

## حل عددی معادلات بوسینسک تراکم‌ناپذیر با استفاده از روش فشرده مرتبه چهارم:

### بررسی موردی شارش گرانی تبدیلی

سرمد قادر<sup>۱\*</sup>، ابوذر قاسمی و رنامخواستی<sup>۲</sup>، محمدرضا بن‌زاده ماهانی<sup>۳</sup> و داریوش منصور<sup>۴</sup>

<sup>۱</sup> استادیار، گروه فیزیک فضا، مؤسسه ژئوفیزیک، دانشگاه تهران، ایران

<sup>۲</sup> دانش‌آموخته کارشناسی‌ارشد، گروه فیزیک دریا، دانشکده علوم دریایی، دانشگاه تربیت مدرس و محقق پژوهشگاه هواشناسی و علوم جو، نوره، ایران

<sup>۳</sup> استادیار گروه فیزیک دریا، دانشکده علوم دریایی دانشگاه تربیت مدرس، نوره، ایران

<sup>۴</sup> مربی گروه فیزیک دریا، دانشکده علوم دریایی دانشگاه تربیت مدرس، نوره، ایران

(دریافت: ۸۷/۱۲/۲۴، پذیرش نهایی: ۸۸/۱۲/۱۸)

#### چکیده

در تحقیق حاضر حل عددی معادلات حاکم بر جریان گرانی در قالب شارش تبدیلی (lock-exchange) با استفاده از روش فشرده مرتبه چهارم عرضه می‌شود. برای سنجش توانایی روش فشرده مرتبه چهارم در مسائل غیرخطی که به حالت واقعی نزدیک‌تر هستند از مسئله موردی جریان گرانی در قالب شارش گرانی تبدیلی به صورت جریان گرانی مسطح و استوانه‌ای استفاده می‌کنیم. در این کار علاوه بر عرضه نحوه اعمال روش فشرده مرتبه چهارم به معادلات حاکم، جزئیات مربوط به نحوه اعمال شرایط مرزی لغزش آزاد و بدون لغزش که مناسب و همخوان با روش فشرده مرتبه چهارم هستند، پیشنهاد می‌شود. مقایسه کیفی جواب‌های حاصل از روش فشرده مرتبه چهارم با سایر نتایج عددی موجود نشان‌دهنده عملکرد مناسب این روش است. به علاوه مقایسه نتایج روش‌های فشرده مرتبه چهارم و تفاضل متناهی مرتبه دوم مرکزی عملکرد بهتر روش فشرده مرتبه چهارم را نشان می‌دهد.

واژه‌های کلیدی: روش فشرده، تفاضل متناهی، دقت عددی، شارش گرانی، بوسینسک

## Numerical solution of incompressible Boussinesq equations using fourth-order compact scheme: Lock exchange flow

Ghader, S.<sup>1</sup>, Ghasemi, A.<sup>2</sup>, Banazadeh, M.<sup>3</sup> and Mansoury, D.<sup>4</sup>

<sup>1</sup> Assistant Professor, Space Physics Department, Institute of Geophysics, University of Tehran, Iran

<sup>2</sup> Graduate Student, Faculty of Natural Resources and Marine Sciences, Tarbiat Modares University, Noor, Iran

<sup>3</sup> Assistant Professor, Faculty of Natural Resources and Marine Sciences, Tarbiat Modares University, Noor, Iran

<sup>4</sup> Lecturer, Faculty of Natural Resources and Marine Sciences, Tarbiat Modares University, Noor, Iran

(Received: 14 March 2009, Accepted: 9 March 2010)

#### Abstract

In recent years, the number of research works devoted to applying the highly accurate numerical schemes, in particular compact finite difference schemes, to numerical simulation of complex flow fields with multi-scale structures, is increasing. The use of compact finite-difference schemes are the simple and powerful ways to reach the objectives of high accuracy and low computational cost. Compact schemes, compared with the traditional explicit finite difference schemes of the same order, have proved to be significantly more accurate along with the benefit of using smaller stencil sizes, which can be essential in treating non-periodic boundary conditions. Applications of some families of the compact schemes to spatial differencing of some idealized models of the atmosphere and oceans, show that the compact finite difference schemes are promising methods for numerical simulation of the atmosphere-ocean dynamics.

This work is devoted to the application of a fourth-order compact finite difference scheme to numerical solution of gravity current. The governing equations used to perform the numerical simulation are the two dimensional incompressible Boussinesq equations. The two-dimensional lock-exchange flow configuration is used to conduct the numerical simulation of the Boussinesq equations. The lock-exchange flow is a prototype problem which has been studied numerically and experimentally by many researchers.

For the spatial differencing of the governing equations the second-order central and the fourth-order compact finite difference schemes are used. The predictor-corrector leapfrog scheme is used to advance the Boussinesq equations in time. The boundary condition formulation required to generate stable numerical solutions without degrading the global accuracy of the computations, is also presented.

The fourth-order compact scheme is compared in detail with the conventional second-order central finite difference method. Qualitative comparison of the results of the present work with published results for the planar lock-exchange flow indicates the validity and accuracy of the fourth-order compact scheme for numerical solution of the two-dimensional incompressible Boussinesq equations.

**Key words:** Compact scheme, finite difference, Numerical accuracy, Gravity current, Lock exchange, Boussinesq

## ۱ مقدمه

دیگر جریان برآمده‌تر است در این ناحیه واقع شده است. این نوک برآمده، ناحیه شکست امواج و اختلاط شدید است و نقش مهمی در هدایت جریان گرانی ایفا می‌کند. معمولاً برای بررسی بهتر نوک جریان گرانی و در نتیجه شناخت بهتر دینامیک و میدان پیچیده جریان گرانی از شبیه‌سازی این جریان در پیکربندی شارش تبادلی (lock-exchange) استفاده می‌شود. شارش گرانی تبادلی در آزمایشگاه داخل یک کانال که با دو شاره با چگالی‌های متفاوت که در زمان اولیه با یک تیغه از هم جدا شده‌اند تولید می‌شود (فانلوف، ۱۹۹۴؛ سیمپسون، ۱۹۹۷). در شارش گرانی تبادلی دو نوع ناپایداری، کلونین هلمهولتز و لب و شکاف (lobe-and-cleft) وجود دارد که ناپایداری کلونین هلمهولتز اصولاً دوبعدی است و عمده اختلاط شاره سنگین با شاره پیرامون را بر عهده دارد، در صورتی که ساختار ناپایداری لب و شکاف سه‌بُعدی است (کانتر و همکاران، ۲۰۰۷؛ کانتر و؛ ۲۰۰۲؛ سیمپسون، ۱۹۸۶). در تحقیق حاضر به دلیل اینکه هدف شبیه‌سازی ناپایداری کلونین هلمهولتز است از شکل دو بُعدی شارش گرانی

جریان گرانی (Gravity Current) یا جریان چگالی (Density Current) یا جریان شناوری (Buoyancy Current)، جریان یک شاره به داخل شاره دیگر به دلیل اختلاف چگالی مابین این دو شاره است. تفاوت وزن مخصوص دو شاره که نیروی محرکه این جریان را تولید می‌کند، ناشی از تفاوت دما یا تفاوت مواد معلق یا محلول است. شناخت جریان گرانی در جو، کاربردهای مهمی در ایمنی هواپیماها، شناسایی آلودگی‌های جوئی و مانند آن دارد. جریان‌های گرانی در اقیانوس، تحت تاثیر یکنواخت نبودن میزان شوری و دما، و همچنین جریان‌های گل‌آلود به وجود آمده از رسوبات و لجن‌های معلق قرار دارند (سیمپسون، ۱۹۹۷). همچنین انتشار آلودگی‌های نفتی روی سطح دریا و گسترش آب گرم از نیروگاه‌های تولید برق و رها شدن ناگهانی گازهای چگال صنعتی، مشکلات صنعتی هستند که در آنها جریان‌های گرانی اهمیت زیادی دارند (هولت، ۱۹۷۲).

در قسمت لبه حمله جریان گرانی، ناحیه‌ای جبهه‌ای قرار دارد و مشخصه نوک (Head) که از قسمت‌های

از جمله کارهای عددی مهمی که برای شبیه‌سازی شارش گرانی تبدلی صورت گرفته، می‌توان به کارهای هارتل و همکاران (۲۰۰۰)، لیو و همکاران (۲۰۰۳)، کانتر و همکاران (۲۰۰۷)، الیاس و همکاران (۲۰۰۸)، اسکوتی (۲۰۰۸) و بیرمان (۲۰۰۷) اشاره کرد. تحقیق حاضر در ادامه کارهای عددی صورت گرفته به روش اعمال روش فشرده مرتبه چهارم در شکل سه‌نقطه‌ای برای حل عددی معادلات بوسینسک تراکم‌ناپذیر حاکم بر جریان گرانی در قالب شارش تبدلی اختصاص دارد. کار حاضر با تحقیق لیو و همکاران (۲۰۰۳) نکات مشترکی دارد ولی دو نکته مهم، تحقیق حاضر را نسبت به کار پیش‌گفته متمایز می‌سازد. در کار لیو و همکاران (۲۰۰۳) از روش فشرده به شکل ۹ نقطه‌ای برای حل معادلات بوسینسک تراکم‌ناپذیر (دنيس، ۱۹۸۹؛ گوپتا، ۱۹۹۱) استفاده شده و برای تولید شرایط مرزی سازگار با حل، داخل دامنه، شبه نقاط (Ghost points) مورد استفاده قرار گرفته است (وینان و لیو، ۱۹۹۶). ولی در تحقیق حاضر از شکل سه‌نقطه‌ای روش فشرده مرتبه چهارم برای حل معادلات بوسینسک تراکم‌ناپذیر استفاده شده و به‌علاوه شرایط مرزی متفاوت با کار لیو و همکاران و سازگار با حل داخل دامنه (از لحاظ دقت و ایجاد نکردن ناپایداری در حل عددی) استخراج شده‌اند. به‌کارگیری شیوه ذکر شده علاوه بر کاهش دادن حجم محاسبات، از دشواری‌های اعمال شرایط مرزی نیز می‌کاهد.

