

مقایسه روش انتگرال انرژی و روش شتاب در بازیابی میدان جاذبه زمین

محمدعلی شریفی^{۱*}، عبدالرضا صفری^۲ و بابک امجدی پور^۳

^۱ استادیار، گروه مهندسی نقشه‌برداری، پردیس دانشکده‌های فنی، دانشگاه تهران، ایران

^۲ دانشیار، گروه مهندسی نقشه‌برداری، پردیس دانشکده‌های فنی، دانشگاه تهران، ایران

^۳ دانشجوی کارشناسی ارشد ژئودزی، گروه مهندسی نقشه‌برداری، پردیس دانشکده‌های فنی، دانشگاه تهران، ایران

(دریافت: ۸۸/۲/۲۶، پذیرش نهایی: ۹۰/۴/۱۳)

چکیده

بازیابی میدان جاذبه زمین در مقیاس جهانی (Global gravity field recovery) به صورت ضرایب هماهنگ‌های کروی با استفاده از مشاهدات ماهواره‌های اختصاصی گرانی‌سنجی، به روش‌های گوناگونی صورت می‌گیرد. هدف این مقاله مقایسه روش‌های انتگرال انرژی و شتاب در بازیابی میدان جاذبه است. به این منظور با استفاده از داده‌های شبیه‌سازی شده دینامیکی ماهواره CHAMP در میدان متأثر از مدل ژئوپتانسیلی EGM96 و با استفاده از روش‌های پیش‌گفته، ضرایب ژئوپتانسیلی تا درجه و مرتبه ۷۰ (بیشینه درجه و مرتبه‌ی قابل بازیابی با استفاده از ماهواره CHAMP) برآورد شده است. از آنجا که در بازیابی میدان جاذبه به روش شتاب امکان استفاده از مشاهدات ماهواره در هر سه راستای r ، θ و λ وجود دارد، میزان دقت بازیابی با استفاده از مشاهدات در راستاهای متفاوت به صورت جداگانه و همچنین استفاده از مشاهدات در هر سه راستا به صورت هم‌زمان با یکدیگر مقایسه شده است. نتایج حاکی از دقت بیشتر بازیابی در روش شتاب با استفاده از مشاهدات در هر سه راستا به صورت هم‌زمان نسبت به حالت‌های دیگر و همچنین نسبت به روش انتگرال انرژی است. همچنین نتایج نشانگر آن است که در روش شتاب با استفاده از مشاهده در راستای r به تنهایی نیز به نتایج بهتری نسبت به روش انتگرال انرژی خواهیم رسید. موضوع دیگری که در این مقاله مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته است، اثر تداخل سیگنال (aliasing) طول موج‌های کوتاه میدان جاذبه در برآورد ضرایب است. نتایج حاکی از حساسیت بیشتر روش شتاب در مقایسه با روش انتگرال انرژی نسبت به این نوع تداخل سیگنال است، اما با توجه به نتایج به‌دست آمده، حتی با وجود این نوع تداخل سیگنال، دقت بازیابی ضرایب با استفاده از روش شتاب نسبت به روش انتگرال انرژی بهتر است.

واژه‌های کلیدی: بازیابی میدان جاذبه، روش انتگرال انرژی، روش شتاب، ماهواره CHAMP

Comparison of the energy balance and acceleration approach for the recovery of the Earth's gravitational field

Sharifi, M. A.¹, Safari, A.² and Amjadiparvar, B.³

¹ Assistant Professor, Department of Surveying and Geomatics Engineering, Faculty of Engineering, University of Tehran, Iran

² Associate Professor, Department of Surveying and Geomatics Engineering, University College of Engineering, University of Tehran, Iran

³ M.Sc. Student of Geodesy, Department of Surveying and Geomatics Engineering, University College of Engineering,

(Received: 16 May 2009, Accepted: 4 July 2011)

Abstract

The Earth's gravity field dedicated missions, CHAMP, GRACE and GOCE have opened up a new era for the study of the Earth's gravity field. The missions measure different functionals on the Earth's gravitational potential which are represented in terms of the Stokes Coefficients or the so-called geopotential models. The mapping process of the observations into the coefficients is called recovery of the Earth's gravity field.

Different approaches have been introduced by the research institutions and universities

for recovery of the field. In principle, these methods can be categorized into two integral- and acceleration-based groups. The integral-based approach utilizes the integral form of the satellite equation of motion, i.e., Jacobi's integral whereas the acceleration method is set up based on the Newton's gravitational equation. The main difference between the methods is the scalar and vectorial form of the observation equations. Moreover, the Jacobi's integral is only need the position and velocity observations where the acceleration approach is written based on the position, velocity and acceleration measurements.

This papers aims to numerically compare the methods for the recovery of the Earth's gravity field in the GRACE mission. The vectorial form the high-low satellite-to-satellite observations in the GRACE mission is used for the recovery purposes where the observation equations in the integral approach are derived from the scalar form the observations. Our numerical investigation shows that the acceleration approach can lead to a higher accuracy if the full form of the observation is used. However, the recovery can be done with comparable accuracy to the integral approach only using the radial component of the acceleration differences in the high-low mode.

The aliasing problem is the next point that has been addressed in this paper. The recovered geopotential models are usually affected by the high-degree frequency of the gravitational field. The acceleration approach is much more sensitive to the presence of the omission error due the imperfect modeling of the high-frequency constituents. Using the numerically derived second-order time derivative of the GPS-based position observations is might be the main reason of the higher sensitivity.

Key words: GRACE, CHAMP, the Jacobi integral, Acceleration approach, Aliasing, Recovery, Geopotential Models

۱ مقدمه

مشاهدات HL-SST اطلاعات دقیقی را برای بازیابی مدار ماهواره‌های پیش‌گفته در اختیار قرار می‌دهند. بازیابی مدار ماهواره در فرایندی تحت عنوان تعیین دقیق مدار (Precise Orbit Detemination) صورت می‌پذیرد. مدار بازیابی شده ماهواره به‌طور عمده تحت تأثیر میدان گرانی زمین است، اما نیروهای غیرپایستار از جمله اثر اصطکاک جوّی و تابش‌های خورشیدی نیز روی مدار ماهواره تأثیر خواهند گذاشت که این نیروهای غیرپایستار با استفاده از شتاب‌سنج‌هایی (Accelerometer) که در ماهواره‌ها تعبیه شده‌اند، اندازه‌گیری و تصحیح می‌شوند. روش‌های گوناگونی برای مدل‌سازی میدان جاذبه زمین در مقیاس جهانی به‌صورت ضرایب هماهنگ کرووی وجود دارد. روش معمول و کلاسیک برای بازیابی ضرایب ژئوپتانسیلی، استفاده از شیوه انتگرال‌گیری عددی کلاسیک برای حل معادلات تغییرات (Variational

مشاهدات ماهواره‌های مصنوعی به‌صورت موفقیت‌آمیزی در دو دهه اخیر در مدل‌سازی میدان گرانی زمین مورد استفاده قرار گرفته است. مشاهدات تقریباً همگن و همچنین پوشش جهانی آنها، از مزیت‌های اصلی روش‌های ماهواره‌ای برای مدل‌سازی میدان گرانی زمین در مقیاس جهانی در مقایسه با روش‌های زمینی و هوایی هستند.

روش‌های ماهواره‌ای برای تعیین میدان گرانی زمین، پس از پرتاب مأموریت‌های اختصاصی گرانی‌سنجی CHAMP و GRACE که به‌ترتیب در سال‌های ۲۰۰۰ و ۲۰۰۲ پرتاب شده‌اند، حیات دوباره‌ای یافته‌اند. این دو ماهواره مجهز به گیرنده سامانه موقعیت‌یابی جهانی (GPS) هستند که مشاهدات HL-SST (High-Low Satellite-to-Satellite Tracking) را تأمین می‌کنند.

در این مقاله علاوه بر موضوعات مطرح شده در دیتمار و همکاران (۲۰۰۴)، میزان دقت بازیابی ضرایب در روش شتاب با استفاده از مشاهدات در راستاهای گوناگون در دستگاه مختصات کروی محلی ماهواره (Local Spherical Coordinate System (LSCS) (کلر و شریفی، ۲۰۰۵) بررسی و نتایج به دست آمده از روش شتاب در حالت های گوناگون با روش انتگرال انرژی مقایسه شده است. همچنین میزان اثر تداخل سیگنال طول موج های کوتاه میدان جاذبه در برآورد ضرایب در حالت های گوناگون بررسی شده و مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته است.

ماهواره آلمانی CHAMP در ژوئیه ۲۰۰۰ از سوی سازمان GFZ به فضا پرتاب شد. این ماهواره مجهز به گیرنده سامانه موقعیت یاب جهانی ۱۶ کاناله و دو بسامدی است. همچنین برای اندازه گیری نیروهای غیرجاذبی مؤثر بر ماهواره (برای مثال اثر اصطکاک جو و تابش های خورشیدی)، از یک شتابسنج سه محوری و star tracker در ماهواره استفاده شده است. مفهوم HL-SST اولین بار با پرتاب این ماهواره به واقعیت پیوست. با استفاده از مشاهدات این ماهواره اطلاعات بسیار ارزشمندی برای بازیابی طول موج های بلند و متوسط میدان جاذبه (ضرایب هماهنگ کروی با درجه و مرتبه کوچک تر از ۷۰) قابل دستیابی است (شریفی، ۲۰۰۴).

