و اغلب به‌طور ضعیف عمل می‌کند. روش‌های دیگر شامل تقریب سری‌های تیلور (کردل و گراچ، ۱۹۸۵؛ پیلکینگتون و رست، ۱۹۹۲)، روش چسبورد (chessboard) (کردل، ۱۹۸۵؛ پترسون و همکاران، ۱۹۹۰) و روش منبع معادل (بهاتاچاریا و چان، ۱۹۷۷) است. هدف این مقاله نشان دادن این است که روش‌های پردازش وفق‌یافتهٔ محلی حاصل از تبدیل موجک، در مقایسه با ساختارهای فوریه‌ای و حوزهٔ فضایی، الگوریتم‌های مؤثر و پایدارتری برای پردازش داده‌های مغناطیسی فراهم می‌آورند.

۲ نتایج و بحث

۲-۱ تبدیل موجک

تبدیل‌ها نقشی اساسی در بررسی و تحلیل بسیاری از سیگنال‌ها دارند. هدف یک تبدیل، نمایش سیگنال داده شده به کمک مجموعه‌ای از توابع جدید، تهیهٔ بینشی جدید در مورد فرایند فیزیکی تولیدکنندهٔ آن سیگنال و یا تهیهٔ نمایشی ساده‌تر و پرمفهوم‌تر برای پردازش سیگنال است. یکی از تبدیل‌های مهم، تبدیل‌های خطی‌اند که در آنها سیگنال به صورت ترکیب خطی از توابع جدید نمایش داده می‌شود.

تبدیل فوریه، ترکیبی خطی از توابع نمایی مختلط سینوسی و کسینوسی با عدد موج و فاز متغیر را برای نمایش سیگنال مورد استفاده قرار می‌دهد. هر تبدیل فوریه متناظر با دامنهٔ یک نمای مختلط از یک عدد موج ویژه است و بنابراین به‌منزلهٔ اطلاعات حاصل از مقدار آن عدد موج موجود در سیگنال در نظر گرفته می‌شود. هرچند تبدیل فوریه دارای فواید بسیاری است اما برای بخش عظیمی از سیگنال‌ها، نقایص اساسی بسیاری دارد. در عمل این تبدیل نمی‌تواند بخش‌های یک سیگنال گذرا را که زمان دوام بسیار کوتاه دارد، به طور مؤثر نمایش دهد؛ علت آن وجود توابع نمایی مختلط در تبدیل است که هیچ تمرکزی در زمان ندارند. تفسیر محل عوارض به کمک ضرایب تبدیل فوریه مشکل است (کوهن، ۱۹۸۹). برای مثال در شکل۱، چهار برداشت متفاوت میدان‌های مغناطیسی حاصل از بی‌هنجاری‌های مغناطیسی گوناگون طوری انتخاب شده‌اند که طیف توانی یکسانی داشته باشند. مشاهده می‌شود که با توجه به آنکه اندازه میدان‌ها در حوزه فوریه یکسان است، در حوزه مکانی می‌تواند کاملاً متفاوت باشد. بنابراین تبدیل فوریه جواب یکتایی برای بسیاری از مسائل نمی‌دهد.



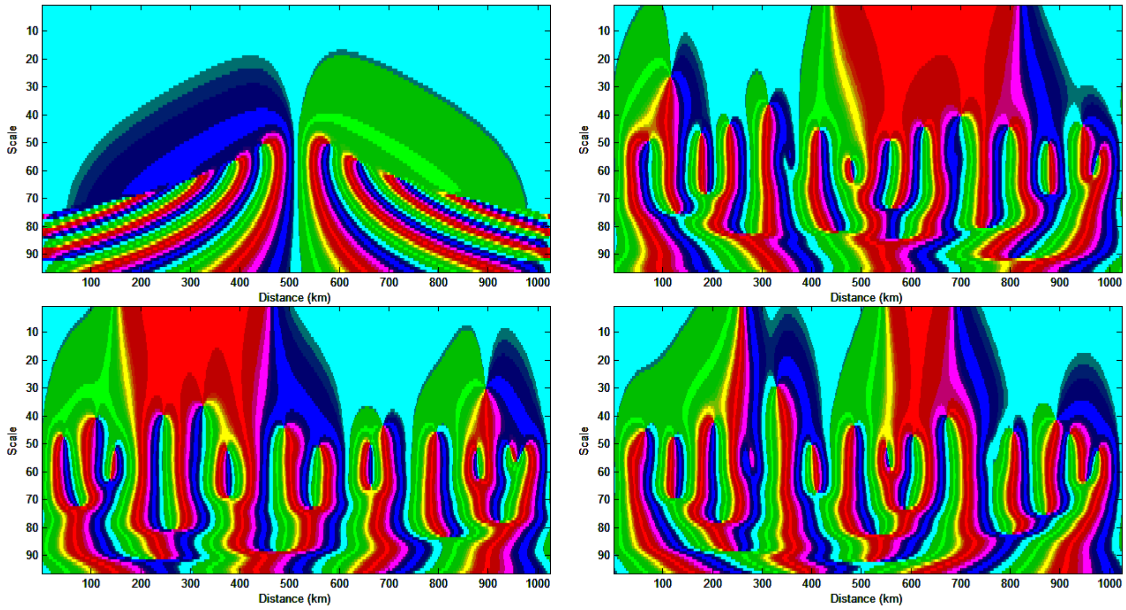
شکل۱. نمونه‌ای از اختلافات در تفسیر تمرکز عوارض از ضرایب فوریه. چهار پنل فوق سیگنال‌های مغناطیسی متفاوت بـا طیـف تـوانی فوریـه‌ای مشـابه (پنـل پایینی) را نشان می‌دهند.

توابع موجـک بـا بسـط، فشـردگی و انتقـال یـک شـکل پنجره‌ای خاص معروف به تابع موجـک مـادر در زمـان یـا مکان تولید می‌شوند. برای تحلیل عوارض عدد موج کم و زمان دوام بلند در سیگنال، موجـک بـه یـک مقیـاس پهـن بسط داده و برای تحلیل عوارض عـدد مـوج زیـاد و زمـان دوام کوتاه در سیگنال، موجـک در یـک مقیـاس باریـک فشرده می‌شود. این توانمندی در تغییـر مقیـاس مشـاهده‌ای بـرای بررســی عــوارض مقیـاس متفــاوت در ســیگنال، مشخصه‌ای از تحلیل موجک بـه حسـاب مـی‌آیـد. تبـدیل موجک یک سیگنال به پیدا کردن ترکیبی خطـی از توابـع موجک برای نمـایش سـیگنال مـی‌پـردازد. وزن‌هـای ایـن ترکیـب خطـی، ضـرایب موجـک نامیـده مـی‌شـوند. در شکل۲، تبـدیل فوریـه سـیگنال‌هـای مغناطیسـی نشـان داده شده در چهار پنل بالایی شکل۱ آورده شده است. مشاهده می‌شود که بـا وجـود آنکـه ایـن چهـار سـیگنال در حـوزه فوریه قابل شناسایی نبودند (همگی طیـف تـوانی فوریـه‌ای مشابه (پنل پـایینی شـکل۱) را نشـان مـی‌دهنـد)، در حـوزه موجـک کـاملاً از یکـدیگر متمایزنـد. بـه ایـن دلیـل کـه موجک‌ها در زمان متمرکز می‌شوند، در نتیجـه روش‌هـای موجک برای تحلیل سیگنال‌های دارای عوارض گذرا کـه با روش‌های فوریه‌ای معمول بـا مشـکل مواجـه مـی‌شـوند، می‌توانند بسیار مناسب باشند.