در ادامه و در بخش دوم، معادلات حاکم و شرایط مرزی مورد استفاده بیان می‌شود. بخش سوم به شرح گسسته‌سازی زمانی و مکانی معادلات حاکم و همچنین گسسته‌سازی شرایط مرزی سازگار و همخوان با روش فشرده مرتبه چهارم می‌پردازد. بخش چهارم به عرضه نتایج حل عددی تحت بررسی‌های موردی جریان گرانی مسطح و استوانه‌ای اختصاص دارد. در انتها نیز نتیجه‌گیری در بخش پنجم آورده می‌شود.

تبدلی استفاده کرده‌ایم. جریان گرانی در قالب شارش تبدلی به دو صورت جریان گرانی مسطح و استوانه‌ای است. در جریان گرانی مسطح، جریان در میان دو دیواره مانند دیواره‌های یک کانال حرکت می‌کند؛ مانند ورود جریان گل آلود از رودخانه به دریا و همچنین رها شدن آلودگی‌های شهری به داخل دره‌ای که شهر در آن واقع است (اویو و همکاران، ۲۰۰۷)، اما در جریان گرانی استوانه‌ای جریان دیگر از اطراف محدود نمی‌شود و به راحتی می‌تواند به‌صورت شعاعی به اطراف منتشر شود؛ مانند رها شدن گاز چگال داخل فضای باز یا زُمبش یک پلوم انفجاری متقارن یا یک نقطه تخلیه داخل دریا یا اقیانوس (کانتر و همکاران، ۲۰۰۷).

استفاده از روش‌های عددی برای شبیه‌سازی جریان گرانی، یکی از راه‌های درک دینامیک این جریان است. با توجه به اینکه معادلات حاکم بر رفتار جریان گرانی، معادلات دیفرانسیل جزئی غیرخطی هستند، اغلب نمی‌توان این معادلات را به روش‌های تحلیلی حل کرد و در نتیجه برای حل این معادلات از روش‌های عددی مانند تفاضل متناهی، حجم متناهی، المان متناهی یا طیفی استفاده می‌شود. از جمله روش‌های تفاضل متناهی با توانایی تفکیک زیاد، می‌توان به روش‌های فشرده اشاره کرد. ایده اصلی روش‌های فشرده به کارهای نیومروف (۱۹۲۴) و همچنین فاکس و گودوین (۱۹۴۹) باز می‌گردد. البته شناخت این ایده با عنوان روش فشرده و استفاده از آنها برای شبیه‌سازی دقیق‌تر معادلات حاکم بر جریان شاره تا ۱۹۷۲ به تعویق افتاد تا اینکه کریس در آن سال (۱۹۷۲) و هرش (۱۹۷۵) این روش‌ها را به‌منزله ابزار بسیار قوی برای شبیه‌سازی دقیق مسائل مکانیک شاره‌ها معرفی کردند. در طی چند سال گذشته بسیاری از محققان گروه‌های متنوعی از روش‌های فشرده با خواص تفکیک متفاوت را معرفی کرده‌اند که کار لی‌لی (۱۹۹۲) از جمله تحقیقات مهم صورت گرفته در این زمینه است.

## ۲ معادلات حاکم

معادلات حاکم، معادلات بوسینسک ناپایا، وُشکسان و تراکم‌ناپذیر هستند که برای حالت دو بُعدی با استفاده از تعریف متغیرهای بی‌بعد زیر از شکل بی‌بعد این معادلات استفاده می‌کنیم:

$$u^* = \frac{u}{u_b}, w^* = \frac{w}{u_b}, (x^*, z^*) =$$

$$\frac{(x, z)}{h}, p^* = \frac{p}{\rho \cdot u_b^2}, t^* = \frac{t u_b}{h}$$

در اینجا  $u_b = \sqrt{g'h}$  سرعت شناوری است که  $h$  عمق کانال است و  $g' = g(\theta_{\max} - \theta_{\min})/\theta_{\min}$  و  $g$  شتاب گرانی کاهیده است،  $\theta_{\max}$  و  $\theta_{\min}$  به ترتیب کمینه و بیشینه دما در دامنه هستند (بنجامین، ۱۹۶۸).  $\nu$  ضریب وُشکسانی جنبش‌شناختی (سینتیک) و  $k_\theta$  نیز ضریب پخش گرمایی شاره‌اند. همچنین می‌توان زمان بی‌بعد شده را به صورت  $t^* = \frac{t}{t_0}$  نوشت که در آن  $t_0 = h/u_b$  مقیاس زمانی است. در نهایت معادلات در شکل بی‌بعد با حذف ستاره‌ها به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

$$\frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) - \text{Ri}\theta$$

$$\frac{D\theta}{Dt} = \frac{1}{\text{Re} \cdot \text{Pr}} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

در معادلات بالا  $\frac{D}{Dt}$  مشتق مادی است. حال با

مشتق‌گیری متقاطع، معادلات برحسب متغیرهای تاوایی تابع جریان به صورت زیر نوشته می‌شوند (لیو و همکاران، ۲۰۰۳):

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + J(\psi, \zeta) = \text{Ri} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} \right) \quad (۱)$$

$$\zeta = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \quad (۲)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + J(\psi, \theta) = \frac{1}{\text{Re} \cdot \text{Pr}} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) \quad (۳)$$

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial z}, w = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (۴)$$

که در اینجا  $J$  تاوایی (vorticity)،  $\theta$  دما،  $\psi$  تابع

جریان،  $u$  و  $w$  سرعت‌های افقی و قائم،  $\text{Pr} = \frac{\nu}{k_\theta}$  عدد

پرانتل،  $\text{Ri} = \frac{g \alpha h \Delta \theta}{u_b^2}$  عدد ریچاردسون توده‌ای (نه

ریچاردسون گرادیانی) و  $\text{Re} = \frac{u_b h}{\nu}$  عدد رینولدز است.

پارامترهای فیزیکی دیگر، نظیر عدد ریلی  $Ra$  برحسب سایر پارامترهای بی‌بعد به صورت  $Ra = \text{Ri} \cdot \text{Re}^2 \cdot \text{Pr}$  و

عدد گراشهوف  $Gr$  به صورت  $Gr = \frac{Ra}{\text{Pr}}$  بیان می‌شوند.

$g = 9.8 \text{ ms}^{-2}$  شتاب

گرانی،  $\alpha = 2.4 \times 10^{-4} \text{ C}^{-1}$  ضریب انبساط گرمایی برای

آب دریا است. عملگر ژاکوبی نیز به صورت

$$J(p, q) = \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial q}{\partial z}$$

حل عددی با استفاده از فرمول پیشنهادی آراکاو (۱۹۶۶)

بر پایه پایستاری انرژی و آنستروپی محاسبه می‌شود.

همچنین جمله  $\text{Ri} \frac{\partial \theta}{\partial x}$  جمله تولید تاوایی کزفشار

نامیده می‌شود (هارتل و همکاران، ۱۹۹۹ و پدلاسکی، ۱۹۸۷).

شرط مرزی بدون نفوذ و بدون لغزش بیان گر این است که

سرعت‌های افقی و قائم در روی مرز صفر هستند

( $u = w = 0$ ). اگر  $b$  نشان‌دهنده مرز پایین باشد، در

فرمول‌بندی تاوایی-تابع جریان روابط  $\psi|_b = 0$

و  $\frac{\partial \psi}{\partial z}|_b = 0$  بیان‌کننده شرط بدون لغزش روی مرز پایین

است. شرط مرزی لغزش آزاد بیان می‌کند که هیچ سرعت

عمودی روی مرز وجود ندارد ( $w = 0$ ) و اینکه هیچ

شرط برشی روی سرعت مماسی اعمال نمی‌شود

( $\frac{\partial u}{\partial z} = 0$ )، که در فرمول‌بندی تاوایی تابع جریان روابط

از مرحله مصحح، اثر می‌کند که قابل صرف‌نظر کردن است (گزدگ، ۱۹۷۶).

### ۲-۳ گسسته‌سازی مکانی

برای گسسته‌سازی مکانی معادلات در دو راستای X و Z از روش فشرده مرتبه چهارم استفاده می‌شود (هرش، ۱۹۷۵). روابط روش فشرده مرتبه چهارم برای برآورد مشتقات اول و دوم تابع F بر پایه اینکه در هر نقطه گسسته‌سازی نه فقط مقدار تابع، بلکه مقدار مشتقات تابع نیز درحکم مجهول در نظر گرفته می‌شود، به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\frac{1}{6}F'_{i+1} + \frac{2}{3}F'_i + \frac{1}{6}F'_{i-1} - \frac{1}{2d}(F_{i+1} - F_{i-1}) = 0 \quad (7)$$

$$\frac{1}{12}F''_{i+1} + \frac{5}{6}F''_i + \frac{1}{12}F''_{i-1} - \frac{1}{d^2}(F_{i+1} - 2F_i + F_{i-1}) = 0 \quad (8)$$

در روابط بالا d بیان‌کننده فاصله شبکه‌ای در شبکه یکنواخت است. برای گسسته‌سازی مشتقات اول و دوم روی مرز از روابط پیشرو و پسرو فشرده مرتبه چهارم استفاده می‌کنیم (هرش، ۱۹۷۵). با استفاده از روش هرمیتی و بسط سری تیلور، روابط پیشرو فشرده به صورت زیر به دست می‌آید:

$$F_i - F_{i+1} + dF'_i + d^2\left(\frac{1}{3}F''_i + \frac{1}{6}F''_{i+1}\right) = 0 \quad (9)$$

$$F_i - F_{i+1} + dF'_{i+1} - d^2\left(\frac{1}{6}F''_i + \frac{1}{3}F''_{i+1}\right) = 0 \quad (10)$$

و روابط پسرو فشرده نیز به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$F_i - F_{i-1} - dF'_{i-1} - d^2\left(\frac{1}{6}F''_i + \frac{1}{3}F''_{i-1}\right) = 0 \quad (11)$$

$$F_i - F_{i-1} - dF'_i + d^2\left(\frac{1}{3}F''_i + \frac{1}{6}F''_{i-1}\right) = 0 \quad (12)$$

حل هم‌زمان معادلات بالا مشتمل بر روابط روی مرز و روابط داخل دامنه برای مشتقات اول و دوم منجر به حل یک دستگاه معادلات سه‌قطری بلوکی با بلوک‌های دوعضوی می‌شود، که با حل این دستگاه معادلات مقدار مشتقات اول و دوم به دست می‌آید.