با توجه به مطالب بالا، به منظور دستیابی به هدف اصلی مقاله یعنی مقایسه روش انتگرال انرژی و شتاب، در قسمت ۲ و ۳ به ترتیب روش های انتگرال انرژی و شتاب در بازیابی میدان جاذبه همراه با روابط ریاضی مربوط آورده شده است. نحوه بنا کردن دستگاه معادلات مربوط در هر کدام از روش ها برای برآورد ضرایب با استفاده از روش کمترین مربعات در قسمت ۴ بیان شده است. در قسمت ۵ نتایج عددی حاصل از به کارگیری روش های پیش گفته با استفاده از مشاهدات شبیه سازی شده دینامیکی ماهواره

(equations) است. یکی از مشکلات این روش کلاسیک، غیرخطی بودن مدل آن است (دیتمار و همکاران، ۲۰۰۴). بنابراین در سال های اخیر روش های معادلی برای بازیابی ضرایب ژئوپتانسیلی عرضه شده است که فرایند بازیابی را به دو مرحله جدا از هم تقسیم می کنند. مرحله اول تعیین دقیق مدار ماهواره با استفاده از مشاهدات سامانه موقعیت یابی جهانی تعبیه شده در ماهواره است. در این مرحله از روش های تعیین مدار دقیق Kinematic و یا Reduced Dynamic استفاده می شود (ویسر و همکاران، ۲۰۰۰). در مرحله دوم با استفاده از مدار تعیین شده در مرحله قبل، ضرایب ژئوپتانسیلی بازیابی می شوند (دیتمار و همکاران، ۲۰۰۴). به منظور بازیابی ضرایب ژئوپتانسیلی در مرحله دوم روش های متفاوتی وجود دارد. یکی از این روش ها روش انتگرال انرژی است که براساس قانون بقای انرژی بنا شده است. در این روش با استفاده از مدار تعیین شده در مرحله اول، انرژی جنبشی ماهواره در مدار محاسبه می شود. این انرژی به صورت مستقیم به پتانسیل جاذبه در نقاط مشاهداتی ماهواره ارتباط پیدا می کند. در این زمینه می توان به تحقیقات صورت گرفته از سوی اکیف (۱۹۵۷)، جکلی (۱۹۹۹)، اسنیو و همکاران (۲۰۰۲)، هان و همکاران (۲۰۰۲)، گرلاچ و همکاران (۲۰۰۳b) و هاوه و همکاران (۲۰۰۳) اشاره کرد. در روش دیگر که به روش شتاب مشهور است، با استفاده از مدار تعیین شده، شتاب ماهواره به دست می آید و سپس این شتاب با استفاده از قانون دوم نیوتن به میدان جاذبه زمین ارتباط پیدا می کند. در این زمینه نیز می توان به تحقیقات صورت گرفته از سوی شفر (۲۰۰۱)، رویل و همکاران (۲۰۰۳a,b) و دیتمار و همکاران (۲۰۰۴) اشاره کرد.

هدف این مقاله مقایسه روش انتگرال انرژی و روش شتاب در بازیابی ضرایب ژئوپتانسیلی با استفاده از مشاهدات HL-SST ماهواره CHAMP است. دیتمار و همکاران (۲۰۰۴) مقایسه نسبتاً مشابهی را عملی ساختند اما

مختصات لخت، شتاب سینماتیک $\ddot{\mathbf{r}}^i$ یک جسم به جرم m که نیروهای پایستار $\mathbf{F}_{conservative}$ و غیر پایستار $\mathbf{F}_{non-conservative}$ روی آن عمل می‌کنند، به صورت زیر بیان می‌شود (چن، ۲۰۰۷):

$$\ddot{\mathbf{r}}^i = \frac{\mathbf{F}_{conservative} + \mathbf{F}_{non-conservative}}{m} \quad (1)$$

$$= \mathbf{g}^i + \mathbf{f}^i$$

که در رابطه بالا $\mathbf{g}^i$ بردار شتاب جاذبه ناشی از نیروهای پایستار $\mathbf{F}_{conservative}$ (عمدتاً نیروی ناشی از زمین) و $\mathbf{f}^i$ بردار شتاب غیرپایستار ناشی از نیروهای غیرپایستار $\mathbf{F}_{non-conservative}$ مؤثر بر حرکت ماهواره مانند اصطکاک جو، فشار تابش‌های خورشیدی و نیروهای حرارتی است. در روابط این مقاله، بالاوند i بیان‌کننده دستگاه مختصات زمین‌مرکز لخت (ECI (Earth-Centered Inertial)) است یعنی کمیت‌های بالاوند i در دستگاه مختصات لخت بیان شده‌اند.

پتانسیل جاذبه V برحسب بردار سرعت ماهواره $\dot{\mathbf{r}}^i = (\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z})$ و نیروهای غیرپایستار $\mathbf{f}^i$ با رابطه زیر بیان می‌شود (هان، ۲۰۰۳b):

$$V(\mathbf{r}^i(t), t) = \frac{1}{2} |\dot{\mathbf{r}}^i|^2 - \int_{t_0}^t \dot{\mathbf{r}}^i \cdot \mathbf{f}^i dt \quad (2)$$

$$+ \int_{t_0}^t \frac{\partial V(\mathbf{r}^i(t), t)}{\partial t} dt - C$$

که در رابطه بالا پتانسیل جاذبه V تابعی از بردار موقعیت $\mathbf{r}^i = (x \ y \ z)$ و زمان t است. عبارت اول در سمت راست معادله بالا انرژی جنبشی و عبارت دوم بیان‌کننده اتلاف انرژی است. عبارت سوم نشان‌دهنده تغییرات زمانی پتانسیل جاذبه در دستگاه مختصات لخت و C ثابت انرژی دستگاه است.

برای به دست آوردن رابطه (۲) ابتدا طرفین رابطه (۱) در بردار سرعت $\dot{\mathbf{r}}^i$ ضرب داخلی می‌شود:

$$\dot{\mathbf{r}}^i \cdot \ddot{\mathbf{r}}^i = \dot{\mathbf{r}}^i \cdot \mathbf{g}^i + \dot{\mathbf{r}}^i \cdot \mathbf{f}^i \quad (3)$$

CHAMP آورده شده است. در پایان، قسمت ۶ به بیان خلاصه‌ای از دستاوردها، نتیجه‌گیری و پیشنهادات برای تحقیقات آینده اختصاص داده شده است.

۲ روش انتگرال انرژی در بازیابی میدان جاذبه زمین در مقیاس جهانی با استفاده از مشاهدات HL-SST ماهواره CHAMP

روش انتگرال انرژی بر پایه قانون بقای انرژی بنا شده است. قانون بقای انرژی در فیزیک به صورت زیر بیان می‌شود: انرژی کل در یک دستگاه بسته ثابت باقی می‌ماند. البته این انرژی می‌تواند از یک حالت به حالت دیگر تبدیل شود. مثلاً اصطکاک باعث می‌شود که انرژی جنبشی به انرژی گرمایی تبدیل شود. در مورد یک ماهواره که در حال گردش به دور زمین است، انرژی جنبشی به سرعت گردش ماهواره به دور زمین و انرژی پتانسیل به توزیع جرم زمین و فاصله میان ماهواره و زمین بستگی دارد. روش انتگرال انرژی مدت‌های زیادی است که برای بازیابی میدان جاذبه زمین مورد استفاده قرار گرفته است. اگر بخواهیم به طور دقیق‌تر صحبت کنیم، این روش از شروع دوره ماهواره‌ها (اکیف، ۱۹۵۷) مورد استفاده قرار گرفته است. ساده بودن، مزیت اصلی این روش است، چرا که اگر بخواهیم میدان جاذبه را به صورت سری هماهنگ‌های کروی بیان کنیم، با استفاده از این روش انرژی پتانسیل به صورت مستقیم و با استفاده از یک رابطه خطی به مجهولات که همان ضرایب ژئوپتانسیلی هستند، ارتباط پیدا می‌کند، درحالی‌که در روش کلاسیک، مسئله بازیابی ضرایب ژئوپتانسیلی با مسئله تعیین مدار ترکیب می‌شود و برای رسیدن به جواب، نیاز به تکرار خواهیم داشت. از طرف دیگر عیب اصلی روش انتگرال انرژی، حساسیت بسیار زیاد آن به خطاهای مدار ماهواره است (چن، ۲۰۰۷).

با توجه به قانون دوم حرکت نیوتن، در یک دستگاه

حال حرکت است و خود این دستگاه مختصات نیز در حال گردش است، لازم است که عبارت‌های مربوط به شتاب گریز از مرکز (Centrifugal) و کریولیس (Coriolis) نیز مورد توجه قرار گیرند. ویسر و همکاران (۲۰۰۳) و هان (۲۰۰۳b) جزئیات مربوط را بیان کرده‌اند. در نهایت معادله انتگرالی (۲) در دستگاه مختصات ECEF به صورت زیر خواهد بود:

$$V(\mathbf{r}^e(t), t) = \frac{1}{2} |\dot{\mathbf{r}}^e|^2 - \int_{t_0}^t \dot{\mathbf{r}}^e \cdot \mathbf{f}^e dt - \frac{1}{2} (\omega_{ie}^e \times \mathbf{r}^e)^2 - C \quad (9)$$

در رابطه بالا $\mathbf{r}^e$ و $\dot{\mathbf{r}}^e$ به ترتیب بردارهای موقعیت و سرعت در دستگاه مختصات ECEF هستند، $\mathbf{f}^e$ شتاب غیرایستار است که در دستگاه مختصات ECEF بیان شده است و ω_{ie}^e سرعت زاویه‌ای دستگاه مختصات در حال گردش ECEF نسبت به دستگاه مختصات لخت است که در دستگاه مختصات ECEF بیان شده است. اگر از تغییرات سرعت دوران زمین صرف نظر شود خواهیم داشت (هان، ۲۰۰۳ و چن، ۲۰۰۷):

$$V(\mathbf{r}^e(t), t) = \frac{1}{2} |\dot{\mathbf{r}}^e|^2 - \int_{t_0}^t \dot{\mathbf{r}}^e \cdot \mathbf{f}^e dt - \frac{1}{2} \omega_e^2 \left((x^e)^2 + (y^e)^2 \right) - C \quad (10)$$

محققان گوناگونی به منظور بازیابی میدان جاذبه زمین در مقیاس جهانی از روابط مربوط به انتگرال انرژی در هر دو دستگاه مختصات ECI و ECEF استفاده کرده‌اند در این مقاله از رابطه (۱۰) به صورت زیر در محاسبات عددی استفاده خواهیم کرد:

$$V(\mathbf{r}^e(t), t) + C = \frac{1}{2} |\dot{\mathbf{r}}^e|^2 - \int_{t_0}^t \dot{\mathbf{r}}^e \cdot \mathbf{f}^e dt - \frac{1}{2} \omega_e^2 \left((x^e)^2 + (y^e)^2 \right) \quad (11)$$

در این معادله مجهولات که عبارت‌اند از ضرایب ژئوپتانسیلی $\bar{C}_{nm}$ و $\bar{S}_{nm}$ و ثابت انرژی دستگاه C در

سپس شتاب جاذبه با گرادیان پتانسیل مربوط به خود جایگزین می‌شود، به صورت زیر:

$$\mathbf{g}^i(\mathbf{r}^i(t), t) = \nabla_{\mathbf{r}^i} V(\mathbf{r}^i(t), t) = \frac{\partial V(\mathbf{r}^i(t), t)}{\partial \mathbf{r}^i} \quad (4)$$

با توجه به اینکه پتانسیل جاذبه V تابعی از بردار موقعیت ماهواره $\mathbf{r}^i$ و زمان t است، بنابراین داریم:

$$\frac{dV(\mathbf{r}^i(t), t)}{dt} = \frac{\partial V(\mathbf{r}^i(t), t)}{\partial \mathbf{r}^i} \frac{d\mathbf{r}^i}{dt} + \frac{\partial V(\mathbf{r}^i(t), t)}{\partial t} \quad (5)$$

پس از جایگزینی روابط (۴) و (۵) در رابطه (۳) و همچنین با توجه به اینکه:

$$\dot{\mathbf{r}}^i \cdot \dot{\mathbf{r}}^i = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} |\dot{\mathbf{r}}^i|^2 \right) \quad (6)$$

خواهیم داشت:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} |\dot{\mathbf{r}}^i|^2 \right) = \frac{dV(\mathbf{r}^i(t), t)}{dt} - \frac{\partial V(\mathbf{r}^i(t), t)}{\partial t} + \dot{\mathbf{r}}^i \cdot \mathbf{f}^i \quad (7)$$

در نهایت با انتگرال گیری از رابطه (۷) نسبت به زمان t به رابطه (۲) خواهیم رسید.