تبدیل موجک پیوسته (CWT) در حوزهٔ پتانسیل، تجزیه‌ای مکان- عدد موجی است که یک تابع حوزهٔ مکانی را به نمایش حوزهٔ مکان مقیاس منتقل می‌کند:

$$c(x,s) = T(x) * \psi^*(\frac{x}{s}) \qquad (1)$$

$T(x)$ ســیگنال انــدازه‌گیــری شــده، $\psi(x)$ موجــک تحلیــل‌کننــده، $c(x,s)$ آرایــهٔ دوپــارامتری از ضــرایب تبــدیل موجــک و s پــارامتر مقیــاس اســت. مفهــوم مقیـاس بــه طـور واضـح بـا عــددموج مـرتبط اسـت. مقیـاس‌هـای کوچـک بـه عـوارض عمـق کـم، عـدد مـوج بـزرگ و متنـاظراً مقیـاس‌هـای بـزرگ به عوارض عمق زیاد و عدد موج کوچک مرتبط هستند.



شکل ۲. تبدیل موجک سیگنال‌های مغناطیسی شکل ۱. با وجود اینکه این سیگنال‌ها طیف‌های توانی فوریهٔ یکسان دارند (پنل پایینی شکل ۱)، طیف‌های موجک آنها از یکدیگر کاملاً مجزا هستند. (توجه: در تبدیل موجک بر خلاف تبدیل (Short Time Fourier Transform, STFT) عدد موج نداریم (هورتالوپز و همکاران، ۲۰۰۰) در عوض مفهوم مقیاس (توضیح در متن) را داریم. رابطه مقیاس و عدد موج این است که مقیاس‌های کوچک متناظر با عددموج بزرگ و مقیاس‌های بزرگ متناظر با عددموج کوچک هستند. (بنابراین تبدیل موجک سیگنال‌های مکانی شکل ۱، در هر مورد، صفحه مکان‌مقیاس خواهد بود.)

در معادلهٔ (۱)، CWT با همامیخت تابع موجک و سیگنال روی محدوده‌ای از مقیاس‌های به دقت انتخاب شده محاسبه می‌شود. در عمل، برای سادگی محاسبهٔ تبدیل موجک، معادلهٔ (۱) به حوزهٔ فوریه برده می‌شود:

$$C(k,s) = T^{FT}(k)\ \Psi^*(sk) \qquad (۲)$$

که C، TFT و Ψ به ترتیب تبدیل‌های فوریهٔ c، T و ψ هستند. به همین صورت برای سیگنال‌های دوبُعدی T(x,y) تبدیل موجک در حوزهٔ فوریه به صورت:

$$C(k_x,k_y,s) = T^{FT}(k_x,k_y)\ \Psi^*(sk_x,sk_y) \qquad (۳)$$

نوشته می‌شود که kx و ky به ترتیب عدد موج‌های متناظر با پارامترهای فضایی x و y هستند.

انتخاب موجک در هر مسئله، بستگی به ماهیت و کاربرد ویژهٔ موجک در آن مسئله دارد. به‌طورِکلی برای سیگنال‌های هموار، موجکی که دارای شکل هموارتری باشد، مناسب‌تر است تا از این راه تمرکز عدد موجی خوبی داشته باشد. برعکس، سیگنال‌هایی که شامل ناپیوستگی هایی باشند، با موجک‌هایی با تمرکز فضایی خوب، بهتر تحلیل می‌شوند تا به دقت، تغییرات سریع در سیگنال را به تصویر بکشند. دو خانواده از موجک‌های مورد استفادهٔ رایج در زیر توصیف شده‌اند.

موجکهای مشتق گاوسی (Derivative Of Gaussian wavelets, DOG) از مشتقات فضایی گوناگون شکل‌موج گاوسی ساخته می‌شوند. در دو بُعد، موجک‌های DOG به صورت جملاتی از فاصلهٔ شعاعی ($r=\sqrt{x^2+y^2}$) و عددموجی شعاعی ($k_r=\sqrt{k_x^2+k_y^2}$) به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\psi_0(r) = \frac{d^m}{dr^m}\left(e^{-r^2/2}\right),$$
$$\Psi_0(k_r) = (ik_r)^m e^{-ik_r/2} \qquad (۴)$$

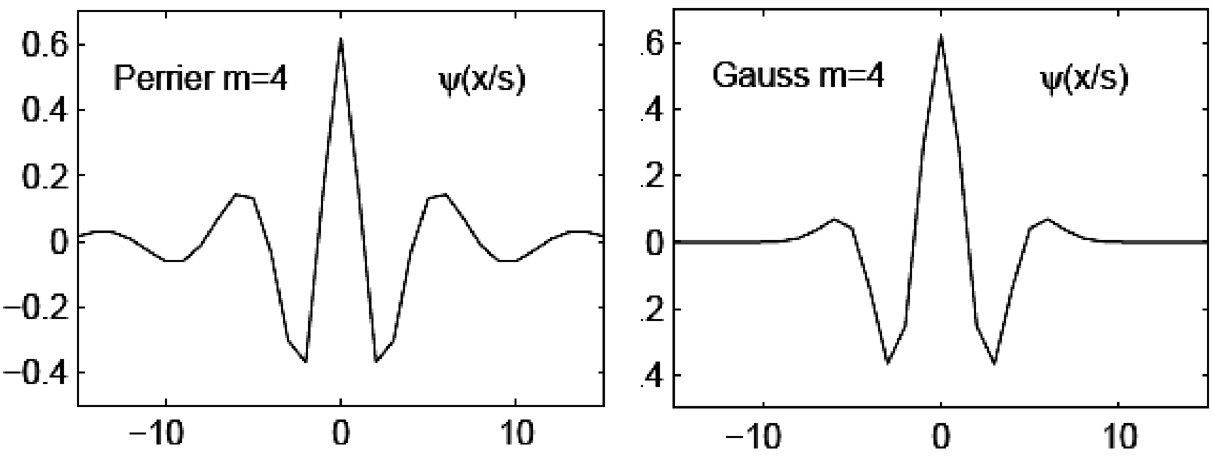
که مرتبهٔ موجک، مرتبهٔ مشتق mاُم است. خانوادهٔ DOG موجک‌ها حقیقی‌اند و به طور بهینه هم در فضا و هم عدد موج متمرکز می‌شوند. افزایش مرتبهٔ m باعث افزایش تمرکز عددموجی و به تناظر باعث کاهش تمرکز فضایی می‌شود. موجک‌های DOG دوبُعدی، تقارن شعاعی حول (x_0,y_0) در حوزهٔ فضایی و حول $(k_x,k_y)=(0,0)$ در حوزهٔ عدد موج را دارند. در عدد موج‌های پایین، پاسخ توابع DOG بسیار باریک است و می‌توان به دقت طیف سیگنال را حول عدد موج میانی‌اش برآورد کرد. اما در عدد موج‌های بزرگ، پاسخ توابع DOG بسیار پهن است و طیف سیگنال برآورد شده با طیف واقعی سیگنال در عدد موج میانی‌اش سازگار نیست که دلیل آن، بزرگ‌تر بودن مولفه‌های فوریهٔ سیگنال در عدد موج‌های کمتر نسبت به عدد موج‌های بیشتر است. بنابراین وقتی سیگنال در تابع موجک ضرب می‌شود، یک سهم بسیار بزرگ‌تر برای ضرایب موجک محاسبه‌شده از عدد موج‌های کمتر نسبت به عدد موج‌های بیشتر به‌دست‌آمده در یک فرابرآورد توابع سیگنال حاصل می‌شود. موجک DOG مرتبهٔ ۴ در شکل ۳ نشان داده شده است.

