

ارائه روشی برای ترکیب ژئوئید حاصل از GPS/Leveling با گرانی‌سنجی در یک

مسئله مقدار مرزی تعیین ژئوئید

علیرضا آزموده اردلان^{۱*} و عبدالرضا صفری^۲

^۱دانشیار گروه مهندسی نقشه‌برداری، قطب علمی مهندسی نقشه‌برداری و مقابله با سوانح طبیعی، پردیس دانشکده‌های فنی دانشگاه تهران، ایران
^۲استادیار گروه مهندسی نقشه‌برداری، قطب علمی مهندسی نقشه‌برداری و مقابله با سوانح طبیعی، پردیس دانشکده‌های فنی دانشگاه تهران، ایران

(دریافت: ۸۵،۴،۲۴، پذیرش نهایی: ۸۷،۴،۳)

چکیده

امروزه تعیین ژئوئید به صورت نقطه‌ای از تلفیق اطلاعات ترازایی با GPS (ژئوئید GPS/Leveling) به صورت گسترده مورد استفاده قرار گرفته است. در این مقاله از داده‌های ژئوئید GPS/Leveling به عنوان یک مقدار مرزی در کنار سایر مقادیر مرزی در مسئله تعیین ژئوئید استفاده شده است. الگوریتم مورد استفاده در این روش را می‌توان در مراحل محاسباتی آن به صورت زیر خلاصه کرد: (۱) حذف اثرات توپوگرافی جهانی و جرم‌های در فاصله دور از راه بسط هارمونیک‌های بیضوی تا درجه و مرتبه 360/360 به همراه میدان گریز از مرکز بیضوی از مشاهدات گرانی روی سطح زمین با استفاده از مختصات GPS نقاط. (۲) حذف اثرات جرم‌های واقع در فاصله نزدیک از راه حل تحلیلی انتگرال نیوتن در دستگاه تصویر هم مساحت استوانه‌ای بیضوی مرجع. (۳) تشکیل معادلات مربوط به انتقال به سمت پایین مشاهدات شتاب گرانی تصحیح شده طی مراحل ۱ و ۲ از سطح زمین به پتانسیل جاذبه روی بیضوی مرجع با استفاده از مختصات GPS نقاط محاسبه. (۴) محاسبه ژئوئید GPS/Leveling. (۵) تشکیل معادلات مربوط به تبدیل ارتفاع ژئوئید حاصل از مرحله ۴ به پتانسیل جاذبه روی بیضوی مرجع از راه فرمول برونز بیضوی. (۶) حل توأم معادلات مربوط به مراحل ۳ و ۴ به منظور تعیین پتانسیل جاذبه روی بیضوی مرجع از راه کم‌ترین مربعات. (۷) بازگرداندن اثرات حذف شده به پتانسیل جزیی حاصل از مرحله ۶. (۸) تبدیل پتانسیل حاصل از مرحله ۷ به ارتفاع ژئوئید از راه فرمول برونز بیضوی. به منظور بررسی موردی روش ارائه شده، ژئوئید دقیق ایران بر مبنای مشاهدات گرانی و GPS/Leveling تعیین و نتایج آن ارائه شده است.

واژه‌های کلیدی: ژئوئید، GPS/Leveling، Geodetic Boundary Value Problem (GBVP)، مسئله مقدار دومرزی ثابت-آزاد، انتقال فروسو، پایدارسازی

A methodology for combination of GPS/Leveling geoid as boundary data with the gravity boundary data within a gravimetric boundary value problem

Ardalan, A. A¹. and Safari, A².

¹Associate Professor, Department of Surveying and Geomatics Engineering, Center of Excellence in Surveying Engineering and Disaster Prevention, University of Tehran, Iran

²Assistant Professor, Department of Surveying and Geomatics Engineering, Center of Excellence in Surveying Engineering and Disaster Prevention, University of Tehran, Iran

(Received: 15 Jul 2006, Accepted: 23 Jun 2008)

Abstract

Nowadays, combination of GPS heights with orthometric heights, derived from precise leveling, is broadly used to obtain point-wise solutions of the geoid, which is called

“GPS/Leveling geoid”. The “GPS/Leveling geoid” is commonly used to constrain the gravimetric geoid solutions in a least squares surface fitting process. In this paper, unlike the usual application, the “GPS/Leveling geoid” is used as a boundary data. More specifically, in this paper we have developed a methodology for combination of “GPS/Leveling geoid”, as the boundary data, with other geodetic boundary data within the Fixed-Free Two-Boundary Value Problem (FFTBP) for geoid computations. The proposed methodology can be explained algorithmically as follows:

1. Removal of the global topography and terrain effects via ellipsoidal harmonic expansion to degree and order 360 plus the centrifugal effect from the gravity boundary data at the surface of the Earth using the known GPS coordinates of the boundary points.
2. Removal of the local terrain masses using analytical solution of the Newton integral in the “cylindrical equiareal map projection” of the reference ellipsoid.
3. Formation of integral equations of the Abel-Poisson type for the harmonic residual gravity boundary data at the surface of the Earth, derived from the aforementioned remove steps.
4. Linearization and discretization of the formulated integral equations.
5. Application of the “GPS/Leveling geoid” within the ellipsoidal Bruns formula as the constraints to the system of equations developed in step (4) for the residual gravity data.
6. Least squares solution of the developed constraint problem of step (5), to estimate incremental gravitational potential values over the solution grid used for linearization in step (4) on the surface of the reference ellipsoid.
7. Restoration of the removed effects of steps (1) and (2) over the grid points on the reference ellipsoid.
8. Application of the Bruns formula to compute point-wise geoid over the grid points on the reference ellipsoid.

As a case study the proposed method is used for the geoid computation within the geographical region of Iran based on gravity and GPS/Leveling geoid as boundary data. The numerical results show the success of the methodology.

Finally the advantages of the proposal methodology can be summarized as follows:

1. Strictly following the principle of Gravimetric Boundary Value Problems (GBVP) for the geoid computation
2. Increasing the degree of freedom of the GBVP from a statistical point of view.
3. Making the downward continuation step of the GBVP solution more stable.

Key words: Geoid, GPS/Leveling, Boundary Value Problem (BVP), Fixed-Free two BVP, Downward continuation

۱ مقدمه

در جوامع ژئودزی شکل گرفت و امروزه تعیین ژئوئید در شبکه‌های ترازیبی دقیق تحت عنوان GPS/Leveling از روش‌های پر طرفدار، به خصوص مقاصد اجرایی و مهندسی شده است. علت این علاقه، در سهولت تعیین موقعیت و شاید پیچیده بودن تعیین ژئوئید با حل مسائل مقدار مرزی با استفاده از مشاهدات گرانی زمینی، هوایی و

