

بررسی کارایی تجزیه طیفی زمان- بسامد لرزه‌ای به روش تعقیب تطابق در تشخیص لایه‌های نازک

محمد رداد^۱ و عبدالرحیم جواهریان^{۲*}

^۱ دانشجوی دکتری ژئوفیزیک، گروه فیزیک زمین، مؤسسه ژئوفیزیک دانشگاه تهران، ایران
^۲ استاد بازنشسته، گروه فیزیک زمین، مؤسسه ژئوفیزیک، دانشگاه تهران و استاد دانشکده مهندسی نفت دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران، ایران
(دریافت: ۸۸/۶/۲۲، پذیرش نهایی: ۹۰/۱۱/۱۱)

چکیده

بیشتر تغییرات زمین‌شناسی یک پاسخ لرزه‌ای دارند اما گه‌گاه در گستره‌های طیفی خاصی بیان می‌شوند که در داده‌های با باند وسیع پنهان شده‌اند. تجزیه طیفی زمان- بسامد یکی از روش‌هایی است که به کار می‌آید تا به تفسیر چنین مواردی کمک کند. روش‌های زمان- بسامد متعدد هستند و از میان آنها می‌توان به روش‌های تبدیل فوریه زمان- کوتاه، تبدیل موجک پیوسته، توزیع ویگنر- ویل، تبدیل K و روش تجزیه با تعقیب تطابق اشاره کرد. روش تجزیه با تعقیب تطابق نسبت به دیگر روش‌های زمان- بسامد مورد استفاده در لرزه‌شناسی جدیدتر است. به‌طور کلی تجزیه طیفی کاربردهای بسیار زیادی در تفسیر مقاطع لرزه‌ای دارد که نیاز به بررسی و توسعه آنها بیشتر می‌شود. بعضی از ساختارهای زمین‌شناسی نظیر لایه‌های نازک و تعداد زیادی از مخازن هیدروکربوری از نوع چینه‌ای، در زیر حد تفکیک‌پذیری عمودی لرزه‌ای (ضخامت تیونینگ) هستند. به‌عبارتی به‌علت ضخامت کمشان، در مقاطع لرزه‌ای بازتابی قابل تشخیص نیستند. در همین زمینه به تصویر کشیدن ساختارهای زمین‌شناسی کوچک‌مقیاس یکی از موارد مهم تفسیری است. در این مقاله عملکرد روش تجزیه با تعقیب تطابق در تحلیل زمان- بسامد مقاطع لرزه‌ای به‌منظور آشکارسازی و تشخیص لایه‌های نازک روی داده‌های مصنوعی (شامل دو مدل لایه‌ی نازک ساده و نیز مدل گوه‌ای) و داده‌های حقیقی بررسی شده است. مشاهده شد که با مقاطع تک‌بسامد، تفسیر لایه‌های نازک آسان‌تر می‌شود؛ همین‌طور اثر مقاطع تک‌بسامد با بسامد زیاد برای تشخیص و تفکیک لایه‌های نازک نشان داده شده است. در پایان روشن شد که برای مدل لایه نازک ساده، هرچه بسامد موردنظر در مقاطع تک‌بسامد بیشتر باشد، توانایی جداسازی مرز لایه‌ها افزایش می‌یابد. در مورد مدل گوه‌ای نیز با افزایش بسامد، حد تفکیک مرز لایه‌ها به سمت ضخامت‌های کمتر منتقل می‌شود. به‌این ترتیب که ضخامت تیونینگ از ۱۹ متر در مقطع لرزه‌ای اصلی تا ۱۲ متر در مقطع تک‌بسامد ۸۰ هرتزی کاهش می‌یابد. بنابراین آشکارسازی لایه‌های با ضخامت کمتر میسر می‌شود. همچنین در داده‌های حقیقی با تجزیه‌ی طیفی به روش تعقیب تطابق، وجود لایه‌ی نازک در حالی آشکار می‌شود که در مقطع لرزه‌ای امکان مشاهده آن وجود ندارد.

واژه‌های کلیدی: تفسیر لرزه‌ای، نمایش زمان- بسامد، تجزیه با تعقیب تطابق، لایه‌ی نازک، ضخامت تیونینگ

Study of efficiency of seismic time-frequency spectral decomposition by matching pursuit for detecting thin layers

Radad, M.¹ and Javaherian, A.²

¹ Ph. D. Student of Geophysics, Earth Physics Department, Institute of Geophysics, University of Tehran, Iran

² Retired Professor, Earth Physics Department, Institute of Geophysics, University of Tehran and presently at the Department of Petroleum Engineering, Amirkabir University of Technology, Tehran, Iran

(Received: 13 Sep 2009, Accepted: 31 Jan 2012)

Abstract

Most geologic changes have a seismic response but sometimes this is expressed only in certain spectral ranges hidden within the broadband data. Spectral decomposition is one of the methods which can be utilized to help interpreting such cases. There are several

time-frequency methods including: short-time Fourier transform (STFT), continuous wavelet transform (CWT), Wigner-Ville distribution (WVD), S-transform, and matching pursuit decomposition (MPD). In this paper, we use the MPD method. This method is newer than the other time-frequency methods used in exploration seismology. Mallat and Zhang (1993) have improved time and frequency resolution simultaneously by using MPD method. In this method, a signal is decomposed into constructive wavelets. Time and frequency properties of wavelets are used locally for spectral decomposition. Pursuits are the algorithms which search the best time-frequency matching between the signal and a linear combination of selected wavelets from wavelet dictionary. Matching pursuit which is an iterative procedure optimizes signal estimation by each new wavelet chosen from a dictionary. These wavelets combined linearly to obtain the best match with the signal. A signal should expand to waveforms which their time-frequency properties could be matched to local structures. Such waveforms are called time-frequency atoms. There are many approaches to match wavelets of dictionary to a seismic signal and to obtain time-frequency spectrum in matching pursuit decomposition. The base of all approaches is the Mallat and Zhang's algorithm. However, computing time of the original algorithm is very high due to many iterations and that is why particular conditions have been applied in different researches to limit the matching pursuit algorithm for obtaining the lower performing time. In this work, particular conditions are rather similar to Wang's (2007) method.

On seismic data, layer thickness is described on the basis of the seismic travel time. When a layer with different properties has a thickness by one-fourth wavelength, top and base reflections will interfere constructively. For thin layers less than tuning thickness, combined seismic amplitude decreases with thickness (when reflection coefficients of the top and of the base are opposite). Generally, spectral decomposition has many applications in interpretation of seismic sections and so there will be extra needs to study and develop them. Thin layers and many stratigraphic hydrocarbon reservoirs are beneath the threshold of the vertical seismic resolution (tuning thickness) and because of their low thicknesses, they are not resolvable. For this reason, mapping the small-scale geological structures is one of the important interpretational cases. When the thickness of a thin layer decreases pick frequency slightly increases. In this work, this issue has been used to detect thin layers by time-frequency spectrum and by single-frequency sections obtained from MPD.

In this paper, we investigated the performance of the matching pursuit decomposition for time-frequency analysis of seismic sections to delineate and detect thin layers on synthetic data (including simple thin layer model and also wedge model) and real data. It is observed that the interpretation of thin layers is simpler by single-frequency sections. It is shown that for a simple thin layer if considerable frequency in single-frequency sections increases, ability in resolving layer interfaces would be increased. In the wedge model, as the frequency increases resolution threshold of layer interfaces moves to a lower thickness and therefore it would be possible to detect lower thickness layers. The tuning thickness has been decreased from 19 meters in original seismic section to 12 meters in 80 Hz frequency section. In the real data, it is shown that when a thin layer is not resolvable in a seismic section it might be detected using the MPD method. In this case, by providing 20, 40, 60, 80 and 100 Hz single-frequency sections when high frequency sections are studied, interfaces of thin layer are appeared gradually. It is concluded that time-frequency sections are useful instruments to detect and delineate thin layers.

Key words: Seismic interpretation, Time-frequency representation, Matching pursuit decomposition, Thin layer, Tuning thickness

۱ مقدمه

(Wigner-Ville distribution, WVD) تفکیک زمان- بسامدی بیشتری نسبت به روش‌های مرتبه اول دارد، اما مشکلی به نام عبارت‌های تداخلی دارد که تفسیر را مشکل می‌سازد (کوهن، ۱۹۸۹). روش دیگری تحت عنوان تجزیه با تعقیب تطابق (matching pursuit decomposition, MPD) وجود دارد که روش جدیدتری نسبت به روش‌های پیش‌گفته است و در مقاله حاضر از آن استفاده شده است. در الگوریتم این روش از توزیع ویگنر- ویل استفاده می‌شود، با این توضیح که مشکل عبارت‌های تداخلی وجود ندارد. روش MPD از دگر- همبستگی موجک‌های یک بانک موجک با سیگنال لرزه‌ای استفاده می‌کند. تصویر بهترین موجک همبسته شده در سیگنال لرزه‌ای از ردلرزه کم می‌شود. موجک‌های بانک سپس در باقی‌مانده سیگنال لرزه‌ای دگرهمبسته می‌شوند و مجدداً تصویر بهترین موجک همبسته شده کسر می‌شود. فرایند به‌طور تکراری صورت می‌گیرد تا زمانی که انرژی باقی‌مانده زیر یک حد آستانه مورد قبول قرار گیرد.

در سال‌های اخیر با پیشرفت روش‌های عملیات لرزه- نگاری، پردازش و همین‌طور تفسیر داده‌های لرزه‌ای، توانایی تصویرسازی ساختارهای پیچیده زمین‌شناسی افزایش چشم‌گیری داشته است. در همین زمینه به تصویر کشیدن ساختارهای زمین‌شناسی کوچک‌مقیاس مثل مخازن نفتی از نوع چینه‌ای، اهمیت فوق‌العاده‌ای دارد. ساختارهای زمین‌شناسی و تعداد زیادی از مخازن در زیر حد تفکیک‌پذیری عمودی لرزه‌ای اند و به‌عبارتی به‌علت ضخامت کمشان، در مقاطع لرزه‌ای بازتابی قابل تشخیص نیستند. در طول دهه گذشته، صنعت نشانگرهای لرزه‌ای به مقدار زیادی در به‌دست آوردن نشانگرهای جدید پیشرفت کرده است. در بررسی لایه‌های نازک، این پیشرفت شامل تجزیه طیفی (پیتون و همکاران، ۱۹۹۸؛

