

## تعیین سریع مدار دینامیکی ماهواره‌های LEO با استفاده از تقریب چندجمله‌ای‌های لژاندر

محمد رضا سیف<sup>۱</sup>، محمدعلی شریفی<sup>۲\*</sup> و مهدی نجفی علمداری<sup>۳</sup>

<sup>۱</sup> دانش‌آموخته کارشناسی ارشد ژئودزی، دانشکده مهندسی نقشه‌برداری، دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران و پژوهشگر، گروه عمران، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه

امام حسین(ع)، تهران، ایران

<sup>۲</sup> استادیار، گروه مهندسی نقشه‌برداری، پردیس دانشکده‌های فنی، دانشگاه تهران، ایران

<sup>۳</sup> دانشیار، دانشکده مهندسی نقشه‌برداری، دانشگاه خواجه‌نصیرالدین طوسی، تهران، ایران

(دریافت: ۸۸/۲/۵، پذیرش نهایی: ۸۹/۷/۲۸)

### چکیده

مسئله تعیین مدار دینامیکی یک ماهواره چیزی جز حل یک معادله دیفرانسیل مرتبه دو نیست که امروزه این معادله به علت دقت زیاد روش‌های عددی، به صورت عددی حل می‌شود. علی‌رغم پیشرفت رایانه‌ها و فنون محاسباتی، انتگرال‌گیری مدار همچنان از فرایندهای زمان‌بر در ژئودزی ماهواره‌ای به حساب می‌آید. علت این مسئله لزوم محاسبه شتاب به صورت نقطه‌به‌نقطه است. اگرچه می‌توان با استفاده از فنون برداری‌سازی (Vectorize) در محاسبه شتاب، سرعت اجرای برنامه را تا حد زیادی بهبود داد، اما امکان استفاده از این فن برای محاسبه چندجمله‌ای‌های لژاندر، به دلیل وجود رابطه بازگشتی بین آنها و لزوم محاسبه مرحله‌به‌مرحله وجود نخواهد داشت. در این مقاله نشان داده خواهد شد که با استفاده از روش‌های تقریب می‌توان به برآورد دقیقی از چندجمله‌ای‌های لژاندر در نقاط دلخواه دست پیدا کرد و با استفاده از این چندجمله‌ای‌های تقریب زده شده در فرایند انتگرال‌گیری سرعت برنامه را چندین برابر افزایش داد. برای تقریب توابع لژاندر در بازه‌های کوتاه می‌توان از چندجمله‌ای‌های مرتبه پایین‌تر استفاده کرد که برای یافتن ضرایب این چندجمله‌ای مرتبه پایین می‌توان علاوه بر مقدار چندجمله‌ای‌های لژاندر، در نقاط معلوم از مشتقات مرتبه اول و دوم آن نیز استفاده کرد. با ورود مشتقات چندجمله‌ای‌های لژاندر به مسئله، دقت روش تقریب انتگرال‌گیری مدار ماهواره‌های کم‌ارتفاع (LEO) که دارای بیشترین اغتشاش هستند در یک بازه زمانی دو هفته‌ای زیر یک میلی‌متر خواهد بود.

واژه‌های کلیدی: انتگرال‌گیری مدار، ماهواره‌های کم‌ارتفاع، چندجمله‌ای‌های لژاندر، تقریب چندجمله‌ای، چندجمله‌ای هرमित

## Fast Dynamic Orbit Determination of LEO Satellites using the Legendre Polynomial Approximation

Seif, M. R.<sup>1</sup>, Sharifi, M. A.<sup>2</sup>, Najafi Alamdari, M.<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Graduate Student of Geodesy, Faculty of Geodesy and Geomatics, KNT University of Technology, Tehran, Iran and Researcher, Department of civil Engineering, Faculty of Engineering, Imam Hossein University, Iran

<sup>2</sup> Assistant Professor, Department of Surveying and Geomatics Engineering, Faculty of Engineering, University of Tehran, Iran

<sup>3</sup> Associate Professor, Faculty of Geodesy and Geomatics, KNT University of Technology, Tehran, Iran

(Received: 25 April 2009, Accepted: 20 Oct 2010)

### Abstract

The Low Earth Orbiting (LEO) satellites are widely used for geosciences applications. For most applications, precise orbital information of the satellites is required. A Combination of the in suite observations and dynamic orbit yields the optimum solution. In order to obtain the combined optimal solution, one needs to analytically or numerically propagate the state vector epoch by an epoch based on dynamic force models. In the

analytical propagation, the dynamic model simplification leads to a biased solution. On the other hand, the numerical solution is a highly time-consuming computational task. Among all computation parts, computation of the Legendre Polynomials is the most time-consuming. Vectorization could effectively reduce computation time of the polynomials for the gravity field modeling. However, it cannot be implemented for the orbit determination because of the point-to-point computation in orbit propagation.

In this article, we propose a new method for effective computation of the Legendre polynomials. The proposed method is based on the approximation of the polynomials at any arbitrary point using pre-computed values of the polynomials on evenly-spaced grid points (i.e., mesh points). Moreover, the first- and second-order derivatives of the polynomials are simultaneously computed using the recurrence relations at the mesh points. Therefore, the polynomials can be approximated using the Hermite approximation algorithm between the mesh points. In other words, employing the Legendre polynomial derivatives for estimating the best approximating function efficiently prevents the approximating oscillations of polynomials between the mesh points. Consequently, the approximating function perfectly follows the Legendre polynomials between the mesh points.

Of course, a few methods have been proposed for fast computation of dynamic orbits by other researchers. They are mostly based on the computation of the gravitational acceleration on the mesh points and approximation of the acceleration between the mesh points. Our proposed method leads to higher accuracy since both the Legendre polynomials and their derivatives are used for approximation.

In order to show numerical performance, the proposed method has been implemented for a CHAMP-type LEO satellite orbit propagation. Sub-millimeter approximation error can be achieved for a two-week propagated orbit.

**Key words:** Orbit propagation, LEO satellites, Legendre Polynomials, Polynomial approximation, Hermite Interpolation.

## ۱ مقدمه

ماهواره‌ای، این ضرایب تا درجه و مرتبه ۱۴۰ افزایش می‌یابد (رومل و کلومبو، ۱۹۸۵). با توجه به این مسئله در تعیین مدار یک ماهواره کم‌ارتفاع شبیه CHAMP یا تک ماهواره GRACE به صورت یک مورد تحقیقاتی، برای محاسبه شتاب می‌توان به درجه و مرتبه ۱۴۰ یا شاید حتی پایین‌تر از ۱۴۰ نیز بسنده کرد که این خود باعث کاهش حجم محاسبات خواهد شد.

در روشی که هوآنگ و لین (۱۹۹۸) عرضه کردند به منظور تقریب شتاب برای محاسبه انتگرال، معمولاً یک شبکه سه‌بعدی تولید و با استفاده از روش‌های تقریب مقدار شتاب در نقاط میانی محاسبه می‌شود. (هوآنگ و لین، ۱۹۹۸). در این روش شبکه سه‌بعدی بر حسب  $r, \varphi, \lambda$  تولید می‌شود که در واقع مجموعه‌ای از

بخش عمده اغتشاش در حرکت ماهواره‌ها ناشی از توزیع نامتقارن جرم در زمین است و هرچه ماهواره به سطح زمین نزدیک‌تر باشد بسامدهای بیشتری از این اغتشاش‌ها روی آن تاثیر خواهد گذاشت (سیبر، ۲۰۰۳).. از آنالیز مدار ماهواره CHAMP که در ارتفاع ۴۲۰km تا ۴۵۰km قرار دارد ضرایب میدان پتانسیل تا درجه و مرتبه ۷۰ قابل بازیابی است و این مسئله به نوعی بیانگر این واقعیت است که پتانسیل جاذبه زمین تا درجه ۷۰ بسط روی ماهواره‌هایی در این ارتفاع تاثیرگذار است (ریبلیت و همکاران، ۲۰۰۳). البته در ماهواره GRACE با استفاده از مشاهدات تفاضلی و اندازه‌گیری تغییرات فاصله بین دو ماهواره، می‌توان ضرایب بسط پتانسیل را تا درجه و مرتبه ۱۲۰ به دست آورد. با تلفیق اطلاعات زمینی و اطلاعات

یک بُعدی نیاز خواهیم داشت که باعث کاهش حجم داده‌های نگهداری شده در حافظه رایانه می‌شود.