اگر فرض کنیم سرعت دوران زمین ثابت است، پس از مقداری ساده سازی معادلات، رابطه زیر به دست می‌آید (جکلی، ۱۹۹۹):

$$V = \frac{1}{2} |\dot{\mathbf{r}}^i|^2 - \int_{t_0}^t \dot{\mathbf{r}}^i \cdot \mathbf{f} dt - \omega_e (x\dot{y} - y\dot{x}) - C \quad (8)$$

معادله انتگرالی پیش گفته در رابطه (۲) را می‌توان در دستگاه مختصات در حال گردش با زمین مانند دستگاه مختصات زمین مرکز زمین ثابت ECEF(Earth-Centered Earth-Fixed) بازنویسی کرد. در این حالت با توجه اینکه ماهواره نسبت به دستگاه مختصات ECEF در

۳ روش شتاب در بازیابی میدان جاذبه زمین در مقیاس جهانی با استفاده از مشاهدات HL-SST ماهواره CHAMP

این روش به طور مستقیم بر پایه قانون دوم حرکت نیوتن بنا شده است. در این روش شتاب جاذبه (گرادیان پتانسیل جاذبه) ماهواره در طول مدار با استفاده از روش‌های مشتق‌گیری عددی (Numerical differentiation) محاسبه می‌شود. روش شتاب به منظور بازیابی میدان جاذبه در مقیاس جهانی از سوی محققان گوناگون مورد استفاده قرار گرفته است که می‌توان به تحقیقات صورت گرفته رویبیل و همکاران (۲۰۰۳)، دیتمار و همکاران (۲۰۰۴) و میر-گور و همکاران (۲۰۰۵) اشاره کرد. نکته مهمی که در استفاده از روش شتاب در بازیابی میدان جاذبه وجود دارد، نوبه موجود در شتاب‌های محاسبه شده است، چرا که مشتق‌گیری عددی از داده‌های نوبه‌ای باعث افزایش نوبه خواهد شد. برای رفع مشکل نوبه برای مثال دیتمار و همکاران (۲۰۰۴) اعمال یک فیلتر میانگین را در مرحله پیش‌پردازش داده‌های ماهواره پیشنهاد کرده‌اند و توانسته‌اند با روش پیشنهادی به دقت زیادی در برآورد ضرایب برسند. همچنین با توجه به ویسر و همکاران (۲۰۰۲) امکان بهبود دقت مؤلفه‌های سرعت در یک فرایند off-line وجود دارد. در این مقاله با توجه به اینکه از داده‌های شبیه‌سازی شده استفاده شده است، برای واقعی شدن مسئله مؤلفه‌های سرعت مدار با توجه به ویسر و همکاران (۲۰۰۲) به نوبه گاوسی تصادفی با انحراف معیار 0.018 mm/s آغشته شده است و سپس مؤلفه‌های شتاب ماهواره به منظور محاسبات با استفاده از روش مشتق‌گیری عددی نیوتن ۹ نقطه‌ای محاسبه شده است.

نیروهای وارد بر یک ماهواره ارتفاع پایین که در حال گردش به دور زمین است را می‌توان به دو دسته نیروهای پایستار و غیرپایستار تقسیم کرد. نیروهای پایستار ناشی از

سمت چپ معادله قرار دارند و مشاهدات که شامل بردارهای موقعیت و سرعت ماهواره در دستگاه ECEF و همچنین نیروهای غیرپایستار f^e مشاهده شده (با شتاب‌سنج‌های ماهواره) و یا مدل شده، در سمت راست معادله قرار دارند. رابطه بالا می‌تواند شامل عبارت‌های اضافی مانند اغتشاش‌های ناشی از جسم سوم (3rd-body perturbations) از جمله ماه، خورشید و سیارات دیگر، اثرات ناشی از کشند (جزر و مد) و مانند آن باشد. همچنین عبارت‌های مربوط به اُریبی (بایاس) داده‌های شتاب‌سنج ماهواره‌ها و ضریب مقیاس نیز می‌تواند در نظر گرفته شود. وارد کردن و ارزیابی این عبارت‌های اضافی در بازیابی کامل و دقیق میدان جاذبه با استفاده از داده‌های واقعی ماهواره الزامی است، اما هدف این مقاله بازیابی میدان جاذبه با استفاده از داده‌های واقعی نیست، بلکه هدف مقایسه‌ای عددی بین روش انتگرال انرژی و شتاب است و به منظور عملی شدن این مقایسه و نتیجه‌گیری، از داده‌های شبیه‌سازی شده دینامیکی ماهواره CHAMP که فقط تحت تأثیر مدل EGM96 است، استفاده شده است (با استفاده از این داده‌های شبیه‌سازی شده جواب درست دستگاه یعنی مدل EGM96 در دسترس است و می‌توان به راحتی در مورد کارایی این دو روش نسبت به هم در بازیابی ضرایب تصمیم‌گیری کرد). در نتیجه به اضافه کردن عبارت‌های ذکر شده نیازی نیست و علاوه بر آن عبارت مربوط به اثرات نیروهای غیرپایستار f^e نیز از محاسبات حذف می‌شود.

بنابراین تا این مرحله و با استفاده از روابط پیش گفته پتانسیل جاذبه را در نقاط مشاهداتی ماهواره به دست آورده‌ایم. مرحله بعدی به منظور بازیابی ضرایب ژئوپتانسیلی حل مسئله معکوس ژئودزی ماهواره‌ای یعنی برآورد ضرایب ژئوپتانسیلی است که در قسمت ۴ به این موضوع پرداخته شده است.

دارند. در نظر گرفتن کلیه عبارت‌های رابطه بالا برای بازیابی کامل و دقیق میدان جاذبه با استفاده از داده‌های واقعی ماهواره الزامی است، اما همان‌طور که در قسمت قبل نیز بیان شد، هدف از این مقاله بازیابی میدان جاذبه با استفاده از داده‌های واقعی نیست، بلکه هدف مقایسه‌ای عددی بین روش انتگرال انرژی و شتاب است و برای عملی شدن این مقایسه و نتیجه‌گیری از داده‌های شبیه‌سازی شده دینامیکی ماهواره CHAMP که فقط تحت تأثیر مدل EGM96 است، استفاده شده است. بنابراین عبارت‌های $\mathbf{g}^{N\ body}$ ، $\mathbf{g}^{tides}$ ، $\mathbf{g}^{others}$ و $\mathbf{a}$ از محاسبات حذف می‌شوند.

بنابراین تا این مرحله و با استفاده از روابط پیش گفته، شتاب جاذبه در نقاط مشاهداتی ماهواره به‌دست آمده است. مرحله بعدی در بازیابی ضرایب ژئوپتانسیلی، حل مسئله معکوس ژئودزی ماهواره‌ای یعنی برآورد ضرایب ژئوپتانسیلی است که در قسمت ۴ به این موضوع پرداخته شده است.

۴ آنالیز هماهنگ کروی در مقیاس جهانی با استفاده

از روش کمترین مربعات

هدف از این قسمت برآورد ضرایب ژئوپتانسیلی به روش کمترین مربعات با استفاده از مشاهدات تولید شده در روش انتگرال انرژی و شتاب است. پتانسیل جاذبه زمین براساس ضرایب هماهنگ‌های کروی که مجهولات مسئله‌اند، به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$V(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R}{r} \right)^{n+1} \bar{P}_{nm}(\cos \theta) \times (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \quad (14)$$

پارامترهای پیش گفته در رابطه بالا عبارت‌اند از:

GM : حاصل ضرب ثابت جهانی جاذبه در جرم زمین

R : شعاع میانگین زمین

شتاب‌های حاصل از اجسام آسمانی مانند ماه، خورشید و همچنین زمین، و شتاب‌های ناشی از کشند است. شتاب‌سنج‌های تعبیه شده در ماهواره قادر نخواهند بود که این شتاب‌ها را اندازه‌گیری کنند. بنابراین باید اثرات نیروهای پایستار اضافه بر نیروی پایستار ناشی از میدان جاذبه زمین از روی مشاهدات با استفاده از مدل‌های موجود حذف شوند.