توابع موجک پریئر (Perrier wavelet) در حوزهٔ عدد موجی به شکل:

$$\Psi_0(k_r)=e^{-\frac{1}{2}\left(k_r^{\,2}+\frac{1}{k_r^{\,2m}}\right)} \qquad (۵)$$

بیان می‌شوند اما دارای بیان ساده‌ای در حوزهٔ فضایی نیستند. خانوادهٔ موجک‌های پریئر دارای توزیع عدد موجی با شیب بزرگ هستند که در مقایسه با مرتبهٔ m به صورت خطی است. این ویژگی برای تحلیل افت‌های نمایی عدد موجی استفاده می‌شود و چون داده‌های مغناطیسی اغلب دارای چنین طیف‌های توانی هستند، موجک‌های پریئر یک انتخاب بسیار مفید برای برآورد دقیق این طیف‌ها است (پریئر و همکاران، ۱۹۹۵).

موجک پریئر با داشتن یک پاسخ عدد موجی خاص با یک منطقهٔ وسیع‌تر در سمت عدد موج‌های بزرگ‌تر از عدد موج میانی نسبت به عدد موجهای کوچک‌تر از عدد موج میانی، مشکلات ذکر شده برای موجک DOG را ندارند. این امر به موجک اجازه می‌دهد تا افت نمایی را حتی در عدد موج‌های زیاد که پهنای باند موجک وسیع است، با دقت برآورد کنند. موجک پریئر مرتبهٔ ۴ در شکل ۳ نشان داده شده است.



شکل۳. دو موجک مورد استفاده در ادامهٔ فراسو و فروسو. شکل راست، موجک مشتق گاوسی مرتبهٔ ٤ و شکل چپ، موجک پریئر مرتبهٔ ٤ است.

۲-۲ ادامهٔ فراسو

عملگر ادامه در نظریهٔ پتانسیل، مستقیماً از اتحاد سوم گرین به‌دست می‌آید (بلکلی، ۱۹۹۶) که با فرض نبود هیچ منبع مغناطیسی بین صفحهٔ مشاهدهٔ اصلی و صفحهٔ جدید، میدان مغناطیسی روی آن صفحهٔ دلخواه با داده‌های مشاهده‌ای قابل محاسبه است. اگر صفحهٔ جدید بالای صفحهٔ مشاهده‌ای قرار گیرد، عملگر ادامهٔ فراسو نامیده می‌شود. تعدادی از روش‌ها برای محاسبهٔ مجدد میدان‌های مغناطیسی روی سطوح ارتفاع متغیر با داشتن میدان مشاهده شده روی یک سطح ارتفاع ثابت منتشر شده است که برای مقایسه با روش موجک به معرفی آنها پرداخته می‌شود.

یکی از روش‌ها، فن فیلتر خطی است. ساده‌ترین فیلتر خطی، فیلتر همامیخت (convolution filter) تغییرناپذیر با فضا است. خروجی سیگنال Tf به صورت مجموع مقادیر سیگنال ورودی T ضربدر تابع فیلتر f به صورت:

$$T_f(x_n)=\sum_{j=-M+1}^{M-1} f(x_j)T(x_{n-j}) \qquad (۶)$$

و یا در شکل ماتریسی:

$$T_f=FT \qquad (۷)$$

بیان می‌شود که F ماتریسی شامل ضرایب فیلتر f متمرکز شده در اطراف قطر اصلی در هر سطر از ماتریس است. شکل کلی‌تر فیلتر خطی، فیلتر متغیر با فضای fn با مجموعه‌ای از ضرایب تعریف‌شده برای هر نقطهٔ xn در سیگنال است. در این حالت عملگر فیلتری به صورت:

$$T_f(x_n)=\sum_{j=-M+1}^{M-1} f_n(x_j)T(x_{n-j}) \qquad (۸)$$

بیان می‌شود که ماتریس F شامل ضرایب fn متمرکز شده اطراف قطر اصلی در هر سطر n است.

وقتی صفحهٔ مشاهده‌ای در یک ارتفاع ثابت $z_0=z$ قرار دارد، میدان ادامه یافته به شکل یک فیلتر گسستهٔ عمل‌کننده روی میدان مغناطیسی مشاهده‌ای T بیان می‌شود:

$$T_{cont}(x_m,y_n)=\sum_i\sum_j f_{m,n}(x_i,y_j)\,T(x_{m-i},y_{n-j}) \qquad (۹)$$

که:

$$f_{m,n}=\frac{\Delta z(x_m,y_n)}{2\pi[x^2+y^2+\Delta z(x_m,y_n)^2]^{3/2}} \qquad (۱۰)$$
$$\&\ \ \Delta z(x_m,y_n)=z_0-z_{new}(x_m,y_n)>0$$

و $T_{cont}(x,y)$ میدان مغناطیسی روی سطح جدید $z_{new}(x,y)$ است. تبدیل فوریهٔ فیلتر $f_{m,n}(x,y)$ با:

$$f^{FT}{}_{m,n}(k_r)=e^{-\Delta z(x_m,y_n)k_r} \qquad (۱۱)$$

داده می‌شود. بنابراین پاسخ عدد موجی به صورت نمایی با عدد موج در نرخی متناسب با فاصلهٔ ادامهٔ Δz، میرا می‌شود. عملگر ادامهٔ فراسوی متغیر را می‌توان به طور سرراست با ساختن فیلتر مقیاس مورد استفاده قرار داد. در ادامهٔ فراسو یک پاسخ مغناطیسی جدید روی یک سطح دلخواه که بالای سطح مشاهدهٔ ارتفاع ثابت قرار دارد، به‌دست می‌آید. این سطح از منابع مغناطیسی دفن‌شده دورتر است و بنابراین داده‌های ادامه‌یافتهٔ به‌دست آمده از داده‌های اندازه‌گیری شدهٔ اصلی، هموارترند.

در روش سری‌های تیلور، میدان موردنظِر روی سطح متغیر به کمک تعداد محدودی از جملات سری تیلور میدان مغناطیسی اندازه‌گیری شده به صورت:

$$T_{cont}(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[\Delta z(x,y)]^n}{n!}\frac{\partial^n}{\partial z^n}T(x,y) \qquad (۱۲)$$

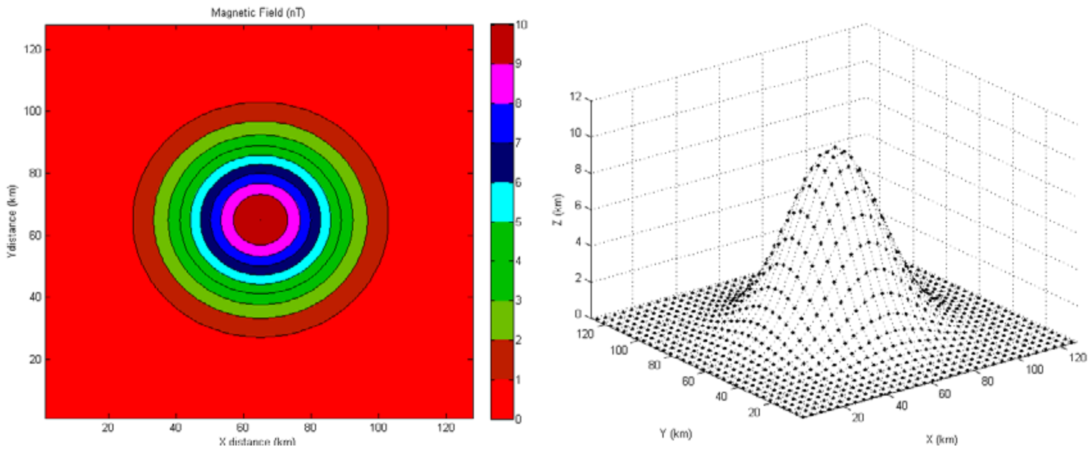
و یا برحسب تبدیل فوریه به شکل:

$$T_{cont}(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[\Delta z(x,y)]^n}{n!}F^{-1}\left[K_r^n\,F[T(x,y)]\right] \qquad (۱۳)$$

