

تعیین ژئوئید در جزایر با استفاده از حل مسئله مقدار مرزی گرانی سنجی - ارتفاع سنجی

ماهواره‌ای با مرزهای ثابت

بررسی خاص: تعیین ژئوئید در جزیره قشم

عبدالرضا صفری^{۱*}، یعقوب حاتم^۲ و مهدی شاه‌حیدری^۳

^۱استادیار، گروه مهندسی نقشه‌برداری، پردیس دانشکده‌های فنی، دانشگاه تهران، ایران

^۲کارشناس ارشد، سازمان نقشه‌برداری کشور، تهران، ایران

^۳دانشجوی کارشناسی ارشد ژئودزی، گروه مهندسی نقشه‌برداری، پردیس دانشکده‌های فنی، دانشگاه تهران، ایران

(دریافت: ۸۶/۸/۵، پذیرش نهایی: ۸۷/۴/۳)

چکیده

مسئله تعیین ژئوئید در جزایر، در کشورهای دارای جزایر متعدد به دلیل نیاز سامانه ارتفاعی یکسان از اهمیت زیادی برخوردار است. ولی نبود داده‌های شتاب گرانی با دقت زیاد در دریا، تعیین ژئوئید در جزایر را با مشکل مواجه ساخته است. از طرف دیگر پیدایش ارتفاع‌سنجی ماهواره‌ای تعیین ژئوئید را در مناطق اقیانوسی و دریاها امکان‌پذیر کرده است. در این مقاله روشی برای تعیین ژئوئید در جزایر با استفاده از یک مسئله مقدار مرزی گرانی‌سنجی - ارتفاع‌سنجی ماهواره‌ای با مرزهای ثابت ارائه شده است. روش مورد نظر با تعیین ژئوئید در جزیره قشم با موفقیت آزمایش شده است.

واژه‌های کلیدی: ارتفاع‌سنجی ماهواره‌ای، تعیین ژئوئید در جزایر، GPS/leveling، شتاب گرانی، روش‌های حساب تغییرات

Fixed gravimetric-altimetry boundary value problem for geoid determination on islands

Case study: Qeshm island

Safari, A¹., Hatam, Y². and Sha Haidary, M³.

¹Assistant Professor, Department of Surveying and Geomatics Engineering, Faculty of Engineering, University of Tehran, Iran

²Research Assistant, National Cartography Center, Tehran, Iran

³M.Sc. student of Geodesy, Department of Surveying and Geomatics Engineering, Faculty of Engineering, University of Tehran, Iran

(Received: 27 Oct 2007, Accepted: 23 Jun 2008)

Abstract

Precise geoid determination on islands suffers from the lack of accurate gravity data on the open seas. Nowadays, sub-microgal accuracy for the land gravity observations is obtainable. But the sea gravity data which are collected via shipborne techniques, due to the measuring environment at sea area, are usually highly noisy and are contaminated with various systematic errors.

On the other hand, satellite altimetry has provided a new source of information for geoid determination at sea area. It should be noted that satellite altimetry has accuracy at centimeter level which reaches decimeters at coastal. Such accuracy in geometric space is equivalent to microgal in gravity space, which is equivalent to microgal in gravity space. Therefore, one can see the altimetry data as a relatively accurate source of information for gravity applications.

With satellite altimetry observations at the sea area and accurate gravity data on the islands, we can define a gravimetric-altimetry boundary value problem. Geometry of the oceanic part of the Earth's surface is given by the altimetric data. Ergo the problem at the oceanic part is a fixed boundary value problem. At the continental part, now, GPS is operable. The availability of the GPS coordinates means the geometry of the continental part can be considered as known. Ergo, we deal with a fixed gravimetric-altimetry boundary value problem.

By applying variational techniques to the fixed gravimetric-altimetry boundary value problem the existence and uniqueness of its weak solution can be proved (Keller, 1996).

In this paper, using satellite altimetry observations on the open sea and gravity from gravimetry on the island, a fixed gravimetric-altimetry boundary value problem for geoid computations at islands has been developed. The problem is defined as follows:

$$\left. \begin{array}{l}
 1. \operatorname{div} \operatorname{grad} w(x) = 2\omega^2 \qquad \qquad \qquad \forall x \in \mathbb{R}^3 / \mathcal{D} \cup \partial \mathcal{G}_e^+ \\
 \text{(outside the Earth's masses)} \\
 2. \operatorname{div} \operatorname{grad} w(x) = -4\pi G\sigma + 2\omega^2 \qquad \qquad \qquad \forall x \in \mathcal{D} \cup \partial \mathcal{G}_e^- \\
 \text{(internal space plus boundary of the planet of the Earth)} \\
 3. E\{\|\operatorname{grad} w\|\} = \gamma(x) \qquad \qquad \qquad \forall x \in \partial \mathcal{G}_e = M_h^2 \\
 \text{(boundary value data of type modulus of gravity)} \\
 4. E\{h\} = h \qquad \qquad \qquad \forall x \in \partial \mathcal{G}_e = M_s^2 \\
 \text{(boundary value data of type satellite altimetry)} \\
 5. w(x) = w_0 \qquad \qquad \qquad \forall x \in \partial \mathcal{G}_e = M_g^2 \\
 \text{(equipotential value at the level of the geoid close to mean sea level)} \\
 6. w(x) = \frac{1}{2} \omega^2 \|x - \langle x | e_\omega \rangle e_\omega\|_2^2 + \frac{gm}{\|x\|_2} + \mathcal{O}_w\left(\frac{1}{\|x\|_2^3}\right) \qquad \|x\|_2 \rightarrow \infty \\
 \text{(regularity condition at infinity)}
 \end{array} \right\}$$

Where w is the gravity potential of the Earth, γ the norm of the gravity vector on the island, h geoid from satellite altimetry observations, σ mass density, ω the angular velocity and w_0 geoid potential.

The first step towards the solution of the proposed fixed-free two-boundary value problem is the linearization of the problem. After linearization we obtained an oblique boundary condition on the island and a Dirichlet condition on the sea area.

The algorithmic steps of the solution of the fixed garvimetric-altimetry boundary value problem for geoid computations at islands are as follows:

- Application of the ellipsoidal harmonic expansion complete up to degree and order 360 and of the ellipsoidal centrifugal field for removal of the effect of the global gravity from gravity intensity at the surface of the island.