نمایش یک سری زمانی در حوزه بسامد غالباً ویژگی‌های زیادی را که در حوزه زمان قابل دیدن نیستند آشکار می‌سازد. وقتی یک سری زمانی در حوزه بسامد تصویر می‌شود، اطلاعات جدیدی از آن می‌توان استخراج کرد. طیف دامنه و طیف فاز کل یک ردلرزه، رفتار متوسط بسامدی روی کل سری زمانی پایدار را نمایش می‌دهد. لرزه‌نگاشت‌ها که محتوای طیفی‌شان به‌طور قابل ملاحظه‌ای با زمان تغییر می‌کند، نیازمند روش‌های تجزیه غیراستانداردند. برای تشریح کامل‌تر محتوای بسامدی متغیر با زمان ردلرزه باید در فضای دو بُعدی زمان- بسامد تجزیه شود. در این فضا، پهنای باندهای طیفی کامل برای هر زمان تشریح می‌شود و می‌توان از آن در تشخیص بین انواع متفاوت رویدادهای لرزه‌ای ترکیب شده، استفاده کرد (چاکرابورتی و اوکایا، ۱۹۹۵). از اولین روش‌های زمان- بسامد در تجزیه طیفی، تبدیل فوریه زمان- کوتاه (short-time Fourier transform, STFT) است. در این روش پنجره‌ای مناسب با طول ثابت در نظر گرفته شده، در هر لحظه در ردلرزه ضرب می‌شود و سپس تبدیل فوریه روی ردلرزه پنجره‌شده اعمال می‌شود (آلن، ۱۹۷۷). امواج لرزه‌ای از جمله امواج غیرایستا هستند که محتوای بسامدی متغیر با زمان دارند. از این رو باید از روش‌هایی بهره گرفت که طول پنجره در آنها متغیر با بسامد باشد. تبدیل موجک پیوسته (continuous wavelet transform, CWT) از جمله این روش‌ها است. در این روش قدرت تفکیک‌پذیری زمانی و بسامدی در صفحه زمان- بسامد تغییر می‌کند تا یک تحلیل با قدرت تفکیک چندگانه به- دست آید (سینها و همکاران، ۲۰۰۵). در همین راستا روشی به نام تبدیل k وجود دارد که پنجره مورد استفاده آن در هر لحظه به بسامد مورد تحلیل تطبیق داده می- شود (استاکول و همکاران، ۱۹۹۶). در میان روش‌های زمان- بسامد، روش مرتبه دوم توزیع ویگنر- ویل

پارتیکا و همکاران، ۱۹۹۹) و نشانگرهای به دست آمده از آن (مارفورت و کرلین، ۲۰۰۱؛ لیو، ۲۰۰۶) است. تجزیه طیفی مفسر را قادر می‌سازد که اجزای بسامدی گسسته پهنای باند لرزه‌ای (طیف بسامد محلی) را در تفسیر و درک جزئیات دقیق چینه‌شناسی زیر زمین به کار برد (چوپرا و مارفورت، ۲۰۰۶). در این مقاله به بررسی میزان کارایی روش تجزیه با تعقیب تطابق در تشخیص و به تصویر کشیدن لایه‌های نازک در داده‌های مصنوعی و همین‌طور داده‌های حقیقی پرداخته شده است.

۲ نظریه

تجزیه‌های منعطف، به‌ویژه برای نمایش مؤلفه‌های سیگنال که مکان آنها در زمان و بسامد به‌طور وسیعی تغییر می‌کند اهمیت دارد. سیگنال باید به شکل موج‌هایی بسط یابد که خصوصیات زمان- بسامدی آنها به ساختارهای محلی تطبیق داده شوند. چنین شکل موج‌هایی، اتم‌های زمان- بسامد (اجزای تشکیل‌دهنده مؤلفه‌های زمان- بسامدی سیگنال) نامیده می‌شوند. باید روندی معرفی شود که از میان همه اتم‌های زمان- بسامد یک بانک بزرگ، آنهایی را که به بهترین وجه برای تجزیه ساختارهای سیگنال تطبیق داده می‌شوند انتخاب کند. در این زمینه الگوریتم تعقیب تطابق معرفی شده است که هر سیگنال را به یک بسط خطی از شکل موج‌ها که متعلق به یک بانک بسیار فراوان از توابع هستند، تجزیه می‌کند. این شکل موج‌ها برحسب بهترین قیاس آنها با ساختارهای سیگنال انتخاب می‌شوند. اگرچه تعقیب تطابق یک بسط غیرخطی، نظیر یک بسط متعامد است اما بقای انرژی را نگه می‌دارد که همگرایی‌اش را تضمین می‌کند (مالات و ژانگ، ۱۹۹۳). در این روش سیگنال به شکل موج‌های انتخاب شده از میان یک بانک اتم‌های زمان- بسامد تجزیه می‌شود که این شکل موج‌ها، اتساع‌ها، انتقال‌ها و مدولاسیون‌های یک تک تابع پنجره‌ای هستند. توزیع انرژی زمان- بسامد با

اضافه کردن توزیع ویگنر اتم‌های زمان- بسامد انتخاب شده، به دست می‌آید. برخلاف توزیع ویگنر، این توزیع انرژی عبارت‌های تداخلی را ندارد. تجزیه با تعقیب تطابق یک الگوریتم پی‌جو است که در هر تکرار یک شکل- موج را که بهترین تطابق با بخش برآوردی سیگنال دارد انتخاب می‌کند.

برای بانک‌های اتم‌های زمان- بسامد، تعقیب تطابق یک تبدیل زمان- بسامد تطبیقی می‌دهد که هر تابع $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ را به یک مجموع از اتم‌های زمان- بسامد مختلط تجزیه می‌کند تا بهترین قیاس با باقی‌مانده‌اش را داشته باشند. با جمع بستن توزیع ویگنر هر اتم زمان- بسامد یک نوع جدید از توزیع انرژی زمان- بسامد به- دست می‌آید (مالات و ژانگ، ۱۹۹۳).

۱-۲ تجزیه سیگنال

در تحقیقات صورت گرفته در زمینه کاربرد تجزیه با تعقیب تطابق روی سیگنال‌های لرزه‌ای الگوریتم‌های زیادی برای تطابق موجک‌های بانک با سیگنال لرزه‌ای و به دست آوردن طیف زمان- بسامد وجود دارد (میاو و چیدل، ۱۹۹۸؛ کاستاگنا و همکاران، ۲۰۰۳؛ لیو و مارفورت، ۲۰۰۵ و ونگ، ۲۰۰۷). اما مبنای همه الگوریتم‌های استفاده شده در تحقیقات، همانند همان الگوریتم مالات و ژانگ (۱۹۹۳) است. باین حال چون اجرای الگوریتم اصلی به دلیل تعداد تکرارهای بسیار زیاد آن فوق‌العاده زمان‌بر است، در تحقیقات گوناگون برای کاهش زمان اجرای برنامه، شرایط خاصی برای محدود کردن الگوریتم منظور می‌شود. هرچند با وجود این، روش تجزیه با تعقیب تطابق هنوز هم در مقایسه با دیگر روش‌های زمان- بسامد زمان اجرای زیادی نیاز دارد. در این مقاله شرایط خاص استفاده شده در الگوریتم تا حدودی مشابه با روش ونگ (۲۰۰۷) است.

با توجه به نوع موجک g استفاده شده در MPD،

می‌شوند. گستره جست‌وجو حول هر پارامتر μ ، $[\mu - \Delta\mu, \mu + \Delta\mu]$ است که بازه نمونه‌برداری زمانی، Δs بازه نمونه‌برداری استفاده شده برای s ، $\Delta\omega$ بازه نمونه‌برداری بسامدی و $\Delta\varphi$ پنج درجه است (ونگ، ۲۰۰۷). البته این گستره‌ها را می‌توان بیشتر یا کمتر در نظر گرفت. مشخص است که هرچه گستره‌ها وسیع‌تر باشند، زمان اجرای برنامه طولانی‌تر می‌شود، اما در عوض دقت انتخاب بهترین موجک تطبیقی افزایش می‌یابد. این مرحله پردازش، بسیار محاسباتی است.

در مرحله سوم دامنه موجک بهینه با استفاده از این رابطه برآورد می‌شود:

$$a_n = \frac{\langle R^n f, g_{\gamma_n} \rangle}{\|g_{\gamma_n}\|^2} \quad (۳)$$

در تکرار n ام یعنی آخرین تکرار تجزیه،

$$R^n f = a_n g_{\gamma_n} + R^{n+1} f, \quad (۴)$$

که $R^{n+1} f$ درحکم نوفه داده‌ها منظور می‌شود. یک آستانه برای خاتمه تجزیه سیگنال تعریف می‌شود که اگر انرژی سیگنال زیر آن آستانه قرار گرفت باقی‌مانده سیگنال درحکم نوفه در نظر گرفته شود.

بعد از تجزیه سیگنال $f(t)$ به موجک‌های بهینه سازنده، برای به‌دست آوردن توزیع زمان- بسامد سیگنال، طیف زمان- بسامد هر موجک بهینه، به روش ویگنر- ویل به‌صورت جداگانه به‌دست می‌آید و بعد همه طیف‌ها با هم جمع می‌شوند (توضیحات بیشتر در این زمینه در پیوست آورده شده است).

۲-۲ تجزیه طیفی و لایه‌های نازک

در داده‌های لرزه‌ای که محور قائم آنها زمان دو طرفه باشد، ضخامت لایه برحسب زمان دو طرفه توصیف می‌شود. وقتی یک لایه ضخامت به اندازه یک چهارم طول موج غالب در آن لایه داشته باشد بازتاب‌های بالا و

موجک به‌طور ذاتی برحسب تأخیر زمانی u ، مقیاس s ، بسامد ω و فاز φ بیان می‌شود. آن‌گاه تعقیب تطابق به-طور تکراری اجرا می‌شود و با هر تکرار یک شکل بهینه از موجک انتخاب شده g_{γ_n} (γ تابعی از u ، s ، ω و φ است) استخراج می‌شود که n شماره تکرار است. بعد از n تکرار، یک ردلرزه $f(t)$ به شکل زیر بیان می‌شود (ونگ، ۲۰۰۷):

$$f(t) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n g_{\gamma_n}(t) + R^N f, \quad (۱)$$

که a_n دامنه موجک n ام و $R^N f$ باقی‌مانده با $R^0 f = f$ است. در تکرار تجزیه n ام، روند سه مرحله‌ای ذکر شده در پایین وفق داده می‌شود.

در مرحله اول، u_n ، ω_n و φ_n با استخراج از تحلیل ردلرزه مختلط، از راه تبدیل هیلبرت که کسب نشانگرهای لحظه‌ای را می‌سازد برآورد می‌شوند (تانر و همکاران، ۱۹۷۹). زمان پوش حداکثر ردلرزه درحکم تأخیر زمانی u_n ، بسامد لحظه‌ای در لحظه حداکثر پوش درحکم بسامد مرکز ω_n و فاز لحظه‌ای حداکثر پوش به‌منزله فاز φ_n در نظر گرفته می‌شوند. بعد از آن گستردگی در محور زمانی یا پارامتر مقیاس s_n با استفاده از رابطه (۲) محاسبه می‌شود (ونگ، ۲۰۰۷):

$$g_{\gamma_n}(t) = \arg \max_{g_{\gamma_n} \in D} \frac{\langle R^n f, g_{\gamma_n} \rangle}{\|g_{\gamma_n}\|}, \quad (۲)$$

که $D = [g_{\gamma}(t)] \in \mathbf{R}$ یک بانک جامع از موجک‌های سازنده است. $\|g_{\gamma_n}\| = \langle g_{\gamma_n}, g_{\gamma_n} \rangle^{\frac{1}{2}}$. رابطه اخیر پارامتر s بهینه را روی یک گروه از موجک‌های با مقادیر s متفاوت و با u_n ، ω_n و φ_n ثابت جست‌وجو می‌کند.