## ۲ محاسبه شتاب بدون تقریب و با تقریب

به منظور محاسبه عددی انتگرال، نیاز است که مقادیر تابع زیر انتگرال را در بازه‌های معین بدانیم. در اینجا تابعی که از آن انتگرال گرفته خواهد شد، تابع برداری شتاب جاذبه است. اما مشکل اینجا است که محاسبه شتاب به دلیل لزوم محاسبه چندجمله‌ای‌های لژاندر، فرایندی زمان‌بر است. در این تحقیق برای کاهش زمان محاسبات، به جای محاسبه مستقیم این چندجمله‌ای‌ها، از مقدار تقریبی آنها استفاده می‌شود. به عبارت دیگر چندجمله‌ای‌های لژاندر در یک شبکه تک‌بُعدی از  $\phi$  در مجموعه‌ای از نقاط مشخص محاسبه می‌شود و مقدار چندجمله‌ای در هر نقطه دلخواه دیگر با استفاده از تقریب چندجمله‌ای به دست می‌آید.

در این مقاله، منظور از شتاب بدون تقریب یا حقیقی، شتابی است که در محاسبه آن از مقدار حقیقی چندجمله‌ای‌های لژاندر استفاده شده و شتاب با تقریب یا تقریبی، شتابی است که در محاسبه آن از مقدار تقریبی چندجمله‌ای‌های لژاندر استفاده شده است. شتاب جاذبه در دستگاه دکارتی لخت با رابطه (۱) قابل محاسبه است (شریفی، ۲۰۰۴):

$$\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi \cos \lambda & \frac{-\sin \phi \cos \lambda}{r} & \frac{-\sin \lambda}{r \cos \phi} \\ \cos \phi \sin \lambda & \frac{-\sin \phi \sin \lambda}{r} & \frac{\cos \lambda}{r \cos \phi} \\ \sin \phi & \frac{\cos \phi}{r} & \cdot \end{bmatrix} \times \left[ \begin{array}{l} -\frac{n+1}{r} (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}'_{nm}(\sin \phi) \\ (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}'_{nm}(\sin \phi) \\ (-m\bar{C}_{nm} \sin m\lambda + m\bar{S}_{nm} \cos m\lambda) \bar{P}_{nm}(\sin \phi) \end{array} \right] \quad (1)$$

شتاب‌های محاسبه شده روی کره‌هایی با شعاع متفاوت‌اند. محاسبه شتاب در هر مختصات دلخواه با استفاده از نقاطی که در فضای سه‌بُعدی در همسایگی نقطه موردنظر هستند، صورت می‌گیرد. یکی از معایب عمده این روش حجم زیاد داده‌ها است که باید در حافظه رایانه نگهداری شود و هرچه قدرت تفکیک این شبکه را بالاتر ببریم، حجم داده به صورت تصاعدی بالا خواهد رفت. کار کردن با این حجم داده علاوه بر اشغال حافظه، خود نیز یکی از عوامل کندی محاسبات خواهد بود. یکی دیگر از معایب این روش تقریب شتاب در سه راستای  $\Gamma, \phi, \lambda$  است که تفاوت شتاب واقعی را با شتاب تقریبی زیاد می‌کند. با استفاده از روش هوآنگ و لین خطای موقعیت و سرعت برای یک ماهواره کم‌ارتفاع در سه روز به ترتیب در حد 4-10 m و 7-10 m/s خواهد بود (هوآنگ و لین، ۱۹۹۸).

با توجه به اینکه زمان عمده در محاسبه شتاب مربوط به محاسبه چندجمله‌ای‌های لژاندر است که فقط تابعی از مولفه  $\phi$  است، لذا در این مقاله با استفاده از یک روش جدید در تقریب چندجمله‌ای‌های لژاندر، سرعت محاسبات به صورت معنی‌داری افزایش داده شده است. همچنین به علت محاسبات مستقیم شتاب در موقعیت صحیح  $\Gamma, \lambda$  نبود تقریب در این دو راستا، دقت محاسبات در مقایسه با روش هوآنگ و لین افزایش یافته است. برای تقریب چندجمله‌ای‌های لژاندر از روش تقریب چندجمله‌ای استفاده می‌کنیم. این روش با وجود سادگی، روشی پرکاربرد در مباحث گوناگون است (دیویس، ۱۹۷۵). یکی از معایب این روش بروز نوسان‌های ناخواسته است که برای حل آن می‌توان استفاده از روش هرمیت را پیشنهاد کرد (استائر و بیلیرش، ۲۰۰۲). در نتیجه می‌توان به تقریب بهتری در محاسبه شتاب دست یافت و روش تقریب در انتگرال‌گیری را حتی برای بازه‌های طولانی‌تر زمان (مدار Long arc) نیز مورد استفاده قرار داد. همچنین در این روش به جای شبکه سه‌بُعدی به یک شبکه

نسبت به یک سری دیگر بدین معنا است که می توان در تعداد جملات کمتری از سری به دقت دلخواه رسید. با این تفسیر از آنجا که  $\bar{P}_{nm}$  ها خود چندجمله ای هستند، بهترین توابع پایه برای تقریب آن ها چندجمله ای های دیگری خواهد بود. بنابراین می توان از روش های تقریب چندجمله ای (Polynomial approximation) استفاده کرد. اما سوالی که می تواند در اینجا مطرح شود این است که هدف از تقریب یک چندجمله ای با یک چندجمله ای دیگر چیست؟

بنابر نظریه وایرشراس هر تابع پیوسته ای در بازه [a,b] را می توان به صورت یکنواخت و با دقت دلخواه با یک چندجمله ای تقریب زد (ردین، ۱۹۷۳). خود چندجمله ای ها نیز از این قاعده مستثنی نیستند و با استفاده از این مطلب می توان نتیجه گرفت که یک چندجمله ای مرتبه بالا را در بازه های کوچک تری از شناسه خود می توان با استفاده از چندجمله ای مرتبه پایین تقریب زد. استفاده از این چندجمله ای مرتبه پایین باعث تسریع محاسبات خواهد شد.

$\bar{P}_{nm}$  ها در حقیقت چندجمله ای هایی از درجه n هستند که می توان آنها را در بازه های کوچک با چندجمله ای مرتبه پایین تر تقریب زد. برای تقریب  $\bar{P}_{nm}$  در هر نقطه دلخواه با چندجمله ای درجه k، باید از (k+1) مقدار معلوم  $\bar{P}_{nm}$  نزدیک این نقطه استفاده کرد. مثلاً برای تقریب  $\bar{P}_{nm}$  با چندجمله ای درجه ۵ در هر نقطه دلخواه باید مقدار  $\bar{P}_{nm}$  را حداقل در ۶ نقطه در همسایگی نقطه دلخواه بدانیم تا بتوانیم شش مجهول چندجمله ای درجه ۵ را محاسبه کنیم.