با آغاز به کارگیری روش‌های تعیین موقعیت ماهواره‌ای همچون GPS، فکر تعیین ارتفاع بیضوی (h) با استفاده از سامانه‌های تعیین موقعیت ماهواره‌ای در نقاط ترازیبی دقیق دارای ارتفاع ارتومتریک (H) به منظور تعیین ژئوئید N به صورت

$$N = h - H \quad (1)$$

مشاهدات گرانی و تلفیق بهینه آن با مسائل مقدار مرزی تعیین ژئوئید از نکات کماکان حل نشده است. اقدامی که تقریباً به صورت گسترده از سوی همه ژئودزین‌ها در مورد به کارگیری اطلاعات GPS/Leveling صورت گرفته است، تعیین ژئوئید با استفاده از حل مسائل مقدار مرزی و سپس برازش ژئوئید حاصل به ژئوئید به دست آمده از GPS/Leveling با استفاده از تبدیل هفت پارامتری کانفرمال بوده است که از نمونه‌های اخیر این روش، می‌توان به کوتساکیس و سیدریس (۱۹۹۹) اشاره داشت. این راه تلفیق ژئوئید حاصل از GPS/Leveling با ژئوئید حاصل از حل مسائل مقدار مرزی دارای دو اشکال عمده است: (۱) ژئوئید حاصل از GPS/Leveling چه از نظر ارتفاعی و چه از نظر دقت از ارتفاع ارتومتریک و چه از نظر مشاهدات GPS دارای محدودیت‌ها و خطاهای خاص خود است و چه بسا در بسیاری از مواقع حتی دارای دقتی کم‌تر از ژئوئید حاصل از روش‌های مبتنی بر حل مقادیر مرزی است. بدین لحاظ برازش ژئوئید حاصل از روش‌های مبتنی بر حل مقادیر مرزی به ژئوئید نه فقط باعث افزایش دقت ژئوئید حاصل نشده بلکه می‌تواند موجب کاهش دقت آن نیز شود (۲) اگر حتی فرض کنیم که ژئوئید به دست آمده از GPS/Leveling بدون خطا و یا دارای دقت بسیار زیادی باشد، برازش ژئوئید GPS/Leveling به آن موجب حاصل شدن رویه‌ای خواهد بود که دیگر ژئوئید به معنای اکید آن نبوده بلکه تنها یک رویه برازش یافته بر ژئوئید بدون مبنای فیزیکی است. به منظور رفع مشکلات یادشده، در این مقاله اقدام به ارائه و به کارگیری روشی شده است که امکان تلفیق ژئوئید حاصل از GPS/Leveling را در کنار مشاهدات گرانی به مثابه یک مقدار مرزی، در مسائل مقدار مرزی تعیین ژئوئید میسر می‌سازد. بدین ترتیب امکان دادن وزن مناسب به ژئوئید GPS/Leveling که اکنون نوعی مقدار مرزی در مسئله تعیین ژئوئید محسوب می‌شود فراهم آمده

ماهوره‌ای برای مهندسین نقشه‌بردار دست اندر کار امور اجرایی نقشه‌برداری باشد.

به هر حال ژئوئیدی که از راه GPS/Leveling به دست می‌آید به صورت نقطه‌ای و محدود به محدوده تحت پوشش شبکه‌های ترازبایی دقیق است و نمی‌تواند نیاز کلی به ژئوئید را به صورت گسترده در کل سطح زمین برطرف کند. بدین لحاظ هم‌چنان تعیین ژئوئید با حل مسائل مقدار مرزی با استفاده از مشاهدات گرانی بسیار معمول و حتی رو به گسترش است، چرا که اگر بتوان ژئوئید دقیقی به عنوان مثال برای کل کشور تعیین کرد با تعیین ارتفاع ژئوئید به روش‌های تعیین موقعیت ماهواره‌ای می‌توان به ارتفاع ارتومتریک دست یافت که مورد نیاز پروژه‌های عمرانی خصوصاً کاربردهای ساخت کانال‌های آبی و پروژه‌هایی همچون ساخت سدها و مخازن آبی است. با توجه به نیاز گسترده مهندسان ساختمان و نقشه‌برداران اجرایی، ژئودزین‌ها تلاش‌های بیش از پیشی را برای تعیین ژئوئید در حد دقت‌های قابل حصول از روش‌های تعیین موقعیت ماهواره‌ای آغاز کرده‌اند که ماحصل این تلاش‌ها نوآوری و بهبود در روش‌های تعیین ژئوئید با استفاده از حل مقادیر مرزی است. نمونه‌هایی از اقدامات صورت گرفته در این زمینه عبارت‌اند از کوخ و پوپ (۱۹۷۲)، بیاهامر و اسونسون (۱۹۸۳)، درمانیس (۱۹۹۳)، دنکر و تورگه (۱۹۹۳)، فورسبرگ (۱۹۹۴)، ونیچک و مارتینک (۱۹۹۴)، ونیچک و همکاران (۱۹۹۵)، سانسو (۱۹۹۵)، نجفی‌علمداری (۱۹۹۶)، سیاوس (۱۹۹۶)، فدرستون و همکاران (۱۹۹۸)، اردلان (۱۹۹۹)، سیاوس و آندریتسانوس (۱۹۹۹)، وجدا و ونیچک (۱۹۹۹)، بلیتسکوف (۱۹۹۹)، فدرستون و کربای (۲۰۰۰)، ونیچک و همکاران (۲۰۰۱)، اردلان و گرافارند (۲۰۰۱)، نواک و همکاران (۲۰۰۱)، اردلان و گرافارند (۲۰۰۴) و صفری و همکاران (۲۰۰۵).

در این میان، نحوه ترکیب ژئوئید GPS/Leveling با

مرزهای ثابت و آزاد و غیر خطی را با استفاده از معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی لاپلاس-پواسون برای داده‌های مرزی شتاب گرانی و GPS/Leveling که روی سطح زمین مشاهده شده‌اند تعریف می‌کنیم. به علاوه فرض بر معلوم بودن مختصات GPS همه نقاط گرانی است. بنابراین سطح قاره‌ای زمین (خشکی‌ها) M_h^2 مرزی ثابت را تشکیل می‌دهد. مقدار پتانسیل روی ژئوئید M_g^2 درحکم مرز آزاد (w_0) معلوم است. تعریف مسئله مقدار دو مرزی با مرزهای ثابت و آزاد غیرخطی در جدول ۱ آورده شده است. در جدول ۱، div grad ترکیب دو عملگر گرادینت و دیورژانس است که عملگر لاپلاس را تولید می‌کند. $E\{\bullet\}$ عملگر امید ریاضی، $\langle g | g \rangle$ عملگر ضرب داخلی، $\|g\|_2$ عملگر نرم ۲ در فضای هیلبرت، w پتانسیل گرانی، $\|\text{grad}w\|$ اندازه بردار شتاب گرانی، σ چگالی زمین، ω سرعت چرخش زمین، μ_γ امید اندازه بردار شتاب گرانی، μ_N امید ارتفاع ژئوئید حاصل از مشاهدات GPS/Leveling، G ثابت جهانی جاذبه، w_0 پتانسیل ژئوئید، x بردار موقعیت روی سطح زمین، X بردار موقعیت روی سطح بیضوی مرجع، e_ω بردار یکه در امتداد محور چرخش زمین، M جرم زمین، D فضای درونی زمین، ∂G_e^+ مرز خارجی پوسته زمین، ∂G_e^- مرز درونی پوسته زمین و $M_g^2, M_h^2, M_s^2, \mathbb{E}_{a,b}^2$ بیانگر رویه‌های در بر گیرنده داده‌های مرزی است. رابطه (۱) در این جدول معادله میدان پتانسیل گرانی در خارج سطح زمین، معادله (۲) معادله میدان پتانسیل گرانی در درون زمین است که هر دو، از نوع معادلات دیفرانسیل پواسون هستند. رابطه (۳) نشان‌دهنده مقدار مرزی از نوع اندازه شتاب گرانی روی مرز معلوم (سطح زمین M_h^2)، رابطه (۴) نشان‌دهنده مقدار مرزی از نوع ارتفاع ژئوئید حاصل از GPS/Leveling روی سطح مرجع $\mathbb{E}_{a,b}^2$ ، معادله (۵) بیانگر مقدار مرزی از نوع پتانسیل (پتانسیل ژئوئید) بر روی

و در نتیجه جواب نهایی مسئله مقدار مرزی (ژئوئید دقیق) حاصل از جمیع اطلاعات گرانی موجود نیز اطلاعاتی GPS/Leveling به صورت منطبق بر تعریف ژئوئید براساس نظریه گوس و لیستینگ خواهد بود.