در مرحله دوم چهار پارامتر $(u_n, \omega_n, \varphi_n, s_n)$ با جست‌وجو در یک زیربانک و با استفاده از رابطه (۲) بهینه

پایین مرز لایه، تداخل سازنده خواهند داشت (وقتی ضرایب بازتاب مرز بالا و پایین لایه علامت مخالف داشته باشند) و در نتیجه دامنه بیشینه خواهد شد؛ این پدیده را تیونینگ گویند. ویدس (۱۹۷۳) روشن ساخت که برای لایه‌های نازک با ضخامتی کمتر از ضخامت تیونینگ، دامنه لرزه‌ای ترکیب شده از مرزهای بالا و پایین، به‌طور خطی با ضخامت کاهش می‌یابد. جوانگ و لاوتن (۱۹۹۵) این کار را با استفاده از یک طیف بسامدی تعمیم دادند و مشاهده کردند، هنگامی که ضخامت لایه کاهش می‌یابد، بسامد قله به گنبدی افزایش می‌یابد. مارفورت و کرلین (۲۰۰۱) از این موضوع استفاده بردند و آن را بربیک تبدیل فوریه زمان کوتاه داده‌ها اعمال کردند. آنها دریافتند که بسامد متناظر با دامنه طیفی قله ابزاری خوب برای توصیف محتوای اطلاعات کل طیف است؛ به این ترتیب که بسامد قله کم، متناظر با کانال‌های ضخیم و بسامد قله زیاد متناظر با کانال‌های نازک است.

می‌توان بسامد میانگین در گستره‌ای از زمان را تحت عنوان بسامد لحظه‌ای قله این‌گونه تعریف کرد (بارنز، ۱۹۹۳؛ کوهن، ۱۹۹۵):

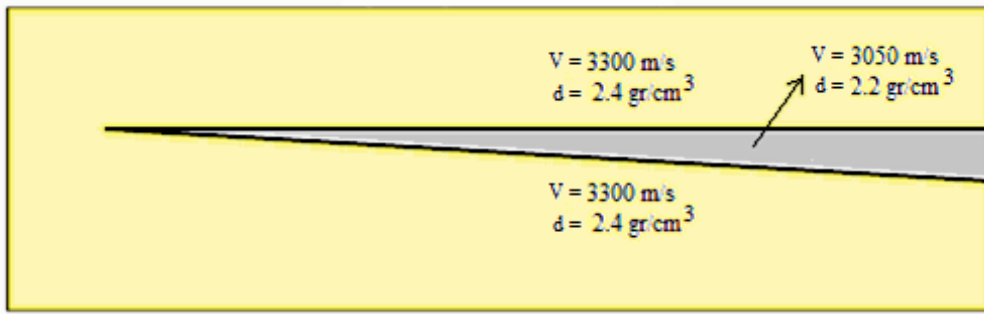
$$\bar{f}_i = \frac{\int_0^{\infty} f A(f) df}{\int_0^{\infty} A(f) df}, \quad (5)$$

که \bar{f}_i بسامد لحظه‌ای برحسب هرتز، f بسامد مؤلفه طیفی برحسب هرتز و $A(f)$ طیف دامنه است. همان‌طور که در قبل بیان شد برای لایه‌های نازک (با ضرایب بازتاب مرزهای بالا و پایین مخالف) با ضخامتی کمتر از ضخامت تیونینگ، دامنه لرزه‌ای ترکیب شده از

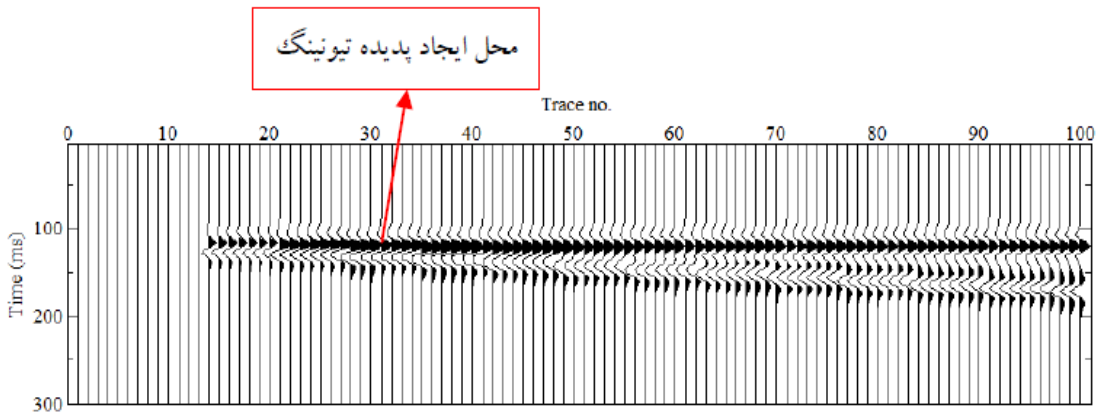
مرزهای بالا و پایین، به‌طور خطی با ضخامت کاهش می‌یابد (ویدس، ۱۹۷۳) و هنگامی که ضخامت لایه کاهش می‌یابد بسامد قله به گنبدی افزایش می‌یابد (جوانگ و لاوتن، ۱۹۹۵). در شکل الف مدل زمین‌شناسی مصنوعی شامل یک گوه نشان داده شده است و مقطع لرزه‌ای مربوط به آن در قسمت ب این شکل مشخص است. مشخصات زمین‌شناسی و لرزه‌ای استفاده شده در ساخت این مدل و مقطع لرزه‌ای مربوط در جدول ۱ آورده شده است. موجکی که در ساخت این مقطع لرزه‌ای به کار رفته، موجک ریکر با بسامد غالب ۴۰ هرتز است. این مقطع لرزه‌ای شامل صد ردلرزه با فاصله جدایش ۲۵ متر از یکدیگر است. مرز بالایی لایه گوه‌ای در زمان ۱۲۰ میلی-ثانیه قرار دارد و مرز پایینی آن از زمان ۱۲۰ میلی‌ثانیه در گوشه‌ی گوه و در ردلرزه‌ی شماره ۱۰ شروع و تا زمان ۱۷۲ میلی‌ثانیه در ردلرزه شماره ۱۰۰ ادامه دارد. در اینجا هدف بررسی صحت رابطه بسامد قله و انرژی (دامنه) با ضخامت گوه است. با توجه به سرعت لایه میانی (۳۰۵۰ متر بر ثانیه) و بسامد غالب موجک به کار رفته (۴۰ هرتز) و رابطه $\lambda = v/f$ ، ضخامت تیونینگ ($\lambda/4$) برابر با ۱۹ متر یا برحسب زمان دوطرفه برابر با ۱۲ میلی‌ثانیه و در مکان ردلرزه شماره ۳۱ است. همان‌گونه که در شکل ۲ می‌توان دید، با کاهش ضخامت زیر ضخامت تیونینگ، انرژی کل ردلرزه کاهش و از طرفی بسامد لحظه‌ای قله به گنبدی افزایش می‌یابد. بنابراین از این موضوع می‌توان در تحلیل زمان-بسامد لایه‌های نازک برای بررسی پدیده تیونینگ استفاده کرد (رداد، ۱۳۸۸).

جدول ۱. مشخصات زمین‌شناسی و لرزه‌ای به‌کار رفته برای ساختن مدل مصنوعی شکل ۱.

ضریب بازتاب Rij	چگالی (gr/cm ³)	سرعت موج p (m/s)	لایه
R _{۱۲} = -۰/۰۸۲۷	۲/۴	۳۳۰۰	شیل
	۲/۲	۳۰۵۰	ماسه‌سنگ
R _{۲۳} = ۰/۰۸۲۷	۲/۴	۳۳۰۰	شیل

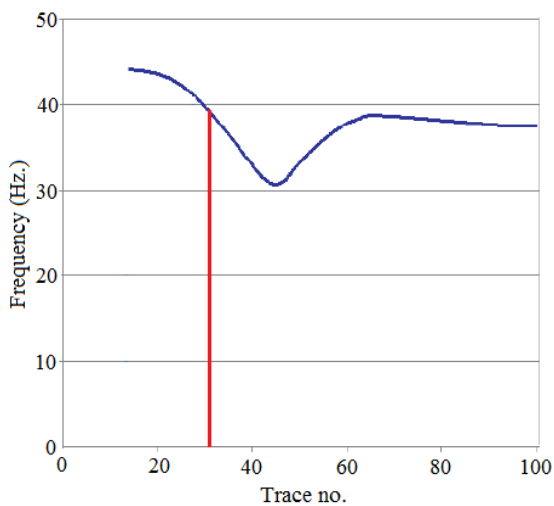


(الف)

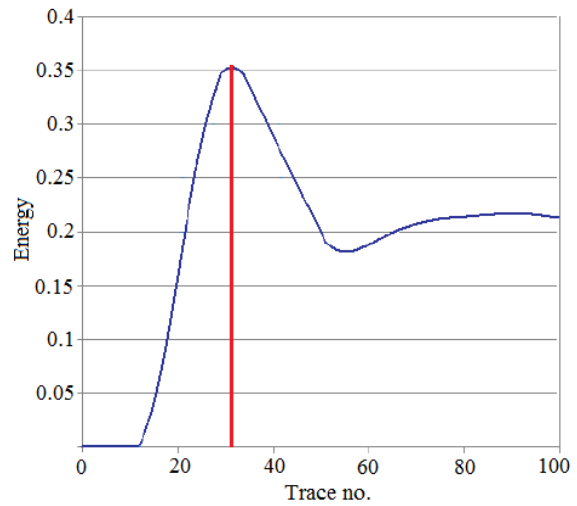


(ب)

شکل ۱. (الف) مدل زمین‌شناسی یک گوه ماسه‌سنگی در یک محیط شیلی و (ب) مقطع لرزه‌ای مصنوعی آن.



(ب)



(الف)

شکل ۲. تغییرات (الف) انرژی کل و (ب) بسامد به‌مثابه تابعی از ضخامت گوه شکل ۱. ضخامت از راست به چپ کاهش می‌یابد و مکان ضخامت تیونینگ در محدوده ردلرزه شماره ۳۱ با خط سرخ‌رنگ مشخص شده است.

۳ پیاده‌سازی

۳-۱ اعمال روش بر مدل مصنوعی

در این قسمت با در نظر گرفتن دو مدل لرزه‌ای ساده، عملکرد روش تجزیه با تعقیب تطابق در تشخیص لایه‌های نازک و بررسی آنها مورد بحث قرار می‌گیرد.