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \Big|_b = \xi \Big|_b = 0, \quad \psi \Big|_b = 0$$

روی مرز پایین است. شرط مرزی بی‌دررو برای دما نیز به صورت  $\frac{\partial \theta}{\partial \hat{n}} = 0$  در نظر گرفته می‌شود که بردار  $\hat{n}$  بردار عمود بر مرز است.

### ۳ گسسته‌سازی معادلات حاکم

در این قسمت به نحوه گسسته‌سازی زمانی و همچنین گسسته‌سازی مکانی معادلات حاکم با استفاده از روش فشرده مرتبه چهارم پرداخته می‌شود.

### ۱-۳ گسسته‌سازی زمانی

در تحقیق حاضر گسسته‌سازی زمانی معادلات با استفاده از روش لیپ‌فراگک پیشگو-مصحح که یک روش سه ترازه مرتبه دوم است صورت می‌گیرد (گزدگ، ۱۹۷۶؛ دوران، ۱۹۹۹). اگر رابطه  $\frac{\partial U}{\partial t} = G(U, x, t)$  را در نظر بگیریم، گسسته‌سازی زمانی این معادله با استفاده از روش لیپ‌فراگک پیشگو - مصحح نتیجه زیر را به دست می‌دهد:

$$\tilde{U}^{m+1} = U^{m-1} + G^m 2\Delta t \quad (5)$$

$$U^{m+1} = U^m + (G^m + \tilde{G}^{m+1})\Delta t / 2 \quad (6)$$

در این رابطه بالانویس m نشان‌دهنده تراز زمانی و علامت مد نشان‌دهنده متغیرها در مرحله پیشگو است. در این روش ابتدا در مرحله پیشگو مقداری برای U در زمان  $t = (m+1)\Delta t$  از رابطه (۵) به دست می‌آید، سپس این مقدار به دست آمده برای U که آن را در اصطلاح، مقدار موقتی کمیت U می‌نامند، در مرحله دوم که همان مرحله تصحیح است با رابطه (۶) تصحیح می‌شود. طرحواره مرحله پیشگو یک طرحواره ناپایدار است در صورتی که طرحواره مصحح، پایدار است، بنابراین ناپایداری مرحله پیشگو به مقدار خیلی ناچیز بر پایداری نتایج بعد از عبور

اما رابطه دیگر که از مرتبه یکم است (و به رابطه تام مشهور است) به صورت زیر نوشته می شود که، رابطه ای سازگار و همخوان با روش مرتبه دوم مرکزی است (تام، ۱۹۳۳؛ تیلور، ۱۹۷۰؛ فورمان و بنت؛ ۱۹۸۸؛ روچ، ۱۹۹۸):

$$\zeta|_b = 2(\psi|_b - \psi|_{b+1}) / \Delta z^2 \quad (16)$$

#### ۴ نتایج حل عددی

در این قسمت نتایج حل عددی شارش گرانی تبدلی به دو صورت استوانه ای و مسطح با استفاده از روش های تفاضل متناهی فشرده مرتبه چهارم و مرتبه دوم مرکزی آورده می شود.

#### ۴-۱ نتایج حل عددی جریان گرانی مسطح

در این قسمت به تشریح نتایج حل عددی معادلات (۱) تا (۳) برای جریان گرانی مسطح توسط روش فشرده مرتبه چهارم پرداخته می شود. برای اینکه درک بهتری از شرایط مرزی و تأثیر آن بر توپولوژی جریان داشته باشیم، برای اعمال شرایط مرزی به مرزهای بالا و پایین، از دو نوع شرط مرزی لغزش آزاد و بدون لغزش استفاده می کنیم. ابتدا نتایج مربوط به شرط مرزی بدون لغزش را بیان می کنیم. مرزهای سمت چپ و راست نیز در حکم لغزش آزاد انتخاب می شوند (در تحقیق حاضر هر دو نوع شرط مرزی باز و سخت برای مرزهای سمت چپ و راست مورد بررسی قرار گرفتند ولی به خاطر اینکه بررسی موردی لیو و همکاران (۲۰۰۳) مبنای مقایسه انتخاب شده است، مرزهای سمت چپ و راست مرز سخت در نظر گرفته می شوند). شبیه سازی در داخل جعبه ای مجزاشده ای که طول و عرض آن در بازه  $\Omega = [0,8] \times [0,1]$  واقع است، صورت می گیرد. در داخل آن دو شاره یکی در دمای بی بُعد ۱ (سمت راست) و دیگری با دمای بی بُعد ۱/۵ (سمت چپ) موجود است. دو شاره در نقطه  $x = 4$  از هم جدا می شوند. بر طبق فرضیه بوسینسک چگالی به طور

برای گسسته سازی شرایط مرزی باید دقت کرد که این گسسته سازی باعث ناپایداری نشود و روشی سازگار با حل عددی مورد استفاده قرار گیرد. در ادامه به گسسته سازی شرایط مرزی سازگار و متناسب با روش فشرده مرتبه چهارم می پردازیم. برای محاسبه دما روی مرزها با استفاده از رابطه (۹) برای مرز پایین و با توجه به اینکه مشتق اول دما روی مرز صفر است، رابطه جدیدی از دقت مرتبه چهارم روی مرز پایین به صورت زیر استخراج می شود:

$$\theta|_b = \theta|_{b+2} - \Delta z^2 \left( \frac{1}{3} \theta''|_{b+1} + \frac{1}{6} \theta''|_{b+2} \right) \quad (13)$$

در روی مرز بالا و چپ و راست نیز مشابه رابطه بالا با استفاده از روابط پسرو و پیشرو مناسب رابطه مرزی مناسب برای دما را استخراج می کنیم. برای محاسبه تاوایی روی مرز بدون لغزش رابطه تحلیلی موجود نیست یا به عبارتی مشکل فرمول بندی تاوایی-تابع جریان در استفاده از مرز بدون لغزش این است که برای محاسبه مقدار تاوایی روی مرز سخت مانند دما و تابع جریان رابطه صریحی موجود نیست؛ بنابراین برای محاسبه تاوایی در مرزها رابطه زیر مورد استفاده قرار می گیرد (هرش، ۱۹۷۵):

$$\zeta|_b = \frac{12}{\Delta z^2} \psi|_{b+1} - \frac{6}{\Delta z} \psi'|_{b+1} + \psi''_{i,2}|_{b+1} \quad (14)$$

این رابطه از دقت مرتبه سوم است و به دلیل یک درجه اختلاف دقت با داخل دامنه، با حل عددی، سازگاری خوبی دارد. به علاوه در تحقیق حاضر برای اعمال شرط مرزی بدون لغزش از دو رابطه دیگر نیز که یکی از دقت مرتبه دوم و دیگری از دقت مرتبه یکم است، استفاده می کنیم. رابطه مرتبه دوم روی مرز پایین با به کار بردن رابطه (۹) و با استفاده از معادله پواسون در روی مرز به صورت زیر نوشته می شود:

$$\zeta|_b = \frac{3}{\Delta z^2} \psi|_{b+1} - \frac{1}{2} \psi''|_{b+1} \quad (15)$$

[1.05, 1.45] قرار دارند. با بیشتر شدن تعداد تاوه‌ها با زمان، خاصیت تقارن جریان نیز حفظ می‌شود. تقارن در میدان دما در حقیقت نتیجه مستقیمی از خاصیت تقارن در شرایط اولیه و شرایط مرزی است که با معادلات بوسینسک حفظ می‌شود.

در شکل ۱ در قسمت جلو نوک جریان گرانی قسمتی به نام دماغه دیده می‌شود که این قسمت از دیواره پایین مقداری فاصله دارد. در این شکل به خوبی مشاهده می‌شود که در مرز بالا شاره سنگین و در مرز پایین شاره سبک چسبیده به مرز باقی می‌ماند و شاره دیگر، روی این شاره چسبیده به مرز حرکت می‌کند، که این خود نشان از ایجاد اصطکاک در مرزهای بالا و پایین به واسطه اعمال شرط مرزی بدون نفوذ و بدون لغزش است. نفوذ شاره با چگالی کمتر به زیر شاره با چگالی بیشتر روی مرز پایین، شرایط ناپایداری را به وجود می‌آورد که این ناپایداری گردش جریانی بر خلاف جهت جریان به وجود آمده در قسمت نوک جریان را ایجاد می‌کند.