نیروهای ناپایستار ناشی از شتاب‌های حاصل از اصطکاک جوئی، فشار تابش‌های خورشیدی و مانند آن (سیبر، ۲۰۰۳) هستند. این نیروها با شتاب‌سنج‌های تعبیه شده در ماهواره اندازه‌گیری می‌شوند و یا با مدل‌های موجود از روی مشاهدات تصحیح می‌شوند. بنابر این مدل مناسب و جامع برای بیان نیروهای وارد بر ماهواره را می‌توان به‌صورت زیر نشان داد:

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{g}^{mean\ Earth} + \mathbf{g}^{N\ body} + \mathbf{g}^{tides} + \mathbf{g}^{others} + \mathbf{a} \quad (12)$$

در رابطه بالا پارامترها عبارت‌اند از:

$\mathbf{g}^{N\ body}$: شتاب جاذبه ناشی از ماه و خورشید و دیگر

اجسام آسمانی

$\mathbf{g}^{tides}$: شتاب جاذبه ناشی از کشند

$\mathbf{g}^{others}$: شتاب جاذبه ناشی از دیگر اثرات وابسته به زمان

مانند اثرات جوئی و اثرات اقیانوسی باروپروتیک نسبت به جو

$\mathbf{a}$: شتاب ناشی از نیروهای غیرپایستار

با بازآرایی معادله بالا خواهیم داشت:

$$\mathbf{g}^{mean\ Earth} = \ddot{\mathbf{r}} - \mathbf{g}^{N\ body} - \mathbf{g}^{tides} - \mathbf{g}^{others} - \mathbf{a} \quad (13)$$

به‌منظور بازیابی میدان جاذبه زمین در مقیاس جهانی

با استفاده از روش شتاب و برآورد ضرایب ژئوپتانسیلی از

رابطه بالا استفاده می‌شود. در این معادله مجهولات که

عبارت‌اند از ضرایب ژئوپتانسیلی $\bar{C}_{nm}$ و $\bar{S}_{nm}$ در سمت

چپ معادله و مشاهدات در سمت راست معادله قرار

ماتریس‌های دوران ناشی از تقدیم، ناوش (رقص محوری)، دوران زمین و حرکت قطب هستند. $\mathbf{R}_3(-\lambda)$ ماتریس دوران دست راستی حول محور سوم به اندازه $-\lambda$ و $\mathbf{R}_2\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$ ماتریس دوران دست راستی حول محور دوم به اندازه $\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$ است.

نکته‌ای که در اینجا قابل ذکر است، اینکه به جای محاسبه شتاب در دستگاه مختصات n می‌توان بردار شتاب را در دستگاه مختصات کروی محلی ماهواره LSCS (کلر و شریفی، ۲۰۰۵) به صورت زیر محاسبه کرد:

$$\mathbf{g}^{LSCS} = \begin{bmatrix} g_r \\ g_\theta \\ g_\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \\ -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \lambda} \end{bmatrix} \quad (22)$$

سپس باید به منظور ایجاد ارتباط بین دستگاه مختصات LSCS و دستگاه مختصات زمین ثابت از ماتریس انتقال زیر استفاده کرد (کلر و شریفی، ۲۰۰۵):

$$\mathbf{C}_{LSCS}^e = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \lambda & -\cos \theta \cos \lambda & -\sin \lambda \\ \sin \theta \sin \lambda & -\cos \theta \sin \lambda & \cos \lambda \\ \cos \theta & \sin \theta & 0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

در این مقاله از مؤلفه‌های بردار شتاب در دستگاه مختصات LSCS برای بنا کردن دستگاه معادلات مربوط و بازیابی ضرایب استفاده شده است.

با توجه به روش معمول در ژئودزی کمیت‌ها به دو قسمت مبنا (Refrence) و افزایشی (Incremental) تقسیم می‌شوند. با فرض یک میدان مبنای مشخص مانند GRS80 کمیت‌های افزایشی از روابط زیر به دست می‌آیند:

$$V^{Incremental}(r, \theta, \lambda) = V(r, \theta, \lambda) - V^{Refrence}(r, \theta, \lambda) \quad (24)$$

$$g_r^{Incremental}(r, \theta, \lambda) = g_r(r, \theta, \lambda) - g_r^{Refrence}(r, \theta, \lambda) \quad (25)$$

$$g_\theta^{Incremental}(r, \theta, \lambda) = g_\theta(r, \theta, \lambda) - g_\theta^{Refrence}(r, \theta, \lambda) \quad (26)$$

(r, θ, λ) : مختصات کروی نقطه محاسباتی (نقطه مشاهداتی ماهواره)

$\bar{P}_{nm}$: توابع نرمال شده لژاندر
 $\bar{S}_{nm}$ و $\bar{C}_{nm}$: ضرایب هماهنگ کروی نرمال شده از درجه n و مرتبه m
 با مشتق‌گیری از رابطه بالا نسبت به r ، θ و λ داریم (چن، ۲۰۰۷):

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{GM}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \times \bar{P}'_{nm}(\cos \theta) \sin \theta \quad (15)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \lambda} = \frac{GM}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^n m (-\bar{C}_{nm} \sin m\lambda + \bar{S}_{nm} \cos m\lambda) \times \bar{P}_{nm}(\cos \theta) \quad (16)$$

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{GM}{R^2} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \left(\frac{R}{r}\right)^{n+2} \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \times \bar{P}_{nm}(\cos \theta) \quad (17)$$

برای محاسبه شتاب در دستگاه مختصات n (north-east-west) از رابطه زیر استفاده می‌کنیم (چن، ۲۰۰۷):

$$\mathbf{g}^n = \begin{bmatrix} g_N \\ g_E \\ g_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \lambda} \\ -\frac{\partial V}{\partial r} \end{bmatrix} \quad (18)$$

سپس با انتقال بردار شتاب جاذبه از دستگاه مختصات n به دستگاه مختصات لخت داریم (چن، ۲۰۰۷):

$$\mathbf{g}^i = \mathbf{C}_n^i \mathbf{g}^n = \mathbf{C}_e^i \mathbf{C}_n^e \mathbf{g}^n \quad (19)$$

$$\mathbf{C}_e^i = \mathbf{PNRW} \quad (20)$$

$$\mathbf{C}_n^e = \mathbf{R}_3(-\lambda) \mathbf{R}_2\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \quad (21)$$

$$= \begin{bmatrix} -\sin \theta \cos \lambda & -\sin \lambda & -\cos \theta \cos \lambda \\ -\sin \theta \sin \lambda & \cos \lambda & -\cos \theta \sin \lambda \\ \cos \theta & 0 & -\sin \theta \end{bmatrix}$$

که در رابطه بالا $\mathbf{g}^i$ بردار شتاب جاذبه در دستگاه مختصات لخت است و $\mathbf{g}^n$ بردار شتاب جاذبه در دستگاه مختصات n است. $\mathbf{P}$ ، $\mathbf{N}$ ، $\mathbf{R}$ و $\mathbf{W}$ به ترتیب

کروی به صورت زیر به دست می آید:

$$V^{\text{Incremental}}(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{R} \sum_{n=2}^{N_{\max}} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \bar{P}_{nm}(\cos \theta) \times (\Delta \bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \Delta \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \quad (32)$$

$$g_r^{\text{Incremental}}(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{rR} \sum_{n=2}^{N_{\max}} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \times \sum_{m=0}^n (\Delta \bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \Delta \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}'_{nm}(\cos \theta) \sin \theta \quad (33)$$

$$g_{\theta}^{\text{Incremental}}(r, \theta, \lambda) = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{GM}{R} \sum_{n=2}^{N_{\max}} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \times \sum_{m=0}^n m (-\Delta \bar{C}_{nm} \sin m\lambda + \Delta \bar{S}_{nm} \cos m\lambda) \bar{P}_{nm}(\cos \theta) \quad (34)$$

$$g_{\lambda}^{\text{Incremental}}(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{R^2} \sum_{n=2}^{N_{\max}} (n+1) \left(\frac{R}{r}\right)^{n+2} \times \sum_{m=0}^n (\Delta \bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \Delta \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\cos \theta) \quad (35)$$

که در روابط بالا داریم:

$$\Delta \bar{C}_{nm} = \begin{cases} \bar{C}_{nm} - \bar{C}_{n0}^{\text{GRS80}} & m=0, \quad n=2, 4, 6, 8, 10 \\ \bar{C}_{nm} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (36)$$

$$\Delta \bar{S}_{nm} = \bar{S}_{nm} \quad (37)$$

با توجه به روابط بالا اگر یک سری زمانی با P نقطه مشاهداتی داشته باشیم، می توانیم به ازای هر نقطه مشاهداتی در روش انتگرال انرژی با استفاده از رابطه (۳۲) یک معادله مشاهده خطی و در روش شتاب با استفاده از روابط (۳۳)، (۳۴) و (۳۵) سه معادله مشاهده خطی بنویسیم. مجهولات عبارت اند از $\Delta \bar{C}_{nm}$ و $\Delta \bar{S}_{nm}$ که با روش کمترین مربعات برآورد می شوند. با توجه به جایگزینی حد بالای بسط با بیشینه درجه و مرتبه قابل بازیابی با مشاهدات ماهواره، تعداد کل مجهولات به صورت زیر به دست می آید:

$$u = 1 + 3 + \dots + 2(N_{\max} + 1) - 1 - 4 = (N_{\max} + 1)^2 - 4 \quad (38)$$

بردار مجهولات در فرایند حل دستگاه معادلات خطی به روش کمترین مربعات، به صورت زیر چیده می شود (هان، ۲۰۰۳):

$$X = [x^0 \quad x^1 \quad \dots \quad x^{N_{\max}}]^T \quad (39)$$

$$g_{\lambda}^{\text{Incremental}}(r, \theta, \lambda) = g_{\lambda}(r, \theta, \lambda) - g_{\lambda}^{\text{Reference}}(r, \theta, \lambda) \quad (27)$$

کمیت های مبنا نیز در روابط بالا به صورت زیر محاسبه می شوند:

$$V^{\text{Reference}}(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{R} \quad (28)$$

$$\times \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \bar{P}_{n0}(\cos \theta) \bar{C}_{n0}^{\text{GRS80}} \quad (29)$$

$$g_r^{\text{Reference}}(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{rR} \quad (29)$$

$$\times \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^n \bar{P}'_{n0}(\cos \theta) \sin \theta \bar{C}_{n0}^{\text{GRS80}} \quad (30)$$

$$g_{\theta}^{\text{Reference}}(r, \theta, \lambda) = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{GM}{R} \quad (30)$$

$$\times \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^n m \bar{P}_{n0}(\cos \theta) \bar{S}_{n0}^{\text{GRS80}} \quad (31)$$

$$g_{\lambda}^{\text{Reference}}(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{R^2} \quad (31)$$

$$\times \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \left(\frac{R}{r}\right)^{n+2} \sum_{m=0}^n \bar{P}_{n0}(\cos \theta) \bar{C}_{n0}^{\text{GRS80}} \quad (32)$$

که در رابطه بالا $\bar{P}_{n0}$ چند جمله ای های نرمال شده لژاندر از درجه n هستند. میدان مبنا به صورتی تعریف می شود که وابسته به طول جغرافیایی نباشد و همچنین نسبت به صفحه استوا متقارن باشد. بنابراین برای محاسبه کمیت های مربوط به میدان مبنا، ضرایب منطقه ای زوج کافی هستند. معمولاً پنج ضریب $n=2, 4, 6, 8, 10$ برای محاسبه مقادیر مربوط کافی است (چن، ۲۰۰۷).

