

## استفاده از الگوریتم MSAA در حل دستگاه معادلات مربوط به بازیابی میدان جاذبه

زمین در مقیاس جهانی تا درجه و مرتبه ۱۲۰ با استفاده از

### مشاهدات ماهواره GRACE

عبدالرضا صفری<sup>۱</sup>، محمدعلی شریفی<sup>۲</sup> و بابک امجدی‌پرور<sup>۳</sup>

استادیار، گروه مهندسی نقشه‌برداری، پردیس دانشکده‌های فنی، دانشگاه تهران، ایران

استادیار، گروه مهندسی نقشه‌برداری، پردیس دانشکده‌های فنی، دانشگاه تهران، ایران

دانشجوی کارشناسی ارشد ژئودزی، گروه مهندسی نقشه‌برداری، پردیس دانشکده‌های فنی، دانشگاه تهران، ایران

(دریافت: ۸۸/۲/۱۴، پذیرش نهایی: ۸۸/۱۲/۱۸)

#### چکیده

ساختار LL-SST (Low-Low Satellite-to-Satellite Tracking) اولین بار با پرتاب ماهواره GRACE (Gravity Recovery And Climate Experiment) در ۲۰۰۲ اجرایی شد. برای رسیدن به دقت و حساسیت بیشتر در بازیابی میدان جاذبه زمین در مقیاس جهانی می‌توان ساختار LL-SST را با ساختار HL-SST (High-Low Satellite-to-Satellite Tracking) که قبلاً در ماهواره CHAMP (CHALLENGING Minisatellite Payload) استفاده شده ترکیب کرد. اختلاف شتاب در راستای خط دید دو ماهواره GRACE (Line Of Sight(LOS) acceleration difference). ساده‌ترین کمیت مشاهداتی است که در آن از مشاهدات هر دو ساختار HL و LL استفاده شده است. در این مقاله در ابتدا روابط مربوط به بازیابی ضرایب ژئوپتانسیلی با استفاده از تابع مشاهداتی شتاب در راستای خط دید دو ماهواره GRACE بیان شده است و دستگاه معادلات مربوطه برای برآورد ضرایب بنا شده است. بیشینه درجه و مرتبه قابل بازیابی با استفاده از مشاهدات ماهواره GRACE، ۱۲۰ است. به بیان دیگر تعداد مجهولاتی که باید در این دستگاه برآورد شوند ۱۴۶۴۱ مجهول است. از آنجاکه حل دستگاه معادلاتی با این تعداد مجهول در یک دستگاه رایانه‌ای شخصی و با نرم‌افزار مطلب (MATLAB) امکان‌پذیر نیست، در این مقاله الگوریتم تکراری (MSAA) Multiplicative Schwarz Alternating Algorithm) که از جمله روش‌های تجزیه حوزه (Domain decomposition) است، برای حل دستگاه معادلات نرمال با ابعاد بزرگ عرضه شده و در حل دستگاه معادلات مربوط به بازیابی ضرایب ژئوپتانسیلی با استفاده از مشاهدات شبیه‌سازی شده دینامیکی ماهواره GRACE به اجرا گذاشته شده است. نتایج حاصل، حاکی از کارایی این روش از نظر دقت و سرعت همگرایی در حل دستگاه معادلات بزرگ مربوط به بازیابی ضرایب ژئوپتانسیلی است.

واژه‌های کلیدی: بازیابی میدان جاذبه، روش MSAA، Low-Low Satellite-to-Satellite Tracking

## Using the Multiplicative Schwarz Alternating Algorithm(MSAA) for Solving the Large Linear System of Equations Related to Global Gravity Field Recovery up to Degree and Order 120

Safari, A.<sup>1</sup>, Sharifi, M. A.<sup>2</sup> and Amjadiparvar, B.<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Assistant Professor, Department of Surveying and Geomatics Engineering, Faculty of Engineering, University of Tehran, Iran

<sup>2</sup> Assistant Professor, Department of Surveying and Geomatics Engineering, Faculty of Engineering, University of Tehran, Iran

<sup>3</sup> M. Sc. Student of Geodesy, Department of Surveying and Geomatics Engineering, Faculty of Engineering, University of Tehran, Iran

(Received: 4 May 2009, Accepted: 9 March 2010)

**Abstract**

The GRACE mission has substantiated the Low–Low Satellite-to-Satellite Tracking (LL-SST) concept. The LL-SST configuration can be combined with the previously realized high–low SST concept in the CHAMP mission to provide a much higher accuracy. The line of sight (LOS) acceleration difference between the GRACE satellite pair is the most frequently used observable for mapping the global gravity field of the Earth in terms of spherical harmonic coefficients.

The following relationship is valid for each evaluation point:

$$\langle \Delta \ddot{r}, \mathbf{e} \rangle = \ddot{\rho} + \frac{\dot{\rho}^2}{\rho} - \frac{\|\Delta \dot{r}\|^2}{\rho} \tag{1}$$

The GRACE ranging system provides inter-satellite range  $\rho$  and its first time derivative,  $\dot{\rho}$ , as the LL-SST observations and the GPS receivers mounted on the GRACE satellites provide the position vectors as the HL-SST mode observations. The inter-satellite range acceleration,  $\ddot{\rho}$ , and  $\Delta \dot{r}$  are obtained by numerical differentiation of  $\dot{\rho}$  and  $\Delta r$ , respectively.

In the absence of non-gravitational forces, the left-hand side of Eq. (1) can be considered as the LOS gravitational acceleration differences,  $\Delta \Gamma^{LOS}$

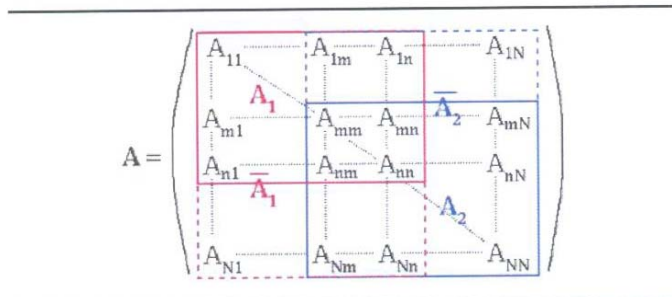
$$\Delta \Gamma^{LOS} := \ddot{\rho} + \frac{\dot{\rho}^2}{\rho} - \frac{\|\Delta \dot{r}\|^2}{\rho} \tag{2}$$

A sequence of observations with  $M$  evaluation points sets up a system with  $M$  linear equations. In this paper, the corresponding linear system of equations has been set up for spherical harmonic up to degree and order 120. The total number of unknowns,  $u$ , is

$$u = 1 + 3 + \dots + 2(N_{\max} + 1) - 1 = (N_{\max} + 1)^2 = 121^2 = 14641 \tag{3}$$

Such a linear equation system can be solved with iterative solvers or direct solvers. However, the runtime of direct methods or that of iterative solvers without a suitable preconditioner increases tremendously. This is the reason why we need a more sophisticated method to solve the linear system of problems with a large number of unknowns.

Multiplicative variant of the Schwarz alternating algorithm is a domain decomposition method, which allows it to split the normal matrix of the system into several smaller overlaped submatrices. In each iteration step the multiplicative variant of the Schwarz alternating algorithm solves linear systems with the matrices obtained from the splitting successively. It reduces both runtime and memory requirements drastically. An MSAA example with two submatrices is shown in Fig. 1



**Figure 1.** MSAA example with two submatrices.

This method dates back to H. A. Achwarz' work, published in 1980, and has been investigated by many authors since then. In this paper we propose the Multiplicative Schwarz Alternating Algorithm (MSAA) for solving the large linear system of gravity field recovery. The proposed algorithm has been applied in a close-loop simulation to the International Association of Geodesy (IAG)-simulated data of the GRACE mission. The achieved results indicate the validity and efficiency of the proposed algorithm in solving the linear system of equations from accuracy and runtime points of view.

**Key words:** Gravity field recovery, Multiplicative Schwarz Alternating Algorithm, Low-Low Satellite-to-Satellite Tracking

## ۱ مقدمه

SST به واقعیت پیوست. با توجه به ساختار ماهواره‌های مورد استفاده در روش SST دو مفهوم زیر را خواهیم داشت (شریفی، ۲۰۰۴):

### -HL-SST:

در این فن یک ماهواره کم‌ارتفاع (LEO) Low Earth Orbiter)) به منزله حسگر میدان جاذبه زمین با یک یا چند گروه از ماهواره‌های مرتفع (HEO) High Earth Orbiter)) درحکم نقاط کنترل ثابت که در حال گردش به دور زمین هستند، ردیابی می‌شوند. این مفهوم اولین بار با پرتاب ماهواره CHAMP به واقعیت پیوست. با استفاده از این روش اطلاعات بسیار ارزشمندی برای بازیابی طول موج‌های بلند و متوسط میدان جاذبه زمین (ضرایب هماهنگ‌های کروی با درجه و مرتبه کوچک‌تر از ۷۰) قابل دستیابی است (کلر و شریفی، ۲۰۰۵).