۳-۱-۱ مدل لرزه‌ای لایه نازک

در ابتدا مدل زمین‌شناسی شکل ۳ در نظر گرفته می‌شود. این مدل شامل یک لایه نازک با ضخامت ۳۰ متر یا برحسب زمان دوطرفه ۲۰ میلی‌ثانیه است که می‌تواند یک لایه ماسه‌ای متخلخل باشد که در درون یک محیط نفوذ-ناپذیر مثل شیل قرار گرفته است. مشخصات لایه‌ها که در شکل هم مشخص است همانند مشخصات گوه مصنوعی شکل ۱ است که در جدول ۱ آورده شده است. شکل ۴، مقطع لرزه‌ای مصنوعی ساخته شده برای این مدل را نشان می‌دهد. در ساخت این مقطع لرزه‌ای از موجک مورلت با بسامد غالب ۳۰ هرتز استفاده شده است. این مقطع لرزه-ای شامل ۱۰۰ ردلرزه با فاصله جدایش ۲۵ متر از یکدیگر است. مرز بالایی لایه نازک در زمان ۱۲۰ میلی‌ثانیه و مرز پایینی آن در زمان ۱۴۰ میلی‌ثانیه قرار گرفته است. با توجه به بسامد غالب موجک و سرعت لایه میانی، ضخامت تیونینگ ($\lambda/4$) برابر ۲۶ متر به دست می‌آید و می‌توان گفت ضخامت این لایه نازک در حد ضخامت تیونینگ است.

شکل ۵ مقاطع تک‌بسامد حاصل از تجزیه طیفی زمان-بسامد به روش MPD مربوط به شکل ۴ را نشان می‌دهد. شکل ۵الف، مقطع تک‌بسامد ۲۰ هرتزی، شکل ۵ب، مقطع تک‌بسامد ۴۰ هرتزی، شکل ۵ج، مقطع تک‌بسامد ۶۰ هرتزی و شکل ۵د، مقطع تک‌بسامد ۸۰ هرتزی است. با دقت در این شکل‌ها به‌طور واضح مشخص است که با افزایش بسامد در مقاطع تک‌بسامد، قدرت تفکیک بیشتر و تصویر واضح‌تری از لایه نازک به دست آمده

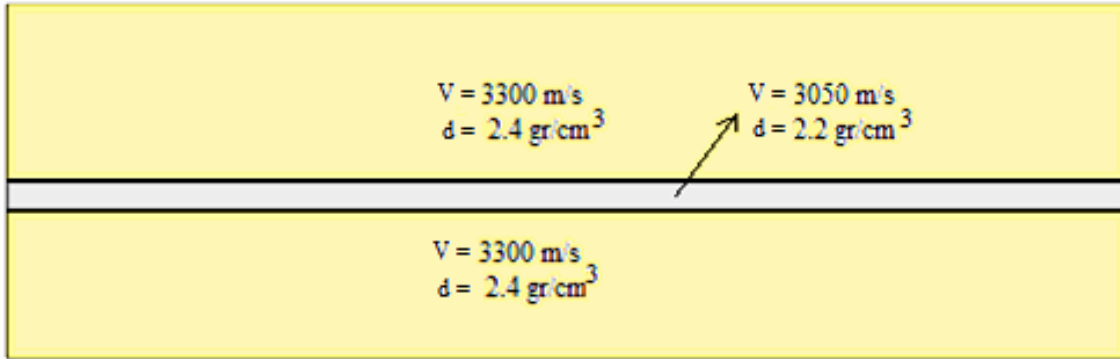
است. برخلاف مقطع تک‌بسامد ۲۰ هرتزی که حتی قادر نبوده است دو مرز لایه‌ی نازک را از هم تفکیک کند، مقطع تک‌بسامد ۸۰ هرتزی علاوه بر اینکه دو مرز بالایی و پایینی را از هم تفکیک کرده مکان دقیق مرزهای لایه‌ی نازک را مشخص کرده و تصویر واضحی از لایه به دست داده است. بنابراین بین ضخامت قابل تفکیک و بسامد مورد بررسی در تحلیل زمان-بسامد نسبت عکس وجود دارد.

۳-۱-۲ مدل گوه‌ای

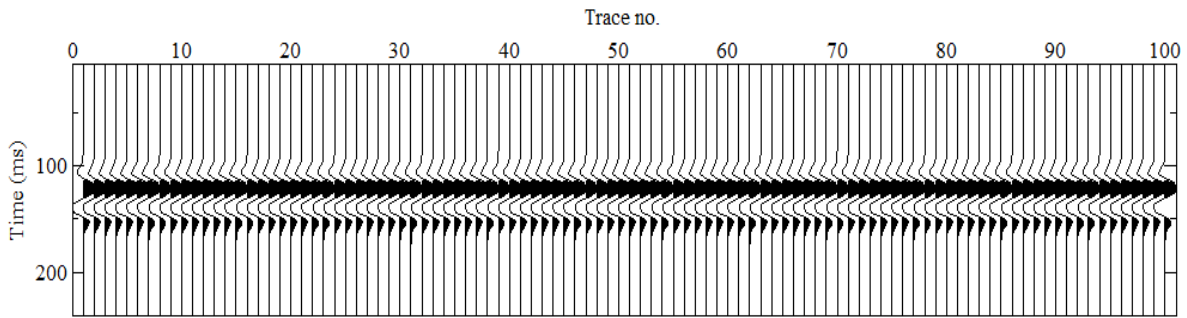
مدل گوه‌ای می‌تواند نشانگر موارد متفاوتی از جمله خاتمه یک لایه‌بندی زمین‌شناسی خاص با تغییر جانبی رخساره، نازک‌شدگی یک لایه اشباع از گاز در یک مخزن ماسه-سنگی و یا دیگر موردهای جالب اکتشافی باشد. در شکل ۱ب مقطع لرزه‌ای مدل گوه‌ای مصنوعی شکل ۱الف نشان داده شد و مشخصات زمین‌شناسی و لرزه‌ای آن هم در جدول ۱ آورده شد. همان‌طور که در مورد این مقطع توضیح داده شد، ضخامت تیونینگ ($\lambda/4$) برابر با ۱۹ متر یا برحسب زمان دوطرفه برابر با ۱۲ میلی‌ثانیه و در مکان ردلرزه شماره ۳۱ است. شکل ۶ مقاطع تک‌بسامد حاصل از تجزیه طیفی زمان-بسامد با استفاده از روش MPD مربوط به این مقطع را نشان می‌دهد. شکل ۶الف، مقطع تک‌بسامد ۲۰ هرتزی، شکل ۶ب، مقطع تک‌بسامد ۴۰ هرتزی، شکل ۶ج، مقطع تک‌بسامد ۶۰ هرتزی و شکل ۶د، مقطع تک‌بسامد ۸۰ هرتزی است. همان‌طور که پیش‌تر بیان شد، سازندهای نازک‌تر در بسامدهای بیشتر، دچار تیونینگ می‌شوند و سازندهای ضخیم‌تر در بسامدهای کمتر. بنابراین از این موضوع می‌توان استفاده کرد و برای بررسی و تفکیک لایه‌های نازک در ضخامت کمتر از مقاطع تک‌بسامد با بسامد بیشتر بهره گرفت. نتایج به دست آمده از تحلیل زمان-بسامد در جدول ۲ آورده شده است. از شکل ۶ و مقادیر ثبت شده در جدول ۲ نیز

با بسامد کمتر درحکم یک بی‌هنجاری با حداکثر دامنه مربوط به مکان تیونینگ است (مقطع تک بسامد ۲۰ هرتزی) در مقاطع تک‌بسامد با بسامد بیشتر به صورت دو مرز تفکیک یافته (مقطع تک بسامد ۸۰ هرتزی) مشخص هستند.

می‌توان نتیجه گرفت که سازندهای نازک‌تر در بسامدهای بیشتر، دچار تیونینگ می‌شوند. موضوع دیگری که از مقایسه مقاطع تک‌بسامد می‌توان نتیجه گرفت و در شکل‌های ۶الف تا ۶د هم مشخص است این است که ناحیه‌ای از گوه که در مقاطع تک‌بسامد



شکل ۳. مدل زمین‌شناسی یک لایه نازک ماسه‌سنگی در یک محیط شیبی.

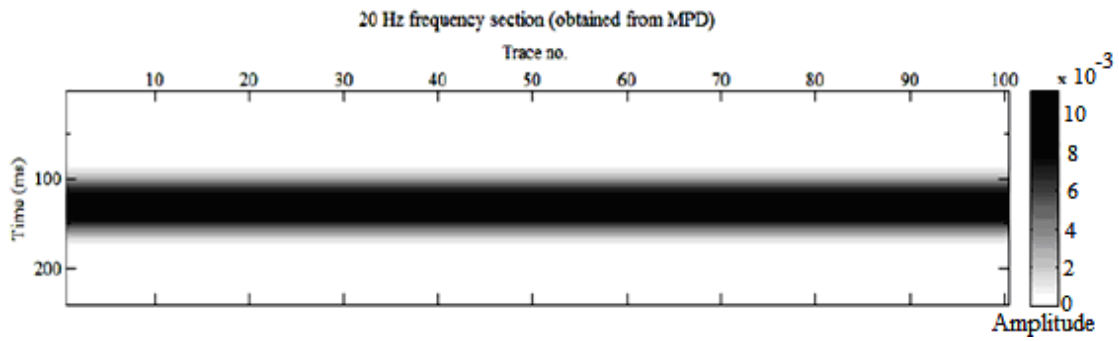


شکل ۴. مقطع لرزه‌ای مصنوعی مربوط به مدل شکل ۳: ضرایب بازتاب برای مرزهای بالایی و پایینی به ترتیب برابر $+0.0827$ و -0.0827 و موجک استفاده شده در ساخت این مقطع موجک مورلت با بسامد غالب ۳۰ هرتز است.

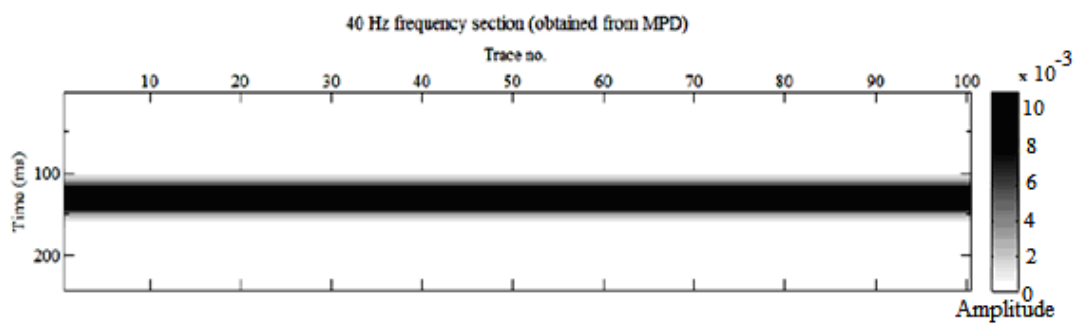
جدول ۲. نتایج حاصل از اعمال تحلیل زمان-بسامد با روش MPD (شکل ۶) روی مقطع لرزه‌ای شکل ۱.ب.