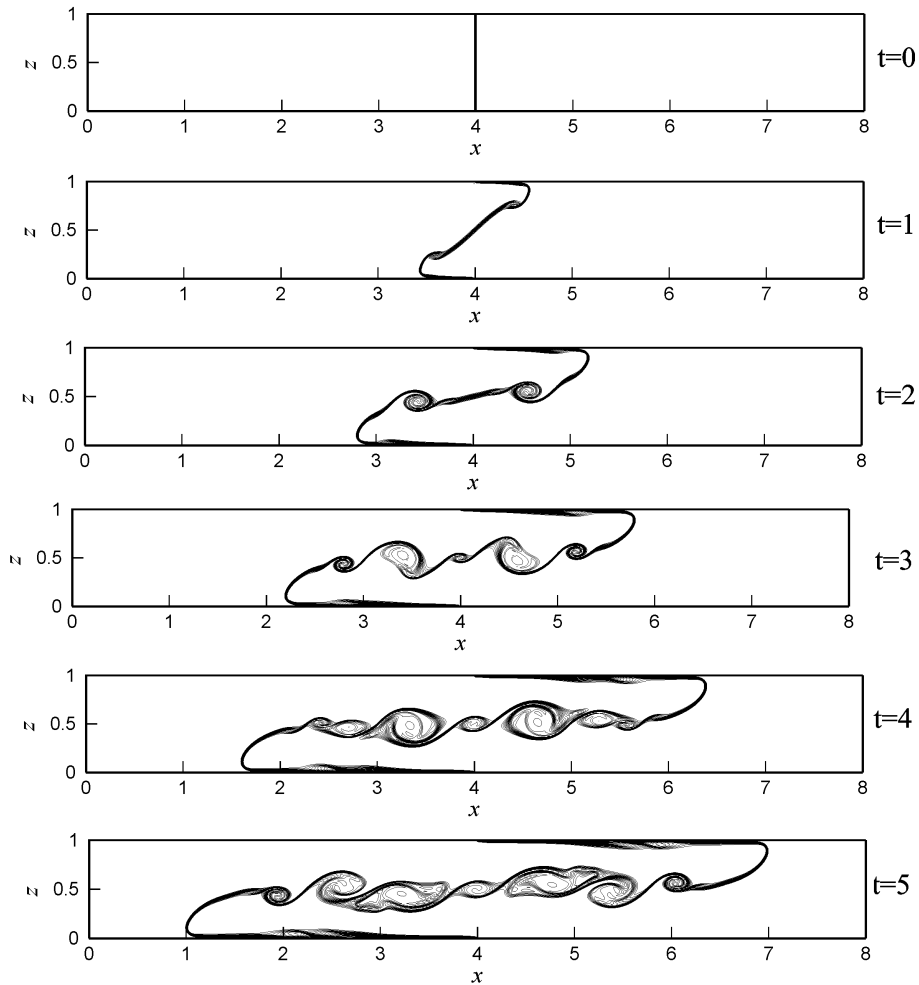
در شکل ۲، میدان تاوایی به دست آمده از روش فشرده مرتبه چهارم در شبکه‌ای با تفکیک  $769 \times 97$  در زمان  $t=5$  با اعمال رابطه مرزی مرتبه سوم برای تاوایی نشان داده شده است. پربندهای نشان داده شده در این شکل در بازه  $[-25, 90]$  قرار دارند به طوری که فاصله بین دو پربند متوالی برابر  $5$  و مقدار بیشینه تاوایی در سطح مشترک برابر با  $-28$  است. در این شکل مشاهده می‌شود که چگونه میدان تاوایی منفی با جمله تولید تاوایی کژ فشار (جزئیات بیشتر در مورد نحوه تولید تاوایی کژ فشار را پدلاسکی (۱۹۸۷) عرضه کرده است که در اینجا از ذکر آنها خودداری می‌شود) در ناحیه سطح مشترک دو شاره ایجاد می‌شود. در واقع عامل اصلی به وجود آورنده تاوایی در اینجا جمله کژ فشار است (هارتل و همکاران، ۱۹۹۹؛ هارتل و همکاران، ۲۰۰۰؛ کانتر و همکاران، ۲۰۰۷). تاوایی در روی مرز مقدار مثبت و در سطح مشترک مقدار

خطی با نسبت عکس اختلاف دما متناسب است؛ یعنی شاره با دمای کمتر، شاره چگال و شاره با دمای بیشتر، شاره سبک را تشکیل می‌دهد. همان‌طور که در قسمت قبلی بیان شد، شرط مرزی بی‌دررو برای دما در مرزها به کار می‌رود. در شبیه‌سازی حاضر عدد رینولدز  $Re = 5000$  و عدد پرانتل  $Pr = 1$  و عدد ریچاردسون توده‌ای  $Ri = 4$  در نظر گرفته می‌شود. در اینجا با توجه به امکانات محاسباتی موجود، محاسبات در شبکه‌هایی با تفکیک‌های متفاوت صورت گرفت که نتایج برای شبکه با تفکیک  $769 \times 97$  آورده می‌شود. همچنین با توجه به شرط پایداری گام زمانی (گام زمانی بدون بُعد است که زمان به صورتی که در قسمت معادلات حاکم بیان شد با توجه به عمق کانال و سرعت شناوری بی‌بُعد می‌شود)  $\Delta t = 5 \times 10^{-3}$  برای انتگرال‌گیری زمانی انتخاب شده است. برای اعمال شرط مرزی بدون لغزش ابتدا از رابطه (۱۴) که رابطه‌ای از دقت مرتبه سوم است استفاده می‌کنیم.

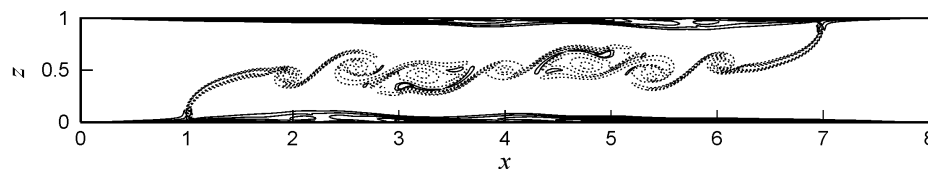
تحول زمانی دمای به دست آمده در شکل ۱ از زمان  $t=0$  تا  $t=5$  نشان داده شده است. در زمان  $t=0$  دو شاره در دو طرف در حال سکون هستند و پس از آن (یعنی وقتی که تیغه برداشته می‌شود) جریانی به واسطه نیروی محرکه جاذبه برقرار می‌شود. یک سطح مشترک معین و مشخص مابین دو جریان شکل می‌گیرد، به عبارت دیگر دو جریان با جهت مخالف با این سطح مشترک از هم جدا می‌شوند و یک صفحه تاوه تشکیل می‌شود که شامل ناپایداری کلون هلمهولتز است. به صورت کیفی مشخص است که درون آمیزی دو شاره، به واسطه ناپایداری کلون هلمهولتز رخ می‌دهد. در شکل ۱ مشاهده می‌شود که میدان دما با پیشرفت زمان پیچیده‌تر می‌شود و تعداد تاوه‌های کلون هلمهولتز بیشتری شکل می‌گیرد و همچنین اندازه این تاوه‌ها نیز بزرگ‌تر می‌شود. پربندهای دمای نشان داده شده در این شکل در بازه

تاوایی مثبت در لایه مرزی متمرکز شده است و در زیر جبهه پیش‌رونده تشکیل می‌شود. بر خلاف مرز در سطح مشترک، شاره چگال‌تر در زیر شاره سبک‌تر قرار می‌گیرد و در نتیجه با توجه به حرکت جریان به سمت چپ، جهت بردار گرادیان چگالی منفی می‌شود و در نهایت گردش و تاوایی منفی در سطح مشترک دو شاره به وجود می‌آید.

منفی دارد، دلیلش این است که در روی مرز پایین به‌خاطر وجود شرط مرزی بدون لغزش شاره سبک‌تر چسبیده به مرز باقی می‌ماند و شاره با چگالی کمتر زیر شاره با چگالی بیشتر قرار می‌گیرد، در نتیجه جهت بردار گرادیان چگالی روی مرز مثبت می‌شود و در نهایت گردش و تاوایی مثبتی روی مرز به‌وجود می‌آید. این



شکل ۱. تحول زمانی میدان دمای جریان گرانی مسطح همراه با به‌کارگیری مرز بدون لغزش از زمان  $t = 0$  تا  $t = 5$  با بازه‌های یک واحد زمانی و برای تفکیک  $97 \times 769$ ، (فاصله میان دو پرند متوالی برابر با 0.025 است).



شکل ۲. نتایج حاصل از شبیه‌سازی میدان تاوایی جریان گرانی مسطح حاصل از به‌کارگیری شرط بدون لغزش در زمان  $t = 5$  و برای تفکیک  $97 \times 769$ ، پرندهای منفی به‌صورت خط‌چین نمایش داده شده‌اند (فاصله میان دو پرند متوالی برابر با 5 است).

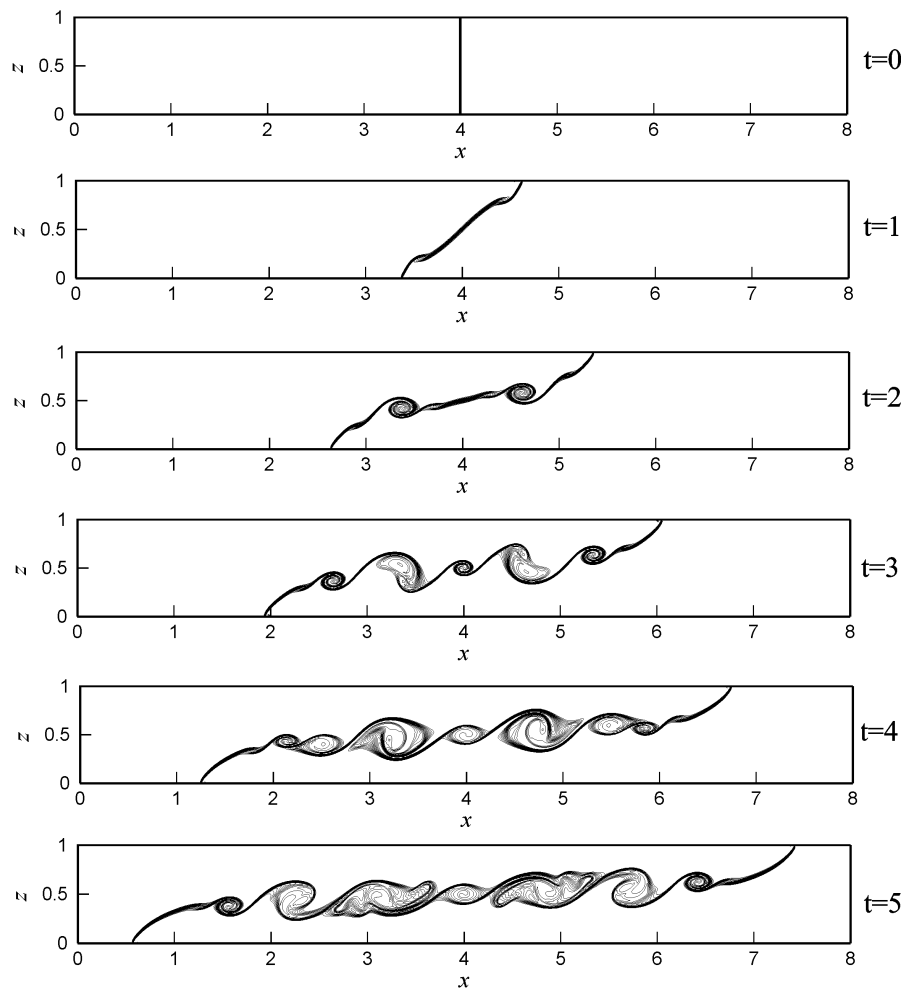


نفوذ شماره سنگین به زیر شماره سبک نشان داده می‌شود و این نشان‌دهنده سازگاری شرط مرزی استفاده شده با روش فشرده مرتبه چهارم است که حتی در تفکیک‌های کم نیز توانسته به خوبی ناپایداری‌های روی مرز را نشان دهد.