### -LL-SST:

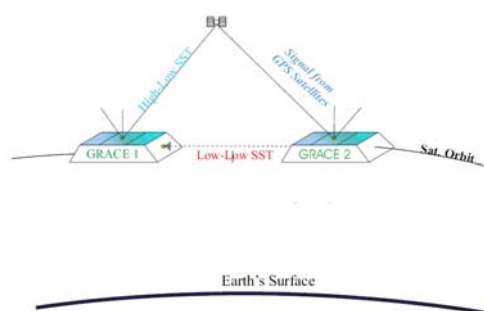
در این فن دو ماهواره کم‌ارتفاع با یک یا چند گروه از ماهواره‌های مرتفع (ماهواره‌هایی با ارتفاع زیاد درنقش نقاط کنترل ثابت که در حال گردش به دور زمین‌اند)، ردیابی می‌شوند. این دو ماهواره کم‌ارتفاع شبیه به هم‌اند و در یک مدار مشابه به دنبال هم به دور زمین می‌گردند. فاصله بین این دو ماهواره حدود چندصد کیلومتر است و فاصله بین این دو ( $\rho$ ) و تغییرات این فاصله ( $\dot{\rho}$ ) با حسگرهایی اندازه‌گیری می‌شود. این دو ماهواره مشابه،

تعیین دقیق میدان گرانی زمین برای همه علوم وابسته به زمین مفید خواهد بود. در میان این علوم، ژئودزی به برآورد دقیقی از میدان گرانی زمین در مقیاس محلی (برای کاربردهای مهندسی) و جهانی (برای کاربردهای تعیین مدار) نیاز دارد (کلر و شریفی، ۲۰۰۵). رفتار محلی میدان گرانی زمین با استفاده از روش‌های گرانی‌سنجی زمینی (Terrestrial gravimetry) و هوایی (گرانی‌سنجی با هواپیما (Airborne gravimetry)) قابل بیان است. اگرچه با استفاده از این روش‌ها می‌توان به میدان گرانی زمین با قدرت تفکیک مکانی (Spatial resolution) زیادی رسید، اما این روش‌ها پوشش همگنی را در کل جهان حتی در مناطق خشکی ایجاد نمی‌کنند. در نتیجه تعیین میدان گرانی زمین در مقیاس جهانی با استفاده از مشاهدات ماهواره‌های مصنوعی، به دلیل پوشش همگن مشاهدات آن در کل جهان، ارجح خواهد بود. به بیان دیگر مشاهدات تقریباً همگن و همچنین پوشش جهانی آن‌ها، مزیت‌های اصلی روش‌های ماهواره‌ای برای تعیین میدان گرانی زمین در مقیاس جهانی در مقایسه با روش‌های زمینی و هوایی می‌باشند (کلر و شریفی، ۲۰۰۵). روش‌های ماهواره‌ای جهت تعیین میدان گرانی زمین، پس از پرتاب مأموریت‌های اختصاصی گرانی‌سنجی (Dedicated gravity field missions) حیات دوباره‌ای یافته‌اند. با پرتاب ماهواره‌های CHAMP و GRACE که به ترتیب در سال ۲۰۰۰ و ۲۰۰۲ پرتاب شده‌اند، روش

GRACE مجهز به یک شتابسنج سه‌محوری (Three-axis accelerometer) در مرکز جرم خود هستند که شتاب‌های غیر جاذبی وارد بر ماهواره را اندازه‌گیری می‌کنند. سری زمانی حاصل از مشاهدات سامانه تعیین موقعیت جهانی و مشاهدات KBR اطلاعات بسیار ارزشمندی از موقعیت، سرعت و شتاب نسبی دو ماهواره به دست می‌دهد. در نتیجه برای رسیدن به دقت و حساسیت بیشتر در بازسازی میدان جاذبه زمین در مقیاس جهانی، با استفاده از مشاهدات ماهواره GRACE می‌توان مشاهدات روش HL-SST را با مشاهدات روش LL-SST ترکیب کرد. اختلاف شتاب در راستای خط دید دو ماهواره GRACE ساده‌ترین کمیت مشاهداتی است که در آن از مشاهدات هر دو ساختار HL و LL استفاده شده است (کلر و شریفی، ۲۰۰۵). از این نوع مشاهده ماهواره GRACE به طور گسترده‌ای برای بازیابی میدان جاذبه زمین در مقیاس جهانی استفاده شده است که می‌توان به تحقیقات صورت گرفته از سوی گارسیا (۲۰۰۲)، هاجلا (۱۹۷۴)، هان و همکاران (۲۰۰۳)، کلر و شریفی (۲۰۰۵)، رومل (۱۹۸۰) اشاره کرد. علاوه بر این مشاهده ترکیبی، با استفاده از مشاهده KBR دستگاه و به روش انتگرال انرژی می‌توان پتانسیل و اویچشی را به دست آورد که در این زمینه می‌توان به تحقیقات صورت گرفته از سوی هان (۲۰۰۳)، هان و همکاران (۲۰۰۳) و رومل (۲۰۰۳) اشاره کرد. همچنین ساختار هندسی ماهواره GRACE می‌تواند در حکم یک گرادئومتر یک‌بُعدی بسیار بزرگ با طول بازوی  $250 \text{ km}$  در نظر گرفته شود. دقت اندازه‌گیری‌های گرادئومتر ماهواره GRACE نسبت معکوس با طول بازوی گرادئومتر یا همان فاصله نسبی میان دو ماهواره GRACE دارد. جزئیات این روش را می‌توانید در کلر و شریفی (۲۰۰۵)، رومل (۲۰۰۳)، شریفی (۲۰۰۴)، شریفی (۲۰۰۶) بیابید.

هدف این مقاله استفاده از مشاهده تفاوت شتاب در

نقش یک حسگر را در میدان جاذبه زمین ایفا می‌کنند. این مفهوم اولین بار با پرتاب ماهواره GRACE محقق شد. با استفاده از مشاهدات حاصل از این روش، طول موج‌های کوتاه‌تری از میدان جاذبه زمین (ضرایب هماهنگ‌های کروی با درجه و مرتبه کوچک‌تر از ۲۰۰) در مقایسه با روش HL-SST قابل بازیابی است (کلر و شریفی، ۲۰۰۵). در شکل زیر دو مفهوم HL-SST و LL-SST به صورت نمادین به نمایش گذاشته شده است.



شکل ۱. ساختارهای HL-SST و LL-SST

نکته قابل ذکر اینکه طول موج‌های بسیار کوتاه‌تری از میدان جاذبه زمین (ضرایب هماهنگ‌های کروی با درجه و مرتبه بزرگ‌تر از ۲۰۰) با استفاده از روش SGG (Satellite Gravity Gradiometry) (با ماهواره GOCE (Gravity Field and Steady State Ocean)) که در اوایل ۲۰۰۹ به فضا پرتاب شد) قابل بازیابی است (رومل و همکاران، ۲۰۰۲).

ماهواره GRACE شامل دو ماهواره شبیه به هم است که در یک مدار مشابه به دنبال هم با فاصله‌ای در حدود  $220 \pm 50 \text{ KM}$  در حال گردش به دور زمین‌اند (رومل و همکاران، ۲۰۰۲). فاصله نسبی بین این دو ماهواره ( $\rho$ ) و تغییرات این فاصله ( $\dot{\rho}$ ) به صورت پیوسته با دقت زیادی از سامانه KBR (K-band Ranging System) که در ماهواره‌ها تعبیه شده است، اندازه‌گیری می‌شود.

علاوه بر مشاهدات KBR، هر کدام از ماهواره‌های

دو بسامدی Blackjack که روی جفت ماهواره GRACE نصب شده است، بردار موقعیت ماهواره را به عنوان مشاهدات HL-SST با بسامد نمونه برداری کمتری نسبت به سامانه KBR یعنی با بسامد  $0.1 \text{ Hz}$  تأمین می کند (کلر و شریفی، ۲۰۰۵). مشاهدات هر دو روش با استفاده از رابطه زیر به یکدیگر ارتباط پیدا می کنند (کلر و شریفی، ۲۰۰۵):

$$\langle \ddot{r}_2 - \ddot{r}_1, r_2 - r_1 \rangle = \dot{\rho}^2 + \rho \ddot{\rho} - \langle \dot{r}_2 - \dot{r}_1, \dot{r}_2 - \dot{r}_1 \rangle \quad (1)$$

که در رابطه بالا  $\dot{r}_1$  و  $\dot{r}_2$  بردار سرعت دو ماهواره هستند و با استفاده از روش های مشتق گیری عددی از مشاهدات بردار موقعیت ماهواره ها به دست می آیند. تغییرات  $\dot{\rho}$  میان دو ماهواره GRACE یعنی  $\ddot{\rho}$  نیز با استفاده از روش های مشتق گیری عددی از مشاهدات  $\dot{\rho}$  به دست می آید (کلر و شریفی، ۲۰۰۵). طرف چپ معادله (۱) عبارت است از حاصل ضرب داخلی اختلاف بردار موقعیت دو ماهواره در اختلاف بردار شتاب آنها. با تقسیم دو طرف رابطه (۱) به  $\rho$  به رابطه اختلاف شتاب در راستای خط دید دو ماهواره GRACE خواهیم رسید (کلر و شریفی، ۲۰۰۵):

$$\langle \Delta \ddot{r}, e \rangle = \ddot{\rho} + \frac{\dot{\rho}^2}{\rho} - \frac{\|\Delta \dot{r}\|^2}{\rho} \quad (2)$$

در رابطه بالا  $e$  بردار یکه در راستای خط دید دو ماهواره است. در غیاب نیروهای غیر جاذبی، طرف چپ معادله بالا را می توانیم در حکم اختلاف شتاب جاذبه در راستای خط دید دو ماهواره GRACE در نظر بگیریم (کلر و شریفی، ۲۰۰۵):

$$\Delta \Gamma^{Los} := \ddot{\rho} + \frac{\dot{\rho}^2}{\rho} - \frac{\|\Delta \dot{r}\|^2}{\rho} \quad (3)$$