مقطع تک‌بسامد	شماره ردلرزه رخداد تیونینگ	ضخامت تیونینگ (زمان دوطرفه، ms)	ضخامت تیونینگ (متر)
۲۰ هرتزی	۳۸	۱۶	۲۵
۴۰ هرتزی	۳۱	۱۲	۱۹
۶۰ هرتزی	۲۸	۱۰	۱۵
۸۰ هرتزی	۲۴	۸	۱۲

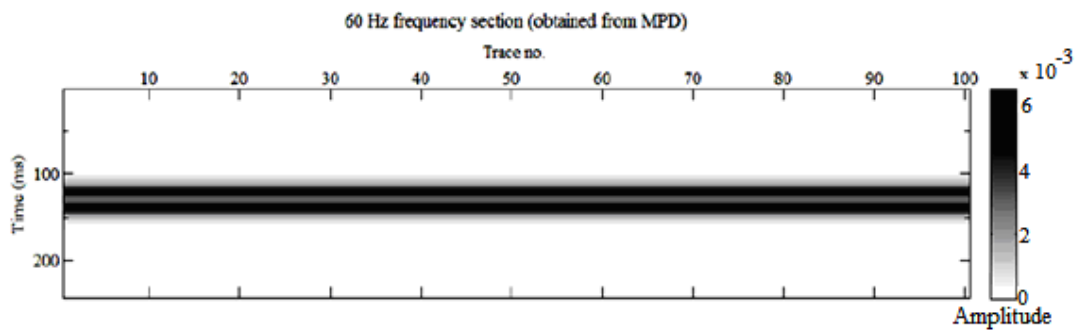
(الف)



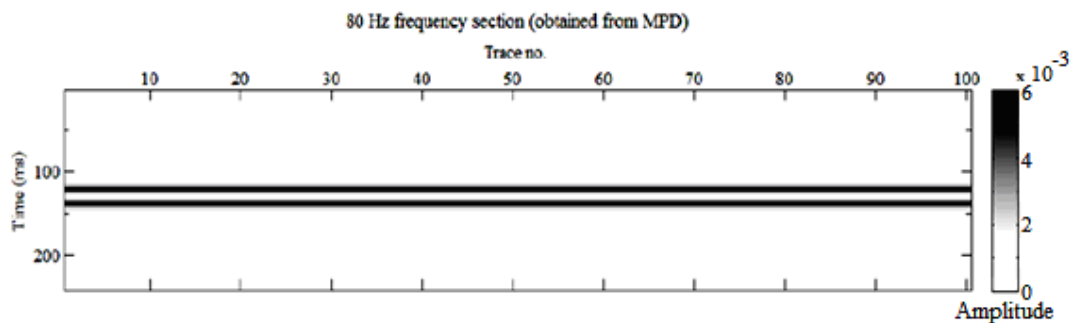
(ب)



(ج)

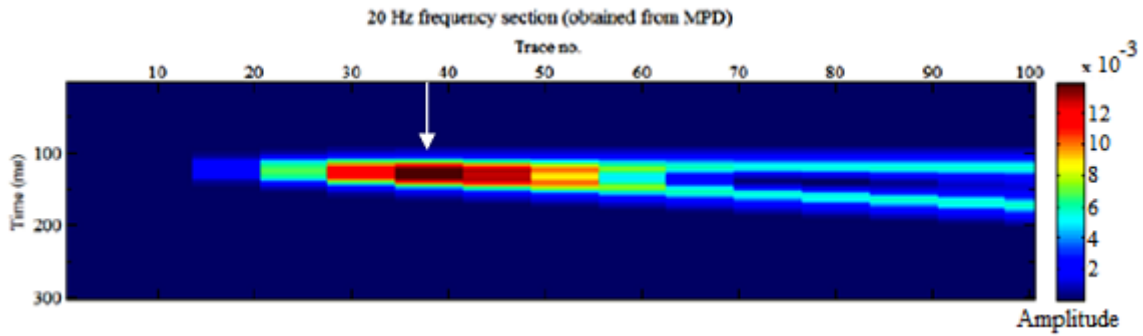


(د)

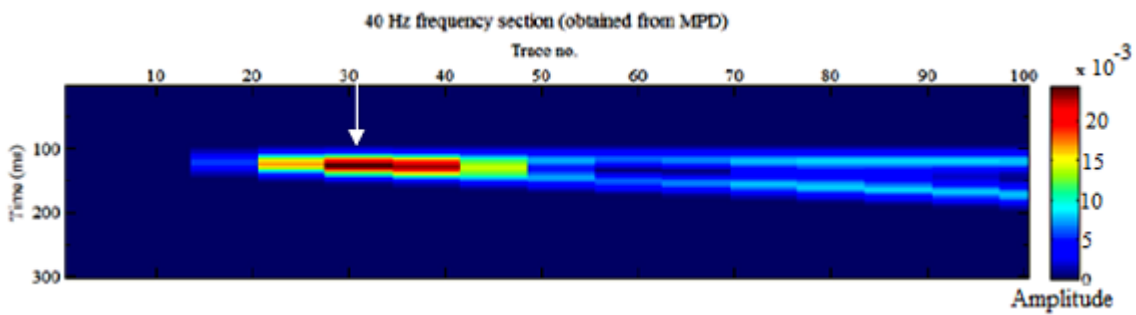


شکل ۵. نمایش‌های زمان-بسامد حاصل از MPD برای مقطع شکل ۴. (الف) مقطع تک‌بسامد ۲۰ هرتزی، (ب) مقطع تک‌بسامد ۴۰ هرتزی، (ج) مقطع تک-بسامد ۶۰ هرتزی و (د) مقطع تک‌بسامد ۸۰ هرتزی. می‌توان دید که با افزایش بسامد مرزهای بالا و پایین لایه نازک بهتر تفکیک شده‌اند و در قسمت د، لایه نازک کاملاً مشخص است.

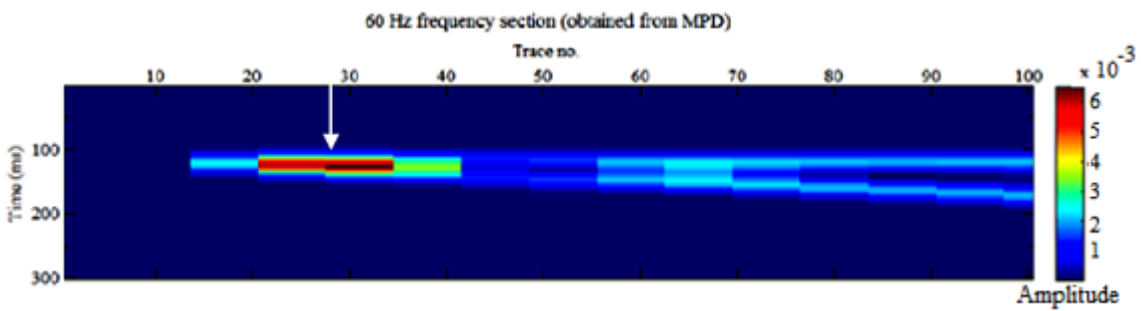
(الف)



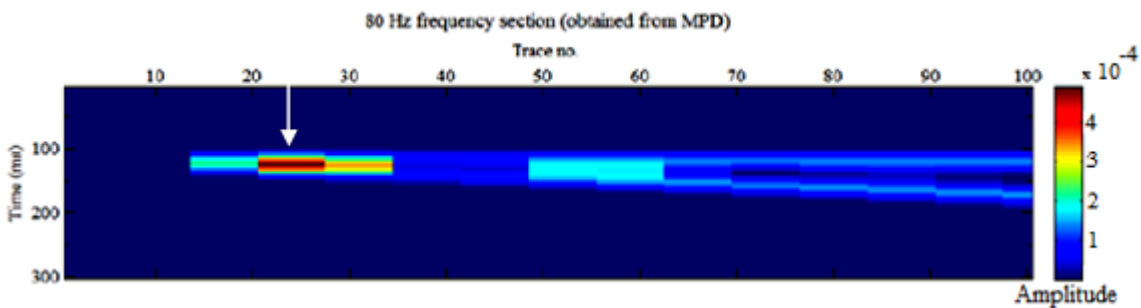
(ب)



(ج)



(د)



شکل ۶. نمایش‌های زمان- بسامد حاصل از MPD برای مقطع شکل اب. (الف) مقطع تک‌بسامد ۲۰ هرتزی، (ب) مقطع تک‌بسامد ۴۰ هرتزی، (ج) مقطع تک- بسامد ۶۰ هرتزی و (د) مقطع تک‌بسامد ۸۰ هرتزی. می‌توان دید که با افزایش بسامد دامنه حداکثر مربوط به ضخامت تیونینگ در ضخامت کمتری مشخص شده است. مکان رخداد تیونینگ در مقطع تک‌بسامد ۲۰ هرتزی، ۴۰ هرتزی، ۶۰ هرتزی و ۸۰ هرتزی، به ترتیب در ردلرزه‌های شماره ۲۸، ۳۱، ۳۸ و ۲۴ است. این مکان‌ها در شکل‌ها با پیکان‌های سفیدرنگ نشان داده شده‌اند.