۲ مسئله مقدار دو مرزی غیر خطی با مرزهای ثابت و آزاد

ژئوئید بر طبق تعریف گاوس و لیستینگ سطحی هم‌پتانسیل است که با شرط کم‌ترین مربعات به سطح متوسط آب دریاها برازنده می‌شود. این تعریف شاید برای تعیین ژئوئید دریایی (ژئوئید در دریاها) به طور مستقیم مورد استفاده قرار گیرد، اما در خشکی، تعیین ژئوئید براساس فرمول برونز، نیازمند تعیین پتانسیل گرانی در سطح بیضوی مرجع است که در درون اجرام توپوگرافی قرار دارد. تعیین میدان گرانی در درون زمین براساس مشاهدات گرانی روی زمین، هوا و فضای اطراف آن از راه حل مسائل مقدار مرزی میسر است. تاریخچه مسئله مقدار مرزی تعیین ژئوئید، به استوکس باز می‌گردد. او در ۱۸۴۹ شکل بسته‌ای برای تبدیل بی‌هنجاری‌های جاذبه تعریف شده روی سطح کره S_R^2 به بی‌هنجاری پتانسیل روی سطح کره ارائه کرد که سر آغاز استفاده از مسائل مرزی در ژئودزی به منظور تعیین ژئوئید محسوب می‌شود.

مهم‌ترین مشکلات روش استوکس عبارت‌اند از (مولودنسکی، ۱۹۵۸):

۱. نیاز انتقال مشاهده شتاب گرانی از روی سطح زمین به سطح ژئوئید (انتقال به سمت پایین مشاهدات به سطح مجهول ژئوئید).
 ۲. نیاز محاسبه ارتفاع ارتومتریک قبل از محاسبه ژئوئید (مبداء ارتفاع ارتومتریک سطح مجهول ژئوئید است).
- در اینجا برای تعیین ژئوئید مسئله مقدار دو مرزی با

(oblique) است. مسئله غیر خطی است، چرا که ارتباط بین داده‌های شتاب گرانی با پتانسیل ارتباطی غیر خطی است و به علاوه یک مسئله مایل است، چرا که امتداد بردار شتاب گرانی روی مرزی یا همان سطح زمین، عمود نیست.

مرز آزاد (سطح ژئوئید M_g^2) و رابطه (۶) شرط میل مقدار پتانسیل گرانی به سمت صفر با سرعت همگرایی عکس فاصله است، که شرط پایداری جواب در بی‌نهایت محسوب می‌شود. این مسئله، مسئله مقدار مرزی غیر خطی و مایل

جدول ۱. مسئله مقدار دو مرزی غیرخطی با مرزهای ثابت و آزاد.

1. $\text{div grad } w(\mathbf{x}) = 2\omega^2$ (outside the Earth's masses)	$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / \mathcal{D} \cup \partial \mathcal{G}_e^+$
2. $\text{div grad } w(\mathbf{x}) = -4\pi G\sigma + 2\omega^2$ (inside the surface of the Earth)	$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{D} \cup \partial \mathcal{G}_e^-$
3. $E\{\ \text{grad} w\ \} = \mu_\gamma$ (boundary data of the type modulus of gravity from gravimetry)	$\forall \mathbf{x} \in \partial \mathcal{G}_e = M_g^2$
4. $E\{N\} = \mu_N$ (Boundary data of the type Geoidal heights from GPS/Leveling data)	$\forall \mathbf{x} \in \partial \mathcal{G}_e = M_g^2$
5. $w(\mathbf{x}) = w_0$ (Boundary data at the fixed boundary of the type geoids potential)	$\forall \mathbf{x} \in \partial \mathcal{G}_e = M_g^2$
6. $w(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \omega^2 \ \mathbf{x} - \langle \mathbf{x} \mathbf{e}_\omega \rangle \mathbf{e}_\omega\ _2^2 + \frac{gm}{\ \mathbf{x}\ _2} + \mathcal{O}_w\left(\frac{1}{\ \mathbf{x}\ _2^3}\right) \ \mathbf{x}\ _2 \rightarrow \infty$ (regularity condition at infinity)	

سرعت چرخشی زمین، ژئوئید GPS/Leveling و چگالی زمین به دو مؤلفه مرجع (نشان داده شده با حروف بزرگ) و تفاضلی یا باقی مانده (مشخص شده با پیشوند یونانی دلتا) است.

همه کمیت‌های فیزیکی به کار رفته در این مسئله را می‌توان به دو مؤلفه (۱) مرجع و (۲) تفاضلی یا باقی مانده تفکیک کرد (اردلان، ۱۹۹۹). جدول ۲، نشان‌دهنده این تفکیک برای چهار کمیت اندازه بردار شتاب گرانی،

جدول ۲. تقسیم کمیت‌های واقعی به دو بخش کمیت مرجع و کمیت تفاضلی (صفری و همکاران، ۲۰۰۵).

$\gamma = \Gamma + \delta\Gamma$ $N(\mathbf{X}) = \delta N(\mathbf{X}) + N_R(\mathbf{X})$	$\omega^2 = \Omega^2 + 2\langle \Omega \delta\Omega \rangle + \delta\Omega^2$ $\sigma = \Sigma + \delta\Sigma$
--	---

کمیت‌های تفاضلی هارمونیک (صادق در معادله دیفرانسیل لاپلاس) تبدیل می‌شود. جدول ۳ ارائه دهنده مسئله مقدار مرزی برای کمیت‌های تفاضلی هارمونیک خطی شده است.

پس از حذف بخش مرجع از مشاهدات، مسئله مقدار دو مرزی غیر خطی با مرزهای ثابت و آزاد در فضای گرانی قابل خطی‌سازی است. همچنین بدین ترتیب، مسئله مقدار دو مرزی، به مسئله مقدار دو مرزی برای

جدول ۳. مسئله مقدار دومرزی خطی با مرزهای ثابت و آزاد.