طرف چپ معادله (۳) تابعی از مشتقات جزئی پتانسیل جاذبه و بردار یکه در راستای خط دید دو ماهواره است. بردار یکه  $e$  از مشاهدات سامانه تعیین موقعیت جهانی

راستای خط دید دو ماهواره GRACE برای بازیابی میدان جاذبه زمین در مقیاس جهانی است. بیشینه درجه و مرتبه ضرایب ژئوپتانسیلی قابل بازیابی با استفاده از مشاهدات ماهواره GRACE، ۱۲۰ است (شریفی، ۲۰۰۴). به بیان دیگر تعداد مجهولاتی که باید در این دستگاه معادلات برآورد شود، ۱۴۶۴۱ است. مشکلی که در این راستا با آن مواجه خواهیم بود، حل دستگاه معادلات خطی بزرگ مربوطه در یک دستگاه رایانه شخصی است. ماتریس نرمال مربعی با ابعاد ۱۴۶۴۱ را نمی توان به صورت مستقیم در یک رایانه شخصی معکوس کرد، در نتیجه برای حل یک دستگاه معادلات بزرگ در چنین رایانه ای، ناچار به استفاده از الگوریتم های ریاضی خواهیم بود. در این مقاله الگوریتمی با عنوان الگوریتم MSAA برای حل دستگاه معادلات بزرگ عرضه خواهد شد و کارایی این الگوریتم در حل دستگاه معادلات مربوطه، مورد تجزیه و تحلیل قرار خواهد گرفت. بنابراین برای رسیدن به اهداف مقاله، ابتدا در قسمت ۲ روابط ریاضی مربوطه به برآورد ضرایب ژئوپتانسیلی با استفاده از تابعک مشاهداتی شتاب در راستای خط دید دو ماهواره GRACE و همچنین نحوه تشکیل دستگاه معادلات خطی مربوطه بیان خواهد شد. در قسمت ۳ روش MSAA برای حل دستگاه معادلات با ابعاد بزرگ بیان خواهد شد. در قسمت ۴ نتایج عددی را بیان خواهیم کرد، و در پایان، قسمت ۵ به بیان خلاصه ای از دستاوردها و نتیجه گیری اختصاص داده شده است.

## ۲ روابط ریاضی

اختلاف شتاب در راستای خط دید دو ماهواره GRACE، تابعی از فاصله نسبی دو ماهواره یعنی  $\rho$  و تغییرات زمانی آن  $\dot{\rho}$  است (کلر و شریفی، ۲۰۰۵). سامانه KBR مورد استفاده در ماهواره های GRACE مشاهدات  $\rho$  و  $\dot{\rho}$  را به منزله مشاهدات LL-SST با بسامد نمونه برداری  $10 \text{ Hz}$  تأمین می کنند. ضمناً گیرنده سامانه تعیین موقعیت جهانی

که در رابطه بالا  $\mathbf{J}$  ماتریس انتقال و به شکل صریح زیر است (کلر و شریفی، ۲۰۰۵):

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \cos \phi \cos \lambda & \cos \phi \sin \lambda & \sin \phi \\ -\sin \phi \cos \lambda & -\sin \phi \sin \lambda & \cos \phi \\ -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \end{bmatrix} \quad (۵)$$

پتانسیل جاذبه در نقطه‌ای دلخواه به مختصات  $(r, \phi, \lambda)$  در فضای خارج زمین ( $r \geq R_{earth}$ ) برحسب هماهنگ‌های کروی نرمال شده به صورت زیر بیان می‌شود:

$$V(r, \phi, \lambda) = \frac{GM}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{R}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n (\bar{c}_{nm} \cos m\lambda + \bar{s}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\sin \phi) \quad (۶)$$

در رابطه بالا  $GM$  حاصل ضرب ثابت جهانی جاذبه در جرم زمین،  $R$  شعاع میانگین زمین و  $\bar{P}_{nm}$  توابع نرمال شده لژاندر است. رابطه (۶) پتانسیل جاذبه را به منزله تابعی از مؤلفه‌های مختصاتی منحنی‌الخط یعنی  $r, \phi, \lambda$  بیان می‌کند. به طور مشابه می‌توان شتاب جاذبه را برحسب مؤلفه‌های  $r, \phi, \lambda$  به صورت زیر بیان کرد (کلر و شریفی، ۲۰۰۵):

$$\Gamma(r, \phi, \lambda) = \frac{GM}{r^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{R}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n -(n+1) \times (\bar{c}_{nm} \cos m\lambda + \bar{s}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}'_{nm}(\sin \phi) \mathbf{e}_r + (\bar{c}_{nm} \cos m\lambda + \bar{s}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}'_{nm}(\sin \phi) \mathbf{e}_\phi + \sec \phi (-m \bar{c}_{nm} \sin m\lambda + m \bar{s}_{nm} \cos m\lambda) \bar{P}'_{nm}(\sin \phi) \mathbf{e}_\lambda \quad (۷)$$

رابطه بالا بیان کننده شتاب جاذبه برحسب مختصات کروی در دستگاه مختصات کروی محلی ماهواره است. در نتیجه بردار شتاب جاذبه هرکدام از ماهواره‌های GRACE را می‌توان در دستگاه مختصات کروی محلی مربوط به خود، به صورت زیر نوشت (کلر و شریفی، ۲۰۰۵):

$$\Gamma_1 := \Gamma(r_1, \phi_1, \lambda_1) = \Gamma_{11} \mathbf{e}_{r_1} + \Gamma_{12} \mathbf{e}_{\phi_1} + \Gamma_{13} \mathbf{e}_{\lambda_1} \quad (۸)$$

$$\Gamma_2 := \Gamma(r_2, \phi_2, \lambda_2) = \Gamma_{21} \mathbf{e}_{r_2} + \Gamma_{22} \mathbf{e}_{\phi_2} + \Gamma_{23} \mathbf{e}_{\lambda_2}$$

برای به دست آوردن اختلاف شتاب جاذبه در راستای خط دید دو ماهواره (معادله (۳)) هرکدام از بردارهای

دستگاه مختصات دکارتی زمین ثابت به دست می‌آید، درحالی که معمولاً از بسط پتانسیل جاذبه به سری هماهنگ‌های کروی برحسب مختصات کروی  $(r, \phi, \lambda)$  استفاده می‌شود. برای به دست آوردن اختلاف شتاب در راستای خط دید دو ماهواره، مشتقات جزئی بسط پتانسیل جاذبه نسبت به مؤلفه‌های مختصاتی دستگاه مختصات کروی به دست می‌آید. بنابراین این امکان وجود دارد که (کلر و شریفی، ۲۰۰۵):

مشتقات جزئی پتانسیل جاذبه برحسب مختصات دکارتی با استفاده از قانون مشتق‌گیری زنجیره‌ای محاسبه شود.

بردار یکه در راستای خط دید دو ماهواره GRACE برحسب مؤلفه‌های مختصاتی دکارتی کروی بازنویسی شود که این کار از طریق انتقال از دستگاه مختصات زمین ثابت به دستگاه مختصات محلی کروی امکان‌پذیر است.

اگرچه نتایج هر دو روش یکسان است، اما به خاطر سادگی در این مقاله در محاسبات از روش دوم استفاده خواهیم کرد. برای به دست آوردن بردار  $\mathbf{e}$  در دستگاه مختصات کروی، ابتدا دستگاه مختصات کروی محلی (LSCS (Local Spherical Coordinate System)) ماهواره با خصوصیات زیر تعریف می‌شود (کلر و شریفی، ۲۰۰۵):

مرکز دستگاه مختصات منطبق بر موقعیت ماهواره  $\mathbf{e}_r$  بردار یکه در راستای شعاعی نسبت به مرکز زمین  $\mathbf{e}_\phi$  بردار یکه در راستای شمال  $\mathbf{e}_\lambda$  بردار یکه به سمت شرق که یک دستگاه مختصات دست چپی را بنا کند.

بردار  $\mathbf{e}$  در دستگاه مختصات زمین ثابت با استفاده از رابطه زیر به دستگاه مختصات کروی محلی ماهواره تبدیل می‌شود (کلر و شریفی، ۲۰۰۵):

$$\mathbf{e}_{r\phi\lambda} = \mathbf{J} \mathbf{e}_{xyz} \quad (۴)$$

مشکل دیگری که منجر به فقدان بازیابی کامل و درست طیف میدان جاذبه با استفاده از روش کمترین مربعات خواهد شد، جایگزینی حد بالای بسط یعنی  $\infty$  با  $N_{\max}$  است. در واقع این جایگزینی باعث ایجاد نوع دیگری از تداخل سیگنال در برآورد ضرایب می‌شود (سانسو، ۱۹۹۰). این موضوع در قسمت نتایج عددی مورد تجزیه و تحلیل قرار خواهد گرفت.

اکنون برای برای بنا کردن دستگاه معادلات مربوط و به منظور برآورد ضرایب، فقط نیاز به روابطی برای محاسبه توابع وابسته نرمال شده لژاندر و مشتقات مرتبه اول آن نسبت به شناسه  $\phi$  است. برای محاسبه این توابع، روش‌های تکراری گوناگونی وجود دارد که در این مقاله به منظور عملی ساختن محاسبات عددی از روابط پیش گفته در (شریفی ۲۰۰۴) استفاده شده است. این روابط بازگشتی در جدول (۱) آورده شده است.