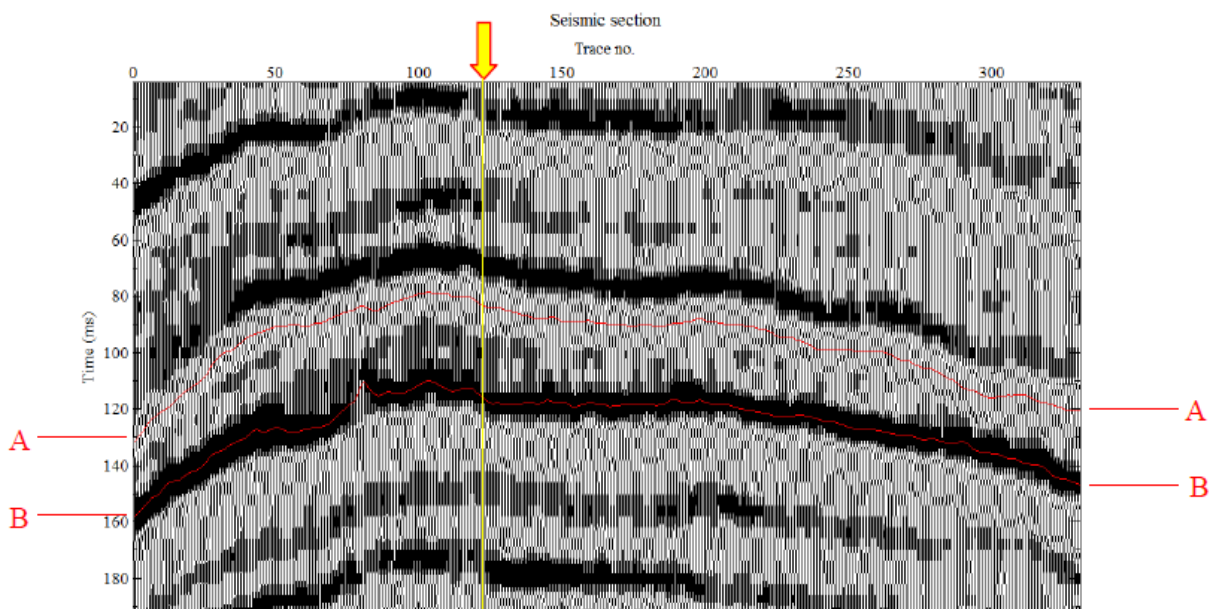
۲-۳ اعمال روش بر داده‌های واقعی

بعد از بررسی عملکرد روش تجزیه با تعقیب تطابق در مورد داده‌های لرزه‌ای مصنوعی، حال در این بخش این روش روی داده واقعی اعمال می‌شود تا تحقیق شود که در تشخیص لایه‌های نازک و بررسی آنها در مورد داده‌های واقعی چگونه عمل می‌کند. شیوه‌ای که در این مقاله برای آشکارسازی لایه‌های نازک به کار گرفته شده است، تهیه مقاطع تک‌بسامد متوالی و با بسامدهای رو به افزایش و پایش آنها برای پیدایش بی‌هنجاری‌ها در مقاطع است.

داده واقعی که مورد بررسی قرار گرفت و تجزیه زمان- بسامد با تعقیب تطابق روی آن اعمال شد، یک مجموعه داده سه‌بعدی، با فاصله نمونه‌برداری زمانی چهار میلی‌ثانیه، مربوط به یکی از میداین نفتی ایران است که از این مجموعه داده یک برش دو‌بعدی زمان- مکان انتخاب شده است که در ادامه مورد بررسی قرار می‌گیرد. محدوده مورد بررسی در حدفاصل بین دو مرز مشخص شده روی مقطع لرزه‌ای در شکل ۷ آورده شده است. اطلاعات داده‌های چاه، شامل نگار چگالی و نگار صوتی

که مربوط به مکان ردلرزه شماره ۱۲۰ از همین مقطع لرزه‌ای است، در شکل ۸ آورده شده است. این اطلاعات حاکی از آن است که در بین دو مرز مشخص شده، لایه‌های نازکی وجود دارد که در مقطع لرزه‌ای دیده نمی‌شوند. این محدوده در شکل ۸ با مربع زردرنگ مشخص شده است. در این قسمت هدف این است که بررسی شود که آیا با روش MPD و تهیه مقاطع تک- بسامد، می‌توان این لایه‌ها را آشکار کرد. برای آگاهی از محتوای بسامدی داده‌ها، در شکل ۹ طیف دامنه متوسط ردلرزه‌های مقطع لرزه‌ای شکل ۷ نشان داده شده است.

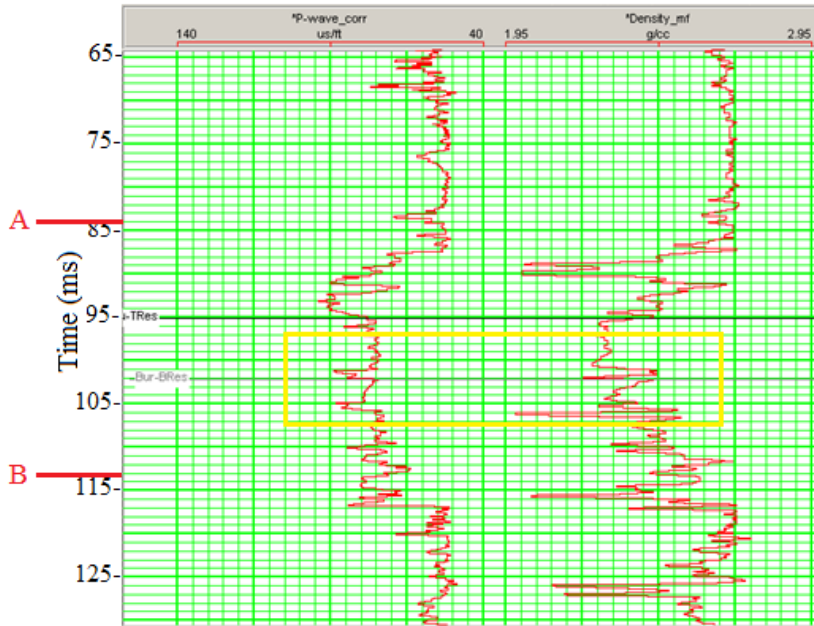
شکل‌های ۱۰ تا ۱۴ مقاطع تک‌بسامد ۲۰ هرتزی تا ۱۰۰ هرتزی حاصل از MPD مربوط به مقطع لرزه‌ای شکل ۷ را نشان می‌دهند. در شکل ۱۰ که مربوط به مقطع تک‌بسامد ۲۰ هرتزی است، آثار کمی از وجود یک بی-هنجاری کم‌دامنه در محدوده ردلرزه ۱۲۰ و زمان تقریبی ۱۰۰ میلی‌ثانیه دیده می‌شود، اما وجود این بی‌هنجاری فقط مربوط به همان ناحیه است و در نواحی دیگر بین دو مرز پدیده خاصی مشاهده نمی‌شود.



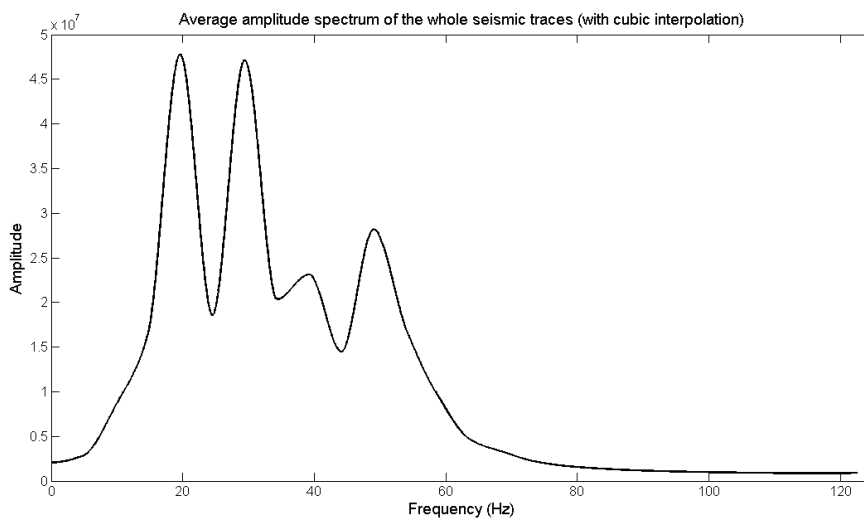
شکل ۷. مقطع لرزه‌ای: ناحیه مورد بررسی با مرزهای A و B مشخص شده‌اند. موقعیت چاه که داده‌های آن در شکل ۸ نشان داده شده‌اند در شکل با پیکان و خط زردرنگ مشخص است.

شوند که به نظر می‌رسد مربوط به همان لایه‌های مورد نظر باشند. در درون محدوده مشخص شده و در حفاصل ردلرزه‌های شماره ۱ تا ۵۰ و همین‌طور ۲۰۰ تا ۳۰۰ مرزها کاملاً مشخص است و در نقاط دیگر نیز شواهدی بر وجود این لایه‌ها به چشم می‌خورد.

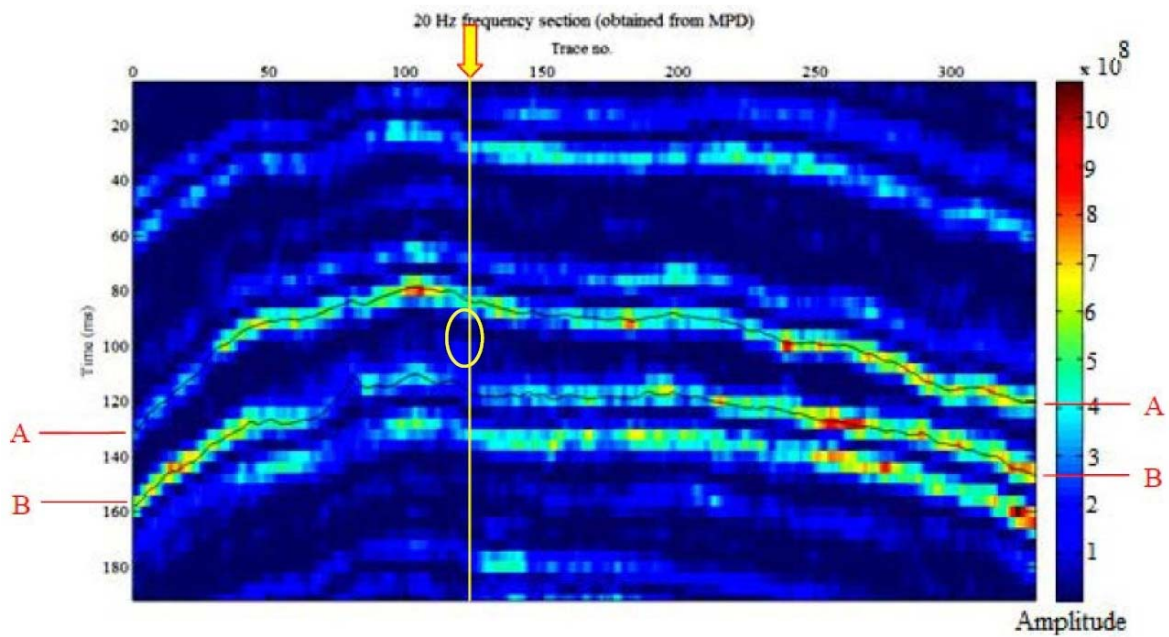
با افزایش بسامد مقاطع تک‌بسامد کم کم بی-هنجاری‌های بیشتری در نقاط دیگر بین دو مرز مشخص شده، پیدا می‌شود و در نهایت در مقطع تک‌بسامد ۱۰۰ هرتزی (شکل ۱۴) بی‌هنجاری‌های کم‌دامنه در ناحیه بین دو مرز به شکل مرزهایی در بعضی از نواحی ظاهر می-