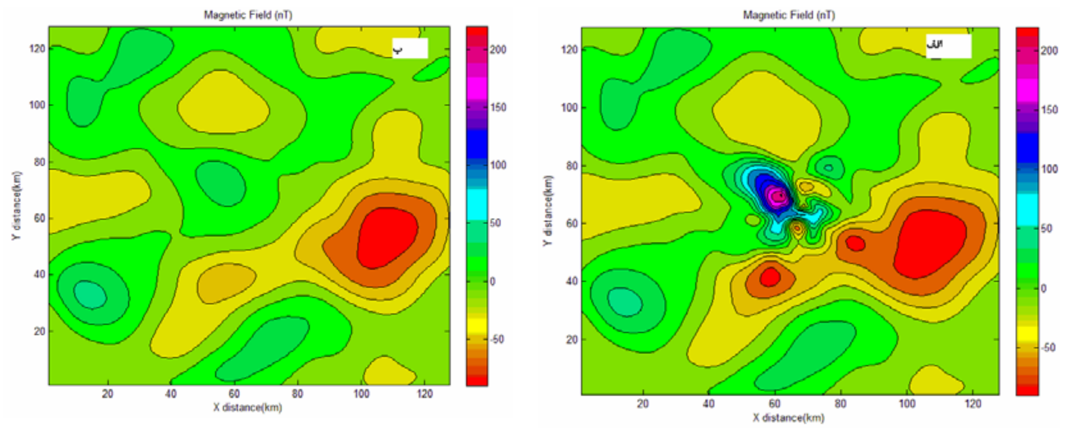
بیان می‌شود که F و F^{-1} به ترتیب عملگرهای تبدیل فوریهٔ مستقیم و معکوس‌اند و فیلتر K_r^n، nاُمین مرتبهٔ مشتق قائم را محاسبه می‌کند (کردل و همکاران، ۱۹۸۵).

روش چسبورد شامل مجموعه‌ای از ادامه‌های فراسوی ارتفاع ثابت به ارتفاع ثابت برای تولید حجمی از داده‌های مغناطیسی احاطه‌کنندهٔ سطح ادامهٔ مطلوب $z_{new}(x,y)$ است. میدان موردنظر سپس روی این سطح به کمک درون‌یابی بین لایه‌های ادامه یافتهٔ ارتفاع ثابت مناسب، محاسبه می‌شود (کردل، ۱۹۸۵؛ پترسون و همکاران، ۱۹۹۰).

برای نشان دادن کاربرد فنون ادامهٔ فراسو، روش‌های فیلتر مقیاس موجک، فیلتر متغیر با فضا، چسبورد و سری‌های تیلور روی یک مدل مغناطیسی مصنوعی اعمال شدند. مدل شامل یک توزیع مغناطیس‌شدگی دوقطبی پوشانده شده روی توپوگرافی نشان داده شده در شکل ۴ است. پاسخ مغناطیسی روی یک سطح ارتفاعی ثابت در z_0=۱۲ واحد و روی یک سطح ارتفاعی متغیر، ۱۲ واحد بالای توپوگرافی محاسبه شدند. به ترتیب میدان مشاهده شده و نتیجهٔ ادامهٔ مطلوب در شکل ۵ نشان داده شده‌اند. اندازهٔ هر دو شبکه، ۱۲۸×۱۲۸ واحد بودند.



شکل ٤. توپوگرافی مورد استفاده برای تولید تصویر مغناطیسی مصنوعی به کار رفته برای مثال‌های ادامهٔ فراسو (CI=۱ nT). میدان مغناطیسی مشاهده شده، روی سطحی در یک ارتفاع ثابت ۱۲ کیلومتری اندازه‌گیری شد.

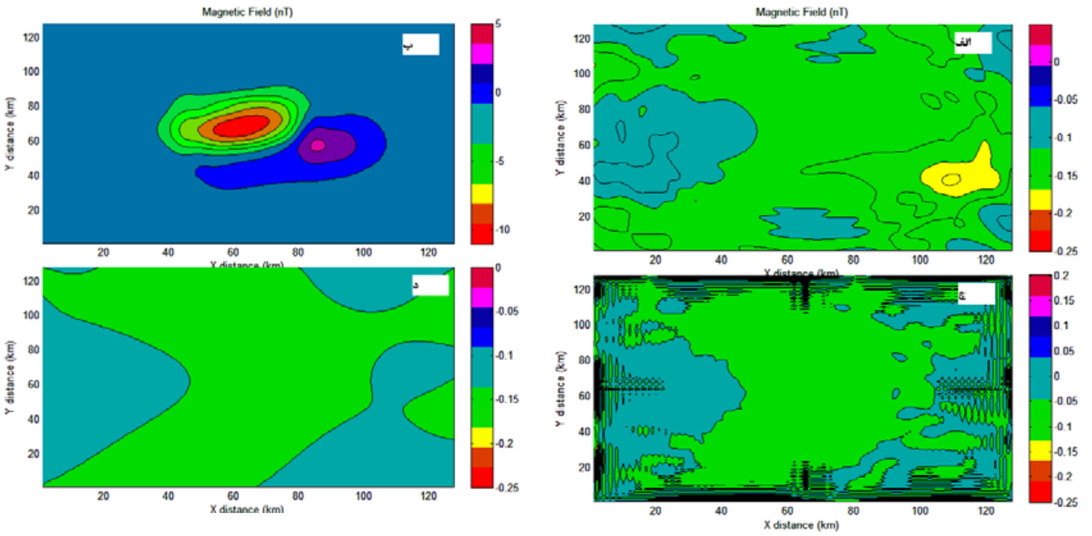


شکل ۵. داده‌های مغناطیسی مصنوعی مورد استفاده برای مثال‌های ادامهٔ فراسو. (الف) میدان مغناطیسی محاسبه شده، روی سطحی در یک ارتفاع ثابت ۱۲ واحدی (CI=۲۰ nT)، (ب) میدان مغناطیسی محاسبه‌شده روی سطح ارتفاعی متغیر $z_{new}(x, y)$ در ارتفاع ثابت ۱۲ واحدی بالای توپوگرافی (CI=۲۰ nT).

خطاهای حاصل بین ادامهٔ فراسوی محاسبه شده برای هر روش و پاسخ صحیح، در شکل ۶ نشان داده و در جدول ۱ خلاصه شده‌اند. در روش فیلتر مقیاس موجک، از موجک پریئر ۶ و در فیلتر متغیر با فضا از فیلتر ۴۱×۴۱ نقطه‌ای استفاده شد، به‌طوری‌که زمان محاسباتی برای فیلتر کردن تقریباً برابر با زمان مربوط به موجک بود. برای روش چسبورد، مجموعه‌ای از ۱۱ تراز ادامهٔ فراسو و درون‌یابی مکعبی استفاده شد. نتیجهٔ سری‌های تیلور از تکرار ۵۰ جمله‌ای معادلهٔ (۱۲ و ۱۳) تولید شد.

نتایج این مثال مصنوعی نشان می‌دهد که روش‌های فیلتر مقیاس موجک، چسبورد و سری‌های تیلور، همگی یک سیگنال ادامه‌یافتهٔ فراسوی با سطح دقت مشابه را تولید می‌کنند. اما، به‌وضوح، فیلتر متغیر با فضا نمی‌تواند با هر کدام از این روش‌ها در حالت دوبُعدی رقابت کند.