$\begin{aligned} \operatorname{div} \operatorname{grad} \delta W(\mathbf{x}) &= 0 \\ \operatorname{div} \operatorname{grad} \delta W(\mathbf{x}) &= -4\pi\delta\Sigma(\mathbf{x}) \\ \delta\Gamma(\mathbf{x}) &= \nabla_{\mathbf{e}_r} \delta W(\mathbf{x}) \end{aligned}$	$\begin{aligned} \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / \mathcal{D} \cup \partial\mathcal{G}_e^+ \\ \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D} \cup \partial\mathcal{G}_e^- \\ \forall \mathbf{x} \in \partial\mathcal{G}_e^+ = \mathbb{M}_h^2 \end{aligned}$	$\left. \begin{array}{l} \text{Field Diff. Equ.} \\ \\ \end{array} \right\}$
$\begin{aligned} \delta N(\mathbf{X}) &= \delta W(\mathbf{X}) \frac{\varepsilon^2 \cosh \eta (\cosh^2 \eta - \cos^2 \phi)^{\frac{1}{2}}}{\text{gm}} \\ w_0 &= W_0(\mathbf{x}) + \delta W_0(\mathbf{x}) \end{aligned}$	$\begin{aligned} \forall \mathbf{X} \in \mathbb{E}_{a,b}^2 \\ \forall \mathbf{x} \in \partial\mathcal{G}_i = \mathbb{M}_g^2 \end{aligned}$	
$\lim_{\ \mathbf{x}\ _2 \rightarrow \infty} \delta W(\mathbf{x}) = \mathcal{O}_{\delta w} \left(\frac{1}{\ \mathbf{x}\ _2^{L+1}} \right)$		$\left. \begin{array}{l} \text{Regularity condition} \\ \text{at Infinity} \end{array} \right\}$

بیضوی می‌تواند درحکم یک معادله مشاهده به‌کار رود. با داشتن مقادیر تفاضلی شتاب گرانی می‌توان از راه انتگرال آبل-پواسون بیضوی، پتانسیل جاذبه تفاضلی $\delta W(\mathbf{X})$ را روی بیضوی مرجع $\mathbb{E}_{a,b}^2$ به‌دست آورد (اردلان، ۱۹۹۹ و صفری و همکاران، ۲۰۰۵). در جدول ۴ انتگرال آبل-پواسون بیضوی برای اندازه شتاب گرانی تفاضلی ارائه شده است.

در جدول ۳، $\nabla_{\mathbf{e}_r}$ نشان دهنده مشتق امتدادی در امتداد بردار یکه \mathbf{e}_r است، که در امتداد بردار شتاب گرانی مرجع Γ قرار دارد. برای بخش بدون جرم فضای بیرونی زمین، مقادیر مرزی $\delta\Gamma(\mathbf{x})$ در انتگرال آبل-پواسون صدق می‌کنند. بنابراین چنانچه به‌دنبال پتانسیل گرانی تفاضلی $\delta W(\mathbf{X})$ روی بیضوی مرجع $\mathbb{E}_{a,b}^2$ باشیم، انتگرال آبل-پواسون

جدول ۴. انتگرال آبل-پواسون بیضوی برای شتاب گرانی تفاضلی.

معادله انتگرال آبل-پواسون در فرم پیوسته:

$$\begin{aligned} \delta\Gamma(\mathbf{x}) &= \frac{1}{\sqrt{g_{\lambda\lambda}}} \frac{\Gamma_\lambda}{\|\Gamma\|_2} \frac{1}{S_{\mathbb{E}_{a,b}^2}^2} \iint_{\mathbb{E}_{a,b}^2} ds' \varpi(\phi') \frac{\partial K^L(\lambda, \phi, \eta; \lambda', \phi', \eta_0)}{\partial \lambda} \delta W^L(\lambda', \phi') \\ &+ \frac{1}{\sqrt{g_{\phi\phi}}} \frac{\Gamma_\phi}{\|\Gamma\|_2} \frac{1}{S_{\mathbb{E}_{a,b}^2}^2} \iint_{\mathbb{E}_{a,b}^2} ds' \varpi(\phi') \frac{\partial K^L(\lambda, \phi, \eta; \lambda', \phi', \eta_0)}{\partial \phi} \delta W^L(\lambda', \phi') \\ &+ \frac{1}{\sqrt{g_{\eta\eta}}} \frac{\Gamma_\eta}{\|\Gamma\|_2} \frac{1}{S_{\mathbb{E}_{a,b}^2}^2} \iint_{\mathbb{E}_{a,b}^2} ds' \varpi(\phi') \frac{\partial K^L(\lambda, \phi, \eta; \lambda', \phi', \eta_0)}{\partial \eta} \delta W^L(\lambda', \phi') \end{aligned}$$

ادامه جدول ۴.

معادله انتگرال آبل - پواسون در فرم گسسته:

$$\delta\Gamma(\mathbf{x}) = \left(\frac{1}{\sqrt{g_{\lambda\lambda}}} \frac{\Gamma_{\lambda}}{\|\Gamma\|} \frac{1}{S_{\mathbb{E}_{a,b}^2}} \sum_{i=1}^{i_{\max}} \sum_{j=1}^{j_{\max}} a \sqrt{b^2 + \varepsilon^2 \sin^2 \phi_{ij}} \cos \phi_{ij} \times \Delta\lambda' \Delta\phi' \varpi(\phi') \frac{\partial K^L(\lambda, \phi, \eta; \lambda', \phi', \eta_0)}{\partial \lambda} \right. \\ + \frac{1}{\sqrt{g_{\phi\phi}}} \frac{\Gamma_{\lambda}}{\|\Gamma\|} \frac{1}{S_{\mathbb{E}_{a,b}^2}} \sum_{i=1}^{i_{\max}} \sum_{j=1}^{j_{\max}} a \sqrt{b^2 + \varepsilon^2 \sin^2 \phi_{ij}} \cos \phi_{ij} \times \Delta\lambda' \Delta\phi' \varpi(\phi') \frac{\partial K^L(\lambda, \phi, \eta; \lambda', \phi', \eta_0)}{\partial \phi} \\ + \left. \frac{1}{\sqrt{g_{\eta\eta}}} \frac{\Gamma_{\lambda}}{\|\Gamma\|} \frac{1}{S_{\mathbb{E}_{a,b}^2}} \sum_{i=1}^{i_{\max}} \sum_{j=1}^{j_{\max}} a \sqrt{b^2 + \varepsilon^2 \sin^2 \phi_{ij}} \cos \phi_{ij} \times \Delta\lambda' \Delta\phi' \varpi(\phi') \frac{\partial K^L(\lambda, \phi, \eta; \lambda', \phi', \eta_0)}{\partial \eta} \right) \delta W^L(\lambda', \phi')$$

حد بالای شبکه انتگرال گیری پس از گسسته سازی را روی بیضوی مرجع $\mathbb{E}_{a,b}^2$ نشان می دهند.