برای افزایش کارایی محاسبات، می توان به جای تقریب جمله به جمله چندجمله ای های لژاندر، از تقریب هم زمان کلیه درجات و مرتبه های چندجمله ای های لژاندر تا درجه n و مرتبه m که در یک ساختار ماتریسی مرتب

که در آن  $\bar{P}'_{nm}$  و  $\bar{P}_{nm}$  به ترتیب چندجمله ای لژاندر و مشتق مرتبه اول آن نسبت به  $\phi$  از درجه n و مرتبه m است. روش های متعددی برای محاسبه چندجمله ای های لژاندر و مشتقات آن عرضه شده است که در اینجا از روابط زیر که مشتق چندجمله ای را نیز به صورت تابعی از خود چندجمله ای بیان می کند، استفاده شده است (روبین، ۱۹۷۵):

$$\frac{\partial \bar{P}_{nm}(\sin \phi)}{\partial \phi} = K_{nm} \bar{P}_{n,m+1}(\sin \phi) - m \tan(\phi) \bar{P}_{nm}(\sin \phi)$$

$$K_{nm} = \sqrt{\frac{(\gamma - \delta_{m,0})(n-m)(n+m+1)}{2}}$$
(۲)

اگر برای محاسبه شتاب در هر نقطه با استفاده از روابط (۱) و (۲)، چندجمله ای های لژاندر و مشتق آن به ازای هر نقطه محاسبه شود، شتاب واقعی حاصل خواهد شد و چنانچه به جای محاسبه مقدار چندجمله ای های لژاندر از تقریب آن با یک چندجمله ای تقریب کننده و مقدار چندجمله ای های لژاندر در نقاط شبکه محاسباتی استفاده کنیم، شتاب به دست آمده همان شتاب تقریبی خواهد بود. که در ادامه به بررسی روش های محاسبه آنها می پردازیم.

### ۳ تقریب چندجمله ای های لژاندر با چندجمله ای های مرتبه پایین

بر اساس نظریه های ریاضی می توان هر پدیده را بر حسب یک سری از توابع پایه (برای نمونه توابع پایه مثلثاتی یا چندجمله ای ها) با دقت مناسب بسط داد؛ به شرط آنکه این سری تا بی نهایت ادامه داد شود (بردن و همکاران، ۱۹۸۰).

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n p_n(x)$$
(۳)

اما اینکه چه پدیده ای را با چه نوع تابعی تقریب بزنیم کاملاً بستگی به رفتار آن پدیده دارد که به کدام نوع تابع پایه نزدیک تر است. مناسب تر بودن یک سری توابع پایه

چندجمله‌ای‌های مرتبه پایین درجه یک و دو به دلیل کم بودن ضرایب مجهول‌شان سرعت زیادی در محاسبات دارند اما برای تقریب چندجمله‌ای‌های لژاندر دارای دقت کافی نیستند. از سوی دیگر بالا بردن بیش از اندازه مرتبه چندجمله‌ای علاوه بر کاهش سرعت برنامه، منجر به نوسان شدید در نقاط میانی خواهد شد که دقت تقریب را به شکل قابل ملاحظه‌ای کاهش می‌دهد.

#### ۴ تقریب چندجمله‌ای‌های لژاندر بوسیله چندجمله‌ای

##### هرمیت

یکی از معایب بزرگ و شناخته شده تقریب با چندجمله‌ای‌ها این است که چندجمله‌ای‌های مرتبه پایین، توانایی منطبق شدن با داده‌های نمونه را ندارند و به صورت یک منحنی نرم از میان نقاط نمونه عبور می‌کنند. چندجمله‌ای‌های مرتبه بالا نیز علی‌رغم انطباق مناسب در نقاط نمونه، در نقاط میانی دارای نوسان‌های شدید خواهند بود؛ که این دقت تقریب را در این نقاط کاهش خواهند داد (لنکستر و سالکاکیس، ۱۹۸۶). یکی از راه‌های برطرف کردن این عیب، استفاده از روش تقریب patch-wise و اعمال شرط پیوستگی است. روش اسپلاین یکی از این روش‌ها است (موریتز، ۱۹۸۷). در روش اسپلاین با اعمال شرط پیوستگی مشتقات تابع تا حدودی نوسان‌های ناخواسته چندجمله‌ای برازش داده شده، کنترل می‌شود اما مقدار این مشتقات در برازش چندجمله‌ای نقشی ندارد.

روش هرمیت، روش دیگری است که می‌تواند در حل این مشکل مورد استفاده قرار گیرد. تفاوت این روش با سایر روش‌های تقریب چندجمله‌ای این است که در این روش علاوه بر مقدار تابع، مشتقات مرتبه پایین تابع نیز برای برازش چندجمله‌ای، مورد استفاده قرار می‌گیرد (استائر و بیلیرش، ۲۰۰۲). با ورود مشتقات تابع علاوه بر اعمال شدن شرط پیوستگی مانند روش اسپلاین، با افزایش تعداد معادلات می‌توان در فاصله‌های کوچک

شده‌اند استفاده کرد. و به عبارتی به جای داشتن مقدار یک  $\bar{P}_{nm}$  در چند نقطه، با ماتریسی از  $\bar{P}_{nm}$ ‌ها در نقاط شبکه سروکار داریم. بنابراین مسئله برازش یک چندجمله‌ای تبدیل به برازش دسته‌ای از چندجمله‌ای‌ها خواهد شد که ضرایب مجهول به جای اسکالر بودن، دارای ساختار ماتریسی هستند. در نتیجه باید ضرایب چندجمله‌ای را به صورت تابعی از این ماتریس‌ها بنویسیم. برای مثال فرض کنید بخواهیم به  $(n+1)$  ماتریس معلوم، یک چندجمله‌ای درجه  $n$  برازش دهیم. در این صورت:

$$\begin{aligned} \underline{y}_1 &= \underline{f}(x_1) \\ \underline{y}_2 &= \underline{f}(x_2) \\ &\vdots \\ \underline{y}_{n+1} &= \underline{f}(x_{n+1}) \end{aligned}$$

$$\underline{p} = \underline{a}_0 + \underline{a}_1 x + \underline{a}_2 x^2 + \dots + \underline{a}_n x^n \quad (4)$$

که در آن تابع ماتریسی  $p$  ماتریس تقریب‌زننده تابع ماتریسی  $f$  با مقادیر معلوم در  $n+1$  نقطه است. ضرایب مجهول چندجمله‌ای  $p$  نیز به صورت زیر خواهند بود:

$$\begin{aligned} \underline{a}_0 &= \gamma_{1,0} \underline{y}_1 + \gamma_{2,0} \underline{y}_2 + \dots + \gamma_{n,0} \underline{y}_{n+1} \\ \underline{a}_1 &= \gamma_{1,1} \underline{y}_1 + \gamma_{2,1} \underline{y}_2 + \dots + \gamma_{n,1} \underline{y}_{n+1} \\ &\vdots \\ \underline{a}_n &= \gamma_{1,n} \underline{y}_1 + \gamma_{2,n} \underline{y}_2 + \dots + \gamma_{n,n} \underline{y}_{n+1} \end{aligned} \quad (5)$$

که در روابط (۵) اسکالرهایی از  $X_i$ ‌ها هستند.

$$\gamma_{ij} = g_{ij}(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}); \quad \begin{aligned} i &= 1, 2, \dots, n \\ j &= 0, 1, \dots, n+1 \end{aligned} \quad (6)$$

در این صورت مقدار تقریب شده تابع  $f$  در نقطه  $X_p$  برابر خواهد بود با:

$$\underline{f}(x_p) \cong \underline{a}_0 + \underline{a}_1 x_p + \underline{a}_2 x_p^2 + \dots + \underline{a}_n x_p^n \quad (7)$$

چندجمله‌ای‌های مرتبه بالاتری را نسبت به حالت معمولی به داده‌ها برازش داد. همچنین به دلیل وجود مشتقات تابع و معلوم بودن جهت شیب و تقعر تابع در نقاط نمونه چندجمله‌ای برازش داده شده بهتر از حالت قبل رفتار تابع را تقریب می‌زند. زیرا مشتقات مرتبه اول و دوم به صورت قیدهایی شیب و تقعر تابع را به مسئله معرفی می‌کند که چندجمله‌ای برازش داده ملزم به تبعیت از آن است. این ابزار مناسبی برای جلوگیری از نواسان‌های ناخواسته در نقاط میانی است.