با قرار دادن مرکز دستگاه مختصات بر مرکز جرم زمین، ضرایب درجه ۱ یعنی $\bar{C}_{1,0}$ ، $\bar{C}_{1,1}$ و $\bar{S}_{1,1}$ تبدیل به صفر و از فهرست مجهولات حذف می شوند. ضریب $\bar{C}_{0,0}$ نیز ثابت در نظر گرفته شده و از فهرست مجهولات حذف می شود چرا که این ضریب با کمک ماهواره هایی که دارای ارتفاع بیشتری نسبت به سطح زمین هستند، بهتر بازیابی می شود. پس از جایگزینی حد بالای بسط یعنی ∞ با درجه و مرتبه بیشینه قابل بازیابی با ماهواره مورد نظر، بسط کمیت های افزایشی بر حسب ضرایب هماهنگ

که در رابطه بالا داریم:

$$x^m = [\bar{C}_{m,m} \quad \bar{C}_{m+1,m} \quad \dots \quad \bar{C}_{N_{\max},m} \quad \bar{S}_{m,m} \quad \bar{S}_{m+1,m} \quad \dots \quad \bar{S}_{N_{\max},m}] \quad (40)$$

با چیدمان مجهولات به صورت بالا، ماتریس نرمال دستگاه معادلات خطی تبدیل به یک ماتریس با خاصیت غلبه گر بلوکی-قطری (block_diagonally dominant) می شود (هان، ۲۰۰۳) که از این خاصیت ماتریس در برآورد واریانس مجهولات وقتی که تعداد مجهولات زیاد باشد (برای مثال وقتی $u > 10000$) می توان استفاده کرد (هان، ۲۰۰۳). همچنین خاصیت غلبه گر بلوکی-قطری بودن ماتریس نرمال سبب کاهش تکرارهای الگوریتم تکراری MSAA در حل دستگاه معادلات نرمال با ابعاد بزرگ می شود (صفری و همکاران، تحت بررسی). البته در این مقاله با توجه به تعداد کم مجهولات می توان معکوس ماتریس نرمال دستگاه را به صورت مستقیم محاسبه کرد و ماتریس واریانس-کواریانس مجهولات را به دست آورد و نیازی به استفاده از الگوریتم های تکراری برای حل دستگاه مربوط نیست (مگر در حالتی که به منظور کاهش اثر تداخل سیگنال درجه و مرتبه های بالا مجبور به حل یک دستگاه معادلات با ابعاد بزرگ باشیم. برای اطلاعات بیشتر به قسمت ۶ مراجعه شود).

اگر از دیدگاه ریاضی به دستگاه معادلات نگاه کنیم، دستگاه معادلات خطی بنا شده قابل حل خواهد بود اگر تعداد معادلات بیشتر از تعداد مجهولات باشد. با این وجود با توجه به نظریه نمونه برداری Shannon، بسامد نمونه برداری باید حداقل دو برابر بیشینه بسامد اندازه گیری باشد. زمانی که بسامد بیشتر از حد بسامد نایکویست (نصف بسامد نمونه برداری) باشد، تداخل سیگنال (Aliasing) رخ خواهد داد. بنابراین، تأمین کردن شرط نظریه نمونه برداری برای بازیابی کامل طیف میدان جاذبه بسیار مهم و حیاتی خواهد بود (سانسو، ۱۹۹۰ و کلر و شریفی، ۲۰۰۵). برای بازیابی ضرایب هماهنگک کروی تا

درجه و مرتبه $N_{\max}$ ، بسامد نمونه برداری را باید با افزایش طول روزهای مشاهداتی ماهواره افزایش داد (کلر و شریفی، ۲۰۰۵).

مشکل دیگری که منجر به بازیابی نشدن کامل و درست طیف میدان جاذبه با استفاده از روش کمترین مربعات خواهد شد، جایگزینی حد بالای بسط یعنی ∞ با $N_{\max}$ است. در واقع این جایگزینی باعث ایجاد نوع دیگری از تداخل سیگنال در برآورد ضرایب می شود (سانسو، ۱۹۹۰). این موضوع در قسمت نتایج عددی مورد تجزیه و تحلیل قرار خواهد گرفت.

نکته قابل ذکر دیگر این که در روش شتاب امکان استفاده از مشاهدات در هر سه راستا به صورت هم زمان به منظور برآورد ضرایب و همچنین به صورت جداگانه وجود دارد. در قسمت نتایج عددی در حالت های گوناگون برآورد ضرایب صورت گرفته و نتایج با روش انتگرال انرژی مقایسه شده و مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته است.

۵ نتایج عددی

در این قسمت برای محاسبات از مدار شبیه سازی شده دینامیکی ماهواره CHAMP که از سایت <http://www.geod.uni-bonn.de/index.html> قابل دسترسی است، استفاده شده است. شبیه سازی مدار با استفاده از روش های عددی تولید مدار (روش های انتگرال گیری عددی) صورت گرفته است. به این صورت که با استفاده از یک نقطه اولیه، مدار به صورت عددی در میدان جاذبه حاصل از یک مدل ژئوپتانسیلی تولید شده است. در شبیه سازی داده ها از مدل ژئوپتانسیلی EGM96 تا درجه و مرتبه ۳۰۰ استفاده شده است. مدار ماهواره برای دوره زمانی ۳۰ روزه با فواصل زمانی ۵ ثانیه تولید شده است. خروجی تولید مدار به صورت عددی عبارت است از بردارهای موقعیت و سرعت در دستگاه لخت که پس از

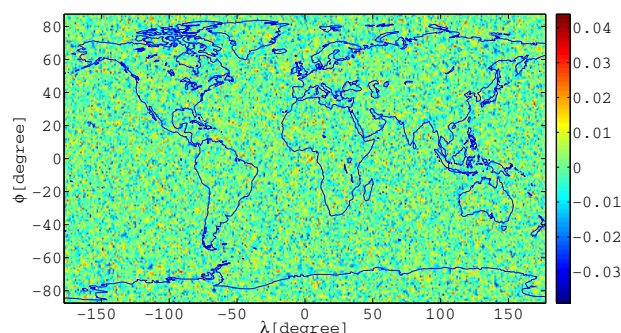
و روش شتاب مربوط به هریک از مؤلفه ها ۸۶۴۰۰ خواهد بود. از آنجا که بیشینه درجه و مرتبه قابل بازیابی از مشاهدات HL-SST ماهواره CHAMP حدود ۷۰ در نظر گرفته می شود، تعداد مجهولات برابر $4 = 5037 - (N_{\max} + 1)^2$ است.

برای واقعی شدن مسئله، با توجه به توضیحات ذکر شده در ویسر و همکاران (۲۰۰۲)، به مؤلفه های سرعت در دستگاه لخت نوفه گاوسی تصادفی با مقدار 0.018 mm/s اضافه شده است و سپس با استفاده از روش مشتق گیری عددی نیوتن ۹ نقطه ای که یکی از بهترین روش مشتق گیری است، مؤلفه های شتاب در دستگاه مختصات لخت به دست آمده است. با این کار نوفه موجود در مؤلفه های شتاب معادل نوفه موجود در مؤلفه های سرعت شده و در نتیجه می توان روش شتاب را که در آن از مؤلفه های بردار شتاب در محاسبات استفاده می شود، با روش انتگرال انرژی که در آن از مؤلفه های بردار سرعت در محاسبات استفاده می شود، مقایسه کرد. در شکل ۱ نوفه موجود در اندازه بردار سرعت ماهواره در اثر اعمال نوفه به مؤلفه های بردار سرعت و همچنین در شکل ۲ نوفه ایجاد شده در اندازه بردار شتاب ماهواره که نتیجه مشتق گیری عددی از مؤلفه های نوفه ای بردار سرعت است، نشان داده شده است:

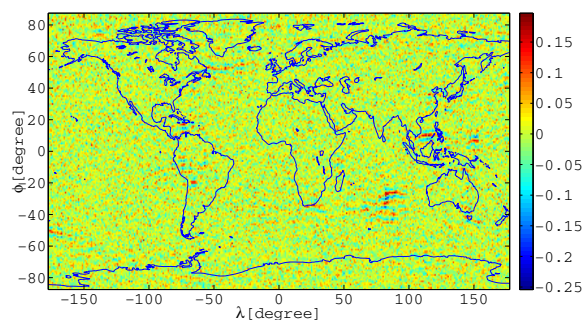
آن با استفاده از روابط و تبدیلات لازم، بردار شتاب نیز در دستگاه لخت به دست آمده است. داده های شبیه سازی شده دینامیکی ماهواره CHAMP شامل زمان برحسب تاریخ یولین (قیصری) و بردارهای موقعیت، سرعت و شتاب در دستگاه مختصات شبه لخت است. ویژگی های دستگاه مختصات شبه لخت پیش گفته، نحوه تبدیل دستگاه مختصات شبه لخت به دستگاه مختصات زمین ثابت و جزئیات بیشتر در مورد داده های شبیه سازی شده از پایگاه <http://www.geod.uni-bonn.de/englisch/apmg/lehrstuhl/simulationsszenarien/sc7/Readme.pdf> قابل دستیابی است. فرمت داده های شبیه سازی شده ماهواره CHAMP در فایل مربوط، به صورت زیر است:

$$\text{time } x \ y \ z \ \dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z} \ \ddot{x} \ \ddot{y} \ \ddot{z} \quad (41)$$

برای محاسبات، از داده های ۳۰ روز ماهواره با فاصله زمانی ۳۰ ثانیه استفاده شده است. علت استفاده از داده های ۳۰ روز ماهواره همان بحث تأمین کردن شرط نظریه نمونه برداری است که در قسمت چهارم مقاله در مورد آن صحبت شد. از طرف دیگر چون در راستای نصف النهارها پوشش کامل است، نیازی به استفاده از داده ها با فاصله زمانی ۵ ثانیه نیست (شریفی، ۲۰۰۴). بنابراین، مشاهدات با فاصله زمانی ۳۰ ثانیه در نظر گرفته شده است که با این کار تعداد معادله ها کاهش می یابد و از بار محاسباتی محاسبات بدون اینکه لطمه ای به نتایج وارد شود، کاسته می شود. در نتیجه تعداد معادلات در روش انتگرال انرژی



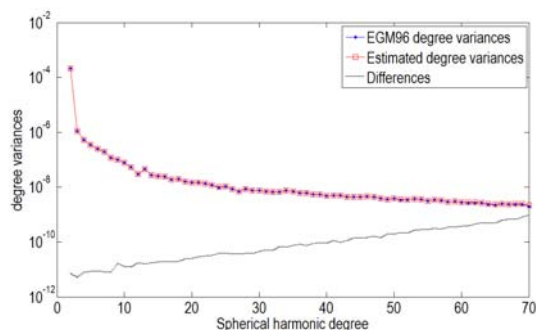
شکل ۱. نوفه موجود در اندازه بردار سرعت (Standard deviation = 0.018 mm/s).