### ۳ الگوریتم MSAA جهت حل دستگاه معادلات

#### نرمال خطی با ابعاد بزرگ

هدف این قسمت معرفی الگوریتمی برای حل دستگاه معادلات نرمال خطی با ابعاد بزرگ است. معادله خطی زیر با ماتریس ضرایب معین مثبت متقارن را در نظر می‌گیریم (فریدن و میشل، ۲۰۰۴):

$$\mathbf{A}x = b \quad (11)$$

که در معادله بالا داریم:

$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N \times N}, \mathbf{A}^T = \mathbf{A}, \quad (12)$$

$$\mathbf{A}y \cdot y > 0, y \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}, x, b \in \mathbb{R}^N$$

چنین معادله خطی را می‌توان با استفاده از روش‌های مستقیم و یا روش‌های تکراری حل کرد. در استفاده از روش‌های مستقیم در حل دستگاه معادلات به شکل معادله (۱۱) اگر  $N$  خیلی بزرگ باشد، (برای مثال  $N \geq 10000$ ) با مشکل حافظه در رایانه‌های شخصی مواجه خواهیم بود.

رابطه (۸) روی بردار یکه راستای خط دید دو ماهواره مربوط به دستگاه مختصات کروی محلی مربوط به خود تصویر می‌شود (کلر و شریفی، ۲۰۰۵):

$$\Delta \Gamma^{Los} = \langle \Gamma(r_2, \phi_2, \lambda_2), e_2 \rangle - \langle \Gamma(r_1, \phi_1, \lambda_1), e_1 \rangle \quad (9)$$

$$= e_2^T \Gamma_2 - e_1^T \Gamma_1$$

در رابطه بالا  $e_1$  و  $e_2$  به ترتیب بردار یکه در راستای خط اتصال دو ماهواره در دستگاه کروی محلی ماهواره شماره ۱ و ۲ هستند. رابطه (۹) یک معادله مشاهده خطی برحسب ضرایب ژئوپتانسیلی نرمال شده  $\bar{C}_{mm}$  و  $\bar{S}_{mm}$  است.

با توجه به رابطه (۹) اگر یک سری زمانی با  $P$  نقطه مشاهداتی داشته باشیم، می‌توانیم به ازای هر نقطه مشاهداتی، یک معادله مشاهده خطی بنویسیم. در عمل در بسط مربوط به رابطه (۷)، حد بالای بسط یعنی  $\infty$  باید با بیشینه درجه و مرتبه قابل بازیابی با استفاده از مشاهدات ماهواره جایگزین شود. در نتیجه تعداد کل مجهولات  $u$  به صورت زیر به دست می‌آید (کلر و شریفی، ۲۰۰۵):

$$u = 1 + 3 + \dots + 2(N_{\max} + 1) - 1 = (N_{\max} + 1)^2 \quad (10)$$

اگر از دیدگاه هندسی به دستگاه معادلات خود نگاه کنیم، دستگاه معادلات خطی بنا شده قابل حل خواهد بود اگر تعداد معادلات بیشتر از تعداد مجهولات باشد یعنی  $(P \geq u)$ . با وجود این با توجه به نظریه نمونه برداری شانون Shannon، بسامد نمونه برداری باید حداقل دو برابر بیشینه بسامد اندازه گیری باشد. زمانی که بسامد بیشتر از حد بسامد نایکوئیست (Nyquist frequency) (نصف بسامد نمونه برداری) باشد، تداخل سیگنال (Aliasing) رخ خواهد داد. بنابراین، ارضا کردن شرط نظریه نمونه برداری برای بازیابی کامل طیف میدان جاذبه بسیار مهم و حیاتی خواهد بود (سانسو، ۱۹۹۰ و کلر و شریفی، ۲۰۰۵). برای بازیابی ضرایب هماهنگ کروی تا درجه و مرتبه  $N_{\max}$ ، بسامد نمونه برداری را باید با افزایش طول روزهای مشاهداتی ماهواره افزایش داد (کلر و شریفی، ۲۰۰۵).

برای حل دستگاه معادلات نرمال خطی است که در آن در هر تکرار حل دستگاه، یک دستگاه معادلات خطی کوچکتر که از تجزیه دستگاه معادلات اصلی به دست آمده، حل می‌شود که این کار، هم زمان حل دستگاه را کاهش می‌دهد و هم از مقدار حافظه مورد نیاز برای ذخیره‌سازی ماتریس‌ها می‌کاهد (فریدن و میشل، ۲۰۰۴).

این الگوریتم را اولین بار شوارتس (Schwarz) در ۱۸۹۰ عرضه کرد و به چاپ رسانید و پس از آن نیز بسیاری از نویسندگان در مورد این روش، تحقیق کردند و مطالبی به چاپ رساندند. با پیدایش رایانه‌های پیشرفته و سامانه رایانه‌های موازی (Parallel computers) در ۱۹۸۵، روش شوارتس مورد توجه ویژه‌ای قرار گرفت.

برای حل این مشکل ناچار به استفاده از روش‌های تکراری در حل دستگاه مربوط خواهیم شد. زمان حل این دستگاه خطی، با استفاده از روش‌های تکراری معمول (برای مثال روش مزدوج (CG) (Conjugate Gradient)، بدون استفاده از یک پیش‌شرط (Preconditioner) مناسب شدیداً افزایش می‌یابد. بنابراین برای حل دستگاه معادلات با ابعاد بزرگ، نیاز به یک الگوریتم پیچیده‌تر ریاضی خواهیم داشت (فریدن و میشل، ۲۰۰۴). یکی از این روش‌ها، روش MSAA است. این روش از جمله روش‌های تجزیه حوزه است که در آن ماتریس  $A$  به زیرماتریس‌های کوچک‌تری که با یکدیگر هم‌پوشانی دارند، تجزیه می‌شود. روش MSAA یک روش تکراری

جدول ۱. روابط بازگشتی برای محاسبه توابع وابسته نرمال شده لژاندر.

- *Diagonal recursion*  $n \geq 2$

$$\bar{P}_{n,n} = f_1 \cos \phi \bar{P}_{n-1,n-1}$$

$$\bar{P}'_{n,n} = f_1 [\cos \phi \bar{P}'_{n-1,n-1} - \sin \phi \bar{P}_{n-1,n-1}]$$

- *Horizontal recursion – first step*  $n \geq 1$

$$\bar{P}_{n,n-1} = f_2 \sin \phi \bar{P}_{n-1,n-1}$$

$$\bar{P}'_{n,n-1} = f_2 [\cos \phi \bar{P}_{n-1,n-1} + \sin \phi \bar{P}'_{n-1,n-1}]$$

- *Horizontal recursion – next step*

$$\bar{P}_{n,m} = f_3 [f_4 \sin \phi \bar{P}_{n-1,m} - f_5 \bar{P}_{n-2,m}]$$

$$\bar{P}'_{n,m} = f_3 [f_4 \sin \phi \bar{P}'_{n-1,m} + f_4 \cos \phi \bar{P}_{n-1,m} - f_5 \bar{P}'_{n-2,m}]$$

where

$$f_1 = \sqrt{\frac{2n+1}{2n}}$$

$$f_2 = \sqrt{2n+1}$$

$$f_3 = \sqrt{\frac{2n+1}{(n-m)(n+m)}}$$

$$f_4 = \sqrt{2n-1}$$

$$f_5 = \sqrt{\frac{(n+m-1)(n-m-1)}{2n-3}}$$

Initial values

$$\bar{P}_{0,0} = 1 \quad \bar{P}'_{0,0} = 0 \quad \bar{P}_{1,1} = \sqrt{3} \cos \phi \quad \bar{P}'_{1,1} = -\sqrt{3} \sin \phi$$



در نتیجه ماتریس  $A$  یک ماتریس گرام با پایه  $\{v_1, \dots, v_N\}$  از فضای  $\mathbb{R}^N$  است و جواب  $x = (x_1, \dots, x_N)^T$  دستگاه خطی (۱۱) در واقع جواب مسئله تصویر قائم زیر است:

بردار  $x = (x_1, \dots, x_N)^T$  را طوری بیابید که  $f \in \mathbb{R}^N$  که به صورت  $v_i = b_i \cdot f$ ،  $i = 1, \dots, N$ ، دارای نمایشی به صورت زیر باشد:

$$f = \sum_{i=1}^N x_i v_i \quad (15)$$

در واقع حل این مسئله نیازمند حل دستگاه خطی زیر است:

$$\sum_{i=1}^N x_i (v_i \cdot v_j) = f \cdot v_j = b_j, \quad j = 1, \dots, N \quad (16)$$

که معادله بالا همان دستگاه خطی (۱۱) است. عملگر تصویر قائم مربوط به رابطه (۱۵)، یک عملگر یکه است: ما به دنبال بیان  $f = Id_{\mathbb{R}^N} f$  با توجه به پایه  $\{v_1, \dots, v_N\}$  هستیم. اکنون پایه  $\{v_1, \dots, v_N\}$  را به چندین زیرمجموعه کوچکتر  $\Xi_r = \{v_1^r, \dots, v_{N_r}^r\} \subset \{v_1, \dots, v_N\}$ ،  $r = 1, \dots, M$  که با یکدیگر هم پوشانی داشته باشند، تقسیم می کنیم به صورتی که:

$$\bigcup_{r=1}^M \Xi_r = \{v_1, \dots, v_N\} \quad (17)$$

تصویر قائم از  $\mathbb{R}^N$  به  $span(\Xi_r)$  را به صورت زیر نمایش می دهیم:

$$P_r: \mathbb{R}^N \rightarrow span\{v_1^r, \dots, v_{N_r}^r\}, \quad g \mapsto P_r g \quad (18)$$

یعنی  $P_r = P_r \circ P_r$  و  $P_r w = v \cdot P_r w$  به ازای هر  $v, w \in \mathbb{R}^N$ . برای محاسبه  $P_r g$ ، فرض می کنیم که  $g = v_i$ ،  $i = 1, \dots, N$  ضرایب  $y = (y_1, \dots, y_{N_r})$  معادله زیر را محاسبه کنیم:

$$P_r g = \sum_{i=1}^{N_r} y_i v_i^r \quad (19)$$

در واقع اگر بخواهیم به طور کلی صحبت کنیم، دو روش متفاوت شوارتس وجود دارد: (۱) روش ضربی (Multiplicative) (روش مورد استفاده در این مقاله) و (۲) روش جمعی (Additive) که این روش را می توان در سامانه های رایانه ای موازی به کار برد و معمولاً سریع تر است. برای اطلاعات بیشتر در مورد روش های شوارتس، به لیونز (۱۹۸۸، ۱۹۸۹ و ۱۹۹۹) مراجعه شود. در سال های اخیر نیز توجه ویژه ای به رابطه بین روش های شوارتس و روش های تکراری دیگر نظیر Multisplitng، روش Multigrid و روش (Preconditioned Conjugate) PCG (Gradient) شده است. برای اطلاعات بیشتر در این مورد نیز به گروتن (۱۹۷۹)، گریبل و اسوالد (۱۹۹۵) و هسه (۲۰۰۳) مراجعه شود.