- The removal from the gravity intensity at the surface of the Earth the effect of residual masses at the radius of up to 55 km from the computational point.
- Derivation marine geoid from satellite altimetry data.
- Application of the ellipsoidal harmonic expansion complete up to degree and order 360 and of ellipsoidal centrifugal field for removal of from the geoidal undulations derived from satellite altimetry the effect of the global gravity.
- The removal from geoidal undulations derived from satellite altimetry of the effect of water masses at the radius of up to 55 km from the computational point.
- Application of Koch and Kusche algorithm (Koch and Kusche, 2002) for derivation of disturbing gravity potential at the surface of the reference ellipsoid from residual gravity intensity and residual gravity potential of satellite altimetry data.
- Restoration of the removed effects on the surface of the reference ellipsoid.
- Application of ellipsoidal Bruns formula in order to compute geoid undulations.
- Computation of the geoid of Qeshm Island of Iran has successfully tested this methodology.

Key words: Satellite altimetry, Geoid computations on islands, GPS/leveling, Gravity, Variational methods

۱ مقدمه

ماهوره‌ای جایگزین داده‌های گرانی در دریا شده‌اند. بایستی توجه داشت که مشاهدات ارتفاع‌سنجی ماهواره‌ای دارای دقت سانتی‌متر در مناطق اقیانوسی است که معادل میکروگال در فضای گرانی است و در مناطق ساحلی دقت مشاهدات ارتفاع‌سنجی ماهواره‌ای به دسی‌متر کاهش می‌یابد که البته هنوز معادل چندده میکروگال و دقیق‌تر از مشاهدات گرانی دریایی است. برای جزئیات بیشتر در مورد دقت مشاهدات ارتفاع‌سنجی ماهواره‌ای آنزنهوفر و همکاران (۱۹۹۹) را ملاحظه کنید. با داشتن داده‌های حاصل از ارتفاع‌سنجی، امکان تعریف نوع دیگری از مسائل مقدار مرزی فراهم شده است که به مسائل مقدار آمیخته و مرزی گرانی‌سنجی - ارتفاع‌سنجی ماهواره‌ای یا مسئله‌های مقدار مرزی مخلوط (mixed boundary value problem) مشهور هستند. از جمله کارهای صورت گرفته در این زمینه می‌توان به آرنولد (۱۹۸۱ و ۱۹۸۴)، هولوتا (۱۹۸۲، ۱۹۸۳a و ۱۹۸۳b)، بیاهامر (۱۹۸۳)، هافمن - ولنهوف (۱۹۸۵)، جینگهای و زیاوپینگ (۱۹۹۷)، سونسن (۱۹۸۳ و ۱۹۸۸)، لمن (۱۹۹۹)، ساسردوت و سانسو

تعیین ژئوئید در کشورهایی که دارای جزایر متعددند به دلیل نیاز به یک سامانه ارتفاعی یکسان از اهمیت زیادی برخوردار است. تعیین ژئوئید در جزایر به دلیل نبود داده‌های شتاب گرانی با دقت زیاد در دریا با مشکلاتی همراه است. مشاهدات شتاب گرانی با دقت زیاد در داخل جزایر وجود دارد در حالی که در دریا داده‌های گرانی با دقت زیاد موجود نیست. مشاهدات گرانی دریایی که از طریق گرانی‌سنجی دریایی (shipborne gravimetry) حاصل می‌شود به دلیل عواملی نظیر خطاهای ناشی از تعیین موقعیت، مشکل تفکیک شتاب‌های حرکت کشتی از شتاب جاذبه، خطاهای صفر، خطاهای کالیبر کردن، خطاهای ضریب مقیاس و خطای ناشی از دما و رطوبت عمدتاً از دقت کمی برخوردارند (ونیچک و همکاران، ۱۹۸۷).

پیدایش ارتفاع‌سنجی ماهواره‌ای تعیین ژئوئید را در مناطق اقیانوسی و دریاها امکان‌پذیر کرده است. با استفاده از داده‌های ارتفاع‌سنجی ماهواره‌ای می‌توان سطح آب دریا را با دقت خوبی تعیین کرد. داده‌های ارتفاع‌سنجی

خارجی (زمین) را بتوان درحکم مرز ثابت در نظر گرفت. این امکان موجب تعریف مسائل مقدار مرزی ساده تری به نام مسائل مقدار مرزی با مرزهای ثابت شده است (کوخ و پوپ، ۱۹۷۲؛ بیاهامر و سونسون، ۱۹۸۳؛ درمانیس، ۱۹۹۳ و سانسو، ۱۹۹۵). در مسئله مقدار مرزی گرانی سنجی - ارتفاع سنجی ماهواره‌ای نوع سوم از یک مسئله مقدار مرزی با مرز ثابت در قسمت خشکی استفاده می‌شود. در روی سطح دریا نیز با داشتن اطلاعات توپوگرافی سطح دریا و ارتفاع سطح متوسط دریا از ارتفاع سنجی ماهواره‌ای می‌توان ارتفاع ژئوئید را محاسبه کرد و سپس با کاربرد فرمول معکوس برونز بیضوی پتانسیل را در نقاط گوناگون به دست آورد (اردلان و گرافارند، ۲۰۰۳). به دلیل معلوم بودن سطح دریا، مرز در قسمت دریا نیز مرزی ثابت است. لذا این مسئله یک مسئله مقدار آمیخته و مرزی با مرز ثابت است (لمن، ۲۰۰۰ و صفری، ۲۰۰۴).

مشکل اصلی مسائل مقدار مرزی گرانی سنجی - ارتفاع سنجی، وجود و یکتایی جواب برای این مسائل است. با استفاده از شیوه‌های حساب تغییرات (variational methods) می‌توان مسئله وجود و یکتایی جواب ضعیف (weak solution) این مسائل را بررسی کرد (کلر، ۱۹۹۶). در مسائل مقدار مرزی گرانی سنجی - ارتفاع سنجی نوع اول و دوم، شکل و اندازه قسمت خشکی به صورت مجهول در نظر گرفته می‌شود. از طرفی با توجه به اینکه ماهواره‌های ارتفاع سنجی مجهز به گیرنده‌های GPS هستند، می‌توان سطح دریاها را معلوم فرض کرد. بنابراین با یک مسئله مرزی با مرز قسمتی معلوم و قسمتی مجهول مواجه هستیم. چنانچه بخواهیم از روش‌های حساب تغییرات برای اثبات وجود و یکتایی جواب این مسائل استفاده کنیم، به دلیل آزاد بودن مرز خشکی‌ها علامت در شرط مرزی تغییر می‌کند و از تراکمی بودن (V-ellipticity) مسئله جلوگیری می‌شود. برای برقراری شرط تراکمی بودن مسئله بایستی قسمت خشکی