حال به تشریح نتایج حاصل از به‌کارگیری مرز لغزش آزاد می‌پردازیم. باید توجه داشت که سطح آزاد با مرز لغزش آزاد خالص تفاوت دارد. این تفاوت از آنجا ناشی می‌شود که لازم نیست فشار در امتداد مرز لغزشی ثابت باشد. اما این تفاوت فقط در جریان‌هایی با تغییرات چگالی بزرگ اهمیت پیدا می‌کند (بریتو و سیمپسون، ۱۹۷۸). چون در اینجا جریان بوسینسک را شبیه‌سازی می‌کنیم و در جریان بوسینسک اختلاف چگالی کوچک مدنظر است، پس در تحقیق حاضر سطح آزاد، مانند مرز لغزشی رفتار می‌کند (وانگ، ۱۹۸۵). شکل ۳ تحول زمانی دمای به‌دست آمده را از زمان  $t=0$  تا  $t=5$  با اعمال شرط مرزی لغزشی نشان می‌دهد. تفاوت عمده میان پراکنندگی در امتداد یک دیوار سخت و یک مرز لغزشی این است که در مرز لغزشی هیچ نیروی اصطکاکی بر جبهه پیش‌رونده روی مرز اعمال نمی‌شود. اساساً سطح اصطکاکی می‌تواند انتشار جبهه را کند کند که همان‌گونه که از مقایسه شکل ۳ و ۱ دیده می‌شود جابه‌جایی پربندهای دما در مرز لغزشی سریع‌تر از مرز بدون لغزش است، این موضوع در تحقیقات آزمایشگاهی و عددی مشاهده شده است (وانگ، ۱۹۸۵ و سیمپسون و بریتو، ۱۹۸۰). همان‌طور که در نتایج به‌دست آمده مشاهده می‌شود تاوه‌های کلوین هلمهولتز تولید شده در سطح مشترک با نتایج حاصل در شکل ۱ (حاصل از به‌کارگیری شرط بدون لغزش) تفاوت معنی‌داری ندارند، با توجه به تجربه عددی به‌دست آمده، دلیل این امر، استفاده از عدد رینولدز بالا ( $Re=5000$ ) برای شبیه‌سازی است.

جریان گرانی مسطح به هنگام گسترش، فازهای متفاوتی را پشت سر می‌گذارد، این فازها به ترتیب ریزشی، لختی و وُشکسان نامیده می‌شوند (هوپرت و سیمپسون، ۱۹۸۰). استمرار فاز ریزشی به حجم اولیه و عدد رینولدز بستگی دارد (روتمان و سیمپسون، ۱۹۸۳). در امتداد فاز ریزشی موقعیت جبهه متناسب با  $t$  (زمان) تغییر می‌کند، یا بهتر بگوییم وقتی که نمودار  $x-t$  را رسم می‌کنیم، شیب این نمودار یا آهنگ گسترش جریان (سرعت جبهه) برابر با مقدار ثابتی است (هولت ۱۹۷۲). در شبیه‌سازی حاضر به دلیل اینکه سرعت پیشروی جبهه تا زمان  $t=5$  برابر با مقدار ثابت ۰.۶۲ است جریان گرانی در فاز ریزشی قرار دارد.

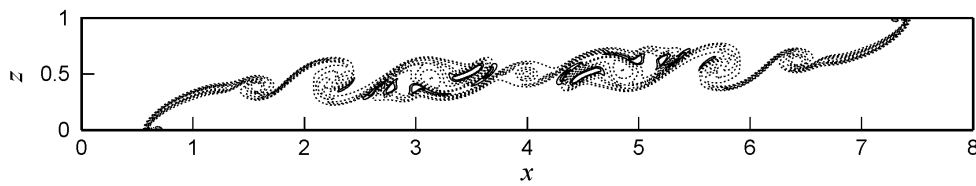
در مرحله بعدی برای اعمال شرط مرزی بدون لغزش از روابط (۱۵) و (۱۶) که به ترتیب روابطی از دقت مرتبه دو و یک هستند استفاده کردیم. نتایج به‌دست آمده حاکی از آن بود که با مقایسه کیفی میان نتایج در استفاده از سه رابطه آورده شده برای مرزها، جواب‌های به‌دست آمده از نظر ظاهری با هم توافق خوبی دارند. اما روی مرزها مشاهده شد که در استفاده از رابطه مرتبه سوم برای تاوایی شماره سبک روی مرز پایین تا  $x=4$  به زیر شماره سنگین نفوذ کرده در صورتی که در استفاده از روابط مرتبه یکم و دوم، شماره سبک روی مرز پایین تا  $x=3$  نفوذ کرده است. همچنین هنگامی که بررسی دقیق‌تری روی مقادیر پربندهای دمای تولید شده صورت می‌گیرد، مشاهده می‌شود که استفاده از روابط (۱۵) و (۱۶) خطای (نوفه) بیشتری نسبت به رابطه (۱۴) روی مرز تولید می‌کنند. نکته جالب دیگر اینکه در تفکیک‌های مورد بررسی در تحقیق حاضر، روی مرز سخت نفوذ شماره سبک به زیر شماره سنگین تا نقطه  $x=4$  نشان داده شده است، در واقع تجربه صورت گرفته در سایر شرایط مرزی (با دقت کمتر) این مطلب را نشان نمی‌دهد. با استفاده از رابطه (۱۴) مشاهده شد که حتی در تفکیک  $33 \times 257$  نیز



شکل ۳. تحول زمانی میدان دمای جریان گرانی مسطح همراه با به کارگیری مرز لغزش آزاد از زمان  $t = 0$  تا  $t = 5$  با بازه‌های یک واحد زمانی و برای تفکیک  $97 \times 769$ ، (فاصله میان دو پربند متوالی برابر با 0.025 است).

مرز، خطوط هم‌چگال بر خطوط هم‌فشار منطبق هستند و در نتیجه جمله تولید تاوایی کژفشار برابر با صفر خواهد شد و همچنین روی مرز هیچ تاوایی نخواهیم داشت. مشاهده می‌شود که مقدار بیشینه تاوایی ایجاد شده در سطح مشترک در به کارگیری مرز لغزشی با مرز بدون لغزش تفاوتی ندارد (در هر دو مورد، مقدار بیشینه تاوایی در سطح مشترک برابر با 28- است)، که این امر گواهی بر ادعای بی‌تأثیر بودن مرز لغزشی و مرز بدون لغزش بر تاوهای ایجاد شده در سطح مشترک در استفاده از عدد رینولدز بالا است.

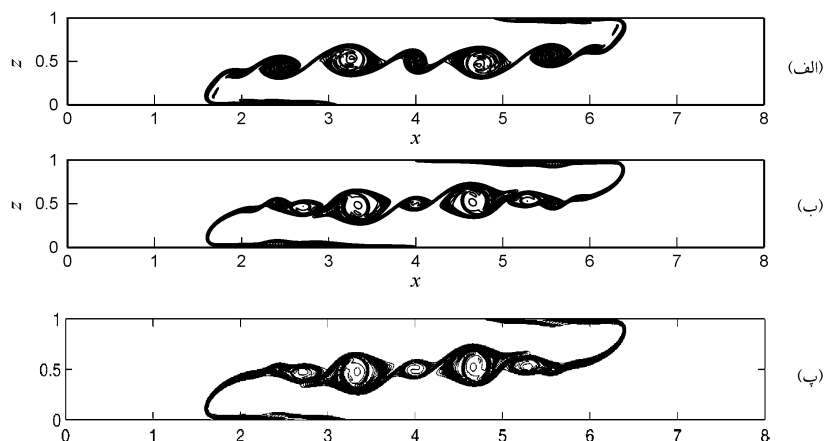
شکل ۴، میدان تاوایی را با اعمال مرز لغزشی در زمان  $t = 5$  نشان می‌دهد. مقدار پربندهای تاوایی در بازه  $(-28, 6)$  قرار دارند، به طوری که فاصله بین دو پربند متوالی برابر 2 و مقدار بیشینه تاوایی در سطح مشترک برابر با 28- است. همان گونه که در شکل ملاحظه می‌کنیم روی مرز، تاوایی و در نتیجه گردش تولید نمی‌شود و فقط در قسمت سطح مشترک تاوایی تولید می‌شود که دلیل آن نادیده گرفتن اثر نیروی اصطکاک بر مرزهای بالا و پایین است. در نتیجه، دیگر شاره سبک‌تر چسبیده به مرز باقی نمی‌ماند و جلوترین نقطه یا دماغه (Nose) جریان، درست چسبیده به مرز قرار می‌گیرد. روی



شکل 4. نتایج حاصل از شبیه‌سازی میدان تاوایی جریان گرانی مسطح حاصل از به کارگیری شرط مرزی لغزش آزاد در زمان  $t = 5$  و برای تفکیک  $769 \times 97$ ، پرندهای منفی به صورت خط‌چین نمایش داده شده‌اند (فاصله میان دو پرنده متوالی برابر با 2 است).