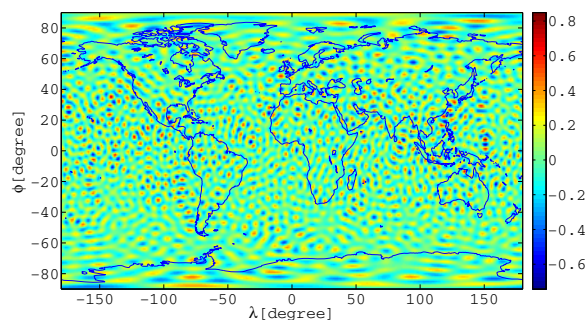
شکل ۲. نوفه ایجاد شده در اندازه بردار شتاب (Standard deviation = 0.0526 mGal).

ارتفاع ژئوئید روی یک گرید منظم $1^\circ \times 1^\circ$ در کل جهان به دست آمده است. در شکل ۳ ضرایب برآورد شده و همچنین ضرایب مدل EGM96 تا درجه و مرتبه ۷۰ به صورت degree variance و تفاوت‌های مربوط به این دو به نمایش گذاشته شده است. همچنین در شکل ۴ اختلاف ارتفاع‌های ژئوئید محاسبه شده از ضرایب مدل EGM96 تا درجه و مرتبه ۷۰ و ارتفاعات محاسبه شده از ضرایب برآورد شده به نمایش گذاشته شده است.

ابتدا با استفاده از روابط ذکر شده در قسمت‌های قبل و با استفاده از روش انتگرال انرژی، دستگاه معادلات با ابعاد ۸۶۴۰۰ معادله و ۵۰۳۸ مجهول تشکیل شده است. تعداد مجهولات در این حالت یک عدد بیشتر است و این مجهول اضافی مربوط به ثابت انرژی دستگاه است که در فرایند برآورد ضرایب درحکم یک مجهول اضافی برآورد می‌شود. سپس برای تحلیل نتایج با استفاده از ضرایب برآورد شده و همچنین با استفاده از ضرایب مدل EGM96 تا درجه و مرتبه ۷۰،



شکل ۳. ضرایب ژئوپتانسیلی برآورد شده توسط روش انتگرال انرژی تا درجه و مرتبه ۷۰ با استفاده از مشاهدات ۳۰ روزه ماهواره CHAMP.



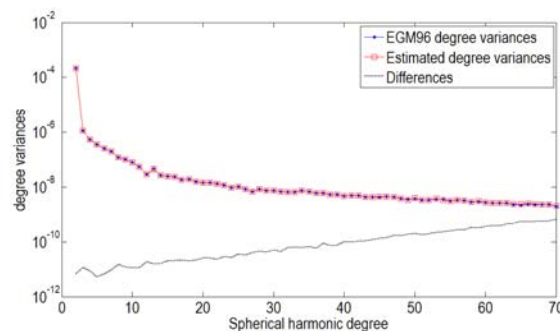
شکل ۴. تفاوت میان ارتفاع‌های ژئوئید محاسبه شده از مدل EGM96 تا درجه و مرتبه ۷۰ و ضرایب برآورد شده به روش انتگرال انرژی تا درجه و مرتبه ۷۰ با استفاده از مشاهدات ۳۰ روزه ماهواره CHAMP (واحد بر حسب متر).

بین ارتفاع‌های ژئوئید به مقدار بسیار کمی کاهش یافته است.

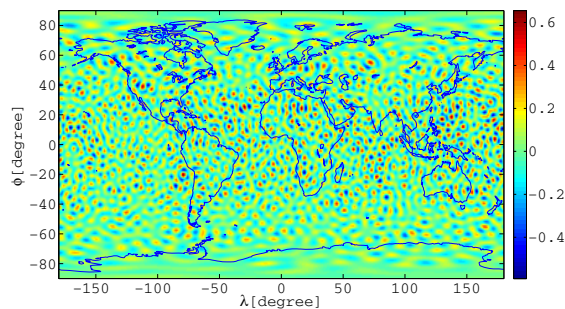
در مرحله بعد با استفاده از روابط ذکر شده در قسمت‌های قبل در مورد روش شتاب، برآورد ضرایب صورت گرفته است. در این مرحله ابتدا با استفاده از مشاهدات ماهواره در راستاهای متفاوت به صورت جداگانه ضرایب برآورد و سپس از مشاهدات ماهواره در هر سه راستا به صورت هم‌زمان در برآورد ضرایب استفاده شده است. در شکل ۷ ضرایب برآورد شده و همچنین ضرایب مدل EGM96 تا درجه و مرتبه ۷۰ به صورت degree variance و اختلاف‌های مربوط به این دو در حالت‌های متفاوت به نمایش گذاشته شده است. همچنین در شکل ۸ اختلاف ارتفاع‌های ژئوئید محاسبه شده از ضرایب مدل EGM96 تا درجه و مرتبه ۷۰ و ارتفاع‌های محاسبه شده از ضرایب برآورد شده در حالات متفاوت به نمایش گذاشته شده است.

با توجه به شکل ۳ مشاهده می‌شود که میزان جدایی بین ضرایب برآورد شده و ضرایب مدل EGM96 در درجه و مرتبه‌های بالا افزایش می‌یابد. این جدایی باعث اختلاف ارتفاعات ژئوئید تا حد ۸۰ سانتی‌متر شده است. اولین موضوعی در مورد علت این اختلافات به ذهن می‌رسد، درجه و مرتبه‌های بالای ۷۰ تا ۳۰۰ است که در شبیه‌سازی مدار ماهواره از این درجه و مرتبه‌ها استفاده شده است. این درجه و مرتبه‌های بالای ۷۰ تا ۳۰۰ باعث ایجاد تداخل سیگنال در برآورد ضرایب تا درجه و مرتبه ۷۰ شده است و در نتیجه باعث اختلاف ضرایب برآورد شده و ضرایب واقعی (ضرایب مدل EGM96) می‌شود. در مرحله بعد، مقادیر مشاهده در نقاط مشاهداتی ماهواره تا درجه و مرتبه ۷۰ محاسبه شده و از این شبه مشاهدات (Quasi observation) در برآورد ضرایب استفاده شده است. نتایج در شکل‌های ۵ و ۶ آمده است.

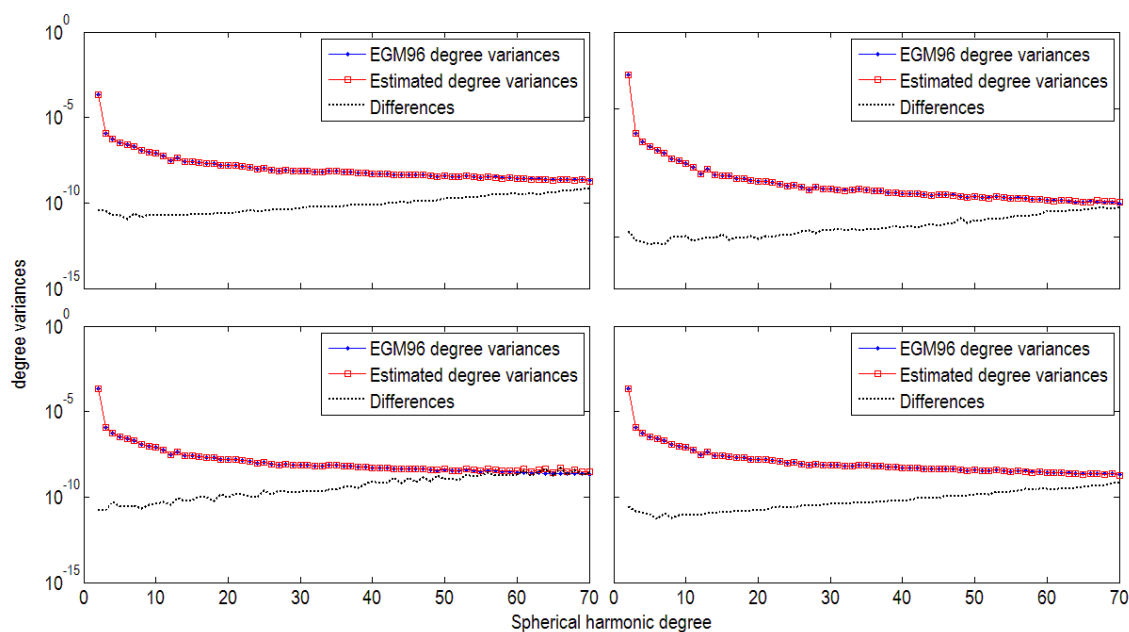
همان‌گونه که در شکل ۶ مشاهده می‌شود، با حذف اثر تداخل سیگنال درجه و مرتبه‌های بالا، بیشینه اختلاف



شکل ۵. ضرایب ژئوپتانسیلی برآورد شده تا درجه و مرتبه ۷۰ با استفاده از شبه‌مشاهدات ۳۰ روزه ماهواره CHAMP.