حل معادله خطی (۱۱) با استفاده از روش MSAA بر پایه دو خاصیت زیر استوار است (فریدن و میشل، ۲۰۰۴):

- ۱- هر ماتریس معین مثبت متقارن، یک ماتریس گرام (Gram matrix) است.
- ۲- اثبات همگرایی روش MSAA بر پایه فرمول بندی آن بر اساس تصویرگرهای قائم (Orthogonal projector) صورت می گیرد.

با توجه به فرضیات، ماتریس  $A = (A_{i,j})_{i,j=1,\dots,N}$  در معادله خطی (۱۱)، یک ماتریس معین مثبت و متقارن است. با توجه به قضیه عامل گیری خولسکی Cholesky factorization (هامرلین و هافمن، ۱۹۹۲) یک ماتریس پایین مثلثی معکوس پذیر  $L$  با درایه های قطری مثبت وجود دارد به طوری که

$$A = LL^T \quad (13)$$

سطرهای ماتریس  $L$  را به صورت  $v_1, \dots, v_N$  نشان می دهیم. بنابراین با توجه به رابطه (۱۳) داریم:

$$A_{i,j} = v_i \cdot v_j, \quad i, j = 1, \dots, N \quad (14)$$

$$s_{nM+r}^f = \sum_{j=1}^r P_j (f_{nM+(j-1)}^f) + \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{j=1}^M P_j (f_{lM+(j-1)}^f)$$

$$f_{nM+r}^f = f - s_{nM+r}^f$$

$$s_{nM+r}^f = s_{nM+(r-1)}^f + P_r (f - s_{nM+(r-1)}^f)$$

$$f_{nM+r}^f = (Q_r \dots Q_1) (Q_M \dots Q_1)^n f$$

$$s_{nM+r}^f = f - (Q_r \dots Q_1) (Q_M \dots Q_1)^n f$$

ویژگی‌های شماره ۲، ۴ و به صورت مستقیم اثبات می‌شود درحالی‌که ویژگی‌های ۳ و ۵ نتایج ساده‌ای از ویژگی‌های ۲، ۴ هستند. اثبات این ویژگی‌ها را می‌توان برای مثال در هسه (۲۰۰۳) یافت.

با توجه به ویژگی‌های شماره ۱ و ۳ متوجه می‌شویم که الگوریتم پیش‌گفته در جدول (۲) دارای ساختار استاندارد یک الگوریتم تکراری است: با مقدار  $s_0^f = 0$ ،  $f_0 = f$  شروع می‌کنیم و  $s_1^f = P_1(f)$  را محاسبه می‌کنیم که در آن  $P_1$  تقریبی از  $Id_{\mathbb{R}^N}$  است. سپس مقدار باقی‌مانده  $f_1 = f - P_1(f)$  را محاسبه می‌کنیم. پس از آن  $P_2(f_1) = P_2(f - s_1^f)$  را محاسبه می‌کنیم که در این زمان  $P_2$  درحکم تقریبی از  $Id_{\mathbb{R}^N}$  به کار می‌رود. سپس تکرار جدید  $s_2^f = s_1^f + P_2(f_1)$  و باقی‌مانده جدید  $f_2 = f - s_2^f = f_1 - P_2(f_1)$  را محاسبه می‌کنیم. این روند با استفاده از  $P_3, \dots, P_M$  درحکم تقریب‌هایی از  $Id_{\mathbb{R}^N}$  به صورت پیاپی تکرار می‌شود. درنهایت اولین تکرار الگوریتم کامل می‌شود و ما دوباره با استفاده از  $P_1$  و با ساختاری مشابه قبل شروع می‌کنیم:

$$s_{nM+r}^f = s_{nM+(r-1)}^f + P_r (f - s_{nM+(r-1)}^f) \quad (21)$$

با ضرب داخلی طرفین به صورت متوالی با  $v_1^r, \dots, v_{N_r}^r$  به یک دستگاه خطی به صورت زیر می‌رسیم:

$$\sum_{i=1}^{N_r} y_i (v_i^r \cdot v_j^r) = P_r g \cdot v_j^r = g \cdot P_r v_j^r, \quad j = 1, \dots, N_r \quad (20)$$

ماتریس  $A_r = (v_i^r \cdot v_j^r)_{i,j=1, \dots, N_r}$  یک زیرماتریس از ماتریس  $A$  در معادله خطی (۱۱) است.

ما اکنون الگوریتم MSAA را برای حل مسئله تصویر قائم  $Id_{\mathbb{R}^N} f = f$  براساس تصویرگرهای قائم  $P_r$  بیان می‌کنیم. این الگوریتم در جدول (۲) آورده شده است. سپس همگرایی این الگوریتم را اثبات و درنهایت این الگوریتم را به ماتریسی برای حل دستگاه خطی (۱۱) تبدیل می‌کنیم. این الگوریتم ماتریسی، دستگاه خطی (۱۱) را با حل متناوب دستگاه‌های خطی به شکل (۲۰)، حل خواهد کرد.

اکنون می‌خواهیم نشان دهیم که دنباله تکرارهای  $\{s_{nM}^f\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  در الگوریتم پیش‌گفته در جدول (۲)، وقتی  $n \rightarrow \infty$  به سمت  $f$  میل می‌کند. قبل از اثبات این موضوع، قضیه زیر را که در فهم الگوریتم ذکر شده در جدول شماره (۲) بسیار مفید است، بیان خواهیم کرد:

**قضیه ۱:** اگر همه نمادها و فرضیات همانند الگوریتم جدول شماره (۲) باشد و همچنین تصویر قائم به فضای  $(span\{v_1^r, \dots, v_{N_r}^r\})^\perp$  را که در آن  $r \in \{1, \dots, M\}$  به صورت  $Q_r: \mathbb{R}^N \rightarrow (span\{v_1^r, \dots, v_{N_r}^r\})^\perp$  نمایش دهیم، یعنی  $Q_r = Id - P_r$ ، آن‌گاه ویژگی‌های زیر برای کلیه  $n \in \mathbb{N}_0$ ،  $r \in \{1, \dots, M\}$  برقرار خواهد بود:

جدول ۲. الگوریتم MSAA

---

Set  $f_0 = f \in \mathbb{R}^N$  and  $s_0^f = 0$   
 for  $n = 0, 1, 2, \dots$  do  
     for  $r = 1, \dots, M$  do  
         calculate  $s_{nM+r}^f = s_{nM+(r-1)}^f + P_r (f_{nM+(r-1)}^f)$   
         update  $f_{nM+r}^f = f_{nM+(r-1)}^f - P_r (f_{nM+(r-1)}^f)$   
     until  $\frac{|(f_{(n+1)M} \cdot v_1, \dots, f_{(n+1)M} \cdot v_N)^T|}{|(f \cdot v_1, \dots, f \cdot v_N)^T|} \leq \epsilon$

---

$R_r$  و  $I_r$  مربوط به زیرفضای  $\mathbb{R}^{N_r}$  یعنی مربوط به رابطه (۲۰) را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$R_r: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{N_r}, w \mapsto R_r(w) = \left( (R_r(w))_1, \dots, (R_r(w))_{N_r} \right)^T \quad (26)$$

$$(R_r(w))_i = w_j \text{ for the index } j \in \{1, \dots, N\} \text{ with } v'_i = v_j$$

$$I_r: \mathbb{R}^{N_r} \rightarrow \mathbb{R}^N, z \mapsto I_r(z) = \left( (I_r(z))_1, \dots, (I_r(z))_N \right)^T \quad (27)$$

$$(I_r(z))_i = \begin{cases} z_j & \text{if there exists } j \in \{1, \dots, N\} \text{ with } v'_j = v_i \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

در جدول شماره (۳) روابط ماتریسی الگوریتم MSAA آورده شده است.