۳ بررسی عددی: تعیین ژئوئید دقیق ایران

در این بخش نتایج ژئوئید دقیق ایران براساس روش بیان شده در بخش های قبلی ارائه می شود. شکل ۱ نشان دهنده ایستگاه های گرانی در منطقه ایران است. شکل ۲ نشان دهنده توزیع نقاط GPS/Leveling، دریافت شده از سازمان نقشه برداری کشور، در منطقه جغرافیایی ایران است. شکل ۳ نشان دهنده فایل DTM، $1\text{km} \times 1\text{km}$ استخراج شده از بانک داده NIMA برای تصحیح جرم های واقع در فاصله نزدیک است. بعد از حذف اثر میدان تا درجه و مرتبه ۳۶۰ بایستی از روی داده های ارتفاعی نیز حذف شود. شکل ۴ نشان دهنده DTM، $1\text{km} \times 1\text{km}$ حاصل از بسط هارمونیک های تا درجه و مرتبه ۳۶۰ است. شکل ۵ نشان دهنده نقشه توپوگرافی تفاوت ارتفاع بین ارتفاع استخراج شده از بانک داده NIMA و ارتفاع استخراج شده از بسط هارمونیک های تا درجه و مرتبه ۳۶۰ است. شتاب گرانی تفاضلی بعد از حذف اثر میدان مرجع و اثر جرم های محلی در شکل ۶ نشان داده شده است. در شکل ۷ نیز تغییرات ژئوئید

در جدول ۴، $\{\Gamma_{\lambda}, \Gamma_{\phi}, \Gamma_{\eta}\}$ سه مؤلفه بردار شتاب گرانی مرجع Γ بر حسب دستگاه مختصات منحنی الخط بیضوی ژاکوبی (اردلان، ۱۹۹۹) با مؤلفه های $\{\lambda, \phi, \eta\}$ است، $\varpi(\phi')$ تابع وزن است که موجب تعامد هارمونیک های بیضوی روی سطح بیضوی مرجع می شود. $S_{\mathbb{E}_{a,b}^2}$ مساحت سطح بیضوی مرجع $\mathbb{E}_{a,b}^2$ و $\{g_{\lambda\lambda}, g_{\phi\phi}, g_{\eta\eta}\}$ مؤلفه های تانسور متریک دستگاه مختصات منحنی الخط بیضوی ژاکوبی است (اردلان، ۱۹۹۹). K^L کرنل (هسته) تغییر یافته انتگرال آبل - پواسون پس از حذف میدان مرجع است. اندیس بالای L در اینجا نشان دهنده درجه و مرتبه ماکزیموم بسط هارمونیک های بیضوی به کار رفته در میدان مرجع است که با توجه به حذف آن از روی مشاهدات، لازم است این اثر از روی کرنل نیز حذف شود و بدین ترتیب هسته (کرنل) تغییر شکل یافته K^L حاصل می شود. برای جزئیات بیشتر در مورد هسته تغییر شکل یافته به فصل دوم پایان نامه (اردلان، ۱۹۹۹) مراجعه فرمایید. $\{a, b, \varepsilon\}$ به ترتیب نیم قطر بزرگ، نیم قطر کوچک و خروج از مرکز خطی بیضوی مرجع $\mathbb{E}_{a,b}^2$ است. $\Delta\lambda' \Delta\phi'$ المان سطحی انتگرال آبل - پواسون پس از گسسته سازی بیانگر قدرت تفکیک انتگرال گیری نیز هست. i_{\max} و j_{\max} نیز

شکل ۱۱ نشان‌دهنده پتانسیل واقعی در سطح بیضوی مرجع است. در مرحله پایانی پتانسیل گرانی در سطح بیضوی مرجع WGD2000 (گرافارند و اردلان، ۱۹۹۹) از راه فرمول برونز به ارتفاع ژئوئید نسبت به بیضوی مرجع WGD2000 تبدیل می‌شود. ژئوئید دقیق ایران در شکل ۱۲ نشان داده شده است. لازم به ذکر است که سیستم تصویر مورد استفاده در رسم شکل‌های پیش‌گفته، سیستم تصویر مخروطی هم‌فاصله با مدارهای استاندارد $30^{\circ} N$ و $35^{\circ} N$ نسبت به بیضوی مرجع WGD2000 است.

برای نشان دادن میزان تاثیر مشاهدات GPS/Leveling در ژئوئید دقیق محاسبه شده، در دو حالت زیر اقدام به محاسبه ژئوئید ایران شد: (۱) محاسبه ژئوئید با استفاده از مشاهدات گرانی به تنهایی (۲) محاسبه ژئوئید با استفاده از مشاهدات توام گرانی و GPS/Leveling. نتایج مقایسه ژئوئید محاسبه شده در دو مرحله با نقاط GPS/Leveling در جداول ۵ و ۶ آورده شده است.

همان‌طوری که در نتایج دیده می‌شود، استفاده از ژئوئید GPS/Leveling در نقش مقدار مرزی در مسئله مقدار مرزی باعث بهبود مسئله شده است.

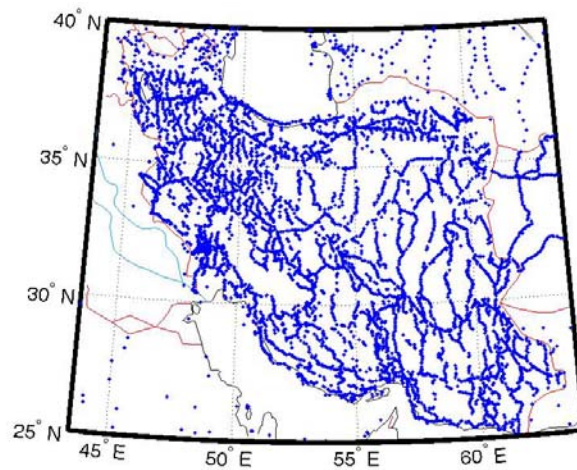
GPS/Leveling بعد از حذف اثرات میدان مرجع و اثر جرم‌های محلی مشخص شده است. برای محاسبه اثر جرم‌های محلی روش ارائه شده مورد استفاده بوده است. شتاب گرانی تفاضلی حاصل با اعمال انتگرال آبل-پواسون به مقادیر پتانسیل جاذبه در سطح بیضوی مرجع WGD2000 تبدیل می‌شوند. انتگرال آبل-پواسون انتگرال فرد هولم نوع اول است و لذا تبدیل شتاب گرانی تفاضلی به پتانسیل گرانی تفاضلی در سطح بیضوی مرجع یک مسئله ناپایدار بوده که بایستی پایدار شود. برای پایدارسازی مسئله انتقال به سمت پایین از روش ارائه شده در کوخ و گوشه (۲۰۰۲) استفاده شد. شکل ۸ تغییرات پارامتر پایدارسازی را در طی مراحل تکرار نشان می‌دهد. همان‌طوری که در شکل ۸ دیده می‌شود بعد از چند مرحله تکرار، مسئله همگرا شده و پارامتر پایدارسازی برابر $4.5117e-9$ به دست می‌آید. شکل ۹ نتیجه انتقال به سمت پایین بعد از پایدار ساختن مسئله را نشان می‌دهد. بعد از این مرحله چنانچه میدان پتانسیل جاذبه بیضوی مرجع از درجه و مرتبه $360/360$ و میدان گریز از مرکز به علاوه پتانسیل ناشی از جرم‌های محلی تا شعاع 55km را برگردانیم، پتانسیل واقعی در سطح بیضوی مرجع حاصل می‌شود.

جدول ۵. تفاوت ژئوئید دقیق با ژئوئید GPS/Leveling در تعداد ۴۸۲ نقطه.