با استفاده از مشتقات مرتبه اول و دوم چندجمله‌ای‌های لژاندر علاوه بر مقدار آن در هر زوج نقطه شش معادله خواهیم داشت که می‌توان فاصله بین هر دو نقطه را با یک چندجمله‌ای درجه ۵ تقریب زد. ضرایب چندجمله‌ای هر میت به صورت تابعی از مقدار چندجمله‌ای‌ها و مشتقات مرتبه اول و دوم آن‌ها در نقاط  $\varphi_1, \varphi_2$  قابل بازنویسی است.

$$a_0 = \gamma_{10} P(\varphi_1) + \gamma_{20} P'(\varphi_1) + \gamma_{30} P''(\varphi_1) + \gamma_{40} P(\varphi_2) + \gamma_{50} P'(\varphi_2) + \gamma_{60} P''(\varphi_2)$$

$$a_1 = \gamma_{11} P(\varphi_1) + \gamma_{21} P'(\varphi_1) + \gamma_{31} P''(\varphi_1) + \gamma_{41} P(\varphi_2) + \gamma_{51} P'(\varphi_2) + \gamma_{61} P''(\varphi_2)$$

⋮

$$a_5 = \gamma_{15} P(\varphi_1) + \gamma_{25} P'(\varphi_1) + \gamma_{35} P''(\varphi_1) + \gamma_{45} P(\varphi_2) + \gamma_{55} P'(\varphi_2) + \gamma_{65} P''(\varphi_2)$$

$$\gamma_{ij} = g_{ij}(\varphi_1, \varphi_2); \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, 6 \\ j = 0, 1, \dots, 5 \end{matrix} \quad (8)$$

در رابطه (۸)،  $P$  ماتریس چندجمله‌ای‌های لژاندر و  $P'$  و  $P''$  به ترتیب مشتقات مرتبه اول و دوم این ماتریس نسبت به  $\varphi$  هستند. در نهایت ضرایب مجهول روش هر میت از روابط (۹) قابل محاسبه است.

$$\begin{aligned} \underline{a} &= \frac{(1 \cdot \phi_1^{\tau} - \Delta \phi_1 \phi_{\tau} + \phi_{\tau}^{\tau}) x_{\tau}^{\tau}}{\Delta} P(\phi_1) + \frac{(\phi_1^{\tau} - \Delta \phi_1 \phi_{\tau} + 1 \cdot \phi_{\tau}^{\tau}) \phi_{\tau}^{\tau}}{\Delta} P(\phi_{\tau}) \\ &+ \frac{(\tau \phi_1 - \phi_{\tau}) \phi_1 \phi_{\tau}^{\tau} P'(\phi_1) - (\phi_1 - \tau \phi_{\tau}) \phi_1^{\tau} \phi_{\tau}^{\tau} P'(\phi_{\tau})}{\Delta_1} \\ &- \frac{1}{\tau} \frac{\phi_1^{\tau} \phi_{\tau}^{\tau}}{\Delta_1} P''(\phi_1) + \frac{1}{\tau} \frac{\phi_1^{\tau} \phi_{\tau}^{\tau}}{\Delta_1} P''(\phi_{\tau}) \\ \underline{a}_1 &= \tau \cdot \frac{\phi_1^{\tau} \phi_{\tau}^{\tau}}{\Delta} P(\phi_1) - \tau \cdot \frac{\phi_1^{\tau} \phi_{\tau}^{\tau}}{\Delta} P(\phi_{\tau}) \\ &+ \frac{(1 \tau \phi_1^{\tau} + \tau \phi_1 \phi_{\tau} - \phi_1^{\tau}) \phi_{\tau}^{\tau} P'(\phi_1) + (\phi_1^{\tau} - \tau \phi_1 \phi_{\tau} - 1 \tau \phi_1^{\tau}) \phi_1^{\tau} P'(\phi_{\tau})}{\Delta_1} \\ &+ \frac{(\tau \phi_1 + \tau \phi_{\tau}) \phi_1 \phi_{\tau}^{\tau} P''(\phi_1) - (\tau \phi_1 + \tau \phi_{\tau}) \phi_1^{\tau} \phi_{\tau}^{\tau} P''(\phi_{\tau})}{\tau \Delta_1} \\ \underline{a}_2 &= -\tau \cdot \frac{(\phi_1 + \phi_{\tau}) \phi_1 \phi_{\tau}^{\tau}}{\Delta} P(\phi_1) + \tau \cdot \frac{(\phi_1 + \phi_{\tau}) \phi_1 \phi_{\tau}^{\tau}}{\Delta} P(\phi_{\tau}) \\ &+ \varepsilon \frac{(\tau \phi_1 + \tau \phi_{\tau}) \phi_1 \phi_{\tau}^{\tau} P'(\phi_1) + \varepsilon \frac{(\tau \phi_1 + \tau \phi_{\tau}) \phi_1 \phi_{\tau}^{\tau} P'(\phi_{\tau})}{\Delta_1}}{\Delta_1} \\ &- \frac{(\tau \phi_1^{\tau} + \varepsilon \phi_1 \phi_{\tau} + \phi_1^{\tau}) \phi_{\tau}^{\tau} P''(\phi_1) + (\phi_1^{\tau} + \varepsilon \phi_1 \phi_{\tau} + \tau \phi_1^{\tau}) \phi_1^{\tau} P''(\phi_{\tau})}{\tau \Delta_1} \\ \underline{a}_3 &= 1 \cdot \frac{(\phi_1^{\tau} + \tau \phi_1 \phi_{\tau} + \phi_{\tau}^{\tau})}{\Delta} P(\phi_1) - 1 \cdot \frac{(\phi_1^{\tau} + \tau \phi_1 \phi_{\tau} + \phi_{\tau}^{\tau})}{\Delta} P(\phi_{\tau}) \\ &- \tau \frac{(\tau \phi_1^{\tau} + 1 \cdot \phi_1 \phi_{\tau} + \tau \phi_1^{\tau}) P'(\phi_1) - \tau \frac{(\tau \phi_1^{\tau} + 1 \cdot \phi_1 \phi_{\tau} + \tau \phi_1^{\tau}) P'(\phi_{\tau})}{\Delta_1}}{\Delta_1} \\ &+ \frac{(\phi_1^{\tau} + \varepsilon \phi_1 \phi_{\tau} + \tau \phi_1^{\tau}) P''(\phi_1) - (\tau \phi_1^{\tau} + \varepsilon \phi_1 \phi_{\tau} + \phi_1^{\tau}) \phi_1^{\tau} P''(\phi_{\tau})}{\tau \Delta_1} \\ \underline{a}_4 &= -1 \Delta \frac{(\phi_1 + \phi_{\tau})}{\Delta} P(\phi_1) + 1 \Delta \frac{(\phi_1 + \phi_{\tau})}{\Delta} P(\phi_{\tau}) \\ &+ \frac{(\nu \phi_1 + \lambda \phi_{\tau}) P'(\phi_1) + \frac{(\lambda \phi_1 + \nu \phi_{\tau}) P'(\phi_{\tau})}{\Delta_1}}{\Delta_1} \\ &- \frac{(\tau \phi_1 + \tau \phi_{\tau}) P''(\phi_1) + \frac{(\tau \phi_1 + \tau \phi_{\tau}) P''(\phi_{\tau})}{\tau \Delta_1}}{\tau \Delta_1} \\ \underline{a}_5 &= \frac{\varepsilon}{\Delta} P(\phi_1) - \frac{\varepsilon}{\Delta} P(\phi_{\tau}) \\ &- \frac{\tau}{\Delta_1} P'(\phi_1) - \frac{\tau}{\Delta_1} P'(\phi_{\tau}) \\ &+ \frac{1}{\tau \Delta_1} P''(\phi_1) - \frac{1}{\tau \Delta_1} P''(\phi_{\tau}) \end{aligned} \quad (9)$$