تنها موضوع باقی مانده این است که نشان دهیم الگوریتم ذکر شده در جدول (۳) پس از تکرارهای لازم تا رسیدن به شرط خروج از حلقه تکرار، جواب مسئله اولیه ما یعنی  $Ax = b$  را به دست می دهد، در حالی که  $f \in \mathbb{R}^N$  در الگوریتم جدول (۳) در عبارت زیر صدق می کند:

$$f \cdot v_j = b_j, \quad j = 1, \dots, N \quad (28)$$

و همچنین  $A$  عبارت است از:

$$A = (v_i \cdot v_j)_{i,j=1,\dots,N} \quad (29)$$

قبل از اثبات این موضوع لازم به ذکر است که در کلیه مراحل محاسبات مربوط به الگوریتم جدول (۳)، نیازی به محاسبه  $v_1, \dots, v_N \in \mathbb{R}^N$  نداریم یعنی در واقع نیازی به تجزیه خولسکی ماتریس  $A$  وجود ندارد. ماتریس های  $A_r$  در واقع زیرماتریس هایی از ماتریس  $A$  هستند و در مرحله روزآمدسازی (update) نیز که نیاز به عملیات ضرب بردار در ماتریس  $(v_k \cdot v'_i)_{i=1,\dots,N_r}$  وجود دارد، ماتریس مربوط نیز زیرماتریسی از ماتریس  $A$  است.

در زیر قضیه مربوط به همگرایی جواب الگوریتم جدول (۳) به جواب دستگاه خطی  $Ax = b$  و اثبات آن آورده شده است:

ویژگی های ۴ و ۵ قضیه ۱ برای اثبات همگرایی الگوریتم ذکر شده در جدول (۲) مهم خواهد بود.

اکنون در زیر قضیه مربوط به همگرایی الگوریتم ذکر شده در جدول (۲) را بیان می کنیم و اثبات آن را نیز خواهیم آورد:

**قضیه ۲:** اگر همه نمادها و فرضیات همانند الگوریتم جدول (۲) و قضیه ۱ باشد، دنباله  $\{s_{nm}^f\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  مربوط به تکرارهای بردار  $f \in \mathbb{R}^N$  به بردار  $f$  همگرا می شود.

اثبات: با توجه به قضیه ۱ داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f - s_{nm}^f| = \lim_{x \rightarrow \infty} |(Q_M \dots Q_1)^n f| = |Pf| \quad (22)$$

که در عبارت بالا  $P$  تصویرگر قائم به صورت  $P: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  به روی  $\bigcap_{r=1}^M (im(Q_r))$  است. اما داریم:

$$\bigcap_{r=1}^M (im(Q_r)) = \bigcap_{r=1}^M (span\{v'_1, \dots, v'_{N_r}\})^\perp$$

$$= \left( \sum_{r=1}^M span\{v'_1, \dots, v'_{N_r}\} \right)^\perp \quad (23)$$

$$= (\mathbb{R}^N)^\perp = \{0\}$$

در نتیجه  $P = 0$  و  $\lim_{n \rightarrow \infty} |f - s_{nm}^f| = 0$ . تساوی ذکر شده در عبارت بالا از عبارت زیر نتیجه می شود:

اگر  $H$  یک فضای هیلبرت با تعریف ضرب داخلی  $(\cdot, \cdot)_H$  باشد و همچنین  $M$  زیرفضای بسته به صورت  $v_1, \dots, v_M$  از فضای  $H$  داشته باشیم، آن گاه:

$$\left( \sum_{i=1}^M v_i \right)^\perp = \bigcap_{i=1}^M v_i^\perp \quad (24)$$

که در عبارت بالا داریم:

$$\sum_{i=1}^M v_i = span\left\{ \bigcup_{i=1}^M v_i \right\} \quad (25)$$

بنابراین تاکنون همگرایی الگوریتم ذکر شده در جدول شماره (۲) به اثبات رسیده است. در زیر الگوریتم جدول (۲) را با استفاده از روابط (۱۶) و (۲۰) به حالت ماتریسی تبدیل می کنیم. برای این منظور نیاز داریم که عملگرهای

جدول ۳. روابط ماتریسی الگوریتم MSAA برای حل دستگاه معادلات نرمال با ابعاد بزرگ.

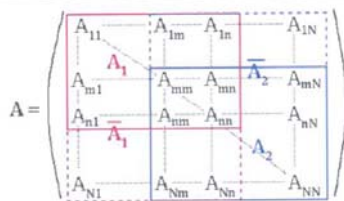
---

Define the matrices  $\mathbf{A}_r = (v_i^r \cdot v_j^r)_{i,j=1,\dots,N_r}$ ,  $r=1,\dots,M$   
 set  $\tilde{f}_0 = (f \cdot v_1, \dots, f \cdot v_N)^T$ ,  $a_0 = (0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^N$ , where  $f \in \mathbb{R}^N$   
 for  $n=0,1,2,\dots$  do  
   for  $r=1,\dots,M$  do  
     solve  $\mathbf{A}_r d = R_r(\tilde{f}_{nM+(r-1)})$ ,  $d = (d_1, \dots, d_{N_r})^T \in \mathbb{R}^{N_r}$   
     update  $a_{nM+r} = a_{nM+(r-1)} + I_r(d)$   
     update  $\tilde{f}_{nM+r} = \tilde{f}_{nM+(r-1)} - \left( \left( \sum_{i=1}^N d_i v_i^r \cdot v_k \right)_{k=1,\dots,N} \right)^T$   
 until  $\frac{|\tilde{f}_{(n+1)M}|}{|\tilde{f}_0|} \leq \varepsilon$   
 compute  $s_{(n+1)M}^f = \sum_{i=1}^M (a_{(n+1)M})_i v_i$

---

در نهایت برای روشن شدن موضوع، یک نمونه از تجزیه ماتریس  $\mathbf{A}$  در روش MSAA به دو زیرماتریس کوچک تر در شکل شماره (۲) به نمایش گذاشته شده و نحوه محاسبات مربوط به دو تکرار اول این الگوریتم در جدول شماره (۴) آورده شده است. عملگرهای  $R_r$  و  $I_r$  در این حالت به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\begin{aligned} R_1: \mathbb{R}^N &\rightarrow \mathbb{R}^n, & R_2: \mathbb{R}^N &\rightarrow \mathbb{R}^{n-m} \\ I_1: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^N, & I_2: \mathbb{R}^{n-m} &\rightarrow \mathbb{R}^N \end{aligned} \quad (32)$$



شکل ۲. نمونه‌ای از تجزیه ماتریس نرمال به دو زیرماتریس در الگوریتم MSAA. (فریدن و میشل، ۲۰۰۴).

قضیه ۳. اگر همه نمادها و فرضیات همانند الگوریتم جدول شماره (۳) باشد، و  $\mathbf{A} = (v_i \cdot v_j)_{i,j=1,\dots,N}$  و  $b = (f \cdot v_1, \dots, f \cdot v_N)^T$  باشد آن گاه دنباله  $x \in \mathbb{R}^N$  در الگوریتم مربوطه به جواب  $\{a_{nm}\}_{n \in \mathbb{N}_0} \subset \mathbb{R}^N$  مربوط به دستگاه خطی  $\mathbf{A}x = b$  همگرا می شود. اثبات: با توجه به قضیه ۲ و همچنین روابط (۱۶) و (۲۰) می دانیم که:

$$s_{nM}^f = \sum_{i=1}^N (a_{nM})_i \cdot v_i \quad (30)$$

به سمت  $f = \sum_{i=1}^N x_i v_i$  که  $x$  جواب دستگاه خطی  $\mathbf{A}x = b$  است، همگرا می شود. با توجه به اینکه  $\{v_1, \dots, v_N\}$  یک پایه  $\mathbb{R}^N$  است، می توان نتیجه گرفت که:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{nM})_i = x_i \text{ for } i = 1, \dots, N \quad (31)$$

و در نتیجه همگرایی الگوریتم جدول (۳) به جواب دستگاه خطی  $\mathbf{A}x = b$  به اثبات می رسد.

جدول ۴. محاسبات مربوط به دو تکرار اول الگوریتم MSAA با توجه به شکل شماره (۲).

$$\text{Initialization: } r_0 = b, a_0 = 0 = (0, \dots, 0)^T$$

First step:

- solve  $A_1 d = R_1(\tilde{f}_0)$ , set  $a_1 = a_0 + I_1(d)$ ;  $\tilde{f}_1 = -\bar{A}_1 d$
- solve  $A_2 d = R_2(\tilde{f}_1)$ , set  $a_2 = a_1 + I_2(d)$ ;  $\tilde{f}_2 = \tilde{f}_1 - \bar{A}_2 d$

Second step:

- solve  $A_1 d = R_1(\tilde{f}_2)$ , set  $a_3 = a_2 + I_1(d)$ ;  $\tilde{f}_3 = -\bar{A}_1 d$
- solve  $A_2 d = R_2(\tilde{f}_3)$ , set  $a_4 = a_3 + I_2(d)$ ;  $\tilde{f}_4 = \tilde{f}_3 - \bar{A}_2 d$

#### ۴ نتایج عددی

قابل دست‌یابی است. فرمت داده‌های شبیه‌سازی شده

ماهواره GRACE در فایل مربوط به صورت زیر است:

$$\text{time } x \ y \ z \ \dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z} \ \ddot{x} \ \ddot{y} \ \ddot{z} \quad (33)$$

برای محاسبات از داده‌های ۳۰ روز ماهواره با فاصله زمانی ۳۰ ثانیه استفاده شده است. علت استفاده از داده‌های ۳۰ روز ماهواره همان بحث ارضای شرط نظریه نمونه‌برداری است که در قسمت دوم مقاله در مورد آن صحبت شد. از طرف دیگر چون در راستای نصف‌النهارها پوشش کامل است، پس نیازی به استفاده از داده‌ها با فاصله زمانی ۵ ثانیه نیست (شریفی، ۲۰۰۴). بنابراین مشاهدات با فاصله زمانی ۳۰ ثانیه در نظر گرفته شده است که با این کار تعداد معادلات کاهش می‌یابد و از بار محاسباتی بدون اینکه لطمه‌ای به نتایج وارد شود، به شدت کاسته می‌شود. در نتیجه تعداد معادلات ۸۶۴۰۰ خواهد بود.