(۱۹۸۳a، ۱۹۸۳b و ۱۹۸۷)، گرافارند و کلر (۱۹۹۵)، مینویل (۱۹۸۶)، سانسو (۱۹۹۳)، سانسو و ستوک (۱۹۸۵)، شوبرگ (۱۹۸۲)، استفان (۱۹۸۷)، وان پترسدورف و استفان (۱۹۹۰) و صفری و همکاران (۲۰۰۵) اشاره کرد. مسائل مقدار مرزی گرانی سنجی - ارتفاع سنجی ماهواره‌ای را می‌توان به سه نوع تقسیم کرد:

نوع اول: در این نوع مسئله مقدار مرزی گرانی سنجی - ارتفاع سنجی ماهواره‌ای ساختار مسئله ملدنسکی اسکالر برای قسمت خشکی حفظ می‌شود. در روی سطح دریا نیز با داشتن اطلاعات هیدروگرافی از توپوگرافی سطح دریا می‌توان پتانسیل را در نقاط گوناگون به دست آورد (سانسو، ۱۹۹۵). به دلیل اینکه ماهواره‌های ارتفاع سنجی ماهواره‌ای حامل گیرنده‌های سامانه موقعیت‌یابی جهانی (GPS) هستند می‌توان سطح دریا را درحکم یک مرز ثابت در نظر گرفت. لذا این مسئله مسئله مقدار آمیخته و مرزی با مرز قسمتی آزاد و قسمتی ثابت است.

نوع دوم: در این مسئله مقدار مرزی گرانی سنجی - ارتفاع سنجی ماهواره‌ای نیز ساختار مسئله ملدنسکی اسکالر برای قسمت خشکی حفظ شده و در سطح دریا بی‌هنجاری جاذبه حاصل از ارتفاع سنجی ماهواره‌ای به مثابه یک مشاهده مرزی در نظر گرفته می‌شود. مسئله مقدار مرزی نوع دوم نیز یک مسئله مقدار آمیخته و مرزی، و با مرز قسمتی آزاد و قسمتی ثابت است (سانسو، ۱۹۹۵). از جمله کارهای صورت گرفته برای تبدیل داده‌های ارتفاع سنجی ماهواره‌ای به بی‌هنجاری جاذبه می‌توان به اربلوس (۱۹۸۹)، اربلوس و فرمیر (۱۹۹۶)، اربلوس و سیاووس (۱۹۹۶)، رپ (۱۹۸۳، ۱۹۸۵ و ۱۹۸۶)، رپ و تومیسلاو (۱۹۹۲)، گیوشکین (۱۹۸۰)، ژنگ و سیدریس (۱۹۹۶) اشاره کرد.

نوع سوم: امکان دسترسی به GPS باعث شده است که در مجموعه مسائل مقدار مرزی برای محاسبه ژئوئید، مرز

حل مسئله مقدار مرزی با مرزهای ثابت است. اردلان و گرافارند (۲۰۰۳) و اردلان (۱۹۹۹) روش جدیدی را برای محاسبه ژئوئید با حل مسئله مقدار مرزی با مرزهای ثابت با استفاده از مشاهدات از نوع پتانسیل گرانی و شتاب گرانی ارائه کرده‌اند. این روش را صفری (صفری، ۲۰۰۴) برای استفاده از داده‌های ارتفاع‌سنجی ماهواره‌ای گسترش داد. در این مقاله هدف استفاده از این مسئله مقدار مرزی با مرزهای ثابت برای تعیین ژئوئید در جزایر است.

جزئیات مربوط به تعریف یک مسئله مقدار مرزی گرانی‌سنجی - ارتفاع‌سنجی ماهواره‌ای غیرخطی در بخش ۲ ارائه خواهد شد. در این بخش مسئله مقدار مرزی غیرخطی با بسط هارمونیک‌های بیضوی تا درجه و مرتبه ۳۶۰ و حذف اثر جرم‌های در فاصله نزدیک 55km با استفاده از انتگرال نیوتن بیضوی خطی شده است. در فصل ۳ در خصوص مسئله انتقال به سمت پایین مشاهدات تفاضلی بحث می‌شود. بعد از حذف اثرات میدان تا درجه و مرتبه ۳۶۰ و اثر جرم‌های در فاصله نزدیک مشاهدات تبدیل به مشاهدات تفاضلی هارمونیک در فضای خارج از بیضوی می‌شوند. بنابراین با حل معکوس انتگرال آبل - پواسون قابل تبدیل به پتانسیل گرانی تفاضلی روی بیضوی مرجع هستند.

انتگرال آبل - پواسون انتگرالی فردهولم از نوع اول است. که مجهول‌های آن در زیر علامت انتگرال قرار دارند. این معادله انتگرال ناپایدار بوده و لذا جواب تابع پیوسته‌ای از مشاهدات نیست. از طرف دیگر وجود ترکیب مشاهدات شتاب گرانی تفاضلی و پتانسیل گرانی تفاضلی حاصل از ارتفاع‌سنجی ماهواره‌ای نیازمند برآورد وزن نسبی صحیح این مشاهدات متفاوت است که می‌تواند با برآورد مؤلفه‌های واریانس مشاهدات از انواع گوناگون صورت گیرد. لذا در این بخش روش ارائه شده (کوخ و کوشه، ۲۰۰۲) به منظور برآورد وزن نسبی در مسائل

کوچک‌تر از یک عرقچین کروی به شعاع 2.26° باشد که این باعث ایجاد محدودیت در استفاده از این گونه مسائل مرزی می‌شود. لذا در مسائل مقدار مرزی گرانی‌سنجی - ارتفاع‌سنجی نوع اول و دوم وجود و یکتایی فقط در صورتی تضمین می‌شود که شعاع قسمت خشکی از 2.26° کوچک‌تر باشد. این شرط محدودیتی اساسی برای استفاده از مسائل مقدار مرزی گرانی‌سنجی - ارتفاع‌سنجی نوع اول و دوم است. در حالی که با استفاده از شیوه حساب تغییرات می‌توان وجود و یکتایی مسائل مقدار مرزی ارتفاع‌سنجی - گرانی‌سنجی با مرز ثابت (مسئله نوع سوم) را بدون هیچ گونه محدودیتی از نظر شکل و اندازه قسمت خشکی اثبات کرد (کلر، ۱۹۹۶).

علاوه بر مشکل وجود و یکتایی که در مسئله نوع اول و نوع دوم مشترک است، مشکل دیگری که برای مسئله مقدار مرزی گرانی‌سنجی - ارتفاع‌سنجی نوع اول مطرح است شیوه حل این مسئله است. در این مسئله داده مرزی در قسمت خشکی شتاب گرانی است در حالی که داده مرزی در دریا پتانسیل گرانی است. بنابراین استفاده از روش‌های کلاسیک نظیر استوکس و ملدنسکی برای حل این مسئله امکان‌پذیر نیست.