که در این روابط

$$\begin{aligned} \Delta_0 &= -\varphi_2^5 + 5\varphi_1 \varphi_2^4 + 10\varphi_1^3 \varphi_2^2 - 5\varphi_1^4 \varphi_2 - 10\varphi_1^2 \varphi_2^3 + \varphi_1^5 \\ \Delta_1 &= \varphi_1^4 - 4\varphi_1^3 \varphi_2 + 6\varphi_1^2 \varphi_2^2 - 4\varphi_1 \varphi_2^3 + \varphi_2^4 \\ \Delta_2 &= \varphi_1^3 - 3\varphi_1^2 \varphi_2 + 3\varphi_1 \varphi_2^2 - \varphi_2^3 \end{aligned} \quad (10)$$

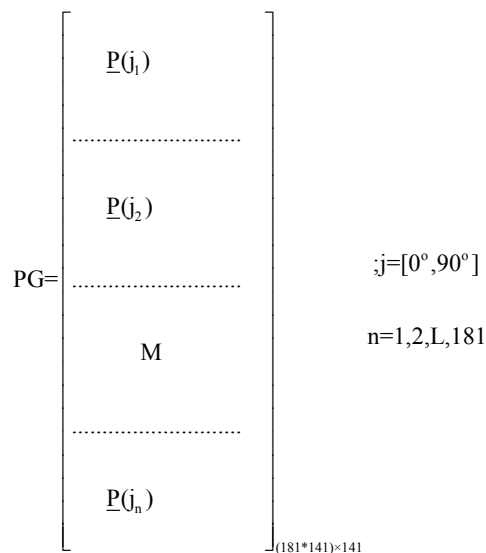
ماتریس چندجمله‌ای‌های لژاندر در هر  $\varphi$  دلخواه از بازه  $[\varphi_1, \varphi_2]$  از رابطه (۱۱) محاسبه می‌شود.

$$P(\varphi) \cong \underline{a}_0 + \underline{a}_1 \varphi + \underline{a}_2 \varphi^2 + \dots + \underline{a}_5 \varphi^5$$

(۱۱)

۵ تولید شبکه نقاط معلوم

برای تقریب هر تابع در هر نقطه دلخواه باید مقادیر این تابع را روی شبکه‌ای از نقاط معلوم بدانیم. به منظور تقریب توابع لژاندر نیز شبکه‌ای از ماتریس‌های لژاندر با فاصله عرض ژئودتیک  $0.5^\circ$  درجه تا  $N_{max}=140$  در بازه  $[0^\circ, 90^\circ]$  تولید شد، که این ماتریس‌ها به صورت منظم در یک ماتریس بزرگ‌تر ذخیره‌سازی شدند. با نسبت دادن یک کد مشخصه به ماتریس  $P$  مربوط به هر خاص امکان فراخوانی آن در هر قسمت برنامه فراهم آمد.



PG ماتریسی است که ۱۸۱ ماتریس  $P$  مربوط به عرض‌های متفاوت را در خود جای داده است. برای دست‌یابی به ماتریس عرض جغرافیایی زأم می‌توان از رابطه زیر استفاده کرد.

$$P(j_i) = PG(1+(j-1)*(N_{max}+1):j*(N_{max}+1),:); \quad (12)$$

گفتنی است در عرض‌های  $0^\circ$  تا  $90^\circ$  - نیازی به تولید شبکه نیست، زیرا بین چندجمله‌ای‌های لژاندر در عرض‌های مثبت و عرض‌های منفی رابطه زیر برقرار است.

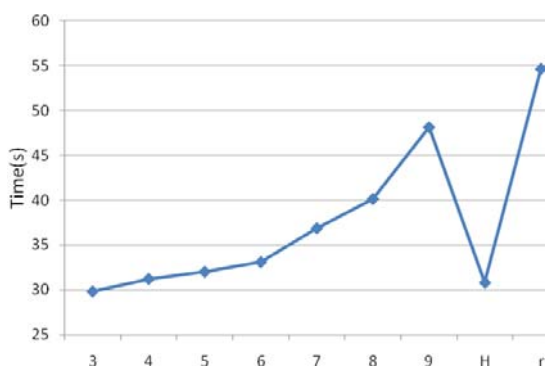
$$P_{nm}(\sin(-j)) = P_{nm}(-\sin j) = (-1)^{n-m} P_{nm}(\sin j)$$

(۱۳)

به این ترتیب برای عرض‌های منفی می‌توان  $P$  را برای عرض متناظر در نیم‌کره شمالی تقریب زد و با استفاده از رابطه (۱۳) مقدار این چندجمله‌ای‌ها را برای نیم‌کره جنوبی به دست آورد.

۶ نتایج عددی

در این قسمت نتایج حاصل از مقایسه انتگرال‌گیری عددی مدار ماهواره CHAMP (به‌منزله موردی تحقیقاتی) با شتاب واقعی و شتاب تقریبی عرضه خواهد شد. روش عددی به کار رفته در انتگرال‌گیری روش رونگ-کوتای چهار مرحله‌ای است که در بین روش‌های عددی، نزدیکی خوبی به جواب تحلیلی دارد (اسحاق و نجفی علمداری، ۲۰۰۶). به منظور یافتن چندجمله‌ای مناسب چندجمله‌ای‌های درجه ۳ تا ۹ مورد بررسی قرار گرفت. در شکل ۱، سرعت انتگرال‌گیری تقریبی یک دور ماهواره با روش‌های چندجمله‌ای درجه ۳ تا ۹ و روش هرمیت در محیط برنامه‌نویسی «مطلب» در کنار سرعت انتگرال‌گیری حقیقی آمده است.



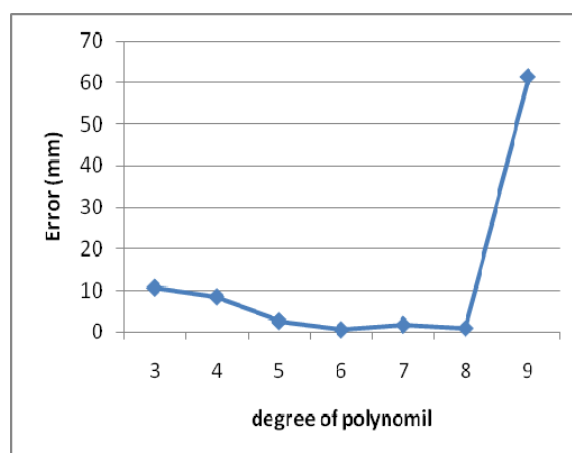
شکل ۱. سرعت انتگرال‌گیری روش‌های تقریبی و روش حقیقی.