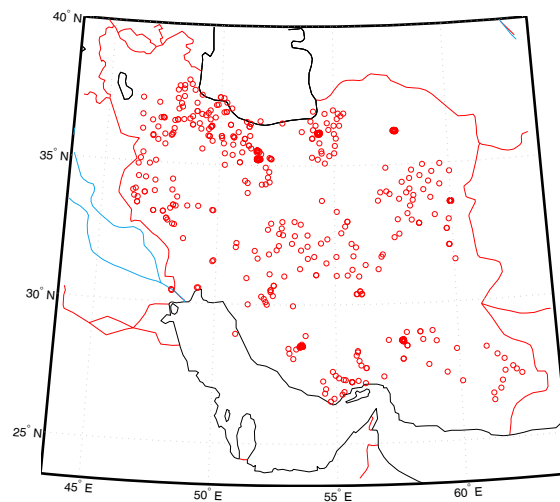
	Max (m)	Mean	Min	Std
$N - N^{\text{GPS/Leveling}}$	4.17	0.43	-4.06	1.33

جدول ۶. تفاوت ژئوئید دقیق با ژئوئید GPS/Leveling در تعداد ۴۸۲ نقطه.

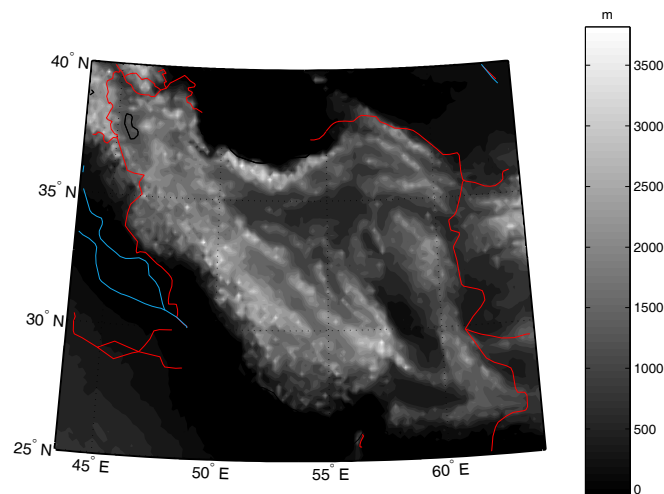
	Max (m)	Mean	Min	Std
$N - N^{\text{GPS/Leveling}}$	4.05	0.35	-3.33	1.26



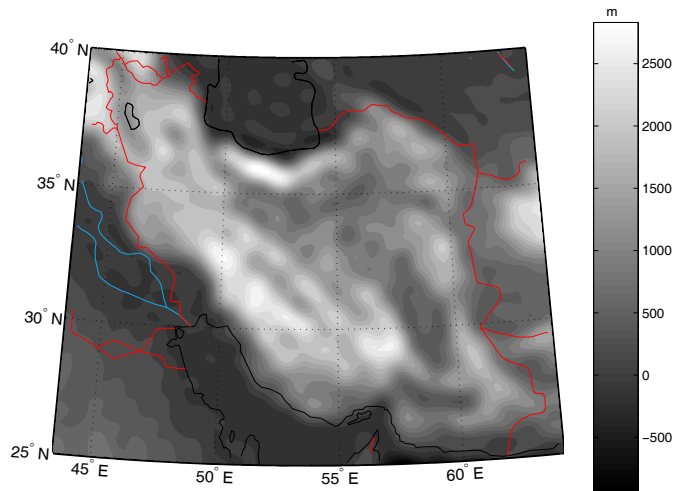
شکل ۱. پوشش تعداد ۸۴۸۳ نقطه گرانی زمینی در منطقه جغرافیایی ایران (اخذ شده از بانک جهانی داده‌های گرانی BGI).



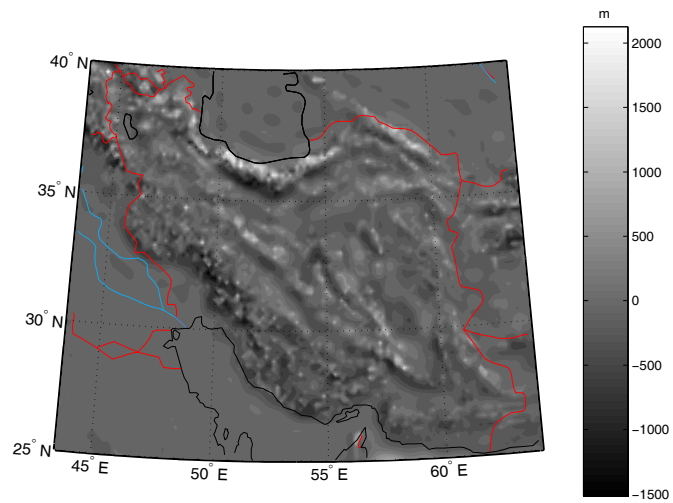
شکل ۲. پوشش تعداد ۴۸۲ نقطه GPS/LEVELLIN در ایران (اخذ شده از سازمان نقشه‌برداری کشور).



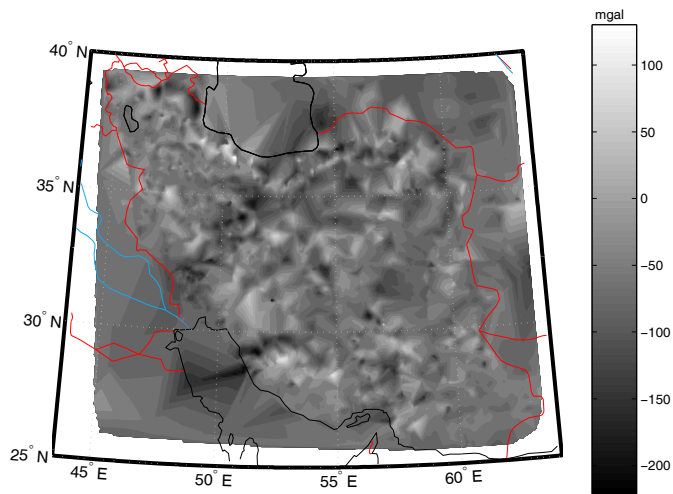
شکل ۳. توپوگرافی منطقه جغرافیایی ایران، براساس DTM، $1\text{km} \times 1\text{km}$ مورد استفاده در حل مسئله مقدار مرزی.



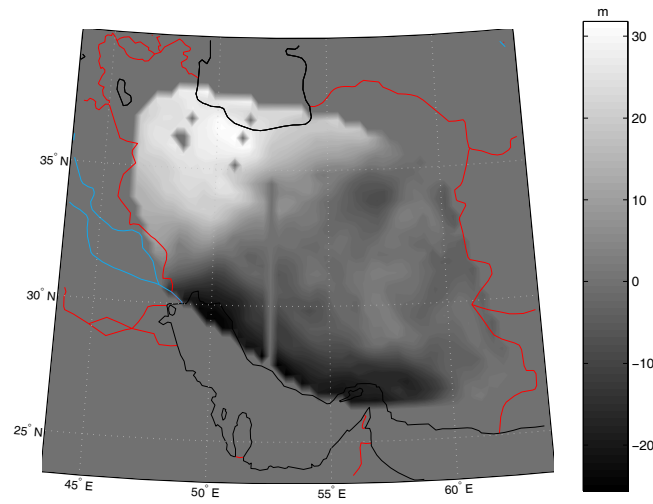
شکل ۴. طول موج‌های بلند توپوگرافی (طول موج‌های تا درجه و مرتبه ۳۶۰).