مشکل دیگری که مختص مسئله مقدار مرزی گرانی‌سنجی - ارتفاع‌سنجی نوع دوم است مشکل تبدیل ارتفاع ژئوئید حاصل از ارتفاع‌سنجی ماهواره‌ای به بی‌هنجاری جاذبه است. تبدیل ارتفاع ژئوئید حاصل از ارتفاع‌سنجی ماهواره‌ای به بی‌هنجاری جاذبه مسئله‌ای بدطرح (ill-posed) است (سانسو و سونا، ۱۹۹۳) و در نهایت خطا در ارتفاع ژئوئید حاصل از ارتفاع‌سنجی ماهواره‌ای تقویت می‌شود.

با در نظر گرفتن دلایل فوق مناسب‌ترین شیوه برای تعیین ژئوئید در جزایر و مناطق ساحلی تعیین آن از

سطح زمین مرزی ثابت است، زیرا مقادیر مرزی روی سطح زمین M_h^2 دارای مختصات مکانی GPS هستند. سطح دریا نیز یک مرز ثابت است، زیرا نقاط مقادیر مرزی روی سطح دریا M_s^2 دارای مختصات مکانی GPS حاصل از ارتفاعسنجی ماهواره‌ای‌اند. علاوه بر این مسئله مقدار مرزی:

- غیرخطی است، زیرا ارتباط بین اندازه بردار شتاب گرانی، با پتانسیل گرانی روی سطح زمین، ارتباطی غیرخطی است.
- آمیخته است، چون نوع داده‌های مرزی روی خشکی M_h^2 با نوع داده‌های مرزی روی دریا M_s^2 متفاوت است.
- مایل است، چون امتداد بردار شتاب گرانی در حالت کلی نسبت به سطح زمین مایل است.

ناپایدار معرفی خواهد شد. در بخش ۴ برای ارزیابی روش ارائه شده ژئوئید جزیره قشم براساس داده‌های جاذبه‌ای موجود و ارتفاعسنجی ماهواره‌ای محاسبه شده است. در بخش ۵ نتیجه‌گیری ارائه شده است.

۲ مسئله مقدار مرزی گرانی‌سنجی - ارتفاعسنجی ماهواره‌ای با مرز ثابت غیرخطی (none-linear fixed boundary, gravimetry-altimetry boundary (value problem

مسئله مقدار مرزی، جواب معادله دیفرانسیل لاپلاس - پواسون با مشتقات جزئی، برای مقادیر مرزی از نوع اندازه بردار شتاب گرانی روی سطح زمین در قسمت خشکی $\gamma(x)$ و ارتفاع ژئوئید حاصل از مشاهدات ارتفاعسنجی ماهواره‌ای روی سطح زمین در قسمت دریا $h(X)$ است (صفری و همکاران، ۲۰۰۵).

جدول ۱. مسئله مقدار مرزی گرانی‌سنجی - ارتفاعسنجی ماهواره‌ای با مرز ثابت غیرخطی.

1. $\text{div grad } w(x) = 2\omega^2$ (outside the Earth's masses)	$\forall x \in \mathbb{R}^3 / D \cup \partial G_e^+$
2. $\text{div grad } w(x) = -4\pi G\sigma + 2\omega^2$ (internal space plus boundary of the planet of the Earth)	$\forall x \in D \cup \partial G_e^-$
3. $E \left\{ \left\ \text{grad } w \right\ \right\} = \gamma(x)$ (boundary value data of type modulus of gravity)	$\forall x \in \partial G_e = M_h^2$
4. $E \left\{ h \right\} = h$ <small>Satellite Altimetry</small> (boundary value data of type satellite altimetry)	$\forall x \in \partial G_e = M_s^2$
5. $w(x) = w_0$ (equipotential value at the level of the geoid close to mean sea level)	$\forall x \in \partial G_e = M_g^2$
6. $w(x) = \frac{1}{2} \omega^2 \left\ x - \langle x e_\omega \rangle e_\omega \right\ _2^2 + \frac{gm}{\ x\ _2} + \mathcal{O}_w \left(\frac{1}{\ x\ _2^3} \right)$ (regularity condition at infinity)	$\ x\ _2 \rightarrow \infty$

مرز آزاد (سطح ژئوئید M_g^2) و رابطه ششم شرط منظم بودن جواب در بی نهایت محسوب می شود.

همه کمیت های فیزیکی به کار رفته در این مسئله را می توان به دو مؤلفه (۱) رفرانس و (۲) تفاضلی یا باقی مانده تفکیک کرد (اردلان، ۱۹۹۹). جدول ۲، نشان دهنده این تفکیک برای چهار کمیت اندازه بردار شتاب گرانی γ ، ژئوئید ارتفاع سنجی ماهواره ای $h(X)$ ، سرعت دوران زمین ω ، و چگالی زمین σ به دو مؤلفه مرجع (نشان داده شده با حروف یونانی بزرگ) و تفاضلی یا باقی مانده (مشخص شده با پیشوند یونانی دلتا) است.

پس از حذف بخش مرجع از مشاهدات، مسئله مقدار دو مرزی غیر خطی با مرزهای ثابت و آزاد در فضای گرانی قابل خطی سازی است. بدین ترتیب، مسئله مقدار مرزی، به مسئله مقدار مرزی برای کمیت های تفاضلی تبدیل می شود. جدول ۳ ارائه دهنده مسئله مقدار مرزی برای کمیت های تفاضلی خطی شده، است.

در جدول ۳، ∇_{e_T} نشان دهنده مشتق امتدادی در امتداد بردار یکه e_T است، که در امتداد بردار شتاب گرانی مرجع Γ است. L درجه و مرتبه بسط میدان گرانی جهانی است. برای ملاحظه جزئیات خطی کردن مشاهدات شتاب گرانی و ارتفاع سنجی ماهواره ای می توان به (صفری و اردلان، ۱۳۸۳) و (صفری و همکاران، ۲۰۰۵) مراجعه کرد.