است. با آنکه روش مرتبه دوم مرکزی تعداد تاوه‌ها را درست تشخیص داده، ولی در شبیه‌سازی جزئیات آن بسیار ضعیف عمل کرده است. همچنین با مشاهده مقدار پرندهای دما در استفاده از دو روش فشرده و مرتبه دوم مرکزی می‌بینیم که روش مرتبه چهارم فشرده نوفه بسیار کمتری نسبت به روش مرتبه دوم مرکزی ایجاد کرده است و در واقع از خاصیت پایستگی بهتری برخوردار است که این خود یک برتری بزرگ روش فشرده نسبت به روش مرتبه دوم مرکزی محسوب می‌شود. همچنین مشاهده شد که در استفاده از روش مرتبه دوم برای شبیه‌سازی مقدار بیشینه و کمینه پرندهای دما روی مرزهای بالا و پایین، به ترتیب برابر با 1.81 و 0.68 است؛ در صورتی که این مقادیر در شبیه‌سازی با روش مرتبه چهارم برابر با 1.6 و 0.89 می‌باشد که نشان می‌دهد روش فشرده در مقایسه با روش مرتبه دوم خطای بسیار کمتری روی مرز ایجاد کرده است.

در نهایت برای آنکه بتوان از صحت نتایج و همچنین عملکرد روش فشرده مرتبه چهارم اطلاعاتی کسب کرد، نتایج به دست آمده با نتایج دو روش دیگر مقایسه می‌شود. شکل 5، مقایسه میدان دمای جریان گرانی مسطح را در زمان  $t = 4$  نشان می‌دهد. شکل 5(الف) روش مرتبه دوم مرکزی، شکل 5(ب) روش مرتبه چهارم فشرده، شکل 5(پ) نتایج حاصل از کار لیو و همکاران (2003) را نشان می‌دهد. برای روش‌های مرتبه دوم مرکزی و فشرده مرتبه چهارم از تفکیک  $769 \times 97$  استفاده شده است، در صورتی که تفکیک به کار رفته لیو و همکاران (2003)،  $2049 \times 257$  است (البته شبیه‌سازی با استفاده از روش مرتبه چهارم برای تفکیک  $2049 \times 257$  نیز به انجام رسید که از لحاظ کیفی تفاوت محسوسی با نتایج حاصل از تفکیک  $769 \times 97$  در آن مشاهده نشد). مقایسه کیفی شکل 5 نشان می‌دهد که روش فشرده مرتبه چهارم به خوبی از عهده شبیه‌سازی میدان جریان پیچیده بر آمده

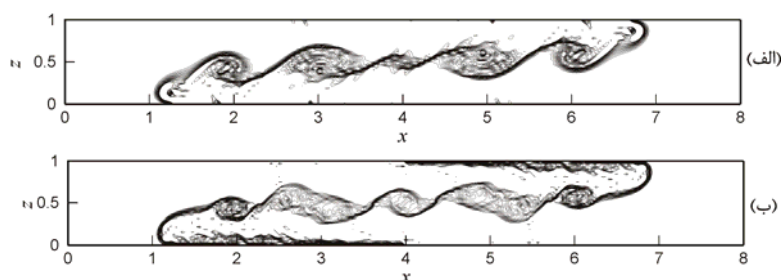


شکل 5. مقایسه نتایج حاصل از شبیه‌سازی عددی میدان دمای جریان گرانی مسطح با به کارگیری شرط مرزی بدون لغزش در زمان  $t = 4$  (فاصله میان دو پرنده متوالی برابر با 0.025 است)، (الف) روش مرتبه دوم مرکزی، (ب) روش فشرده مرتبه چهارم و (پ) نتیجه عرضه شده لیو و همکاران (2003).

شبیه‌سازی با استفاده از روش فشرده مرتبه چهارم برای تفکیک  $2049 \times 257$  نیز صورت گرفت که تفاوتی در جواب‌ها با تفکیک  $769 \times 97$  مشاهده نشد. این امر نیز خود گواهی بر همگرا شدن حل عددی در تفکیک  $769 \times 97$  است.

#### ۴-۲ نتایج حل عددی جریان گرانی استوانه‌ای

در این قسمت نتایج حاصل از حل عددی پدیده جریان گرانی استوانه‌ای به منزله یک آزمون موردی دیگر عرضه می‌شود. شبیه‌سازی در داخل جعبه‌ای مجزاشده که طول و عرض آن در بازه  $[0, 1] \times [0, 10] = \Omega$  واقع است، صورت می‌گیرد. در داخل آن دو شاره یکی در دمای (بی‌بعد) ۱ (در وسط دامنه) و دیگری در دمای (بی‌بعد)  $1/5$  (شاره پیرامون) موجود است. دو شاره در نقطه  $x=4$  و  $x=6$  با دو تیغه از هم جدا می‌شوند. بر طبق فرضیه بوسینسک، شاره با دمای کمتر شاره چگال و شاره با دمای بیشتر شاره سبک را تشکیل می‌دهد. در ضمن، شاره واقع در دو طرف دریچه‌ها همگن و فارغ از هرگونه چینه‌بندی است. اعداد بی‌بعد نیز مانند قسمت شبیه‌سازی جریان گرانی مسطح انتخاب می‌شوند. برای حل عددی معادلات از چندین شبکه با تفکیک کم تا زیاد استفاده کردیم، که در اینجا نتایج برای شبکه‌ای با تفکیک  $970 \times 97$  آورده شده است. برای شبیه‌سازی جریان گرانی استوانه‌ای، مرزهای بالا و پایین را بدون لغزش و مرزهای سمت چپ و راست را لغزش آزاد در نظر می‌گیریم.

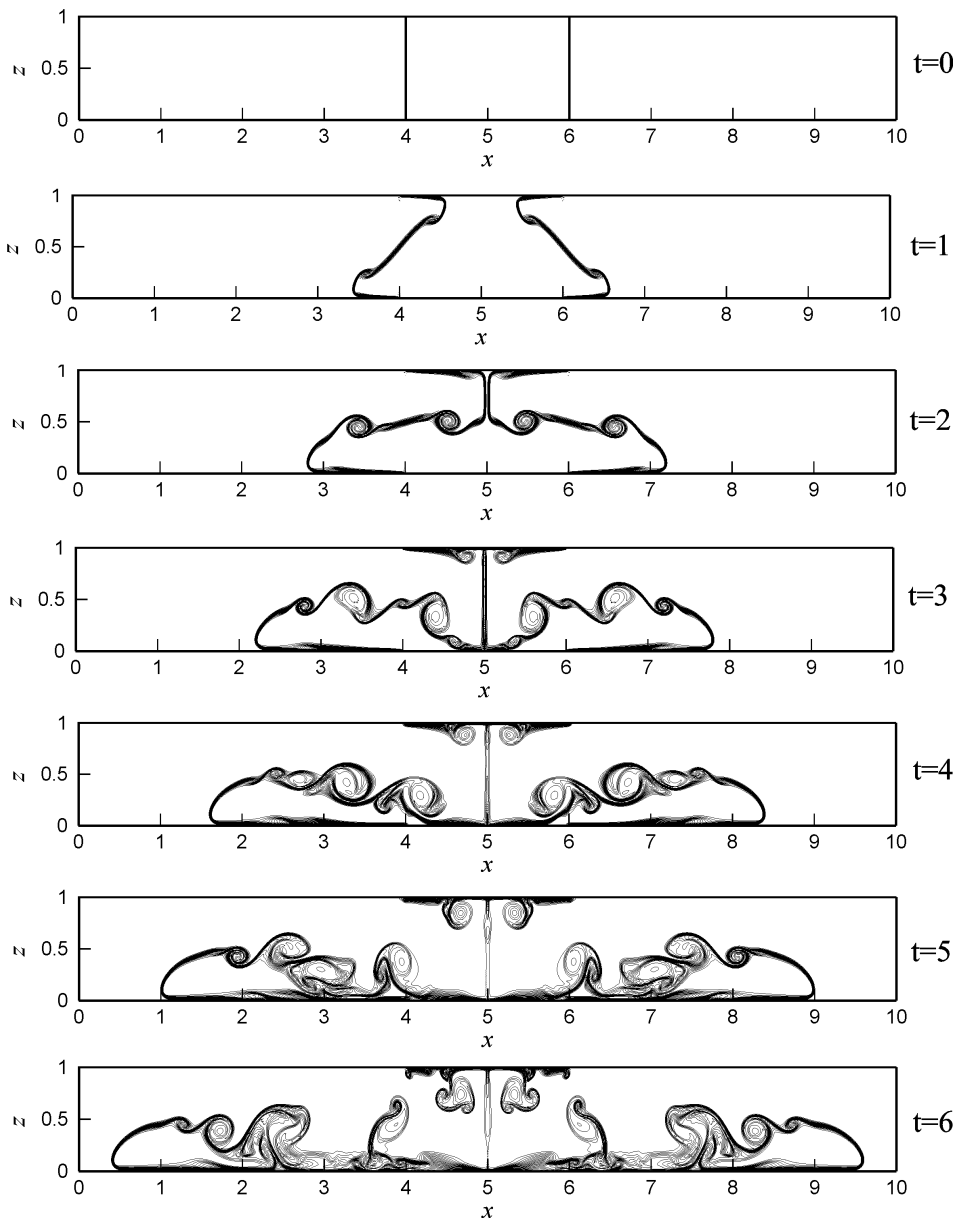


شکل ۶. مقایسه نتایج حاصل از شبیه‌سازی عددی میدان دمای جریان گرانی مسطح با به‌کارگیری شرط مرزی بدون لغزش در زمان  $t = 5$  و برای تفکیک  $257 \times 33$  (فاصله میان دو پربند متوالی برابر با ۰.۰۲۵ است)، (الف) روش مرتبه دوم مرکزی، (ب) روش فشرده مرتبه چهارم.