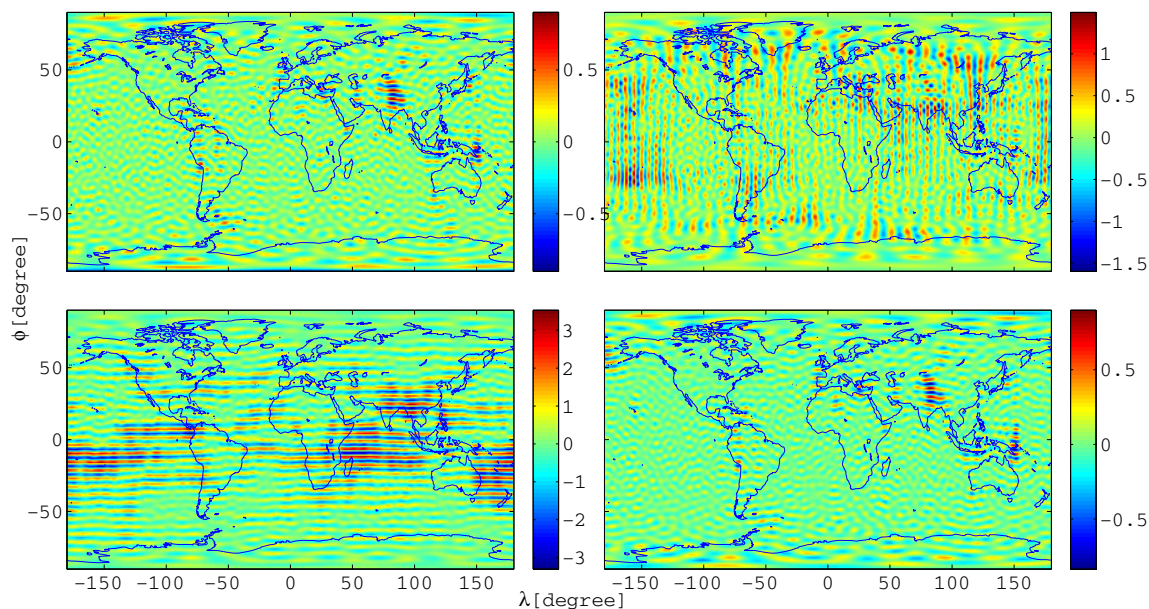
شکل ۶. اختلاف بین ارتفاع‌های ژئوئید محاسبه شده از مدل EGM96 تا درجه و مرتبه ۷۰ و ضرایب برآورد شده تا درجه و مرتبه ۷۰ با استفاده از شبه مشاهدات ۳۰ روزه ماهواره CHAMP (واحد بر حسب متر).



شکل ۷. ضرایب ژئوپتانسیلی برآورد شده به روش شتاب تا درجه و مرتبه ۷۰ با استفاده از مشاهدات ۳۰ روزه ماهواره CHAMP.

بالا چپ: مشاهدات در راستای r
پایین چپ: مشاهدات در راستای λ

بالا راست: مشاهدات در راستای θ
پایین راست: مشاهدات در هر سه راستای r ، θ و λ



شکل ۸. اختلاف بین ارتفاع‌های ژئوپتانسیل محاسبه شده از مدل EGM96 تا درجه و مرتبه ۷۰ و ضرایب برآورد شده به روش شتاب تا درجه و مرتبه ۷۰ با استفاده از مشاهدات ۳۰ روزه ماهواره CHAMP (واحد بر حسب متر).

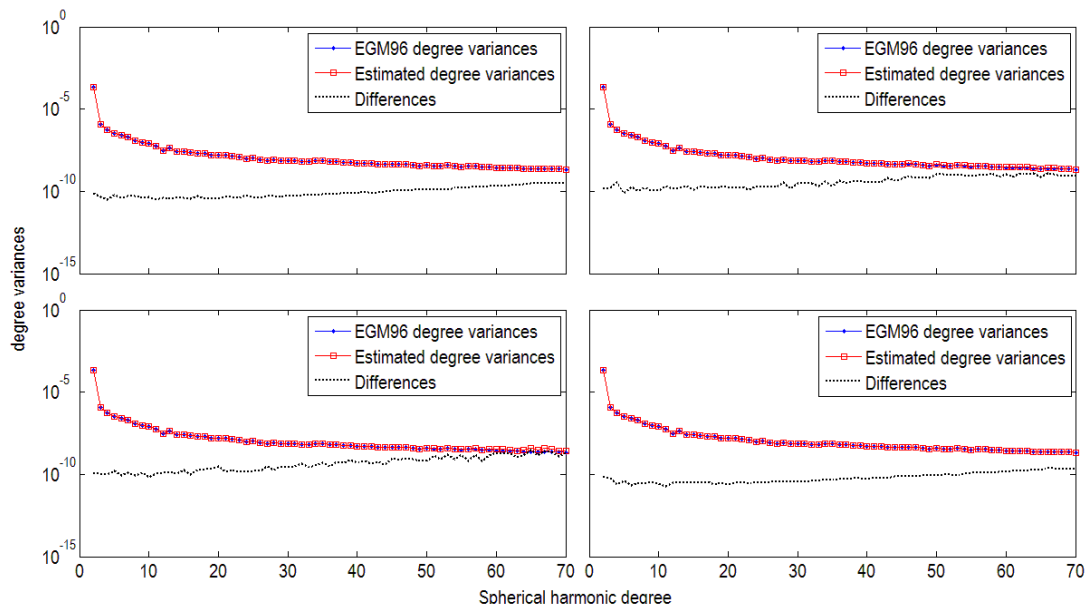
بالا چپ: مشاهدات در راستای r
پایین چپ: مشاهدات در راستای λ

بالا راست: مشاهدات در راستای θ
پایین راست: مشاهدات در هر سه راستای r ، θ و λ

بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که استفاده از روش شتاب در بازیابی ضرایب ژئوپتانسیلی، به شرطی که بتوان به گونه‌ای نوبه ایجاد شده در شتاب‌های محاسباتی را کنترل کرد (دیتمار و همکاران، ۲۰۰۴)، نتایج بهتری نسبت به روش انتگرال انرژی به دست می‌دهد. در پایان با توجه به نتایج نسبتاً بهتر استفاده از مشاهدات در هر سه راستا، پیشنهاد می‌شود که برای بازیابی ضرایب از مشاهدات در هر سه راستا استفاده شود.

تغییرات شدید توپوگرافی که معادل است با بسامدهای زیاد میدان جاذبه زمین، در درجه و مرتبه‌های بالای ضرایب هماهنگ کروی قرار می‌گیرد و این اختلاف ارتفاع‌های ژئوئید زیاد در این مناطق، ناشی از تداخل سیگنال درجه و مرتبه‌های بالای ۷۰ تا ۳۰۰ در برآورد ضرایب ضرایب تا درجه و مرتبه ۷۰ است. به منظور تحلیل این موضوع در قسمت بعد مقادیر شتاب در نقاط مشاهداتی ماهواره تا درجه و مرتبه ۷۰ محاسبه و از این شبه‌مشاهدات در برآورد ضرایب استفاده شده است. نتایج در شکل‌های ۹ و ۱۰ به نمایش در آمده است.

با توجه به شکل ۷ مشاهده می‌شود که میزان جدایی بین ضرایب برآورد شده و ضرایب مدل EGM96 در درجه و مرتبه‌های بالا در حالتی که از مشاهدات در راستای λ استفاده می‌شود، از همه حالت‌ها بیشتر است. پس از آن جدایی ضرایب در حالت استفاده از مشاهدات در راستای θ در مقام دوم قرار دارد و استفاده از مشاهدات در هر سه راستا و در راستای r به‌تنهایی، نتیجه نسبتاً یکسانی را به دست می‌دهند و جدایی ضرایب در این دو حالت نسبت به حالت‌های قبل کمتر است. این موضوع در اختلاف ارتفاعات ژئوئید به نمایش گذاشته شده در شکل ۸ نیز دیده می‌شود. نکته جالب الگوی سامان‌مندی است که در شکل ۸ بالا راست و پایین چپ مشاهده می‌شود. همچنین در شکل ۸ بالا چپ و پایین راست مشاهده می‌شود که در اکثر نقاط، اختلاف ارتفاعات ژئوئید در حد ۲۰ سانتی‌متر است. فقط در یک سری از نقاط مانند رشته‌کوه‌های هیمالیا در آسیا و رشته‌کوه‌های راکی در امریکای جنوبی که تغییرات شدید توپوگرافی وجود دارد، اختلاف ارتفاع ژئوئید زیاد شده است.



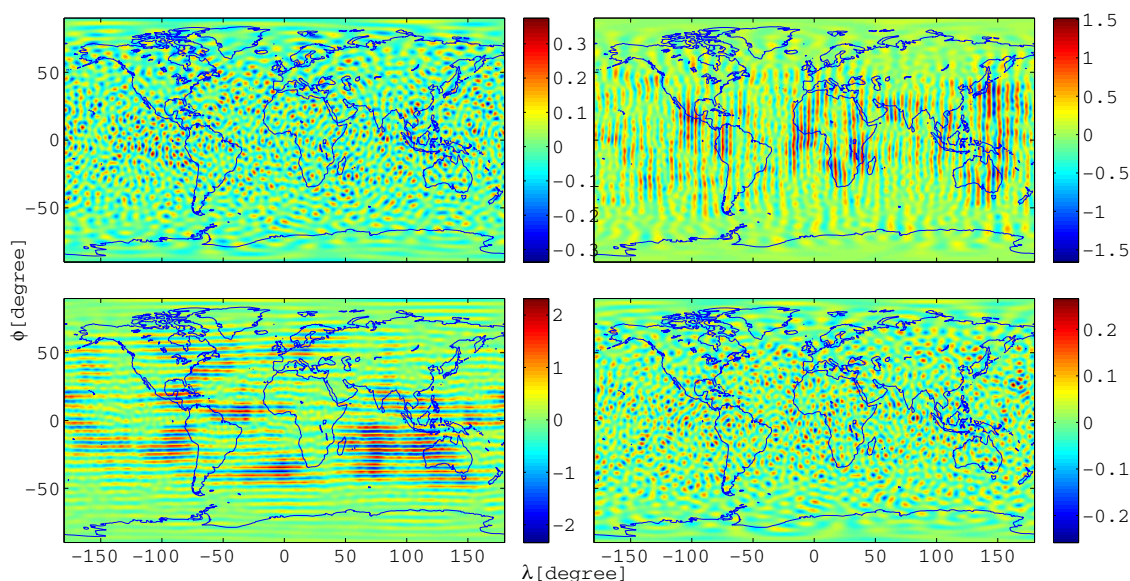
شکل ۹. ضرایب ژئوپتانسیلی برآورد شده با روش شتاب تا درجه و مرتبه ۷۰ با استفاده از شبه‌مشاهدات ۳۰ روزه ماهواره CHAMP.