از آنجایی که موقعیت ماهواره و مشتقات مرتبه اول و دوم آن تنها داده‌های موجود در فایل شبیه‌سازی شده هستند، مشاهدات سامانه KBR ماهواره با استفاده از روابط زیر شبیه‌سازی شده است (شریفی ۲۰۰۴):

$$\rho(t) = \sqrt{\langle \Delta \mathbf{r}(t), \Delta \mathbf{r}(t) \rangle} \quad (34)$$

$$\dot{\rho}(t) = \frac{1}{\rho(t)} \langle \Delta \mathbf{r}(t), \Delta \dot{\mathbf{r}}(t) \rangle \quad (35)$$

در این قسمت برای محاسبات از داده‌های شبیه‌سازی شده دینامیکی ماهواره GRACE قابل دسترسی از سایت <http://www.geod.uni-bonn.de/index.html> استفاده شده است. شبیه‌سازی مدار با استفاده از روش‌های عددی تولید مدار (روش‌های انتگرال‌گیری عددی) صورت گرفته است. به این صورت که با استفاده از یک نقطه اولیه، مدار به صورت عددی در میدان جاذبه حاصل از یک مدل ژئوپتانسیلی تولید می‌شود. در شبیه‌سازی داده‌ها از مدل ژئوپتانسیلی EGM96 تا درجه و مرتبه ۳۰۰ استفاده شده است. مدار ماهواره برای دوره زمانی ۳۰ روزه با فواصل زمانی ۵ ثانیه تولید شده است. خروجی تولید مدار به صورت عددی عبارت است از بردارهای موقعیت و سرعت در دستگاه لختی که پس از آن با استفاده از روابط و تبدیلات لازم، بردار شتاب نیز در دستگاه لختی به دست آمده است. داده‌های شبیه‌سازی شده دینامیکی ماهواره‌های GRACE شامل زمان برحسب تاریخ جولیان (Julian) و بردارهای موقعیت، سرعت و شتاب در دستگاه مختصات شبه‌لختی است. ویژگی‌های دستگاه مختصات شبه‌لختی و جزئیات بیشتر در مورد داده‌های شبیه‌سازی شده از پایگاه

<http://www.geod.uni-bonn.de/englisch/apmg/lehrstuhl/simulationsszenarien/sc7/Readme.pdf>

زیرماتریس‌های لازم برای اجرای الگوریتم MSAA با ۵۰ درصد هم‌پوشانی تشکیل شده است. با این مقدار درصد هم‌پوشانی، تعداد زیرماتریس‌های مربوط یعنی مقدار  $M$  در الگوریتم جدول (۳) ۲۹ زیرماتریس است. با این درصد هم‌پوشانی و مدت زمان تکرارها تا رسیدن به شرط همگرا شده و مدت زمان تکرارها حدود ۳۰ دقیقه است. در مرحله بعد برای تحلیل نتایج خود با استفاده از ضرایب برآورد شده و همچنین با استفاده از ضرایب مدل EGM96 تا درجه و مرتبه ۱۲۰، ارتفاع ژئوئید روی یک گرید منظم  $1^\circ \times 1^\circ$  در کل جهان به دست آمده است. برای به دست آوردن ارتفاع ژئوئید از میدان نرمال GRS80 (موریتز، b، ۱۹۸۰) استفاده شده است.

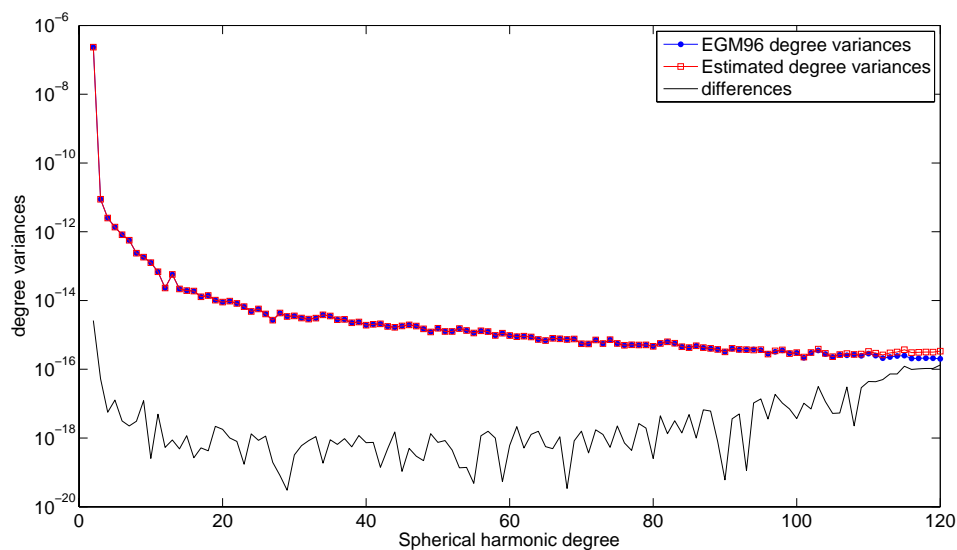
در شکل (۴) ضرایب برآورد شده و همچنین ضرایب مدل EGM96 تا درجه و مرتبه ۱۲۰ به صورت degree variance به نمایش گذاشته شده است. همچنین در شکل (۵) اختلاف ارتفاعات ژئوئید محاسبه شده از ضرایب مدل EGM96 تا درجه و مرتبه ۱۲۰ و ارتفاعات محاسبه شده از ضرایب برآورد شده به نمایش درآمده است.

$$\ddot{\rho}(t) = \frac{1}{\rho(t)} \langle \Delta \mathbf{r}(t), \Delta \ddot{\mathbf{r}}(t) \rangle + \quad (36)$$

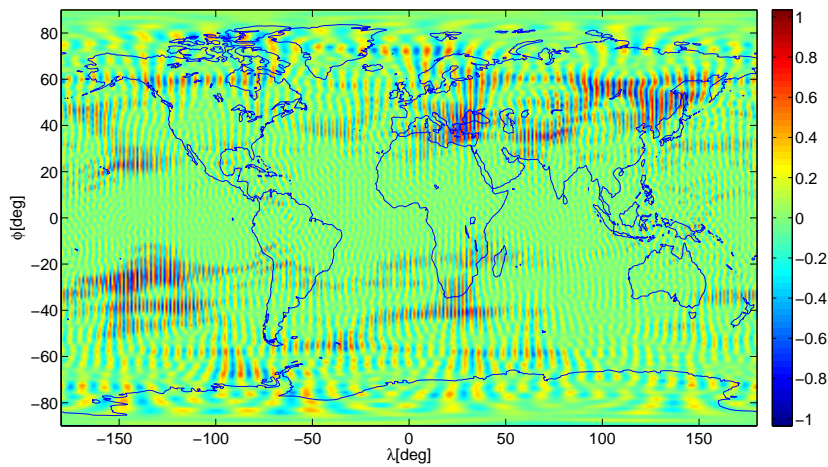
$$\frac{1}{\rho(t)} \Delta \dot{\mathbf{r}}^T(t) \left[ \mathbf{I}_{3 \times 3} - \frac{1}{\rho^2} \Delta \mathbf{r}^T(t) \otimes \Delta \mathbf{r}(t) \right] \Delta \dot{\mathbf{r}}(t)$$

هدف برآورد ضرایب ژئوپتانسیلی تا درجه و مرتبه ۱۲۰ است. بنابراین، تعداد مجهولات برابر ۱۴۶۴۱ است. با توجه به عاری بودن مدار شبیه‌سازی شده ماهواره GRACE از هرگونه نوفه‌ای و همچنین ارضای شرط نظریه نمونه‌برداری در راستای مدارها (با استفاده از مشاهدات ۳۰ روزه ماهواره)، انتظار این است که بتوان ضرایب هم‌هنگ کروی تا درجه و مرتبه ۱۲۰ را به‌طور کامل و با دقت زیادی بازیابی کرد. اما تنها مشکل موجود همان تداخل سیگنال ناشی از درجه و مرتبه‌های بالای ۱۲۰ موجود در مشاهدات است که در قسمت دوم مقاله در مورد آن صحبت شد. در زیر این موضوع از نظر عددی تجزیه و تحلیل شده است.

دستگاه معادلات خطی با ابعاد ۸۶۴۰۰ معادله و ۱۴۶۴۱ مجهول تشکیل شده، دستگاه معادلات نرمال مربوط با استفاده از الگوریتم MSAA حل شده و در پایان ضرایب هم‌هنگ کروی تا درجه و مرتبه ۱۲۰ برآورد شده است.



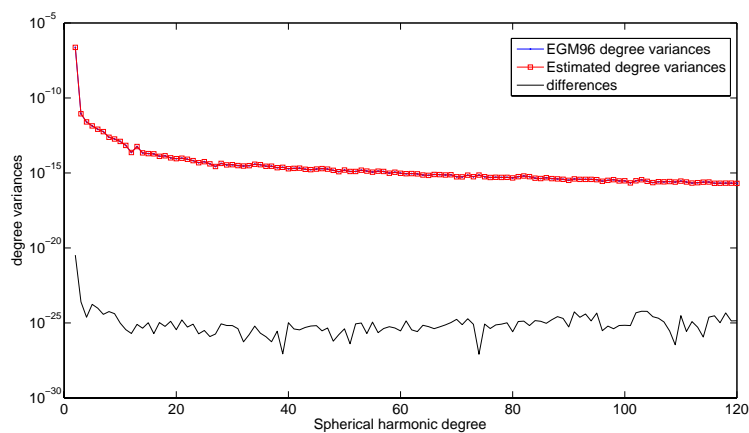
شکل ۴. ضرایب ژئوپتانسیلی برآورد شده تا درجه و مرتبه ۱۲۰ با استفاده از مشاهدات شبیه‌سازی شده ۳۰ روزه ماهواره GRACE.