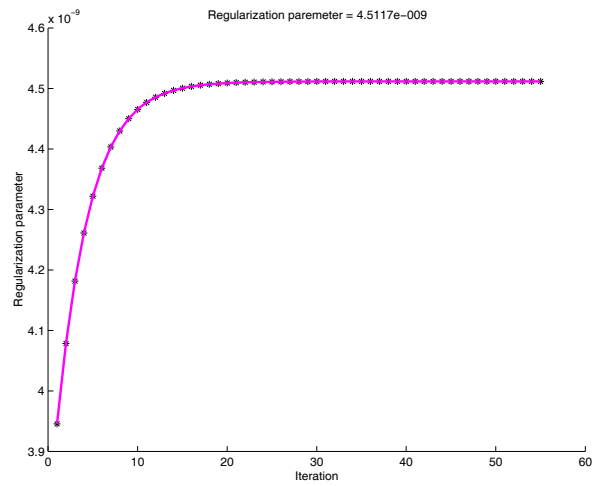
شکل ۵. تفاوت ارتفاع بین ارتفاع اخذ شده از بانک داده NIMA و ارتفاع به‌دست آمده از بسط هارمونیک‌های تا درجه و مرتبه ۳۶۰.



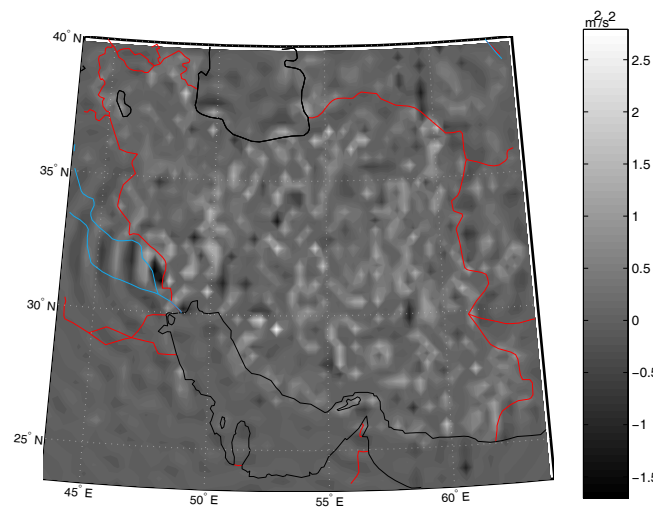
شکل ۶. شتاب گرانی تفاضلی بعد از حذف اثر میدان مرجع و اثر جرم‌های محلی.



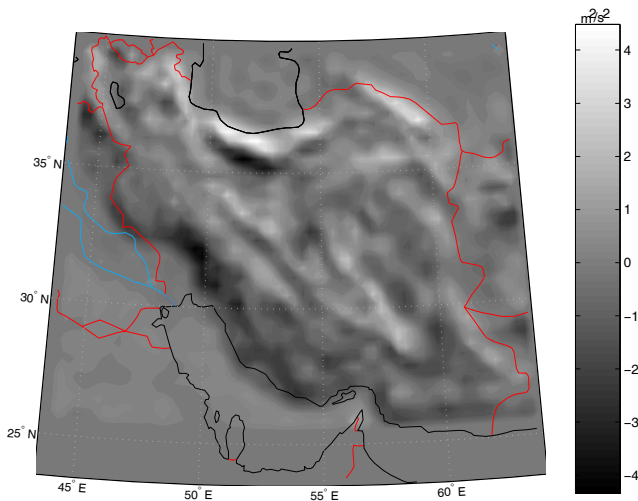
شکل ۷. ژئوئید حاصل از GPS/Leveling بعد از حذف اثر میدان مرجع و اثر جرم‌های محلی.



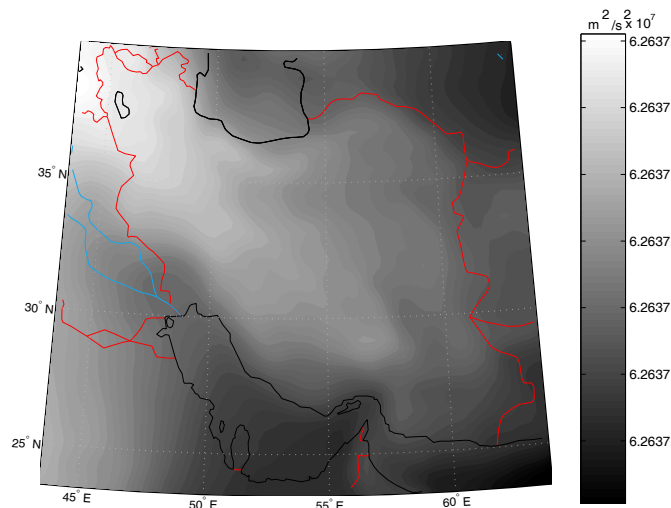
شکل ۸. منحنی تعیین پارامتر بهینه پایدارسازی به روش تکرار، پارامتر پایدارسازی بهینه مربوط به محل $4.5117e - 9$ در منحنی است.



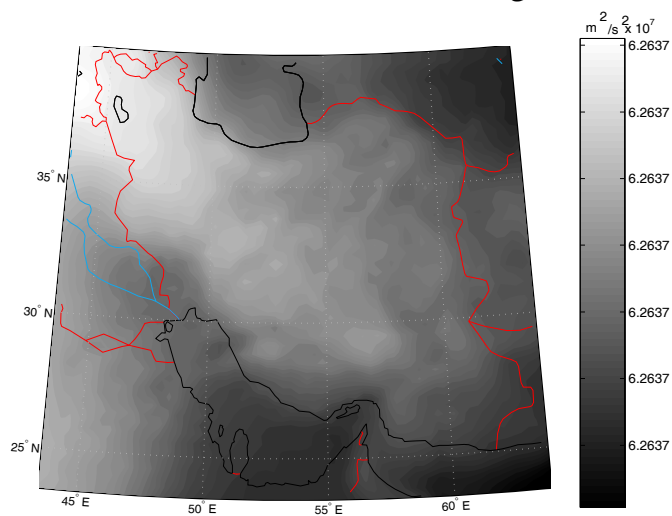
شکل ۹. مقادیر گرانی تفاضلی پس از انتقال به سمت پایین از راه حل معکوس انتگرال آبل-پواسون پایدار شده.



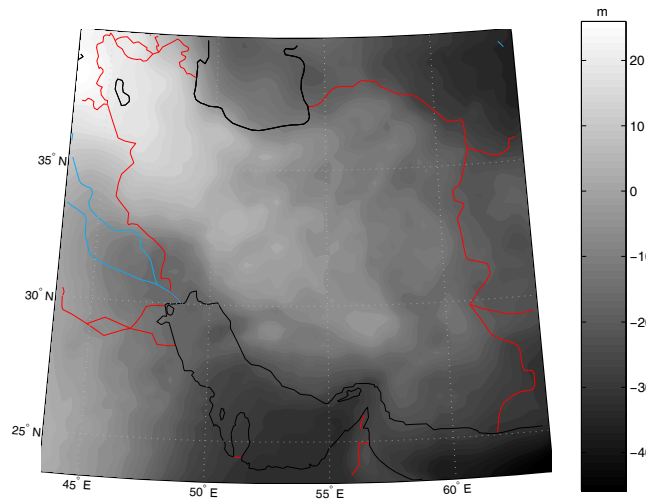
شکل ۱۰. اثر توپوگرافی روی بیضوی مینا. لازم است این اثر به مقادیر گرانی جزئی افزوده شود.