بازدهی محاسباتی هر سه روش، مؤثر و تقریباً برابر است. اما، روش سری‌های تیلور می‌تواند با کاهش تعداد تکرار، از دو روش چسبورد و موجک مؤثرتر باشد. برای مثال، روش سری‌های تیلور می‌تواند بعد از فقط ۱۱ تکرار به خطای (Root-Mean Square, RMS) مشابه با روش موجک برسد. هیچ‌کدام از سه روش موجک، چسبورد و فیلتر متغیر با فضا نمی‌توانند بدون کاهش مشخصی در بازدهی، سریع‌تر عمل کنند. جواب همهٔ این روش‌ها در مدت کمتر از ۴۰ ثانیه به کمک نرم‌افزار matlab تولید شد. نتایج نشان داده شده در شکل ۵، مفید بودن ادامهٔ فراسو را برای تصحیحات توپوگرافی واضح می‌سازد. در داده‌های ارتفاع ثابت، بافت مغناطیسی تصویر به‌طور مشخص با تغییر ارتفاع بالای توپوگرافی تغییر می‌کند. در مقابل، بافت مغناطیسی در امتداد داده‌های ارتفاعی متغیر، بسیار سازگار است.



شکل ۶. خطاها در ادامهٔ فراسوی داده‌های مصنوعی. (الف) خطای فیلتر مقیاس موجک (CI=۰٫۰۵ nT)، (ب) فیلتر متغیر با فضا (CI=۲ nT)، (ج) روش چسبورد (CI=۰٫۰۵ nT) و (د) روش سریهای تیلور (CI=۰٫۰۵ nT).

جدول ۱. RMS و محدودهٔ خطاها برای مثال ادامهٔ فراسوی مصنوعی.

روش	خطای RMS (nT)	محدودهٔ خطا (nT)
موجک	۰٫۰۹۹	۰٫٤۸
فیلتر متغیر با فضا	۳٫۹	۳۲
چسبورد	۰٫۰٥٦	۰٫٥۱
تیلور	۰٫۰٤۹	۰٫۲۰

۲-۳ ادامهٔ فروسو

در ادامهٔ فروسو، میدان مغناطیسی روی سطح جدیدی که زیر سطح مشاهده‌ای واقع شده و بنابراین به منبع مغناطیسی قرار گرفته در زیر زمین نزدیک‌تر است، محاسبه می‌شود. برعکس ادامهٔ فراسو، این ادامه فیلتری بالاگذر و نتیجهٔ داده‌های ادامه یافته نسبت به داده‌های اندازه‌گیری شدهٔ اصلی ناهموارتر است. پاسخ عدد موجی فیلتر ادامهٔ فروسوی سطح متغیر با فیلتر داده شده در معادلات (۹-۱۱) برای ادامهٔ فراسو یکسان است؛ اما در این حالت فاصلهٔ ادامهٔ Δz عددی منفی است. به این معنا که دامنهٔ فیلتر به‌طور نمایی با عددموج افزایش می‌یابد که باعث می‌شود عملگر ادامهٔ فروسو ناپایدار شود. در داده‌های واقعی وجود نوفه و خطاهای عددی در پردازش، مولفه‌های عددموج زیاد را در سیگنال اصلی تولید می‌کنند. این مولفه‌ها شبیه منبع‌های مغناطیسی کم‌عمق رفتار می‌کنند و به‌طور نمایی با ادامهٔ فروسو تقویت می‌شوند که باید قبل از اعمال عملگر ادامه با فیلترهای پایین‌گذر تضعیف شوند. ادامهٔ فروسوی سطح متغیر می‌تواند به کمک فیلتر مقیاس موجک، روش چسبورد و سری‌های تیلور توصیف شده در بخش ۲-۲ صورت گیرد.

اعمال فیلتر مقیاس موجک به ادامهٔ فروسو، اجازه می‌دهد تا از فیلترهای پایین‌گذر وفق‌یافته با محتوای عدد موج محلی سیگنال استفاده شود. در عدد موج‌های کم، طیف دامنهٔ محلی سیگنال با نرخ سریع‌تر از افزایش‌های دامنهٔ فیلتر ادامهٔ فروسو به صورت نمایی میرا می‌شود. بنابراین هیچ تفاوتی در اعمال فیلتر ادامهٔ فروسو به سیگنال در عدد موج‌های کم وجود ندارد. در عوض، در عدد موج‌های زیاد، طیف دامنهٔ محلی سیگنال با نرخ آهسته‌تر از افزایش در دامنهٔ فیلتر پایین‌گذر میرا می‌شود. یعنی در سیگنال فیلتر شدهٔ حاصل، دامنهٔ هر نوفه عدد موج بالا با افزایش عدد موج به طور نمایی افزایش خواهد یافت. برای ساخت فیلتر هموارسازی موجک، اولاً تعیین عدد موجی که در آن این انتقال صورت می‌گیرد و ثانیاً طراحی یک فیلتر پایین‌گذر برای تضعیف مولفه‌های سیگنال در عدد موج‌های بالاتر از عدد موج انتقال نیاز است.

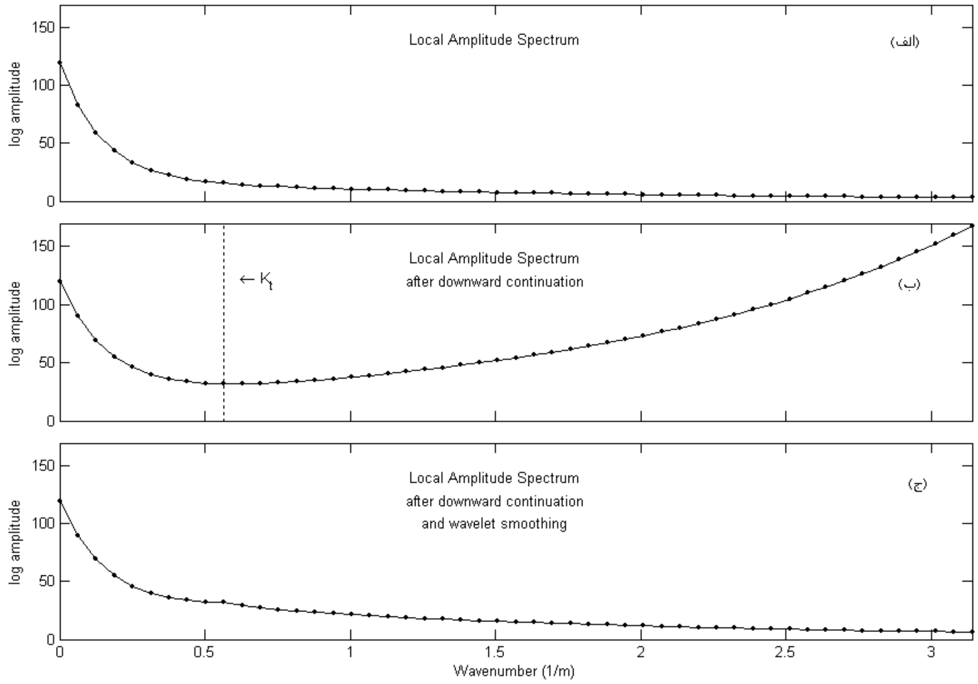
فیلتر پایین‌گذر انتخابی مورد استفاده در روش موجک، تمام اطلاعات در عدد موج‌های کمتر از یک عدد موج مشخص شدهٔ k_t را عبور می‌دهد و در عدد موج‌های بیشتر از آن، به‌طور نمایی آنها را میرا می‌سازد. این تابع فیلتر به صورت:

$$F_{ij}(k_r) = \begin{cases} 1 & k_r \le k_t \\ e^{(\Delta z(x_i,y_i)+d)(k_r-k_t)} & k_r > k_t \end{cases} \qquad (۱۴)$$