در این نمودار اعداد نمایش داده شده در محور افقی، نشان دهنده درجه چندجمله‌ای و حروف H و r به ترتیب نشان دهنده روش هرمیت و روش انتگرال‌گیری حقیقی است. با افزایش درجه چندجمله‌ای‌ها همان‌طور که از قبل انتظار

چندجمله‌ای انتخاب و برای بررسی بیشتر، نتیجه حاصل با نتایج به دست آمده از روش هرمیت مقایسه شد. به منظور مقایسه روش چندجمله‌ای درجه ۶ و روش هرمیت در ابتدا خطای تقریب این دو روش در ماتریس چندجمله‌ای‌های لژاندر را مورد بررسی قرار می‌دهیم. از آنجا که رفتار چندجمله‌ای‌های لژاندر در عرض‌های گوناگون متفاوت است، بررسی خطای تقریب آن باید در عرض‌های متفاوت صورت گیرد. در این مقاله بررسی خطای تقریب در  $\phi_1 = 0.25^\circ$ ,  $\phi_2 = 45.25^\circ$ ,  $\phi_3 = 89.75^\circ$  صورت گرفت. این نقاط به دلیل داشتن بیشترین فاصله از نقاط نمونه در منطقه استوا، عرض‌های میانی و قطب شمال، دارای بیشترین خطا هستند که می‌توانند نمونه مناسبی از رفتار خطای تقریب چندجمله‌ای‌های لژاندر در عرض‌های گوناگون را نشان دهند.

در شکل ۳ محور ۷ تصاویر نشان‌دهنده درجه و محور X نشان‌دهنده مرتبه چندجمله‌ای‌های لژاندر و شدت رنگ تیره نشان‌دهنده بزرگی خطای تقریب ماتریس چندجمله‌ای‌های لژاندر است. تصاویر a, b, c, d خطای روش چندجمله‌ای درجه ۶ و شکل f, e, d خطای روش هرمیت به ترتیب در  $j_1 = 0.25^\circ$ ,  $j_2 = 45.25^\circ$ ,  $j_3 = 89.75^\circ$  را نشان می‌دهند. همان‌طور که در شکل ۳ نیز پیدا است شدت رنگ تیره و پراکندگی آن در تصاویر مربوط به چندجمله‌ای درجه ۶ بیشتر است. روش دیگری که به کمک آن می‌توان روش‌های تقریب چندجمله‌ای درجه ۶ و هرمیت را مقایسه کرد، میزان خطای این تقریب‌ها در انتگرال‌گیری است. در شکل (۴) اختلاف مدار واقعی و تقریبی به دست آمده از روش هرمیت و چندجمله‌ای درجه ۶ در یک نمودار مشاهده می‌شود. رنگ تیره نشان‌دهنده خطای روش هرمیت و رنگ روشن نشان‌دهنده خطای روش چندجمله‌ای درجه ۶ است.

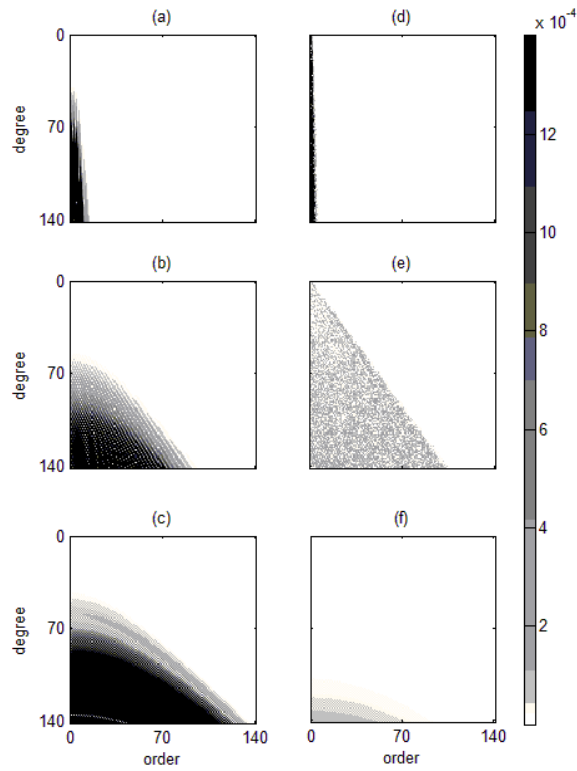
می‌رفت، سرعت انتگرال‌گیری تقریبی نیز کاهش می‌یابد. در بین روش‌های تقریب، روش چندجمله‌ای درجه ۳ و روش هرمیت سرعت مناسب‌تری دارند. علاوه بر بحث سرعت، دقت روش‌های آورده شده نیز از اهمیت خاصی برخوردار است. در شکل ۲، نمودار دقت روش‌های متفاوت تقریب برای یک روز انتگرال‌گیری آورده شده است.



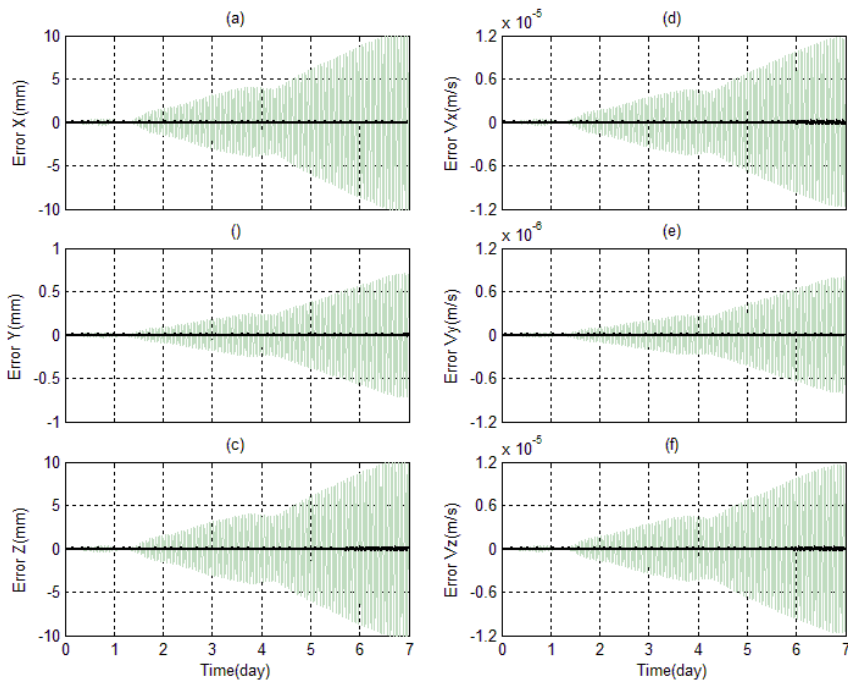
شکل ۲. بیشینه خطای ایجاد شده توسط روش تقریب چندجمله‌ای مرتبه پایین در یک روز.

در این شکل بیشینه اختلاف بین موقعیت مدار حقیقی و مدار تقریبی روش‌های چندجمله‌ای برحسب میلی‌متر نمایش داده شده است. همان‌طور که از این نمودار پیدا است با افزایش درجه چندجمله‌ای، دقت تقریب نیز افزایش می‌یابد. البته روند افزایش دقت فقط تا چندجمله‌ای درجه ۶ ادامه پیدا می‌کند و از چندجمله‌ای درجه ۷ به بعد دقت کاهش می‌یابد. در چندجمله‌ای درجه ۹، از دقت به طرز چشمگیری کاسته می‌شود که علت آن بروز نوسان‌های ناخواسته است. در واقع می‌توان چنین نتیجه گرفت که افزایش بی‌رویه درجه چندجمله‌ای علاوه بر افزایش زمان محاسبات، منجر به کاهش دقت تقریب نیز خواهد شد که دلیل آن ایجاد پدیده نوسان چندجمله‌ای‌های برازش داده شده در نقاط میانی است. بنابراین چندجمله‌ای درجه ۶ در حکم مناسب‌ترین