در جدول ۱، div grad ترکیب دو عملگر گرادیان و دیورژانس است که عملگر لاپلاس را تولید می کند. $E\{\}$ عملگر امید ریاضی، $\langle \bullet | \bullet \rangle$ عملگر ضرب داخلی، $\|\bullet\|_2$ عملگر نرم ۲ در فضای هیلبرت، w پتانسیل گرانی، γ اندازه بردار شتاب گرانی، σ چگالی زمین، ω سرعت دوران زمین، $\gamma(x)$ امید اندازه بردار شتاب گرانی، h امید ارتفاع ژئوئید حاصل از مشاهدات

Satellite Altimetry

ارتفاع سنجی ماهواره ای، G ثابت جهانی جاذبه، w_0 پتانسیل ژئوئید (اردلان، ۱۹۹۹)، x بردار موقعیت روی سطح زمین، X بردار موقعیت روی سطح بیضوی مرجع، e_w بردار یکه در امتداد محور دوران زمین، M جرم زمین، D فضای درونی زمین، ∂G_e^+ مرز خارجی پوسته زمین، ∂G_e^- مرز درونی پوسته زمین و $M_g^2, M_h^2, M_s^2, E_{a,b}^2$ بیانگر رویه های دربرگیرنده داده های مرزی است. رابطه اول جدول ۱ معادله میدان پتانسیل گرانی در خارج سطح زمین، رابطه دوم معادله میدان پتانسیل گرانی در درون زمین است که هر دو، از نوع معادلات دیفرانسیل پواسون هستند. رابطه سوم نشان دهنده مقدار مرزی از نوع اندازه شتاب گرانی روی مرز معلوم (سطح زمین M_h^2)، رابطه چهارم نشان دهنده مقدار مرزی از نوع ارتفاع ژئوئید حاصل از ارتفاع سنجی ماهواره ای روی سطح بیضوی مرجع $E_{a,b}^2$ ، رابطه پنجم بیانگر مقدار مرزی از نوع پتانسیل (پتانسیل ژئوئید) روی

جدول ۲. تقسیم کمیت های واقعی به دو بخش کمیت مرجع و کمیت تفاضلی.

$h(\mathbf{X})^\gamma = \Gamma + \delta\Gamma$ $h(\mathbf{X}) = H(\mathbf{X}) + \delta H(\mathbf{X})$	$\omega^2 = \Omega^2 + 2\langle \Omega \delta\Omega \rangle + \delta\Omega^2$ $\sigma = P + \delta P$
---	---

جدول ۳. مسئله مقدار مرزی گرانی سنجی - ارتفاع سنجی ماهواره‌ای با مرز ثابت خطی.

1. $\text{div grad } \delta W(\mathbf{x}) = 0$ (outside the Earth's masses)	$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / \mathcal{D} \cup \partial \mathcal{G}_e^+$
2. $\text{div grad } \delta W(\mathbf{x}) = -4\pi \delta P(\mathbf{x})$ (internal space plus boundary of the planet of the Earth)	$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{D} \cup \partial \mathcal{G}_e^-$
3. $\delta \Gamma(\mathbf{x}) = \nabla_{\mathbf{e}_r} \delta W(\mathbf{x})$	$\forall \mathbf{x} \in \partial \mathcal{G}_e = \mathbb{M}_h^2$
4. $\delta H(\mathbf{X}) = \frac{\varepsilon^2 \cosh \eta (\cos^2 \eta - \cos^2 \phi)^{1/2}}{gm} \delta W(\mathbf{X})$	$\forall \mathbf{X} \in \mathbb{E}_{a,b}^2$
5. $w_0 = W(\mathbf{x}) + \delta W(\mathbf{x})$	$\forall \mathbf{x} \in \partial \mathcal{G}_e = \mathbb{M}_g^2$
6. $w(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \omega^2 \ \mathbf{x} - \langle \mathbf{x} \mathbf{e}_\omega \rangle \mathbf{e}_\omega\ _2^2 + \frac{gm}{\ \mathbf{x}\ _2} + \mathcal{O}_w \left(\frac{1}{\ \mathbf{x}\ _2^3} \right)$ (regularity condition at infinity)	$\ \mathbf{x}\ _2 \rightarrow \infty$

۳ مسئله انتقال به سمت پایین

برای بخش بدون جرم فضای بیرونی زمین، پتانسیل گرانی تفاضلی $\delta W(\mathbf{x})$ در انتگرال آبل-پواسون صدق می‌کند. با توجه به ارتباط بین مقادیر مرزی $\delta \Gamma(\mathbf{x})$ و پتانسیل گرانی تفاضلی $\delta W(\mathbf{x})$ ، با در اختیار داشتن مقادیر مرزی $\delta \Gamma(\mathbf{x})$ می‌توان با انتگرال آبل-پواسون بیضوی، پتانسیل گرانی تفاضلی $\delta W(\mathbf{X})$ را روی بیضوی مرجع $\mathbb{E}_{a,b}^2$ به دست آورد. بنابراین چنانچه به دنبال پتانسیل گرانی تفاضلی $\delta W(\mathbf{X})$ روی بیضوی مرجع $\mathbb{E}_{a,b}^2$ باشیم، انتگرال آبل-پواسون بیضوی می‌تواند در حکم یک معادله مشاهده به کار رود (اردلان، ۱۹۹۹؛ اردلان و گرافارند، ۲۰۰۴؛ صفری، ۲۰۰۴ و صفری و همکاران، ۲۰۰۵). در جدول ۴ انتگرال آبل-پواسون بیضوی برای اندازه شتاب جاذبه تفاضلی ارائه شده است.

در جدول ۴، $\{\Gamma_\lambda, \Gamma_\phi, \Gamma_\eta\}$ سه مؤلفه بردار شتاب گرانی مرجع Γ بر حسب دستگاه مختصات منحنی الخط بیضوی ژاکوبی با مؤلفه‌های $\{\lambda, \phi, \eta\}$ بوده، $\varpi(\phi')$

تابع وزن که موجب تعامد هارمونیک‌های بیضوی روی سطح بیضوی مرجع می‌شود (اردلان، ۱۹۹۹). $S_{\mathbb{E}_{a,b}^2}$ مساحت سطح بیضوی مرجع $\mathbb{E}_{a,b}^2$ ، و $\{g_{\lambda\lambda}, g_{\phi\phi}, g_{\eta\eta}\}$ مؤلفه‌های تانسور متریک دستگاه مختصات منحنی الخط بیضوی ژاکوبی است. K^L کرنل تغییر یافته انتگرال آبل-پواسون پس از حذف میدان مرجع است. اندیس بالای L در اینجا نشان‌دهنده درجه و مرتبه ماکزیموم بسط هارمونیک‌های بیضوی به کار رفته در میدان مرجع است که با توجه به حذف آن از روی مشاهدات، لازم است این اثر از روی کرنل نیز حذف و بدین ترتیب کرنل تغییر شکل یافته K^L حاصل می‌شود (صفری، ۲۰۰۴). $\{a, b, \varepsilon\}$ به ترتیب نیم قطر اطول، نیم قطر اقصی و خروج از مرکز خطی بیضوی مرجع $\mathbb{E}_{a,b}^2$ است. $\Delta \lambda' \Delta \phi'$ المان سطحی انتگرال آبل-پواسون پس از گسسته‌سازی است که بیانگر قدرت تفکیک انتگرال گیری نیز هست. i_{\max} و j_{\max} نیز حد بالای شبکه انتگرال گیری پس از گسسته‌سازی را روی بیضوی مرجع $\mathbb{E}_{a,b}^2$ نشان می‌دهند

(اردلان، ۱۹۹۹).