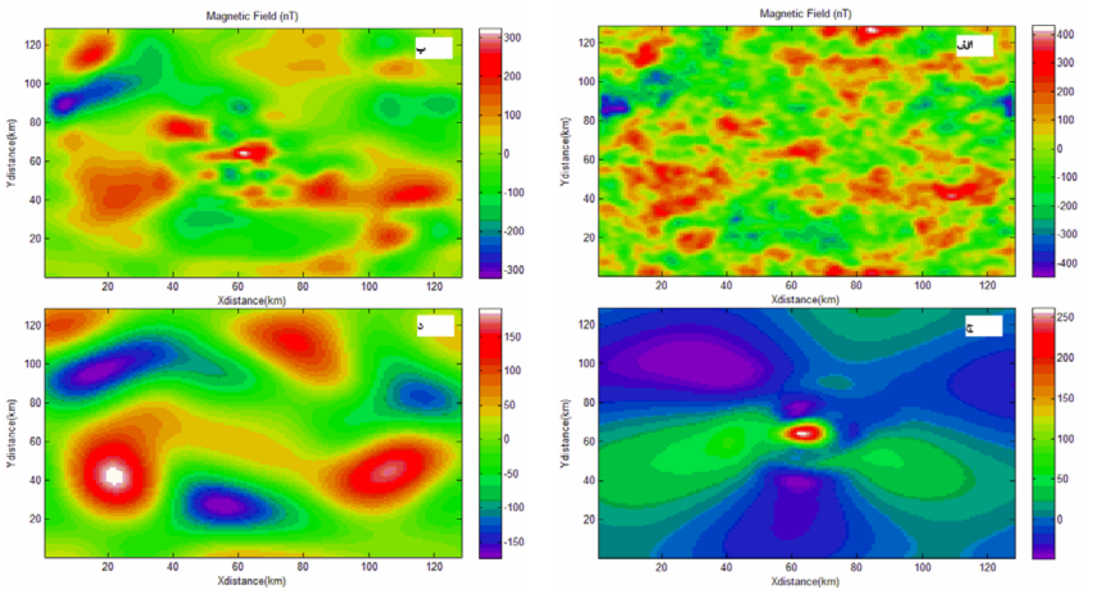
انتخاب شده است. k_t، عددموج گذر است که بالاتر از آن، سیگنال میرا می‌شود و d پارامتری برای معرفی هموارسازی بیشتر یا کمتر در عدد موج‌های بالاتر و برعکس است. کمیت Δz فاصلهٔ ادامهٔ فروسو در نقطهٔ (x_i, y_i) است. برای تعیین مقدار عدد موج دنبالهٔ k_t، طیف دامنهٔ محلی در هر نقطه از سیگنال با گرفتن جذر مربعات طیف توان محلی تقریب زده شد. مراحل کار در شکل ۷ دیده می‌شود. برآوردکردن طیف دامنهٔ محلی هموار شدهٔ نشان داده شده در شکل (۷-الف)، ابتدا در فیلتر ادامهٔ فروسو ضرب شد تا برآوردی از طیف دامنهٔ فیلتر شدهٔ هموار نشده (شکل۷-ب) را تولید کند. این طیف سپس تحلیل شد تا عدد موج k_t تعیین شود. فیلتر پایین‌گذر با فیلتر ادامهٔ فروسو ترکیب شد تا نتیجه‌ای پایدارتر را موقع اعمال به طیف دامنهٔ محلی تولید کند (شکل ۷- ج). هدف، پیدا کردن عدد موجی بود که سیگنال فیلتر شدهٔ تقریبی، یک کمینه باشد. این عدد موج (نشان داده شده با k_t)، در محل انتقال بین سیگنال و نوفه قرار دارد.

فن‌های متفاوتی که در ادامهٔ فراسو به کار برده شد، برای ادامهٔ فروسو نیز مورد استفاده قرار گرفت تا توانایی و ضعف این روش‌ها با هم مقایسه شود. داده‌های موجود،

به یک سطح ارتفاع ثابت دو واحد بالای توپوگرافی ادامهٔ فروسو شدند. در روش موجک از فاکتور هموارسازی d=۱ استفاده شد (رابطهٔ ۱۴). برآوردهای k_t از طیف‌های دامنهٔ محلی میانگین گیری شده روی پنجره‌های ۵۱×۵۱ نقطه‌ای، صورت گرفت و سپس هموارسازی شد. ادامهٔ فروسوی چسبورد به کمک ۱۱ مرحلهٔ ادامه یافتهٔ فروسو از سطح داده‌های اولیه تا سطح مطلوب محاسبه شد. در روش سری تیلور از ۱۰ جملهٔ بسط تیلور استفاده شد. نتایج در شکل ۸ همراه با داده‌های صحیح نشان داده شده است.



شکل۷. تعیین عدد موج دنبالهٔ k_t مورد استفاده در فیلتر هموارسازی نمایی موجک.



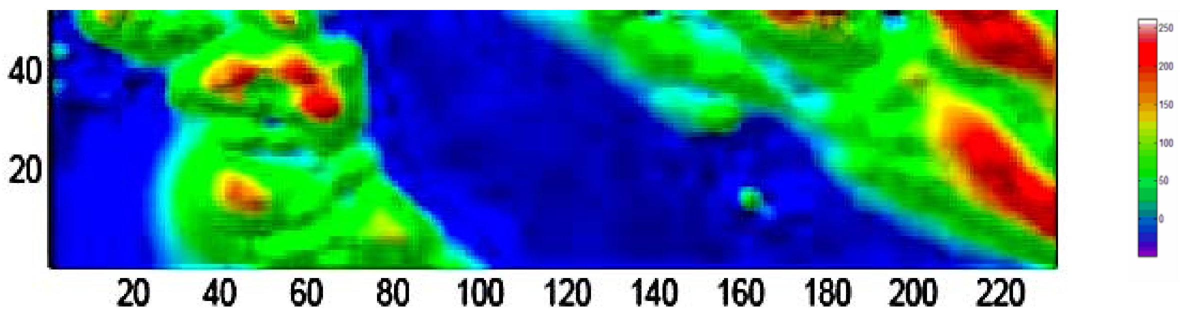
شکل۸. ادامهٔ فروسو: (الف) سیگنال صحیح، (ب) حاصل از روش موجک (خطای RMS برابر بـا nT ۹ر۶۰)، (ج) حاصـل از روش چسـبورد (خطـای RMS برابر با nT ۱۵۰) و (د) حاصل از سری‌های تیلور (خطای RMS برابر با nT ۲ر۹۵).

با توجه به نتایج شکل ۸، روش موجک به وضوح، دقیق‌ترین ادامهٔ فروسو را بین دو روش دیگر تولید می‌کند. نتیجهٔ ادامه با موجک، به ویژه به دادهٔ صحیح در مرکز دادهٔ اصلی شبیه است. در این ناحیه فاصلهٔ ادامهٔ فروسو، به دلیل شکل توپوگرافی، کمینه است. به‌نظر می‌رسد که نتیجهٔ سری تیلور فراهموار شده باشد. این نتیجه نشان‌دهندهٔ گم شدن قسمتی از بافت در این روش است. روش چسبورد شامل خطا و انحرافات جدی در مرکز شکل و همچنین بافت فراهموار شده (همانند روش سری تیلور) در باقی‌ماندهٔ شکل است.