مورد دیگری که برتری روش فشرده را نسبت به روش مرتبه دوم مرکزی مشخص می‌کند شبیه‌سازی در تفکیک‌های درشت است، شکل ۶ مقایسه میدان دمای جریان گرانی مسطح را در زمان  $t = 5$  در تفکیک  $257 \times 33$  نشان می‌دهد. مشاهده می‌کنیم که روش مرتبه دوم مرکزی قادر به نشان دادن مرزها نیست، یعنی تفکیک در حدی نیست که روش مرتبه دوم مرکزی بتواند مرز بدون لغزش را بشناسد. همچنین مشاهده می‌کنیم که روش مرتبه دوم تعداد تاوه‌ها را درست تشخیص نداده و به‌طور کلی در تشخیص توپولوژی جریان اشتباه عمل کرده است. ولی روش فشرده مرتبه چهارم نه فقط تعداد تاوه‌ها را در تفکیک  $257 \times 33$  درست تشخیص داده بلکه توانسته مرزها را نیز به‌خوبی مشخص سازد. همچنین خطای تولیدشده در مقدار پربندهای دما روی مرز در این تفکیک در به‌کارگیری روش مرتبه دوم از به‌کارگیری روش مرتبه چهارم بیشتر است. همان‌گونه که در شکل‌های ۶-ب و ۱ مشاهده می‌شود در تفکیک کم ناپایداری‌های موجود در سطح مشترک به‌خوبی شبیه‌سازی نشده یا به‌عبارتی حل عددی هنوز همگرا نشده است. در صورتی که با افزایش قدرت تفکیک در تفکیک  $769 \times 97$  (در مقایسه با کار لیو و همکاران که در تفکیک  $2049 \times 257$  صورت گرفته است حل عددی به روش فشرده مرتبه چهارم در این تفکیک همگرا شده) ناپایداری موجود در سطح مشترک به‌خوبی نشان داده شده است. همان‌گونه که در صفحه قبل نیز ذکر شد،

مقارن که در آن تاوهای کلونین هلمهولتز گسترش می‌یابند و جبهه و دماغه شکل می‌گیرد شروع به رشد می‌کند. در زیر دماغه، جایی که در اثر شرط مرزی بدون لغزش دماغه از مرز فاصله گرفته یک ناحیه چینه‌بندی شده ناپایدار به دلیل اینکه شاره با چگالی سبک‌تر در زیر شاره با چگالی سنگین‌تر قرار گرفته است، تشکیل می‌شود.

تحول زمانی دمای به‌دست آمده از روش فشرده مرتبه چهارم در شکل ۷ از زمان  $t=0$  تا  $t=6$  نشان داده شده است. پرندهای نشان داده شده در این شکل در بازه  $[1.05, 1.45]$  قرار دارند. بعد از رها شدن شاره چگال دو جریان با جهت مخالف تشکیل می‌شود که این دو جریان به‌صورت مقارن به داخل شاره سبک‌تر حرکت می‌کنند و یک جبهه نفوذی شکل می‌گیرد. جریان در یک مد



شکل ۷. تحول زمانی میدان دمای به‌دست آمده از شبیه‌سازی جریان گرانی استوانه‌ای توسط روش فشرده مرتبه چهارم همراه با به‌کارگیری مرز بدون لغزش از زمان  $t=0$  تا  $t=6$  با بازه‌های یک واحد زمانی و برای تفکیک  $97 \times 97$ ، (فاصله میان دو پرنده متوالی برابر با 0.025 است).

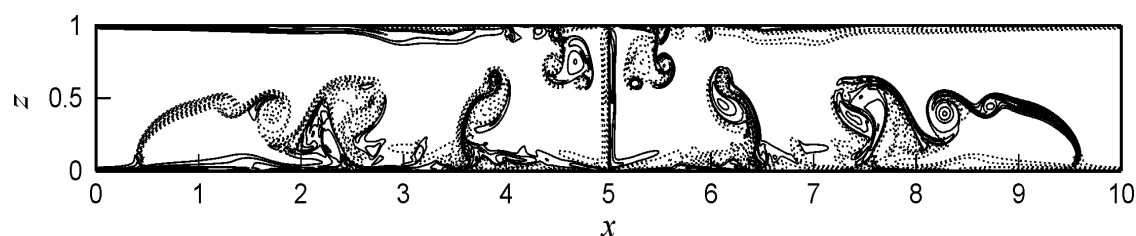
[90, -90] قرار دارد به طوری که فاصله دو پربند متوالی برابر با 5 است. در مورد جریان گرانی مسطح با مرز بدون لغزش مشاهده شد که روی مرز، تاوایی مثبتی در اثر اصطکاک و روی سطح مشترک، تاوایی منفی تولید می شود اما در اینجا مشاهده می کنیم که نیمی از جریان که به طرف چپ حرکت می کند فقط مانند جریان مسطح، تاوایی روی مرز مثبت و در سطح مشترک منفی است ولی نیمی دیگر که به سمت راست حرکت می کند درست قرینه نیمه سمت چپ است؛ یعنی تاوایی در روی مرزهای بدون لغزش منفی و در سطح مشترک مثبت است. در جریان گرانی استوانه ای یک شاره سنگین در میان یک شاره سبک واقع است بلافاصله بعد از برداشتن دریچه ها، شاره سنگین دو جریان تشکیل می دهد که در خلاف جهت همدیگر حرکت می کنند. در نیمی از جریان که به سمت راست حرکت می کند، شاره سبک در سمت راست و شاره سنگین در سمت چپ واقع است، بردار گرادین چگالی مثبت و در نتیجه علامت جمله کژفشار مثبت می شود. اما در آن قسمت از جریان که به سمت چپ حرکت می کند شاره چگال در سمت راست و شاره سبک در سمت چپ واقع است پس بردار گرادین چگالی در این قسمت از جریان منفی و در نتیجه علامت جمله کژفشاری در سطح مشترک منفی می شود. روی مرز بدون لغزش نیز به همین صورت علامت جمله کژفشار تغییر می کند.

وقتی که اثرات وُشکسانی مهم نباشد (در اعداد رینولدز بالا مانند تحقیق حاضر)، جریانی که از رهاشدن یک حجم ثابت شاره سنگین تشکیل می شود از سه فاز متفاوت عبور می کند (هوپرت و سیمپسون، ۱۹۸۰). چون در تحقیق حاضر از عدد رینولدز بالا استفاده کرده ایم، پس این موضوع برای این شبیه سازی صادق است. بعد از رها شدن جریان، جریان وارد فاز ریزشی می شود که با سرعت ثابت جبهه تشخیص داده می شود. سپس جریان وارد فاز لختی خویش همسان (Self-similar) می شود. در امتداد این فاز سرعت جبهه کند می شود و با آهنگ  $t^{-1/2}$  گسترش می یابد. این فاز لختی ادامه دارد تا اینکه اثرات وُشکسانی غالب و جریان وارد فاز وُشکسان می شود. اگر  $x_f$  موقعیت جبهه را نشان دهد سرعت جبهه برابر است با:

$$u_f = \frac{dx_f}{dt}$$

با اندازه گیری سرعت جریان گرانی استوانه ای مشاهده شد که سرعت جبهه برابر با مقدار ثابت 0.62 (بی بُعد) است که این امر توافق خوبی با نتایج حاصل از کار هوپرت و سیمپسون (۱۹۸۰) دارد که می گوید در فاز ریزشی، سرعت جبهه، نزدیک یک مقدار ثابت باقی می ماند. پس چون سرعت جبهه برابر با مقدار ثابتی است جریان استوانه در فاز ریزشی قرار دارد.

شکل ۸ نتیجه حاصل از شبیه سازی میدان تاوایی را در زمان  $t = 6$  نشان می دهد، مقدار پربندهای تاوایی در بازه



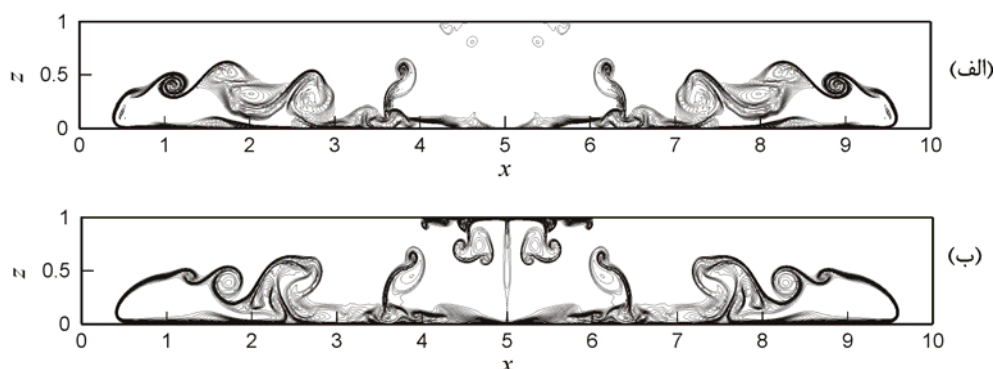
شکل ۸. تحول زمانی میدان تاوایی به دست آمده از شبیه سازی جریان گرانی استوانه ای توسط روش فشرده مرتبه چهارم همراه با به کارگیری مرز بدون لغزش در زمان  $t = 6$  و برای تفکیک  $97 \times 97$ ، پربندهای منفی به صورت خط چین و پربندهای مثبت به صورت خط ممتد نشان داده شده است (فاصله میان دو پربند متوالی برابر با 5 است).