کوخ و گوشه (کوخ و گوشه، ۲۰۰۲) برای تعیین مؤلفه واریانس انواع مشاهدات در روند پایداری انتقال به سمت پایین روش نوینی را ارائه کردند. در این روش مؤلفه واریانس هر نوع مشاهده به همراه پارامتر پایداری به طور همزمان برآورد می‌شود. در این مقاله به منظور پایداری مسئله انتقال به سمت پایین از روش کوخ و گوشه استفاده می‌شود. لذا در این بخش به یادآوری روش پیش گفته می‌پردازیم.

دستگاه معادلات گسسته جدول ۴ یک دستگاه بدطرح است (اردلان، ۱۹۹۹). برای به دست آوردن یک جواب پایدار بایستی از روش‌های پایداری استفاده کرد. از طرف دیگر برای تعیین ژئوئید در این روش علاوه بر مشاهده شتاب گرانی، از مشاهده ارتفاع سنجی ماهواره‌ای نیز استفاده شده است. لذا علاوه بر پایداری مسئله بایستی وزن نسبی مشاهدات را نیز تعیین کرد.

جدول ۴. انتگرال آبل - پواسون بیضوی برای شتاب جاذبه تفاضلی.

معادله انتگرال آبل - پواسون در شکل پیوسته:

$$\begin{aligned} \delta\Gamma(x) &= \frac{\Gamma_\lambda}{\|\Gamma\|_2} \delta\Gamma_\lambda + \frac{\Gamma_\phi}{\|\Gamma\|_2} \delta\Gamma_\phi + \frac{\Gamma_\eta}{\|\Gamma\|_2} \delta\Gamma_\eta \\ &= \frac{1}{\sqrt{g_{\lambda\lambda}}} \frac{\Gamma_\lambda}{\|\Gamma\|_2} \frac{1}{S_{a,b}^2} \iint_{\mathbb{E}^2} ds' \varpi(\phi') \frac{\partial K^L(\lambda, \phi, \eta; \lambda', \phi', \eta_0)}{\partial \lambda} \delta W^L(\lambda', \phi') \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{g_{\phi\phi}}} \frac{\Gamma_\phi}{\|\Gamma\|_2} \frac{1}{S_{a,b}^2} \iint_{\mathbb{E}^2} ds' \varpi(\phi') \frac{\partial K^L(\lambda, \phi, \eta; \lambda', \phi', \eta_0)}{\partial \phi} \delta W^L(\lambda', \phi') \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{g_{\eta\eta}}} \frac{\Gamma_\eta}{\|\Gamma\|_2} \frac{1}{S_{a,b}^2} \iint_{\mathbb{E}^2} ds' \varpi(\phi') \frac{\partial K^L(\lambda, \phi, \eta; \lambda', \phi', \eta_0)}{\partial \eta} \delta W^L(\lambda', \phi') \end{aligned}$$

معادله انتگرال آبل - پواسون در شکل گسسته:

$$\begin{aligned} \delta\Gamma(x) &= \left(\frac{1}{\sqrt{g_{\lambda\lambda}}} \frac{\Gamma_\lambda}{\|\Gamma\|_2} \frac{1}{S_{a,b}^2} \sum_{i=1}^{i_{\max}} \sum_{j=1}^{j_{\max}} a \sqrt{b^2 + \varepsilon^2 \sin^2 \phi_{ij}} \cos \phi_{ij} \right. \\ &\quad \times \Delta\lambda' \Delta\phi' \varpi(\phi') \frac{\partial K^L(\lambda, \phi, \eta; \lambda', \phi', \eta_0)}{\partial \lambda} \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{g_{\phi\phi}}} \frac{\Gamma_\phi}{\|\Gamma\|_2} \frac{1}{S_{a,b}^2} \sum_{i=1}^{i_{\max}} \sum_{j=1}^{j_{\max}} a \sqrt{b^2 + \varepsilon^2 \sin^2 \phi_{ij}} \cos \phi_{ij} \\ &\quad \times \Delta\lambda' \Delta\phi' \varpi(\phi') \frac{\partial K^L(\lambda, \phi, \eta; \lambda', \phi', \eta_0)}{\partial \phi} \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{g_{\eta\eta}}} \frac{\Gamma_\eta}{\|\Gamma\|_2} \frac{1}{S_{a,b}^2} \sum_{i=1}^{i_{\max}} \sum_{j=1}^{j_{\max}} a \sqrt{b^2 + \varepsilon^2 \sin^2 \phi_{ij}} \cos \phi_{ij} \right. \\ &\quad \left. \times \Delta\lambda' \Delta\phi' \varpi(\phi') \frac{\partial K^L(\lambda, \phi, \eta; \lambda', \phi', \eta_0)}{\partial \eta} \right) \delta W^L(\lambda', \phi') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_1 &= \begin{bmatrix} P_1^{-1} & \dots & 0 & 0 \\ & \vdots & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ & \vdots & & \\ 0 & \dots & P_0^{-1} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ & \vdots & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & P_1^{-1} \end{bmatrix}, \dots, \\
 W_0 &= \dots, \\
 W_x &= \dots
 \end{aligned} \quad (4)$$

بنابراین \hat{x} (مجهول‌های برآورد شده) از معادله نرمال زیر به دست می‌آید:

$$\left(\frac{1}{\sigma_1^2} A_1^t P_1 A_1 + \dots + \frac{1}{\sigma_0^2} A_0^t P_0 A_0 + \frac{1}{\sigma_x^2} P_x \right) \hat{x} = \frac{1}{\sigma_1^2} A_1^t P_1 b_1 + \dots + \frac{1}{\sigma_0^2} A_0^t P_0 b_0 + \frac{1}{\sigma_x^2} P_x \mathcal{X} \quad (5)$$

مؤلفه‌های واریانس نیز به صورت زیر برآورد می‌شود (کوخ و گوشه، ۲۰۰۲):

$$\begin{aligned}
 \hat{\sigma}_i^2 &= \frac{\hat{e}_i^t P_i \hat{e}_i}{r_i} \\
 \hat{\sigma}_x^2 &= \frac{\hat{e}_x^t P_x \hat{e}_x}{r_x}
 \end{aligned} \quad (6)$$