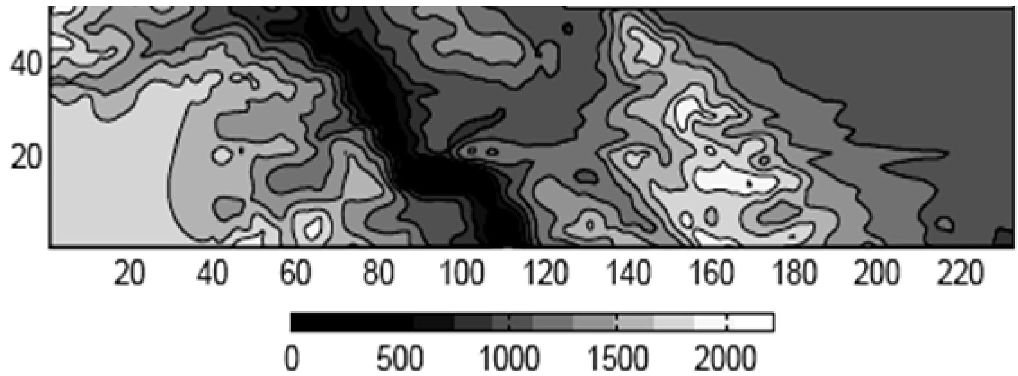
۲-۴ داده‌های واقعی

در شکل ۹ داده‌های واقعی و در شکل ۱۰ نقشه توپوگرافی منطقه نشان داده می‌شود. برداشت در یک ارتفاع ثابت ۲۴۳۸ متر خطوط پرواز در جهت شرقی غربی با فاصلهٔ بین خطوط یک کیلومتر صورت گرفته است. داده‌ها با اندازه سلولی ۲۵۰ متر شبکه‌بندی شد. به منظور بهبود توان تفکیک منطقه با ادامه فراسو، داده‌های برداشت شده در ارتفاع ثابت به ارتفاع ۳۵۰ متر بالای توپوگرافی، انتقال داده شد. در ادامه فروسوی موجک از فاکتور افزوده شده d=۱ استفاده شد. عدد موج دنباله k_t از برآوردهای دامنه محلی هموار شده روی پنجره‌های ۵۱×۵۱ نقطه‌ای برآورد شد. در روش چسبورد از ۱۱ تراز ادامه و فیلتر خط‌کش ریاضیاتی (sliding rule) مرتبه n=۱ و در روش سری‌های تیلور از ۲۰ تکرار استفاده شد. نتایج هر ادامه فروسو در شکل ۱۱ نشان داده شده است. روش‌های موجک و سری تیلور بهترین نتایج را برای این داده‌ها تولید می‌کنند. نتیجه سری‌های تیلور در مقایسه با روش موجک توافق نزدیک‌تری با داده‌ها در راستای مرز فراهم می‌کند. اما بافت تصویر حاصل از سری تیلور به اندازهٔ تصویر حاصل از روش موجک واضح نیست که علت آن فراهموار شدگی جزئی است. این موضوع در گوشه بخش جنوبی تصویر که فاصله ادامه فراسو دارای کمترین مقدار است به خوبی مشهود است. به نظر می‌رسد که در این مثال روش چسبورد بسیار ضعیف عمل می‌کند. در بخش ۲-۲ نشان داده شد که سه روش توصیف شده برای ادامه فراسو به خوبی عمل می‌کنند. تفاوت بزرگ در عملکرد هر کدام از این روش‌ها در ادامه فراسو، معنی و اهمیت انتخاب روش هموارسازی روی دقت نتیجه مورد نظر را مشخص می‌سازد.

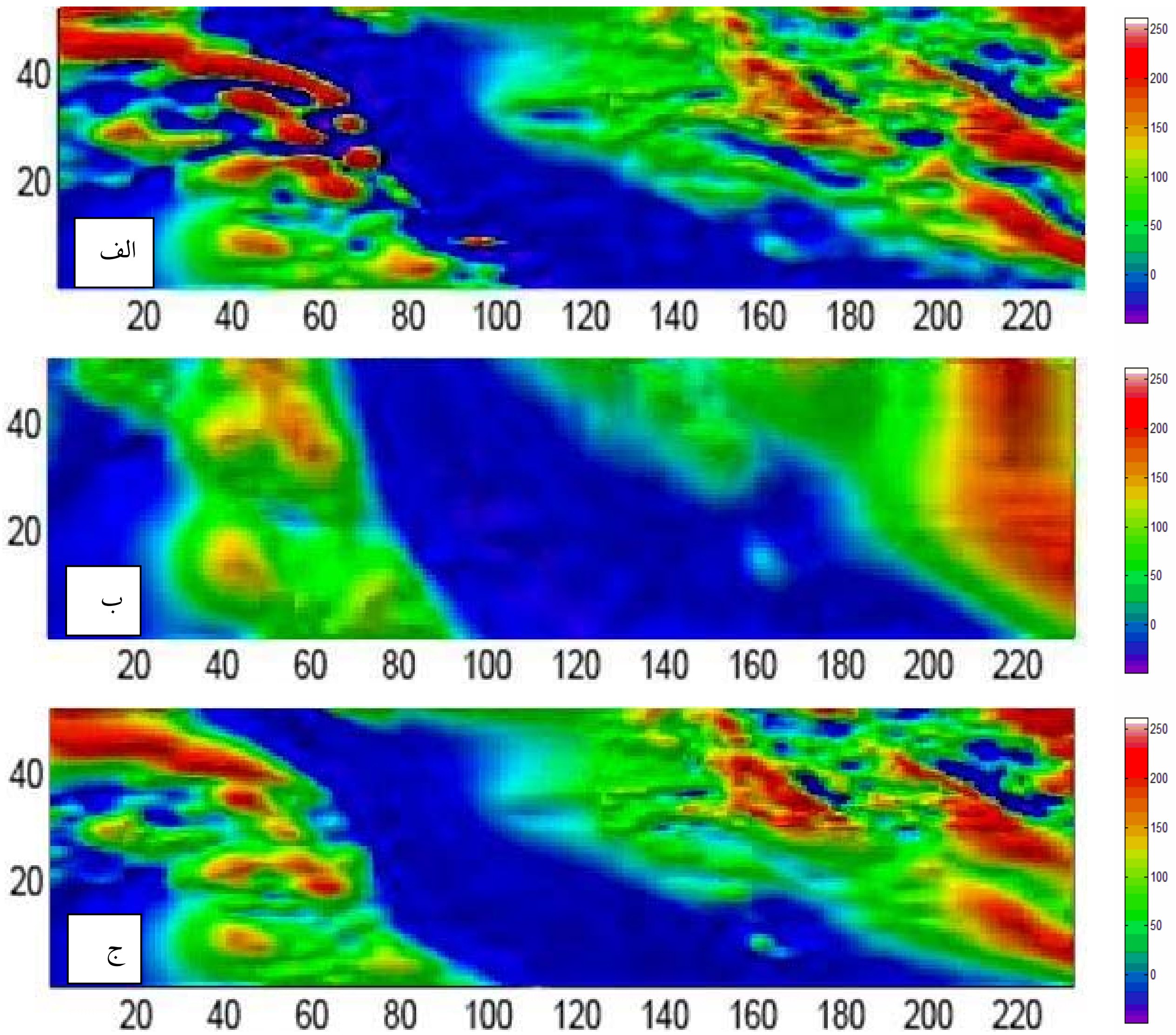
فیلتر نمایی موجک ویژگی وفق محلی با سیگنال دارد. یعنی هنگامی که فواصل ادامه فروسوی محلی کوچک‌اند، نیازی به فراهموار کردن سیگنال وجود ندارد. این مورد در روش موجک به وضوح در بخش مرکزی مثال مصنوعی و بخش جنوبی مثال واقعی مشهود است. در مقابل، فیلتر کسینوسی سری‌های تیلور طوری طراحی شده‌اند تا در پایداری ادامه فروسو روی بزرگ‌ترین فاصله ادامه اطمینان حاصل شود. از لحاظ نظری در روش چسبورد می‌توان با تنظیم مقدار هموارسازی اعمال شده به هر قطعه ادامه فروسو، رفتاری همانند روش موجک را انتظار داشت. اما به نظر نمی‌رسد که فیلتر خط‌کش ریاضیاتی به همان اندازه فیلتر نمایی موجک مؤثر باشد.



شکل ۹. داده‌های مغناطیس تصحیح نشده مورد استفاده برای اعمال فیلترهای متفاوت و دارای مشخصات: اندازه سلول‌ها= ۲۵۰ متر، زاویهٔ قسمت= ۳۰۰، زاویه میل= ۳۰۰. در شکل، جهت شمال به سمت بالا است. اندازه‌ها برحسب کیلومتر است.



شکل ۱۰. توپوگرافی منطقه برداشت داده‌های مغناطیسی.