دو بعدی پرداخته شده است. نتایج به دست آمده و مقایسه کیفی آنها برای میدان شارش گرانی تبادلی با پیچیدگی‌های فراوان به صورت جریان گرانی مسطح و جریان گرانی استوانه‌ای و در اعداد رینولدز بالا نشان می‌دهد که روش فشرده مرتبه چهارم از توانایی مناسبی برای شبیه‌سازی دقیق میدان شارش مورد بررسی برخوردار است. مقایسه روش فشرده مرتبه چهارم با روش تفاضل متناهی مرکزی مرتبه دوم در شبیه‌سازی جریان گرانی مسطح و جریان گرانی استوانه‌ای نشان می‌دهد که روش مرتبه دوم مرکزی عملکرد ضعیفی در شبیه‌سازی میدان شارش پیچیده مورد بررسی در تحقیق حاضر دارد و روش مرتبه دوم مرکزی نسبت به روش مرتبه چهارم فشرده نوفه بیشتری در مقادیر دما و تاوایی ایجاد می‌کند. همچنین هنگام به کارگیری شرط مرزی بدون لغزش در جریان گرانی مسطح مشاهده شد که روابط گوناگون از درجه دقت‌های متفاوت از نظر ظاهری بر توپولوژی جریان اثر ملموسی ندارند و طبق تجربه عددی به دست آمده و همچنین تجارب کارهای قبلی از جمله کار هارتل و همکاران (۲۰۰۰) علت این امر مربوط به استفاده از عدد رینولدز بالا برای شبیه‌سازی است؛ اما زمانی که مقادیر پربندهای دما و تاوایی بررسی می‌شوند مشاهده می‌شود

در این قسمت برای پی بردن به توانایی‌های روش فشرده مرتبه چهارم، نتایج به دست آمده را با نتایج حاصل از روش مرتبه دوم مرکزی در شبیه‌سازی جریان گرانی استوانه‌ای به صورت کیفی مقایسه می‌کنیم. در شکل ۹ نتایج حاصل از شبیه‌سازی میدان دما از دو روش فشرده مرتبه چهارم [شکل ۹(الف)] و مرتبه دوم مرکزی [شکل ۹(ب)] در زمان  $t = 6$  و برای تفکیک  $970 \times 97$  نشان داده شده است. همان‌طور که در شکل مشاهده می‌کنیم در استفاده از روش فشرده، مرزهای بدون لغزش بهتر از استفاده از روش مرتبه دوم شبیه‌سازی شده است. در سطح مشترک نیز مشاهده می‌کنیم روش مرتبه دوم در شبیه‌سازی جزئیات تاوه‌ها نسبت به روش فشرده ضعیف‌تر عمل کرده است. همچنین با مقایسه بیشینه و کمینه تاوایی مشاهده می‌کنیم که این مقادیر در استفاده از روش مرتبه دوم مرکزی برابر با ۸۵ و -۸۵ و در استفاده از روش مرتبه چهارم برابر با ۹۷ و -۹۷ است که نشان‌دهنده ایجاد خطای (نوفه) بیشتر در استفاده از روش مرتبه دوم در مقایسه با روش فشرده مرتبه چهارم است.

##### ۵ نتیجه‌گیری

در کار حاضر به بررسی به کارگیری روش فشرده مرتبه چهارم در نحوه افزایش دقت مسئله موردی جریان گرانی



شکل ۹. مقایسه نتایج حاصل از شبیه‌سازی عددی میدان دمای جریان گرانی استوانه‌ای با به کارگیری شرط مرزی بدون لغزش برای مرزهای بالا و پایین در زمان  $t = 6$  و برای تفکیک  $970 \times 97$ ، (فاصله میان دو پربند متوالی برابر با ۰.۰۲۵ است)، (الف) روش مرتبه دوم مرکزی، (ب) روش فشرده مرتبه چهارم.

- Urbana-Champaign, USA, Urbana, Illinois, USA.
- Cantero, M. I., Balanchandar, S. and Garcia, M. H., 2007, High resolution simulations of cylindrical density currents. *J. Fluid Mech.*, Vol. **590**, 437–469.
- Dennis, S. C. R., 1989, Compact h4 Finite-Difference approximations to operators of Navier-Stokes type. *J. Comput. Phys.*, Vol. **85**, 390–416.
- Durran, D. R., 1999, Numerical method for wave equation in geophysical fluid dynamics. New York, 467 pp.
- Ellison, T. H. and J. S. Turner, 1959, Turbulent entrainment in stratified flows. *J. Fluid Mech.*, Vol. **6**, 423–448.
- Elias, N. R., Paulo, L. B. Paraizo and Alvaro, L. G. A. Coutinho, 2008, Stabilized edge-based finite element computation of gravity currents in lock-exchange configurations. *Int. J. Numer. Meth. Fluids.*, Vol. **57**, 1137–1152.
- Fannelop, T. K., 1994, Fluid mechanics for industrial safety and environmental protection. Elsevier.
- Foreman, M. G. G. and Bennett, A. F., 1988, On the no-slip boundary conditions for the incompressible Navier-Stokes equations. *Dyn. Atmos. Oceans.*, Vol. **2**, 47-70.
- Fox, L. and Goodwin, E. T., 1949, Some new method for the numerical integration of ordinary differential equations. *Proc. Cambridge Phil. Soc. Math. Phys.*, Vol. **45**, 373-388.
- Gupta, M. M., 1991, High accuracy Solutions of incompressible Navier-Stokes equations. *J. Comput. Phys.*, Vol. **93**, 343–359.
- Hartel, C., Meiburg, E., Necker, F., 2000, Analysis and direct numerical simulation of the flow at a gravity-current head. Part 1: flow topology and front speed for slip and no-slip boundaries. *J. Fluid Mech.*, Vol. **418**, 189–212.
- Hartel, C., Meiburg, E. and Necker, F., 1999, Vorticity dynamics during the start-up phase of gravity currents. *Nuovo Cimento*, Vol. **22**, 823-833.
- Hirsh, R. S., 1975, Higher order accurate difference solutions of fluid mechanics problems by a compact differencing technique. *J. Comput. Phys.*, Vol. **19**, 90 – 109.
- Hoult, D. P., 1972, Oil spreading on the sea, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, Vol. **4**, 341-368.
- Huppert, H. and Simpson J. E., 1980, The slumping of gravity currents. *J. Fluid Mech.*,
- که استفاده از روابط مرتبه اول و دوم برای اعمال شرط مرزی تاوایی، روی مرز خطای بیشتری نسبت به رابطه مرتبه سوم تولید می کند. در نتیجه به کارگیری رابطه مرتبه سوم انتخاب مناسب تری به نظر می رسد. از اعمال شرط مرزی لغزشی به مرزهای بالا و پایین در شبیه سازی جریان گرانی مسطح مشاهده شد که در این مورد نیز توپولوژی جریان برای اعداد رینولدز بالا تفاوت قابل ملاحظه ای با مورد بدون لغزش ندارد؛ چنانچه مقدار بیشینه تاوایی در هر دو مورد در سطح مشترک با هم برابر شد. در شبیه سازی جریان گرانی استوانه ای، در مرز بدون لغزش از روش فشرده در مقایسه با روش مرتبه دوم مرکزی نتایج مطلوب تری به دست آمد، همچنین در سطح مشترک مشاهده شد که روش مرتبه دوم مرکزی، در مقایسه با روش فشرده، در شبیه سازی تاوه ها ضعیف تر عمل کرده است.
- تشکر و قدردانی**
- نویسندگان از دانشگاه های تهران و تربیت مدرس و همچنین از پژوهشگاه هواشناسی و علوم جو به واسطه حمایت از این کار تحقیقاتی تشکر می کنند.
- منابع**
- Arakawa, A., 1966, Computational design for long-term numerical integration of the equations of fluid motion: two dimensional incompressible flow. part I, *J. Comput. Phys.*, Vol. **1**, 119–143.
- Birman, V., 2007, Topics in gravity and turbidity current research. Ph.D. Thesis, University of California Santa Barbara.
- Benjamin, T. B., 1968, Gravity currents and related phenomena. *J. Fluid Mech.*, Vol. **31**, 209-248.
- Britter, R. E. and Simpson, J. E., 1978, Experiments on the dynamics of a gravity current head. *J. Fluid Mech.*, Vol. **88**, 223-240.
- Cantero, M. I., 2002, Theoretical and numerical modeling of turbidity currents as two-phase flows. MS thesis, University of Illinois at



compact schemes for unsteady viscous incompressible flows. *J. Comput. Phys.*, Vol. **126**, 122–138.

- Vol. **99**, 785-799.
- Kreiss, H. O. and Oliger, J., 1972, Comparison of accurate methods for the integration of hyperbolic equations. *Tellus*, Vol. **24**, 199-215.
- Lele, S., 1992, Compact finite difference schemes spectral-like resolution. *J. Comput. Phys.*, Vol. **103**, 16-42.
- Liu, J. G., Wang, C. and Johnston, H., 2003, A fourth order scheme for incompressible boussinesq equations. *Journal of Scientific Computing*, Vol. **18**(2), 253-285.
- Numerov, B. V., 1924, A method of extrapolation of perturbations. *Roy. Astron. Soc. Mon. Notice*, Vol. **84**, 592-601.
- Ooi, K. S., Constantinescu, G. and Larry, J. W., 2007, 2D large-eddy simulation of lock-exchange gravity current flows at high Grashof numbers. *J. Hyd. Eng.*; Vol. **133**, 1037-1047.
- Pedlosky, J., 1987, *Geophysical fluid dynamics*. Springer-verlag, New York, 710 pp.
- Roache, P. J., 1998, *Computational fluid dynamics*. Hermosa Publishers, Albuquerque.
- Rottman, J. and Simpson J. E., 1983, Gravity currents produced by instantaneous releases of a heavy fluid in a rectangular channel. *J. Fluid Mech.*, Vol. **135**, 95-110.
- Scotti A., 2008, A numerical study of the frontal region of gravity currents propagating on a free-slip boundary. *Theor. Comput. Fluid Dyn.*, Vol. **22**, 383–402.
- Simpson, J. E. and Britter, R. E., 1980, A laboratory model of an atmospheric mesofront. *Q. J. R. Met. Soc.*, Vol. **106**, 485-500.
- Simpson, J. E., 1986, Mixing at the front of a gravity current. *Aeta Mechanica*, Vol. **63**, 245-253.
- Simpson, J. E., 1997, *Gravity currents: in the environment and the laboratory*. 2nd Ed., Cambridge University Press, 243pp.
- Taylor P. J., 1970, The linear stability of no-slip boundary conditions in the numerical solution of nonsteady fluid flows. *J. Comput. Phys.*, Vol. **6**, 268-287.
- Thom, A., 1933, The flow past a circular cylinders at low speeds. *Proceedings of the Royal Society of London*; Vol. **141A**, 651–666.
- Wang, D. P., 1985, Numerical study of gravity currents in a channel. *J. Phys. Oceanogr.*, Vol. **15**, 299-305.
- Weinan, E. and Liu, J. G., 1996, Essentially