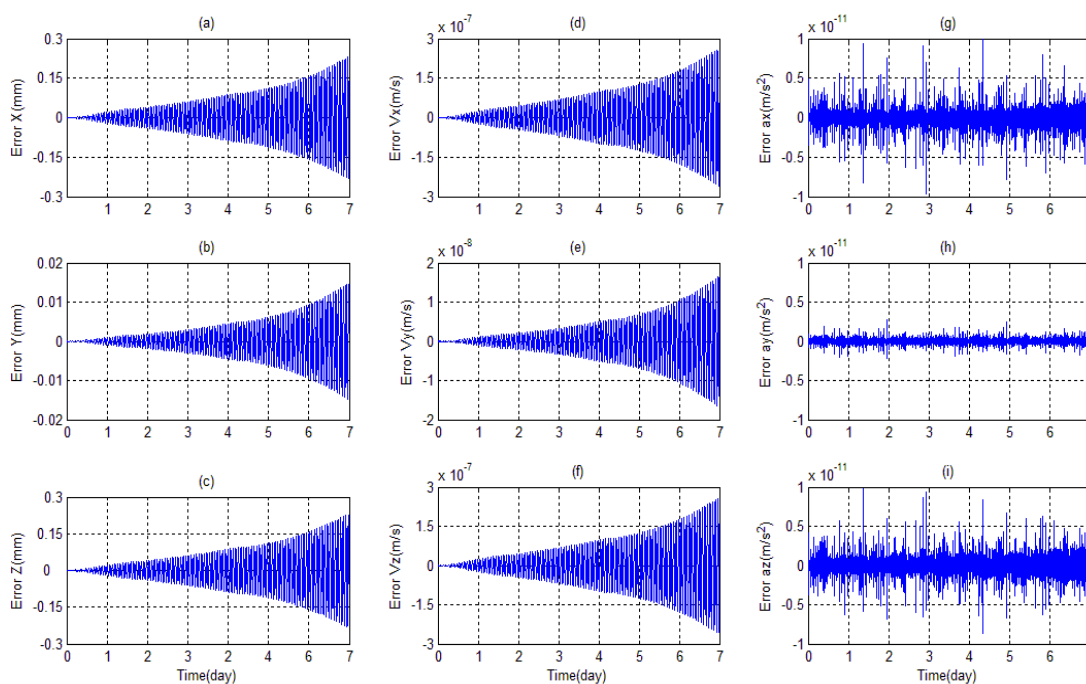
شکل ۳. خطای تقریب چندجمله‌ای‌های لژاندر در  $\varphi_1 = 0.25^\circ, \varphi_2 = 45.25^\circ, \varphi_3 = 89.75^\circ$  به روش چندجمله‌ای درجه ۶ (a, b, c) و روش هرمیت (d, e, f).



شکل ۴. اختلاف مدار واقعی و مدار تقریبی (a, b, c) اختلاف مدار و (d, e, f) اختلاف سرعت آنها به روش هرمیت (تیره) و چندجمله‌ای درجه ۶ (روش) در یک هفته (برای جزئیات به متن مراجعه شود).

سرعت مدار واقعی و مدار تقریبی روش هرمیت و نمودارهای  $i, h, g$  اختلاف شتاب مدار واقعی و مدار تقریبی روش هرمیت در جهت محورهای  $Z, Y, X$  دستگاه دکارتی لخت در یک هفته را نشان می‌دهند. در این روش، با افزایش زمان انتگرال‌گیری از یک هفته به دو هفته مشاهده می‌شود که دقت موقعیت همچنان زیر میلی‌متر باقی می‌ماند. در شکل ۶ رفتار خطای روش هرمیت در دو هفته را مشاهده می‌کنید.

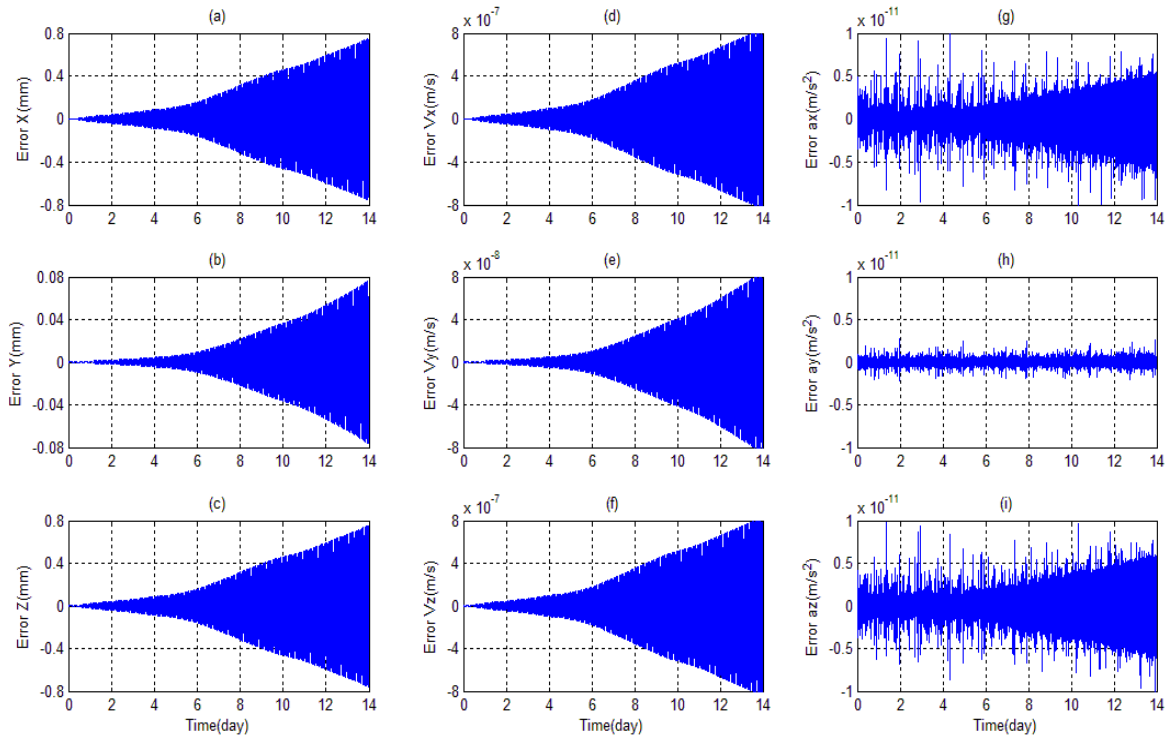
شکل ۶ مشابه به شکل ۵ است با این تفاوت که این بار انتگرال‌گیری در دو هفته برای روش هرمیت صورت گرفته است. همان‌طور که در نمودار اختلاف شتاب‌ها نیز پیدا است، با افزایش زمان، انحراف از معیار اختلاف شتاب‌های حقیقی و تقریبی به شکل چشمگیری افزایش می‌یابد؛ که این مسئله به علت وارد شدن اختلاف موقعیت‌های حقیقی و تقریبی در اختلاف شتاب‌ها است. جدول‌های ۱ و ۲ ویژگی‌های آماری اختلاف مدار حقیقی و مدار تقریبی روش هرمیت را در بازه زمانی یک هفته و دو هفته نشان می‌دهند.



شکل ۵. اختلاف موقعیت، سرعت و شتاب مدار واقعی و مدار تقریبی روش هرمیت در یک هفته (برای جزئیات به متن مراجعه شود).