شکل ۱۱. نتایج ادامهٔ فروسو (الف) ادامهٔ فروسوی موجک، (ب) ادامهٔ فروسوی چسبورد و (ج) ادامهٔ فروسوی سری تیلور.

یک عامل بحرانی در هموارسازی موجک، اطمینان یافتن از این است که پارامترهای فیلتر هموارسازی از نقطه‌ای در سیگنال به نقطه دیگر به‌طور هموار تغییر می‌کند. این امر به کمک برآوردهای هموار شده محتوای طیفی محلی از قبیل برآوردهای صحیح و میانگین‌گیری شده فضایی مورد استفاده در اینجا می‌تواند به‌دست آید.
یکی از مزایای روش موجک و چسبورد نسبت به روش سری‌های تیلور این است که با روش موجک امکان تولید پارامترهای مورد نیاز برای طراحی فیلترهای هموارسازی به راحتی موجود است. در عوض روش سری‌های تیلور نیاز به مقداری سعی و خطای برنامه‌نویسی دارد. انتخاب صحیح پارامترهای هموارسازی برای سری‌های تیلور برای عملی ساختن دقیق ادامه لازم و ضروری است. به نظر می‌رسد که روش موجک نسبت به روش سری‌های تیلور، خطاهای بیشتری در نزدیکی مرز داده‌ها داشته باشد. این مورد ممکن است به خاطر پیمایش ناکامل داده‌ها باشد که از برآوردهای عدد موج محلی در مجاورت لبه داده‌ها حاصل شده است.

از نظر کارایی، روش موجک در موارد ادامه فروسو که فاصله ادامه روی ناحیه بسیار متغیر و بزرگ است، به‌خوبی عمل می‌کند. این امر غالباً به خاطر موثر بودن فیلتر هموارسازی نمایی است. با انتخاب دقیق پارامترهای هموارسازی، سری‌های تیلور را می‌توان طوری طراحی کرد که به خوبی روش موجک عمل کند. اما انتخاب این پارامترها اغلب وقتی فواصل ادامهٔ فروسو بزرگ‌اند، مشکل است. روش چسبورد ترکیب‌یافته با فیلتر خط‌کش ریاضیاتی در این مثال‌ها ضعیف عمل می‌کند. برای ادامهٔ فراسو، روش سری‌های تیلور مؤثرتر و پربازده‌تر از روش‌های موجک یا چسبورد هستند اگرچه تفاوت آنها ممکن است در کاربردهای عملی قابل صرف‌ِنظر کردن باشد.

۳ نتیجه‌گیری

بسیاری از فیلترهای مغناطیسی رایج در حوزهٔ فوریه طراحی و به کار گرفته می‌شوند. اما روش‌های حوزهٔ فوریه دارای ماهیتی ذاتاً کلی‌نگرند و نمی‌توانند براساس ویژگی‌های محلی سیگنال تغییر یابند. یکی از روش‌های پردازشی جدید، تبدیل موجک است که می‌تواند تغییرات محلی سیگنال برحسب عدد موج‌های متفاوت را به خوبی نشان دهد و ابزار بسیار قوی و مؤثری در پردازش و تفسیر بسیاری از داده‌هایی است که در مورد آنها روش‌های پردازش حوزهٔ فوریه با مشکل مواجه می‌شوند.
برای نشان دادن کاربرد فنون ادامهٔ فراسو، روش‌های فیلتر مقیاس موجک، فیلتر متغیر با فضا، چسبورد و سری‌های تیلور روی یک مدل مغناطیسی مصنوعی اعمال شدند. در روش فیلتر مقیاس موجک، از موجک پریئر ۶ و در فیلتر متغیر با فضا از فیلتر ۴۱×۴۱ نقطه‌ای استفاده شد. موجک پریئر با داشتن یک پاسخ عدد موجی خاص باعث می‌شود تا افت نمایی حتی در عدد موج‌های بزرگ که پهنای باند موجک وسیع است، با دقت برآورد شود. برای روش چسبورد، مجموعه‌ای از ۱۱ تراز ادامهٔ فراسو و درون‌یابی مکعبی استفاده شد. نتیجهٔ سری‌های تیلور از تکرار ۵۰ جمله‌ای تولید شد. در زمان محاسباتی تقریباً یکسان، روش‌های فیلتر مقیاس موجک، چسبورد و سری‌های تیلور، همگی یک سیگنال ادامهٔ یافتهٔ فراسوی با سطح دقت مشابه را تولید می‌کنند. اما فیلتر متغیر با فضا نمی‌تواند با هرکدام از این روش‌ها در حالت دوبُعدی رقابت کند. در ادامهٔ فروسو، با انتخاب فیلتر هموارسازی مناسب برای روش موجک (در اینجا از فاکتور هموارسازی d=۱ استفاده شد)، داده‌های مغناطیسی را بهتر از روش‌های معمول می‌توان پردازش کرد. روش سری تیلور باعث فراهموار شدن و در نتیجه مفقود شدن قسمتی از بافت تصویر می‌شود. روش چسبورد برای ادامهٔ فروسو نامناسب‌ترین روش است چون نتیجهٔ حاصل از آن با

سیگنال صحیح هیچ شباهتی ندارد. تحلیل عدد موج محلی بر پایهٔ موجک می‌تواند با عملگر ادامهٔ فروسوی ذاتاً ناپایدار و همین‌طور ادامهٔ فراسو ترکیب شود تا روشی قوی در مقایسه با روش‌های معمول فراهم آورد. روش‌های پردازش وفق‌یافتهٔ محلی ساخته شده براساس تبدیل موجک، برای پردازش داده‌های مغناطیسی، نسبت به ساختارهای فوریه‌ای و حوزهٔ فضایی (چسبورد و تیلور) الگوریتم‌های موثر و پایدارتری فراهم می‌آورند.

توضیح: خطای جذر میانگین مربعات (RMS) برای مجموعه‌ای از N خطای به‌دست آمده در محاسبات شامل خطاهای x_i که $1 \le i \le N$، به صورت:

$$RMS = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}{N}}$$

به‌دست می‌آید.

منابع

Bhattacharyya, B. and Chan, K., 1977, Reduction of magnetic and gravity data on arbitrary surfaces acquired in a region of high topographic relief Geophysics, **42**, 1411–1430.

Blakely, R., 1996, Potential Theory in Gravity and Magnetic Applications: Cambridge University Press, Cambridge.

Cohen, L., 1989, Time-frequency distributions: a review, Proceedings of the IEEE, **77**(7), 941-981.

Cordell, L., 1985, Techniques, applications and problems of analytical continuation of New Mexico aeromagnetic data between arbitrary surfaces of very high relief: International Meeting on Potential Fields in Rugged Topography, Institute of Geophysics, University of Lausanne, 96–99.

Cordell, L. and Grauch, V., 1985, Mapping basement magnetization zones from aeromagnetic data in the San Juan basin, New Mexico in Hinze,W. J., Ed., The Utility of Regional Gravity and Magnetic Anomaly Maps Society of Exploration Geophysicists, Tulsa, 181–197.

Huerta-Lopez, C., Shin, Y., Powers, E. J. and Roesset, J. M., 2000, Time-frequency analysis of earthquake records, 12th World Conference on Earthquake Engineering.

Paterson, N., Reford, S., and Kwan, K., 1990, Continuation of magnetic data between arbitrary surfaces : advances and applications: SEG 60th Ann. Internat. Mtg., Soc. Expl. Geophys., 666-669.

Perrier, V., Philipovitch, T. and Basdevant, C., 1995, Wavelet spectra compared to Fourier spectra: J. Math. Phys. **36**, 1506–1519.

Pilkington, M., and Roest, W., 1992, Draping aeromagnetic data in areas of rugged topography Journal of Applied Geophysics, **29**, 135–142.