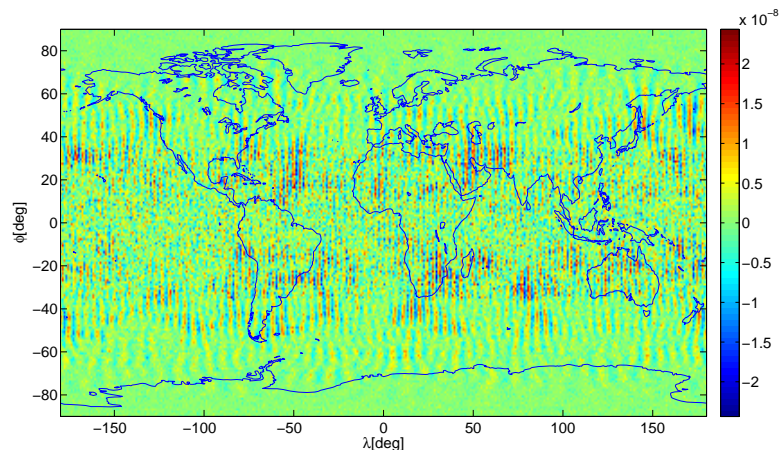
شکل ۵. اختلاف ارتفاع ژئوئید محاسبه شده از مدل EGM96 تا درجه و مرتبه ۱۲۰ و ضرایب برآورد شده تا درجه و مرتبه ۱۲۰ با استفاده از مشاهدات شبیه‌سازی شده ۳۰ روزه ماهواره GRACE (واحد بر حسب متر).

مدار ماهواره از آن استفاده شده است، باعث ایجاد تداخل سیگنال در برآورد ضرایب تا درجه و مرتبه ۱۲۰ می‌شود و در نتیجه اختلاف ضرایب برآورد شده و ضرایب واقعی (ضرایب مدل EGM96) را به دنبال دارد. در مرحله بعد، مقادیر شتاب در نقاط مشاهداتی ماهواره تا درجه و مرتبه ۱۲۰ محاسبه و از این شبیه‌مشاهدات (Quasi observation) در برآورد ضرایب استفاده شده است. نتایج در شکل‌های (۶) و (۷) آورده شده است.

همان‌گونه که در شکل شماره (۴) مشاهده می‌شود، میزان جدایی میان ضرایب برآورد شده و ضرایب مدل EGM96 در درجه و مرتبه‌های بالا افزایش می‌یابد. این جدایی در اختلاف ارتفاعات ژئوئید محاسبه شده در شکل (۵) نیز نمایان می‌شود، که این امر مورد انتظار است. زیرا همان‌طور که ذکر شد، اگرچه داده‌های شبیه‌سازی شده ماهواره عاری از هرگونه نوفه‌ای است و همچنین شرط نظریه نمونه‌برداری ارضا شده است، اما درجه و مرتبه‌های بالای ۱۲۰ تا ۳۰۰ که در شبیه‌سازی



شکل ۶. ضرایب ژئوپتانسیلی برآورد شده تا درجه و مرتبه ۱۲۰ با استفاده از شبیه‌مشاهدات شبیه‌سازی شده ۳۰ روزه ماهواره GRACE.



شکل ۷. اختلاف میان ارتفاعات ژئوئید محاسبه شده از مدل EGM96 تا درجه و مرتبه ۱۲۰ و ضرایب برآورد شده تا درجه و مرتبه ۱۲۰ با استفاده از شبه مشاهدات شبیه سازی شده ۳۰ روزه ماهواره GRACE (واحد بر حسب متر).

### تشکر و قدردانی

از حمایت مالی دانشگاه تهران از این تحقیق در قالب طرح پژوهشی شماره ۸۱۰۸۰۱۲/۱/۰۴ قدردانی می گردد.

### منابع

- Freeden, W. and Michel, V., 2004, Multiscale (Geo) Potential theory, Birkhauser, Boston, Basel, Berlin.
- Garcia, R. V., 2002, Local geoid determination from GRACE mission. Rep 460, Department of Geodetic Science, The Ohio State University, Columbus.
- Griebel, M. and Oswald, P. 1995, On the Abstract Theory of Additive and Multiplicative Schwarz Algorithms, Numer. Math., **70**, 163-180.
- Groten, E., 1979, Geodesy and the Earth's Gravity Field, Däumler, Bonn.
- Hajela, D. P., 1974, Improved procedures for the recovery of 5° mean gravity anomalies from ATS-6/GEOS-3 satellite-to-satellite range-rate observation. Rep 276, Department of Geodetic Science, The Ohio State University, Columbus
- HÄammerlin, G. and Hoffmann, K. H., 1992, Numerische Mathematik. Springer, Berlin.
- Han, S. C., 2003, Efficient global gravity determination from satelliteto- satellite tracking (SST). Rep 467, Department of Geodetic Science, The Ohio State University, Columbus.
- Han, S. C., Jekeli, C. and Shum, C. K., 2003, Static and temporal gravity field recovery

همان گونه که در شکل های (۶) و (۷) مشاهده می شود، بازیابی ضرایب به صورت کامل و با دقت بسیار زیادی صورت گرفته و بیشینه اختلاف ارتفاعات ژئوئید محاسبه شده از مدل EGM96 و ضرایب برآورد شده به  $10^{-8}$  متر رسیده است. با رسیدن به این حد از دقت در بازیابی ضرایب، کارایی الگوریتم MSA (از نظر دقت و سرعت همگرایی) در حل دستگاه معادلات مربوطه به اثبات می رسد.

### ۵ نتیجه گیری

در این مقاله با استفاده از مشاهدات شبیه سازی شده دینامیکی ۳۰ روزه ماهواره های GRACE و با استفاده از تابعک مشاهداتی اختلاف شتاب در راستای خط دید دو ماهواره GRACE، دستگاه معادلات خطی مربوط به بازیابی ضرایب ژئوپتانسیلی تا درجه و مرتبه ۱۲۰ بنا شد. دستگاه معادلات نرمال مربوطه با استفاده از الگوریتم MSA حل شد و در نهایت ضرایب ژئوپتانسیلی تا درجه و مرتبه ۱۲۰ برآورد شد. نتایج به دست آمده حاکی از کارایی روش MSA از نظر دقت و سرعت همگرایی در حل دستگاه معادلات مربوط است.



- thesis, Department of Geodesy and Geoinformatics, University of Stuttgart, Stuttgart, Germany.
- Sharifi, M. A., 2004, Satellite gradiometry using a satellite pair. Diploma Thesis, Geodetic Institute, Faculty of Aerospace Engineering and Geodesy, University of Stuttgart.
- Visser, P. N. A. M., Sneeuw, N. and Gerlach, C., 2003, Energy integral method for gravity field determination from satellite orbit coordinates. *J. Geod.*, **77**, 207–216.
- using grace potential difference observables. *Adv Geosci.*, **1**, 19–26.
- Hesse, K., 2003, Domain Decomposition Methods in Multiscale Geopotential Determination from SST and SGG, Ph.D. Thesis, University of Kaiserslautern, Germany, Geomathematics Group, Shaker, Aachen.
- Jekeli, C., 1999, The determination of gravitational potential differences from satellite-to-satellite tracking. *Celest Mech Dynam Astron* **75**, 85–101
- Keller, W. and Sharifi, M. A., 2005, Satellite Gradiometry using a satellite pair. *J. Geodesy.*, **78**, 544–557.
- Lions, P. L., 1988, On the Schwarz Alternating Method I, in: Proc. 1st Internat. Symp. "Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations", Paris, January 1987, R. Glowinski et al. (eds), SIAM, Philadelphia, 1–42.
- Lions, P. L., 1989, On the Schwarz Alternating Method II: Stochastic Interpretation and Order Properties, in: Proc. 2nd Internat. Symp. "Domain Decomposition Methods", Los Angeles, CA, January 1998, T.F. Chan et al. (eds), SIAM, Philadelphia, 47–70.
- Lions, P. L., 1999, On the Schwarz Alternating Method III: A Variant for Nonoverlapping Subdomains, in: Proc. of the 3rd Internat. Symp. "Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations", Houston, TX, March 1989, T.F. Chan et al. (eds), SIAM Philadelphia, 202–223.
- Moritz, H., 1980b, Geodetic Reference System 1980. Technical report.
- Rummel, R., 1980, Geoid height, geoid height differences, and mean gravity anomalies from 'low-low' satellite-to-satellite tracking—an error analysis. Rep 306, Department of Geodetic Science, The Ohio State University, Columbus.
- Rummel, R., 2003, How to climb the gravity wall. *Space Sci Rev* **108**, 1–14.
- Rummel, R., Balmino, G., Johannessen, J., Visser, P. and Woodworth, P., 2002, Dedicated gravity field missions—principles and aims. *J. Geodynam*, **33**, 3–20.
- Sanso, F., 1990, On the aliasing problem in the spherical harmonic analysis. *Bulletin Géodésique*, **64**, 313–330.
- Schwarz, H. A., 1890, *Gesammelte Mathematische Abhandlungen*, Vol 2, Springer Verlag, Berlin.
- Sharifi, M. A., 2006, Satellite to Satellite Tracking in the Space-Wise Approach, Ph.D