که در آن بردارهای باقی‌مانده برآورد شده \hat{e}_i, \hat{e}_x از روابط زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned}
 \hat{e}_i &= A_i \hat{x} - b_i \\
 \hat{e}_x &= \hat{x} - \mathcal{X}
 \end{aligned} \quad (7)$$

و r_i, r_x که اعداد آزادی هرنوع مشاهده است، نیز از روابط زیر حاصل می‌شوند.

$$\begin{aligned}
 r_i &= n_i - \text{trace} \left(\frac{1}{\sigma_i^2} A_i^t P_i A_i N^{-1} \right) \\
 r_x &= u - \text{trace} \left(\frac{1}{\sigma_x^2} P_x N^{-1} \right)
 \end{aligned} \quad (8)$$

که n_i تعداد مشاهدات نوع i ام است، به طوری که

۱-۳ روش کوخ-گوشه برای برآورد مؤلفه‌های واریانس: فرض کنید دستگاه معادلات خطی مسئله انتقال به سمت پایین، برای o نوع مشاهده به شکل زیر باشد:

$$\begin{cases} A_i x = b_i + e_i \\ D(b_i | \sigma_i^2) = \sigma_i^2 P_i^{-1} \end{cases} \quad i \in \{1, 2, 3, \dots, o\} \quad (1)$$

که در آن P_i^{-1} ماتریس وزن مشاهدات نوع i ام، σ_i^2 مقیاس مشاهدات نوع i ام و e_i بردار خطای مشاهدات نوع i ام، b_i بردار مشاهدات نوع i ام، A_i ماتریس ضرایب مشاهدات نوع i ام و x بردار مجهول‌ها باشد.

به منظور پایدار کردن دستگاه معادلات فوق با اعمال بایاس، علاوه بر معلوم بودن ماتریس وزن مجهول‌های (P_x) باید مقادیر مورد انتظار مجهول‌های (\mathcal{X}) نیز معلوم باشد (کوخ و گوشه، ۲۰۰۲) و یا به عبارت دیگر:

$$\begin{cases} x = \mathcal{X} + e_x \\ D(\mathcal{X} | \sigma_x^2) = \sigma_x^2 P_x^{-1} \end{cases} \quad (2)$$

با در نظر گرفتن معادلات (۱) و (۲)، دستگاه معادلات مشاهدات نهایی به منظور برآورد مؤلفه‌های واریانس به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_o \\ I \\ b_1 \\ \vdots \\ b_o \\ \mathcal{X} \end{bmatrix} x &= \begin{bmatrix} b_1 + e_1 \\ \vdots \\ b_o + e_o \\ \mathcal{X} + e_x \end{bmatrix} \\
 D \left(\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_o \\ \mathcal{X} \end{bmatrix} \right) &= \sigma_1^2 W_1 + \dots + \sigma_o^2 W_o + \sigma_x^2 W_x
 \end{aligned} \quad (3)$$

که در آن:

برای بررسی دقت محاسبات ما باشند. توزیع این نقاط در شکل ۱ نشان داده شده است. نقشه تغییرات شتاب گرانی مشاهداتی در جزیره قشم براساس شتاب گرانی در این نقاط در شکل ۲ داده شده است. برای محاسبه اثرات میدان جاذبه حاصل از توپوگرافی باقی مانده، براساس بررسی صورت گرفته (کیامهر و شوهرگ، ۲۰۰۵ و اردلان و همکاران، ۱۳۸۶) از مدل رقمی توپوگرافی SRTM با قدرت تفکیک ۳ ثانیه تقریباً معادل ۹۰ متر، استفاده شد. مدل رقمی توپوگرافی SRTM جزیره قشم، در شکل ۳ نشان داده شده است.

برای به دست آوردن توپوگرافی باقی مانده بالای بیضوی، از مدل توپوگرافی جهانی تهیه شده و نزل با قدرت تفکیک مکانی 15' تا درجه و مرتبه ۳۶۰ استفاده شد (وزنل، ۱۹۹۸). مدل توپوگرافی جهانی تا درجه و مرتبه ۳۶۰ در منطقه جزیره قشم در شکل ۴ نشان داده شده است. برای محاسبه اثر مرجع ابتدا مقایسه ای در منطقه آزمون برای انتخاب بهترین مدل مرجع براساس اندازه بردار شتاب گرانی صورت گرفت. در این مقایسه مدل های EGM96، (لموین و همکاران، ۱۹۹۶) PGM2000A (پاولیس و همکاران، ۲۰۰۰) و EIGEN-CG01C (ریگبر و همکاران، ۲۰۰۶) با هم مقایسه شدند. نتایج این مقایسه در جدول ۵ آمده است. براساس این مقایسه بهترین مدل مرجع در منطقه آزمون مدل EIGEN-CG01C است. بنابراین برای محاسبه اثر میدان مرجع از مدل EIGEN-CG01C استفاده شد.

به منظور محاسبه سطح متوسط دریا از مدل جهانی CSRMSS95 استفاده شد. این مدل سطح متوسط آب دریا از مشاهدات ارتفاع سنجی ماهواره ای حاصل شده است. جهت محاسبه این سطح متوسط از داده های حاصل از ماهواره TOPEX/POSEIDON، ماهواره ERS-1 و ماهواره Geosat استفاده شده است (کیم و همکاران، ۱۹۹۵). تغییرات سطح متوسط آب دریا با استفاده از مدل

$n = \sum_{i=1}^o n_i$ و u تعداد مجهول های مسئله است.

N نیز به صورت زیر به دست می آید:

$$N = \frac{1}{\sigma_1^2} A_1^t P_1 A_1 + \dots + \frac{1}{\sigma_o^2} A_o^t P_o A_o + \frac{1}{\sigma_x^2} P_x \quad (9)$$

حال با تکرار می توان مؤلفه های واریانس هر کدام از مشاهدات و نیز مجهول های را برآورد کرد.