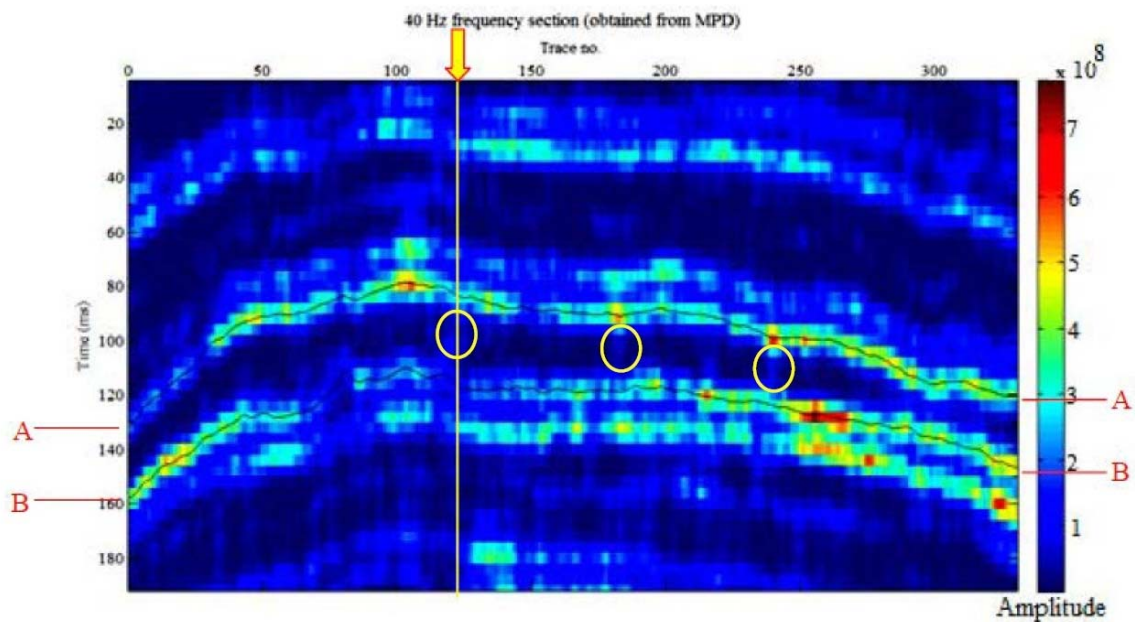
شکل ۸. اطلاعات داده‌های چاه شامل نگار چگالی و نگار صوتی که مربوط به مکان ردلرزه‌ی شماره ۱۲۰ از مقطع شکل ۷ است. مستطیل زردرنگ وجود لایه‌های نازک را در درون محدوده مورد بررسی (بین مرزهای A و B)، که در شکل ۷ با خطوط سرخ‌رنگ مشخص شده است، بیان می‌کند.



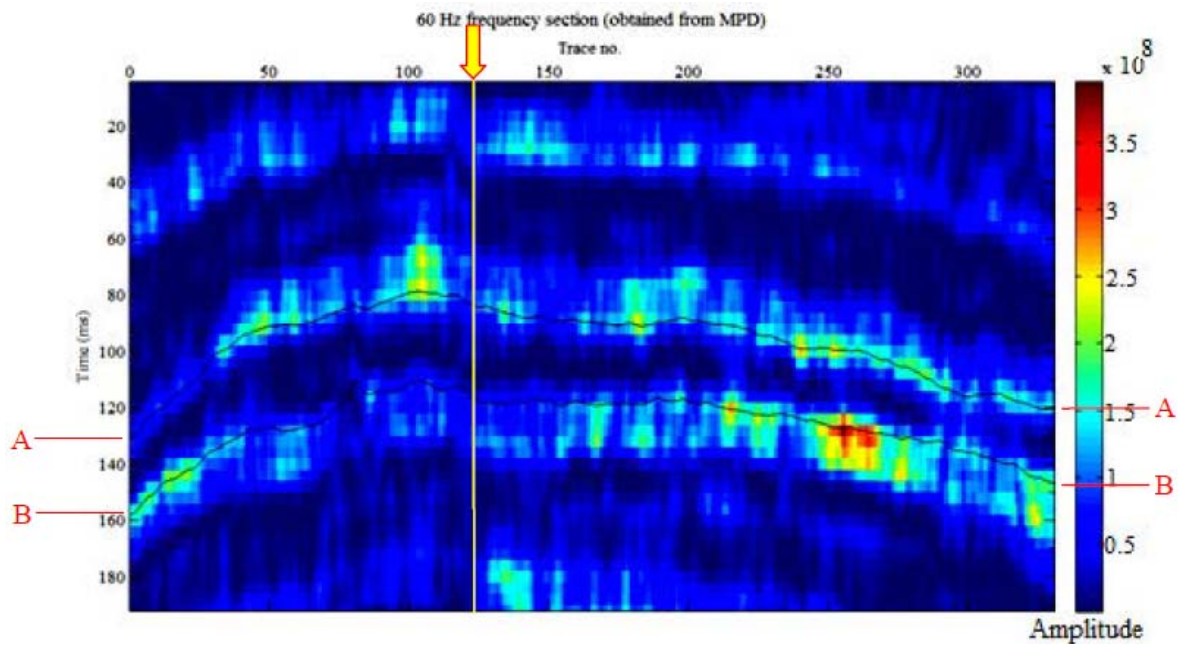
شکل ۹. طیف دامنه متوسط داده‌های مقطع لرزه‌ای شکل ۷.



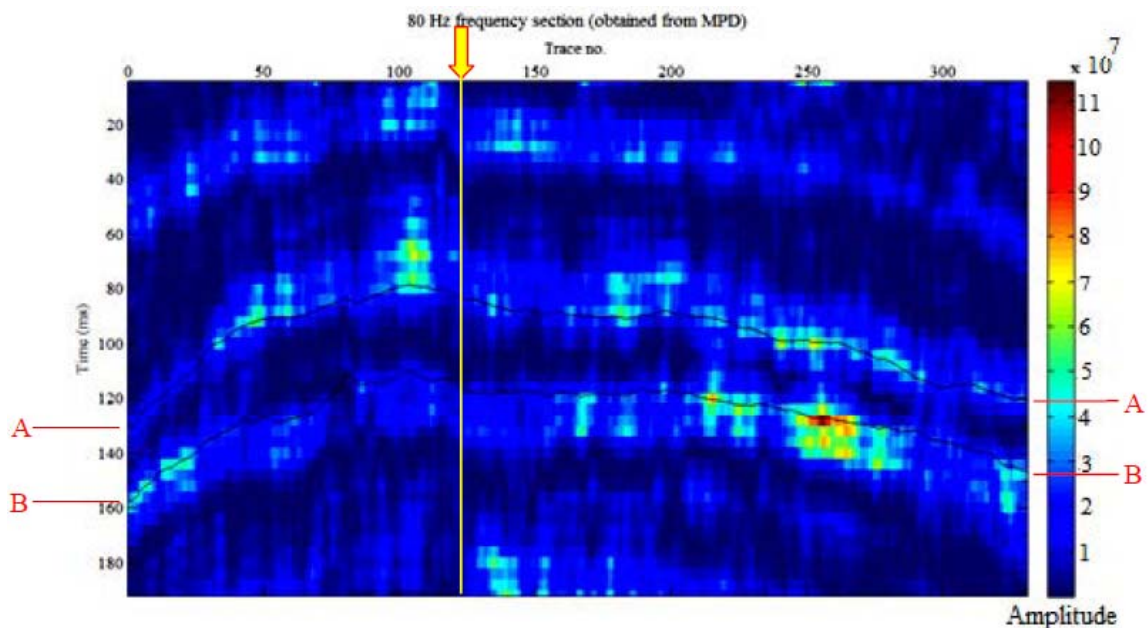
شکل ۱۰. مقطع تک‌بسامد ۲۰ هرتزی حاصل از MPD برای مقطع لرزه‌ای شکل ۷. ناحیه مورد بررسی با مرزهای A و B و موقعیت چاه که داده‌های آن در شکل ۸ نشان داده شده‌اند با پیکان و خط زردرنگ مشخص است. محدوده بی‌هنجاری کم‌دامنه با بیضی زردرنگ نشان داده شده است.



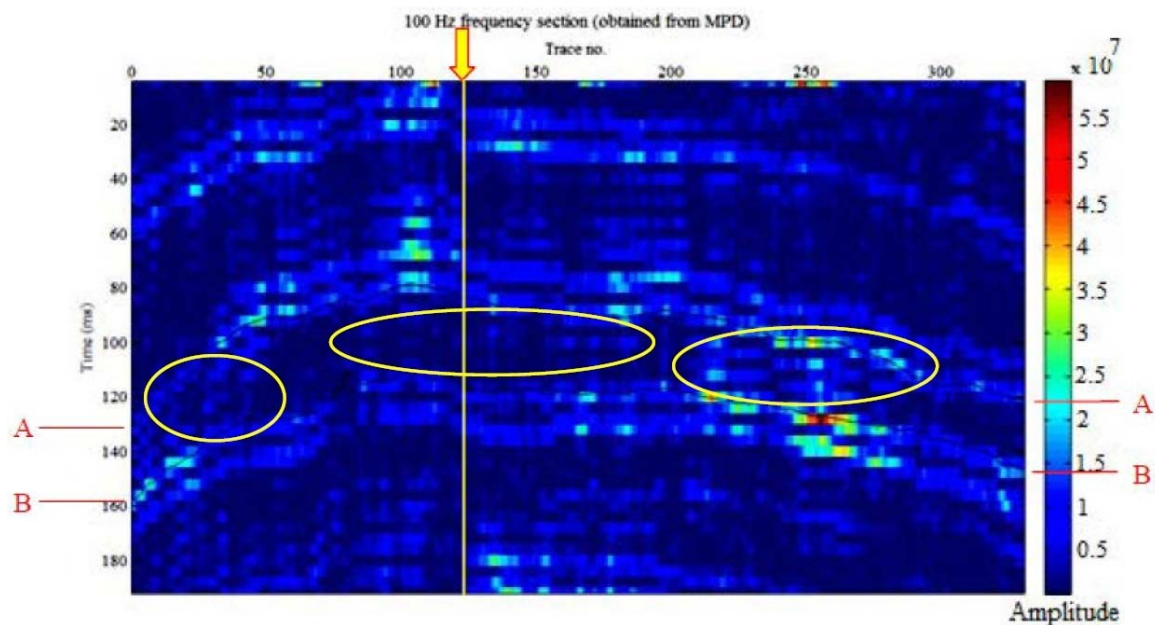
شکل ۱۱. مقطع تک‌بسامد ۴۰ هرتزی حاصل از MPD برای مقطع لرزه‌ای شکل ۷. ناحیه مورد بررسی با مرزهای A و B و موقعیت چاه که داده‌های آن در شکل ۸ نشان داده شده‌اند با پیکان و خط زردرنگ مشخص است. محدوده بی‌هنجاری‌های کم‌دامنه با بیضی‌های زردرنگ نشان داده شده است.



شکل ۱۲. مقطع تک‌بسامد ۶۰ هرتزی حاصل از MPD برای مقطع لرزه‌ای شکل ۷. ناحیه مورد بررسی با مرزهای A و B و موقعیت چاه که داده‌های آن در شکل ۸ نشان داده شده‌اند با پیکان و خط زردرنگ مشخص است.