بالا چپ: مشاهدات در راستای r

پایین چپ: مشاهدات در راستای λ

بالا راست: مشاهدات در راستای θ

پایین راست: مشاهدات در هر سه راستای r ، θ و λ



شکل ۱۰. اختلاف بین ارتفاع‌های ژئوئید محاسبه شده از مدل EGM96 تا درجه و مرتبه ۷۰ و ضرایب برآورد شده به روش شتاب تا درجه و مرتبه ۷۰ با استفاده از شبه‌مشاهدات ۳۰ روزه ماهواره CHAMP (واحد بر حسب متر).

بالا چپ: مشاهدات در راستای r

بالا راست: مشاهدات در راستای θ

پایین چپ: مشاهدات در راستای λ

پایین راست: مشاهدات در هر سه راستای r ، θ و λ

اختلاف ارتفاعات ژئوئید در مناطق با توپوگرافی سخت (مانند رشته کوه های هیمالیا و راکی) نشده است؟ دلیل این موضوع حساسیت بیشتر مشتقات پتانسیل (یعنی مؤلفه های شتاب) به بسامدهای بالا در مقایسه با خود پتانسیل است.

در پایان در جدول زیر به منظور جمع بندی موضوع، مقادیر بیشینه اختلاف های ارتفاع ژئوئید و خطای میانگین مربعی ((RMS(Root Mean Square)) در حالت های متفاوت آورده شده است:

با توجه شکل های ۹ و ۱۰ مشاهده می شود که اختلاف های کم شده و همچنین اختلافات ظاهر شده در رشته کوه های هیمالیا و راکی از بین رفته و بازیابی ضرایب با دقت خوبی با استفاده از مشاهدات در هر سه راستا صورت گرفته است.

سؤالی که در اینجا به ذهن خطور می کند این است که چرا در حالتی که از روش انتگرال انرژی در بازیابی ضرایب استفاده شده است، تداخل سیگنال ناشی از درجه و مرتبه های بالا منجر به تفاوت های واضح در

جدول ۱. مقادیر بیشینه اختلاف های ارتفاع ژئوئید و خطای میانگین مربعی در حالت های متفاوت برآورد ضرایب (واحد بر حسب سانتی متر).

شبه	مشاهدات	مشاهدات	معمولی		
RMS	MAX	RMS	MAX		
7.37	37.49	14.15	90.09	مشاهدات در راستای r	روش شتاب
30.38	166.08	30.49	159.66	مشاهدات در راستای θ	
50.11	234.06	75.98	353.05	مشاهدات در راستای λ	
5.12	26.6	12.28	89.85	مشاهدات در هر سه راستای r ، θ و λ	
12.86	65.56	15.9	84.89		روش انتگرال انرژی

۶ خلاصه، نتیجه‌گیری و پیشنهادات

در این مقاله با استفاده از مشاهدات شبیه‌سازی شده دینامیکی ۳۰ روزه ماهواره CHAMP و با استفاده از روش‌های انتگرال انرژی و شتاب، دستگاه معادلات خطی مربوط به بازیابی ضرایب ژئوپتانسیلی تا درجه و مرتبه ۷۰ با استفاده از روش کمترین مربعات بنا شد. دستگاه معادلات نرمال مربوط به هر کدام از روش‌ها حل شد و ضرایب ژئوپتانسیلی تا درجه و مرتبه ۷۰ برآورد شد. نتایج حاصل حاکی از دقت بیشتر روش شتاب در حالت استفاده از مشاهدات در راستای r به‌تنهایی و در حالت بهینه (یعنی در حالتی که از مشاهدات در هر سه راستای r ، θ و λ در برآورد ضرایب استفاده شود) نسبت به روش انتگرال انرژی است. همچنین مشاهده شد که حساسیت روش شتاب نسبت به تداخل سیگنال طول موج‌های کوتاه میدان جاذبه نسبت به روش انتگرال انرژی بیشتر است. علاوه بر آن مشاهده شد که حتی در حالتی که تداخل سیگنال درجه و مرتبه‌های بالا یعنی همان طول موج‌های کوتاه میدان جاذبه وجود دارد، روش شتاب، دقت بهتری را در برآورد ضرایب نسبت به روش انتگرال انرژی به‌دست می‌دهد.

پیشنهادی که برای تحقیقات بعدی می‌توان به آن اشاره کرد این است که به‌منظور حذف اثر تداخل سیگنال درجه و مرتبه‌های بالا در برآورد ضرایب به روش کمترین مربعات، می‌توان برای مثال در مورد ماهواره CHAMP در فرایند تعیین ضرایب، مجهول‌های تا درجه و مرتبه ۱۰۰ و یا حتی بیشتر را در نظر گرفت و پس از برآورد، از ضرایب بالای ۷۰ صرف‌نظر کرد. با این روش، اثر تداخل سیگنال درجه و مرتبه‌های بالا در برآورد ضرایب به مقدار قابل توجهی کاهش می‌یابد (شریفی، ۲۰۰۴). مشکلی که در این روش با آن مواجه خواهیم بود، ابعاد بزرگ دستگاه معادلات نرمال مربوط به بازیابی ضرایب تا درجه و مرتبه ۱۰۰ و یا بالاتر است. برای رفع این مشکل می‌توان

از روش تکراری MSAA (صفری و همکاران، تحت بررسی) و یا روش PCCG (دیتمار و کلیس، ۲۰۰۲) برای حل دستگاه معادلات مربوط استفاده کرد.

تقدیر و تشکر

از حمایت مالی دانشگاه تهران از این تحقیق در قالب طرح پژوهشی شماره ۲۷۸۵۹/۱/۰۲ قدردانی می‌شود.

منابع

- صفری، ع.، شریفی، م.، امجدی‌پرور، ب.، ۱۳۸۷، استفاده از الگوریتم MSAA جهت حل دستگاه معادلات مربوط به بازیابی میدان جاذبه زمین در مقیاس جهانی تا درجه و مرتبه ۱۲۰ با استفاده از مشاهدات ماهواره GRACE، مجله فیزیک زمین و فضا، تحت بررسی.
- Chen, Y., 2007, Recovery of terrestrial water storage change from Low-Low Satellite-to-Satellite Tracking, Rep 485, Department of Geodetic Science, The Ohio State University, Columbus.
- Ditmar, P. and Klees, R., 2002, A method to compute the Earth's gravity field from SGG/SST data to be acquired by the GOCE satellite (available at: http://www.geo.tudelft.nl/fmr/publicationspresentations/delftuniversitypress/book_GOCE_data_inversion.pdf). Delft University Press, Delft.
- Ditmar, P., A. A. van Eck van der Sluijs, 2004, A technique for modeling the Earth's gravity field on the basis of satellite accelerations, J. Geodesy, **78**(1-2), 12-33.
- Gerlach, C., Sneeuw, N., Visser, P., Sijve, D. 2003b, CHAMP gravity field recovery using the energy balance approach (available at: <http://www.copernicus.org/egu/adgeo/2003/1/adg-1-73.pdf>). Adv. Geosci., **1**, 73-80.
- Han, S. C., Jekeli, C. and Shum, C. K., 2002, Efficient gravity field recovery using in situ disturbing potential observables from CHAMP, Geophys. Res. Lett., **29**(16), 36.1-36.4.
- Han, S. C., 2003, Efficient global gravity determination from satelliteto-satellite tracking (SST), Rep 467, Department of Geodetic Science, The Ohio State University, Columbus.
- Howe, E., Stenseng, L. and Tscherning, C. C., 2003, Analysis of one month of CHAMP state

- gravity recovery from CHAMP using the energy balance approach (available at: <http://olimpia.topo.auth.gr/gg2002/session3/sneeuw.pdf>). In: Tziavos In (ed) Proc 3rd Meeting of the International Gravity and Geoid Commission, Thessaloniki, 26–30 August.
- Visser P. N. A. M., van den IJssel J, 2000, GPS-based precise orbit determination of the very low Earth-orbiting gravity mission GOCE. *J. Geod.*, **74**, 590–602.
- Visser, P. N. A. M., Sneeuw, N. and Gerlach, C., 2003, Energy Integral method for gravity field determination from satellite orbit coordinates, *J. Geodesy*, **77**(3-4), 207-216.
- vector and accelerometer data for the recovery of the gravity potential (available at: <http://www.copernicus.org/egu/adgeo/2003/l/adg-l-l.pdf>). *Adv. Geosci.*, **1**, 1–4
- Jekeli, C., 1999, The determination of gravitational potential differences from satellite-to-satellite tracking, *Celest. Mech. Dynam. Astron.*, **75**, 85–101.
- Keller, W. and Sharifi, M. A., 2005, Satellite Gradiometry using a satellite pair, *J. Geodesy.*, **78**, 544-557.
- Mayer-Gür, T., Ilk, K. H., Eicker, A. and euchtinger, M. F., 2005a, ITG-CHAMP01: A CHAMP gravity field models from short kinematical arcs of one-year observation period, *J. Geodesy*, **78** (7-8), 462-480.
- O’Keefe, J. A., 1957, An application of Jacobi’s integral to the motion of an Earth satellite, *Astron J* **62**(1252), 265–266.
- Reubelt, T., Austen, G. and Grafarend, E. W. 2003a, Harmonic analysis of the Earth’s gravitational field by means of semi-continuous ephemerides of a low Earth orbiting GPS-tracked satellite, Case study: CHAMP. *J. Geod.*, **77**, 257–278.
- Reubelt, T., Austen, G. and Grafarend, E. W., 2003b, Space gravity spectroscopy–determination of the Earth’s gravitational field by means of Newton interpolated LEO ephemeris. Case studies on dynamic (CHAMP Rapid Science Orbit) and kinematic orbits (available at: <http://www.copernicus.org/egu/adgeo/2003/l/adgl-127.pdf>). *ARdv. Geosci.*, **1**, 127–135.
- Sanso, F., 1990, On the aliasing problem in the spherical harmonic analysis, *Bulletin Géodésique*, **64**, 313-330.
- Schäfer, C., 2001, Space gravity spectroscopy, Reihe C, Heft Nr 534, Deutsche Geodaetische Kommission, München.
- Seeber, G., 2003, *Satellite Geodesy*, Walter de Gruyter: Berlin/New York, 2nd edition.
- Sharifi, M. A., 2004 *Satellite gradiometry using a satellite pair*, Diploma Thesis, Geodetic Institute, Faculty of Aerospace Engineering and Geodesy, University of Stuttgart.
- Sneeuw, N. J., Gerlach C., Sjövehla, D., Gruber, C., 2002, A first attempt at time-variable