شکل ۱۱. پتانسیل گرانی مرجع روی بیضوی مینا حاصل از بسط هارمونیک‌های بیضوی تا درجه و مرتبه ۳۶۰.



شکل ۱۲. پتانسیل گرانی واقعی روی بیضوی، پس از افزودن اثرات حذف شده.



شکل ۱۳. ژئوئید دقیق به دست آمده برای ایران، از تلفیق ژئوئید GPS/Leveling در نقش یک مقدار مرزی در کنار مقادیر مرزی دیگر.

۸۱۵۱۰۰۷/۱/۰۱ تشکر و قدردانی می‌شود.

۴ بحث و نتیجه‌گیری

روشی برای تلفیق ژئوئید حاصل از GPS/Leveling با مشاهدات گرانی به مثابه یک مسئله مقدار مرزی جدید در مسئله مقدار دو مرزی ثابت آزاد ارائه و برای تعیین ژئوئید در منطقه جغرافیایی ایران به کار برده شد. بدین ترتیب از برازش ژئوئید حاصل از حل مسئله مقادیر مرزی به ژئوئید حاصل از GPS/Leveling پرهیز شده و در مقابل از ژئوئید حاصل از GPS/Leveling در نقش یک مقدار مرزی جدید استفاده شد. این روش که دقیقاً منطبق بر اصول ریاضی تعیین ژئوئید براساس حل مسائل مقادیر مرزی است، موجب: (۱) افزایش درجه آزادی (۲) پایداری بیشتر مسئله انتقال به سمت پایین (۳) افزایش دقت تعیین ژئوئید می‌شود. به کارگیری این روش در تعیین یک ژئوئید جدید برای ایران، اثباتی بر کارایی روش ارائه شده در عمل است.

تشکر و قدردانی

بدین وسیله از معاونت پژوهشی دانشگاه تهران به سبب حمایت مالی از این تحقیق در قالب طرح پژوهشی شماره

منابع

- Ardalan, A. A., 1999, High resolution regional geoid computation in the world geodetic Datum 2000 based upon collocation of linearized observational functionals of the type GPS, gravity potential and gravity intensity, Ph.D. thesis, Stuttgart university.
- Ardalan, A. A., and Grafarend, E. W., 2001, Ellipsoidal geoidal undulations (ellipsoidal Bruns formula): case studies. *J. Geodesy*, **75**, 544-552.
- Ardalan, A. A., and Grafarend, E. W., 2004, High-resolution geoid computation without applying Stokes's formula; case study: High-resolution geoid of Iran. *J. Geodesy*, **78**, 138-156.
- Ardalan, A. A., and Safari, A., 2004, Terrain correction on the multi-cylindrical equal area map projection of the surface of the reference ellipsoid: *J. Geodesy*, **78**, 114-123.
- Bjerhammer, A., and Svensson, L., 1983, On the geodetic boundary value problem for a fixed boundary surface- A satellite approach. *B. Geod.*, **57**, 382-393.
- Blitzkow, D., 1999, Toward a 10' resolution Geoid for South America: a comparison study. *Physics and chemistry of the earth, part A Solid Earth Geodesy*, **24**, 33-39.

- Tziavos, I. N., 1996, Comparisons of spectral techniques for geoid computations over large regions. *Geodesy*, **70**, 357-373.
- Tziavos, I. N., and Andritsanos, V. D., 1999, Recent geoid computations for the Hellenic area. *Physics and chemistry of the earth, part A Solid Earth Geodesy*, **24**, 91-96.
- Vajda, P., and Vanicek, P., 1999, Truncated geoid and gravity inversion for one point-mass anomaly: *J. Geodesy*, **73**, 58-66.
- Vanicek P., and Martinec, Z., 1994, The Stokes-Helmert scheme for the evaluation of a precise geoid. *Manuscr. Geodaet.*, **19**, 119-128.
- Vanicek, P., Najafi, M., Martinec, Z., Harrie, L., and Sjberg, L. E., 1995, Higher-degree Reference Field in the Generalized Stokes-Helmert Scheme for Geoid Computation. *J. Geodesy*, **70**, 176-182.
- Vanicek, P., Novak, P., and Martinec, Z., 2001, Geoid, Topography, and the Bouguer plate or shell. *J. Geodesy*, **75**, 210-215.
- Denker, H., and Torge, W., 1993, Present state and future developments of the European geoid: *Surv. Geophys.*, **14**, 433-447.
- Dermanis, A., 1993, A differential geometric approach to the formulation of geodetic boundary value conditions: *Manuscr. Geodaet.*, **18**, 201-218.
- Featherstone, W. E., Evans, J. D., and Olliver, J. G., 1998, A Meissl-modified Vanicek and Kleusberg kernel to reduce the truncation error in gravimetric geoid computations. *J. Geodesy*, **72**, 154-160.
- Featherstone, W. E., and Kirby, J. F., 2000, The reduction of aliasing in gravity anomalies and geoid heights using digital terrain data. *Geophys. J. Int.*, **141**, 204-212.
- Forsberg, R., 1994, Terrain effects in geoid computations. In *Lecture Notes, Int. school for deter. and use of geoid. Milano, Oct. 1994* pp: 101-134. IGeS, Milano.
- Grafarend, E. W., and Ardalan, A. A., 1999b, World Geodetic Datum 2000, *J. Geodesy*, **73**, 611-623.
- Koch, K. R., and Kushe, J., 2002, Regularization of geopotential determination from satellite data by variance components: *J. Geodesy*, **76**, 259-268.
- Koch, K. R., and Pope, A. J., 1972, Uniqueness and existence for the Geodetic Boundary Value Problem using the known surface of the Earth: *B. Geod.*, **106**, 467-475.
- Kotsakis, C., and Sideris, M. G., 1999, On the adjustment of combined GPS/Leveling/geoid networks. *J. Geodesy*, **73**, 412-421.
- Molodensky, M. S., 1958, New methods of studying the figure of the Earth: *B. Geod.*, **50**, 17-21.
- Najafi Alamdari, M., 1996, Contributions Towards the Computation of a Precise Regional Geoid. Ph.D. thesis, Department of Surveying Engineering, University of New Brunswick, Fredericton, N. B., Canada.
- Novak, P., Vanicek, P., Martinec, Z., and Veronneau, M., 2001, Effects of the spherical terrain on gravity and the geoid. *J. Geodesy*, **75**, 491-504.
- Safari, A., Ardalan, A. A., and Grafarend, E. W., 2005, A new ellipsoidal gravimetric, satellite altimetry, astronomic boundary value problem; case study: geoid of Iran. *J. Geodyn.*, **39**, 545-568.
- Sanso, F., 1995, The long road from measurements to boundary value problems in physical geodesy. *Manuscr. Geodet.*, **20**, 326-344.