شکل ۱۳. مقطع تک‌بسامد ۸۰ هرتزی حاصل از MPD برای مقطع لرزه‌ای شکل ۷. ناحیه مورد بررسی با مرزهای A و B و موقعیت چاه که داده‌های آن در شکل ۸ نشان داده شده‌اند با پیکان و خط زردرنگ مشخص است.



شکل ۱۴. مقطع تک‌بسامد ۱۰۰ هرتزی حاصل از MPD برای مقطع لرزه‌ای شکل ۷. ناحیه مورد بررسی با مرزهای A و B و موقعیت چاه که داده‌های آن در شکل ۸ نشان داده شده‌اند با پیکان و خط زرد رنگ مشخص است. محدوده بی‌هنجاری‌های کم‌دامنه با بیضی زرد رنگ نشان داده شده است. در حداقل در لرزه‌های شماره ۱ تا ۵۰ و همین‌طور ۲۰۰ تا ۳۰۰ مرزها کاملاً مشخص است و در نقاط دیگر نیز شواهدی بر وجود این لایه به چشم می‌خورد.

۴ نتیجه‌گیری

شد که ضخامت تیونینگ از ۱۹ متر در مقطع لرزه‌ای اصلی تا ۱۲ متر در مقطع تک‌بسامد ۸۰ هرتزی حاصل از روش MPD کاهش یافت و بعضی از نواحی که در مقطع لرزه-ای اصلی به صورت یک مرز مشخص بود در مقاطع تک-بسامد با بسامد زیاد به صورت دو مرز تفکیک شده از هم مشخص شد. در مورد داده‌های حقیقی نیز دیده شد که در داده‌های چاه مجموعه‌ای از نواحی، شامل لایه‌های نازک وجود داشت که در مقطع لرزه‌ای اصلی آشکار نبود اما با کمک روش MPD و مقاطع تک‌بسامد حاصل از آنها مشخص شد. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که روش زمان-بسامد MPD و مقاطع تک‌بسامد حاصل از آن را می‌توان به مثابه ابزاری کمکی برای آشکارسازی لایه‌های نازک به کار گرفت.

منابع

رداد، م.، ۱۳۸۸، بررسی کارایی تجزیه طیفی زمان-فرکانس لرزه‌ای به روش تعقیب تطابق در تشخیص

همان‌طور که در این مقاله تشریح شد، در الگوریتم روش تجزیه با تعقیب تطابق از تعقیب در راستای دستیابی به بهترین موجک مورد پذیرش برای تطبیق آن بر هر بخش از سیگنال و مربوط به یک رویداد استفاده می‌شود و از طرفی از تحلیل ردلرزه مختلط که کارایی آن اثبات شده است، در به دست آوردن پارامترهای زمانی، فازی و بسامدی برای استفاده در الگوریتم بهره گرفته می‌شود. بنابراین می‌توان به خصوصیات محلی حاصل از MPD تا حدود زیادی اطمینان کرد. در این مقاله سعی شد که کارایی روش MPD در آشکارسازی لایه‌های نازک که در مقاطع لرزه‌ای قابل دید نیستند بررسی شود. در مدل لرزه‌ای مصنوعی لایه نازک ساده دیده شد که روش MPD و مقاطع تک‌بسامد با بسامد زیاد حاصل از آن توانست مرز بالا و پایین این لایه نازک را به خوبی از هم تفکیک کند. در مورد مدل مصنوعی گوه‌ای نیز مشاهده

- Interpretation of incised valleys using new 3-D seismic techniques, A case history using spectral decomposition and coherency, *The Leading Edge*, **17**, 1294–1298.
- Sinha, S., Routh, P. S., Anno, P. and Castagna, J. P., 2005, Spectral decomposition of seismic data with continuous-wavelet transform, *Geophysics*, **70**, P19–P25.
- Stockwell, R. G., Mansinha, L. and Lowe, R. P., 1996, Localization of the complex spectrum, the S-transform, *IEEE Transactions on Signal Processing*, **44**, 998–1001.
- Taner, M., Koehler, F. and Sheriff, R., 1979, Complex seismic trace analysis, *Geophysics*, **44**, 1041-1063.
- Wang, Y., 2007, Seismic time-frequency spectral decomposition by matching pursuit, *Geophysics*, **72**, V13-V20.
- Widess, M. B., 1973, How thin is a thin bed?, *Geophysics*, **38**, 1176-1180.
- لایه‌های نازک: مؤسسه ژئوفیزیک دانشگاه تهران، پایان‌نامه کارشناسی ارشد.
- Allen, J. B., 1977, Short term spectral analysis, synthetic and modification by discrete Fourier transform, *IEEE Transactions on Acoustic, Speech, Signal Processing*, **25**, 235–238.
- Barnes, A., 1993, Instantaneous frequency and amplitude at the envelope peak of a constant-phase wavelet, *Geophysics*, **56**, 1058-1060.
- Castagna, J. P., Sun, S. and Siegfried, R., 2003, Instantaneous spectral analysis: Detection of low-frequency shadows associated with hydrocarbons, *The Leading Edge*, **22**, 120-127.
- Chakraborty, A. and Okaya, D., 1995, Frequency-time decomposition of seismic data using wavelet-based methods, *Geophysics*, **60**, 1906-1916.
- Chopra, S. and Marfurt, K. J., 2006, Seismic attribute mapping of structure and stratigraphy, SEG, Tulsa, OK.
- Chuang, H. and Lawton, D. C., 1995, Frequency characteristics of seismic reflections from thin beds, *Canadian Journal of Exploration Geophysics*, **31**, 32-37.
- Cohen, L., 1989, Time–frequency distributions – A review: *IEEE, Proc.*, **77**, 941–981.
- Cohen, L., 1995, *Time-frequency analysis*, Prentice-Hall, New Jersey.
- Liu, J., 2006, Spectral decomposition and its application in mapping stratigraphy and hydrocarbons, thesis, Ph.D., Department of Geosciences, University of Houston.
- Liu, J. and Marfurt, K. J., 2005, Matching pursuit decomposition using Morlet wavelet: 75th Annual International Meeting of SEG, Houston, Expanded Abstracts, 786-789.
- Mallat, S. and Zhang, Z., 1993, Matching pursuits with time-frequency dictionaries, *IEEE Transactions on Signal Processing*, **41**, 3397-3415.
- Marfurt, K. J. and Kirlin, R. L., 2001, Narrow-band spectral analysis and thin-bed tuning, *Geophysics*, **66**, 1274-1283.
- Miao, X. and Cheadle, S., 1998, High resolution seismic data analysis by wavelet transform and matching pursuit decomposition, *Geo-Triad, CSEG, CSPG and CWLS Joint Convention*, 31–32.
- Partyka, G. A., Gridley, J. and Lopez, J., 1999, Interpretational applications of spectral decomposition in reservoir characterization, *The Leading Edge*, **18**, 353-360.
- Peyton, L., Bottjer, R. and Partyka, G., 1998,

پیوست

به دست آوردن توزیع زمان- بسامد در الگوریتم تجزیه با تعقیب تطابق

تعقیب تطابق هر تابع $f(t) \in L^2(\mathbf{R})$ را به این صورت تجزیه می‌کند (مالات و ژانگ، ۱۹۹۳):

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \langle R^n f, g_{\gamma_n} \rangle g_{\gamma_n}, \quad (پ-۱)$$

که $\gamma_n = (s_n, u_n, \xi_n)$. s_n مقیاس بهینه، u_n تأخیر زمانی بهینه و ξ_n بسامد بهینه در n امین تکرار است. در رابطه (پ-۱) $R^n f$ باقی‌مانده سیگنال در تکرار n ام است و اتم بهینه در این تکرار عبارت است از:

$$g_{\gamma_n}(t) = \frac{1}{\sqrt{s_n}} g\left(\frac{t-u_n}{s_n}\right) e^{i\xi_n t} \quad (پ-۲)$$

این اتم‌ها برای بهترین قیاس با باقی‌مانده‌های f انتخاب می‌شوند.

از تجزیه هر $f(t)$ در یک بانک زمان- بسامد، یک توزیع انرژی زمان- بسامد جدید با اضافه کردن توزیع ویگنر هر اتم انتخاب شده به دست می‌آید. توزیع ویگنر متقاطع دو تابع $f(t)$ و $h(t)$ که با رابطه (پ-۳) تعریف می‌شود، فرا خوانده می‌شود:

$$W[f, h](t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \bar{h}\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (پ-۳)$$

توزیع ویگنر $f(t)$ عبارت است از $Wf(t, \omega) = W[f, f](t, \omega)$. چون توزیع ویگنر درجه دو است، از تجزیه اتمی $f(t)$ ، به دست می‌آید (مالات و ژانگ، ۱۹۹۳):

$$Wf(t, \omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \left| \langle R^n f, g_{\gamma_n} \rangle \right|^2 Wg_{\gamma_n}(t, \omega) + \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{\substack{m=0 \\ m \neq n}}^{+\infty} \langle R^n f, g_{\gamma_n} \rangle \overline{\langle R^m f, g_{\gamma_m} \rangle} W[g_{\gamma_n}, g_{\gamma_m}](t, \omega) \quad (پ-۴)$$

مجموع دوگانه متناظر با عبارت تداخلی توزیع ویگنر هستند. برای به دست آوردن تصویری واضح از توزیع انرژی $f(t)$ در صفحه زمان- بسامد این عبارت را حذف می‌کنند. بنابراین فقط اولین مجموع حفظ و تعریف می‌شود (مالات و ژانگ، ۱۹۹۳):

$$Ef(t, \omega) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left| \langle R^n f, g_{\gamma_n} \rangle \right|^2 Wg_{\gamma_n}(t, \omega) \quad (پ-۵)$$

از خصوصیات معروف اتساعی و انتقالی توزیع ویگنر و عبارت (پ-۲) یک اتم زمان- بسامد، برای $\gamma(s, u, \xi)$ به دست می‌آید:

$$Wg_{\gamma}(t, \omega) = Wg\left(\frac{t-u}{s}, s(\omega - \xi)\right) \quad (پ-۶)$$

و بنابراین

$$Ef(t, \omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \left| \left\langle R^n f, g_{\gamma_n} \right\rangle \right|^2 Wg\left(\frac{t-u_n}{s_n}, s_n(\omega - \xi_n)\right) \quad (\text{پ-۷})$$

توزیع ویگنر همچنین رابطه (پ-۸) را برآورده می‌کند:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Wg(t, \omega) dt d\omega = \|g\|^2 = 1 \quad (\text{پ-۸})$$

پس رابطه بقای انرژی دلالت بر این دارد که

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Ef(t, \omega) dt d\omega = \|f\|^2 \quad (\text{پ-۹})$$

می‌توان $Ef(t, \omega)$ را در حکم چگالی انرژی f در صفحه زمان- بسامد (t, ω) تفسیر کرد. برخلاف توزیع ویگنر- ویل، عبارت تداخلی در اینجا وجود ندارند.