در شکل ۴، نمودارهای  $c, b, a$  به ترتیب نشان‌دهنده اختلاف موقعیت مدار واقعی و مدار تقریبی روش‌های هرمیت و چندجمله‌ای درجه ۶ و نمودارهای  $f, e, d$  نشان‌دهنده اختلاف سرعت مدار واقعی و مدار تقریبی روش هرمیت و چندجمله‌ای درجه ۶ در جهت محورهای  $Z, Y, X$  دستگاه دکارتی لخت در یک هفته است. همان‌طور که انتظار می‌رفت روش هرمیت نسبت به سایر روش‌های تقریب چندجمله‌ای، نزدیکی بسیار بیشتری به مدار واقعی دارد که علت آن استفاده از مشتقات مرتبه اول و دوم در برازش چندجمله‌ای است. به منظور نمایش بهتر رفتار خطای این تقریب در شکل ۵، اختلاف مدار واقعی و مدار تقریبی روش هرمیت در یک هفته نشان داده شده است. همان‌طور که در شکل نیز پیداست نمودار مربوط روش هرمیت تقریباً چسبیده به محور  $X$  هاست.

در شکل ۵، نمودارهای  $c, b, a$  به ترتیب نشان‌دهنده اختلاف موقعیت مدار واقعی و مدار تقریبی روش هرمیت در جهت محورهای  $Z, Y, X$  دستگاه دکارتی لخت در یک هفته هستند. همچنین نمودارهای  $f, e, d$  اختلاف



شکل ۶. اختلاف موقعیت، سرعت و شتاب مدار واقعی و مدار تقریبی روش هرمیت در دو هفته.

جدول ۱. مشخصه‌های آماری خطای تقریب در موقعیت، سرعت و شتاب به کمک روش هرمیت در یک هفته.

	X(mm)	Y(mm)	Z(mm)	Vx(m/s)	Vy(m/s)	Vz(m/s)	ax(m/s <sup>2</sup> )	ay(m/s <sup>2</sup> )	az(m/s <sup>2</sup> )
<i>max</i>	0.2453	0.0159	0.2468	2.76E-07	1.78E-08	2.74E-07	1.00E-11	2.81E-12	9.83E-12
<i>mean</i>	1.5E-7	-3.6E-9	1.3E-7	-1.96E-10	2.49E-11	3.47E-10	1.66E-16	1.26E-15	5.66E-17
<i>std</i>	7.6E-5	4.5E-6	7.6E-5	8.61E-08	5.09E-09	8.58E-08	6.32E-13	1.24E-13	6.39E-13

جدول ۲. مشخصه‌های آماری خطای تقریب در موقعیت، سرعت و شتاب به کمک روش هرمیت در دو هفته.

	X(mm)	Y(mm)	Z(mm)	Vx(m/s)	Vy(m/s)	Vz(m/s)	ax(m/s <sup>2</sup> )	ay(m/s <sup>2</sup> )	az(m/s <sup>2</sup> )
<i>max</i>	0.7947	.0822	0.7988	8.93E-07	9.26E-08	8.93E-07	1.02E-11	2.81E-12	1.01E-11
<i>mean</i>	-4.3E-6	7E-10	7.08E-7	5.48E-10	-6.62E-11	-3.28E-10	-1.3E-15	1.40E-15	2.81E-16
<i>std</i>	2.7E-4	2.4E-5	2.7E-4	3.05E-07	2.72E-08	3.05E-07	1.85E-12	2.11E-13	1.89E-12

## ۸ نتیجه گیری

تبعیت از آن است و این خود ابزار مناسبی برای جلوگیری از نوسان‌های ناخواسته در نقاط میانی است.

## منابع

- Burden, R. L., Faires, J. D. and Reynolds, A. C., 1980, Numerical Analysis. PWS Publishing, Boston.
- Davis, P., 1975, Interpolation and Approximation. Dover, New York.
- Eshagh, M. and Najafi Alamdari, M., 2006, Comparison of different methods of orbit integration of a low Earth orbiting satellite. Journal of Earth and space Physics, Geophysics Institute of Tehran university publication, 32(3), 41-57.
- Hwang, C. and Lin, M. J., 1998, Fast integration of low orbiter's trajectory perturbed by the earth's non sphericity, Journal of Geodesy 72, 578-585.
- Lancaster, P. and Salkaukas, K., 1977, A survey of Curve and Surface Fitting. Unpublished manuscript, University of Calgary.
- Moritz, H., 1978, Approximation Methods in Geodesy. Ramsau, Austria.
- Reubelt, T., Austen, G. and Grafarend, E. W., 2003, Space gravity spectroscopy—determination of the Earth's gravitational field by means of Newton interpolated LEO ephemeris; case studies on dynamic (CHAMP rapid science orbits) and kinematic orbits. Adv Geosci 1, 127-135 Scales JA, Gersztenkorn.
- Robin, L., 1957, Fonctions Sphériques de Legendre et Fonctions Sphéroidales—Tome I. Gauthier, Villars, Paris.
- Rudin, W., 1973, Functional analysis, McGraw-Hill, ISBN 0-07-054236-8.
- Rummel, R. and Colombo, O. L., 1985, Gravity field determination from satellite gradiometry. Bull Géod 59(3), 233-246.
- Sharifi, M. A., 2004, Satellite gradiometry using a satellite pair. Diploma Thesis, Geodetic Institute, Faculty of Aerospace Engineering and Geodesy, University of Stuttgart.
- Seeber, G., 2003, Satellite geodesy. Walter de Gruyter, Berlin.
- Stoer, J. and Bulirsch, R., 2002, Introduction to Numerical Analysis 3rd ed. Wurzburg, Munchen.

در روش‌های مرسوم تسریع انتگرال‌گیری با تولید شبکه سه‌بعدی از نقاط معلوم و تقریب شتاب در هر نقطه دلخواه سرعت انتگرال‌گیری را افزایش می‌دهند. در این تحقیق به جای تقریب مستقیم شتاب از راه تقریب چندجمله‌ای‌های لژاندر که عامل گندی محاسبه شتاب هستند، تقریب فقط روی  $\varphi$  اعمال و برای محاسبه شتاب از مقادیر حقیقی  $I, \lambda$  استفاده شده است. در نتیجه تقریب بهتری در محاسبه شتاب به دست آمده است و قابلیت استفاده از انتگرال‌گیری تقریبی به جای انتگرال‌گیری حقیقی از سه روز به دو هفته افزایش می‌یابد. در بین روش‌های تقریب چندجمله‌ای مرتبه پایین، با برآزش چندجمله‌ای درجه ۳ تا ۹، مشاهده شد که با افزایش درجه چندجمله‌ای، دقت تقریب تا درجه ۶ افزایش و از آن به بعد کاهش می‌یابد. با ادامه افزایش درجه چندجمله‌ای تا درجه ۹ علاوه بر کاهش سرعت محاسبات، با افزایش اثر نوسان‌های ناخواسته چندجمله‌ای برآزش داده شده در نقاط میانی، دقت تقریب نیز به شکل قابل توجهی کاهش یافت. با توجه به نتایج به دست آمده، چندجمله‌ای درجه ۶ در میان روش چندجمله‌ای‌های درجه پایین مناسب‌ترین چندجمله‌ای است. در این تحقیق به منظور بهبود روش‌های تقریب چندجمله‌ای و کاهش اثر نوسان‌های ناخواسته آن، از روش هرمیت استفاده شد. در این روش به منظور تقریب چندجمله‌ای‌های لژاندر علاوه بر مقدار آنها در نقاط معلوم از مشتقات مرتبه اول و دوم این چندجمله‌ای‌ها نیز استفاده شد که براساس انتظارات قبلی، دارای دقت بسیار بهتری نسبت به روش‌های معمولی بود. علت این مسئله وجود مشتقات تابع و معلوم بودن جهت شیب و تقعر تابع در نقاط نمونه است. زیرا مشتقات مرتبه اول و دوم به صورت قیدهایی شیب و تقعر تابع را به مسئله معرفی می‌کند که چندجمله‌ای برآزش داده شده ملزم به