پیاده سازی الگوریتم کوخ-کوشه

۱- تخصیص مقادیر اولیه برای مؤلفه های واریانس

$$\sigma_x^2, \sigma_i^2 \quad i \in \{1, 2, 3, \dots, o\}$$

۲- مراحل زیر برای $k = 1, 2, 3, \dots$

I- برآورد \hat{x} از رابطه (۵)

II- برآورد باقی مانده ها از رابطه (۷)

III- برآورد اعداد آزادی مربوط به هر نوع مشاهده

از رابطه (۸)

برآورد مؤلفه های واریانس از رابطه (۹)

۴ بررسی موردی: تعیین ژئوئید جزیره قشم

به منظور بررسی روش ارائه شده برای تعیین ژئوئید، جزیره قشم، در موقعیت جغرافیایی $55.1810^{\circ}E \leq \lambda \leq 56.3310^{\circ}E$ و $26.4690^{\circ}N \leq \varphi \leq 27.0190^{\circ}N$ در جنوب ایران انتخاب شد. در جزیره قشم ۳۱۹ نقطه چندمنظوره سازمان نقشه برداری کشور موجود است که در سواحل این جزیره و داخل آن پراکنده هستند. موقعیت این نقاط با GPS دو بسامدی تعیین و اندازه بردار شتاب گرانی نیز با گرانی سنجی دقیق با دقت ۵ میکرو گال، اندازه گیری شده است. در عین حال روی همه این نقاط، عملیات ترازبایی دقیق صورت گرفته و ارتفاع اورتومتريک این نقاط نیز از این راه معلوم است. بنابراین در این جزیره ۳۱۹ نقطه GPS/Leveling موجود است که ارتفاع ژئوئید آنها مشخص است و می توانند معیار خوبی

با استفاده از تبدیل پرونز بیضوی (اردلان و گرافارند، ۲۰۰۱)، ارتفاع ژئوئید به دست آمده از مشاهدات ارتفاع سنجی ماهواره‌ای را به پتانسیل گرانی روی سطح بیضوی تبدیل می‌کنیم. تغییرات پتانسیل گرانی واقعی روی سطح بیضوی حاصل از مشاهدات ارتفاع سنجی ماهواره‌ای، در منطقه فارس ساحلی، در شکل ۸ نشان داده شده است. شکل ۹ نیز نشان‌دهنده پتانسیل گرانی تفاضلی حاصل از ارتفاع سنجی ماهواره‌ای است که در حکم پارامتر وزن‌دار در کنار دیگر مشاهدات در یک سرشکنی کمترین مربعات برای تعیین پتانسیل گرانی تفاضلی روی بیضوی مرجع استفاده می‌شود.

شکل ۱۰ نشان‌دهنده مشاهده شتاب گرانی بعد از حذف اثر میدان مرجع و اثر جرم‌های در فاصله نزدیک است. اکنون پتانسیل گرانی تفاضلی حاصل از ارتفاع سنجی ماهواره‌ای و شتاب گرانی تفاضلی حاصل از شتاب گرانی مشاهده در سطح زمین از راه یک سرشکنی همزمان به پتانسیل گرانی تفاضلی در سطح بیضوی مرجع تبدیل می‌شود. مسئله تبدیل شتاب گرانی تفاضلی به پتانسیل گرانی تفاضلی همان‌طوری که پیشتر نیز بیان شد از راه مشتقات انتگرال آبل-پواسون صورت گرفته و لذا مسئله ناپایدار است و لذا بایستی پایدار شود.

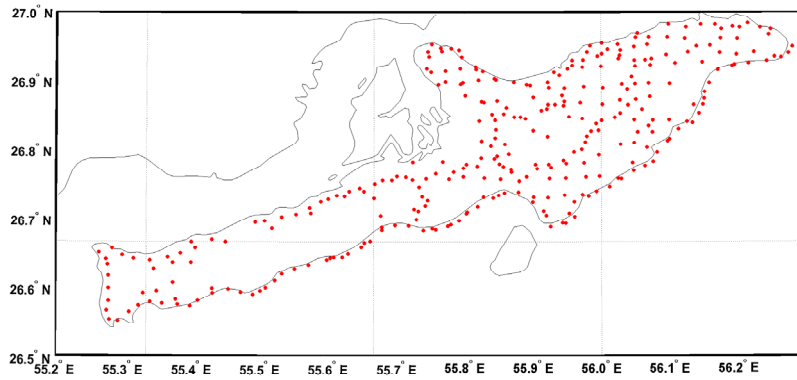
فوق، در سواحل و اطراف جزیره قشم، در شکل ۵ نشان داده شده است. برای محاسبه توپوگرافی سطح آب دریا در سواحل و آب‌های اطراف جزیره قشم نیز از مدل Global Parallel Ocean Circulation (POCM-4B Model) استفاده شد. این مدل از راه مشاهدات روزانه میدان استرس باد (wind stress field) و مشاهدات ماهانه جریان‌ات گرمایی سطح متوسط آب دریا (mean sea surface heat fluxes) از سال ۱۹۸۷ تا ۱۹۹۴ به دست آمده است (استامر و همکاران، ۱۹۹۶). این مدل با بسط هارمونیک‌های کروی تا درجه و مرتبه ۳۶۰ بیان می‌شود (رپ، ۱۹۹۸). تغییرات توپوگرافی سطح آب دریا با استفاده از مدل فوق، در سواحل و اطراف جزیره قشم، در شکل ۶ نشان داده شده است. اکنون با در اختیار داشتن سطح متوسط آب دریا (h_{MSL}) حاصل از مدل CSRMSS95 و توپوگرافی سطح دریا (h_{SST}) حاصل از مدل POCM-4B می‌توان ارتفاع ژئوئید را در مناطق دریایی از رابطه زیر به دست آورد (اردلان و عرب صاحبی، ۱۳۸۴ و صفری و همکاران، ۲۰۰۵):

$$N = h_{MSL} - h_{SST} \quad (10)$$

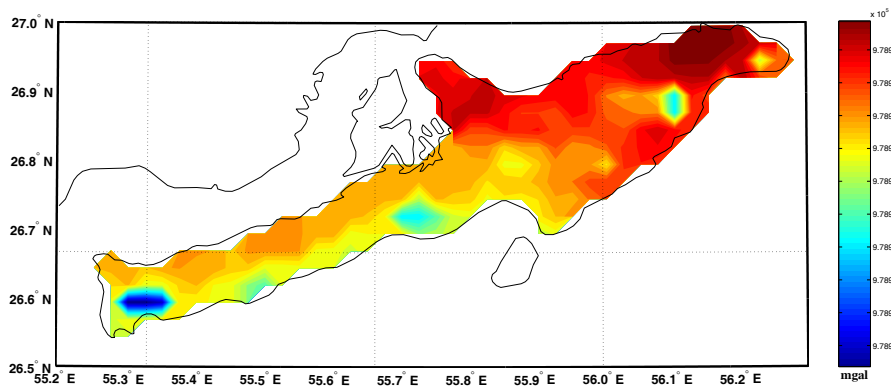
تغییرات ژئوئید دریایی حاصل در منطقه آزمون در شکل ۷ نشان داده شده است.

جدول ۵. مقایسه مدل‌های ژئوپتانسیلی براساس اندازه بردار شتاب گرانی مشاهداتی برحسب (mGal).

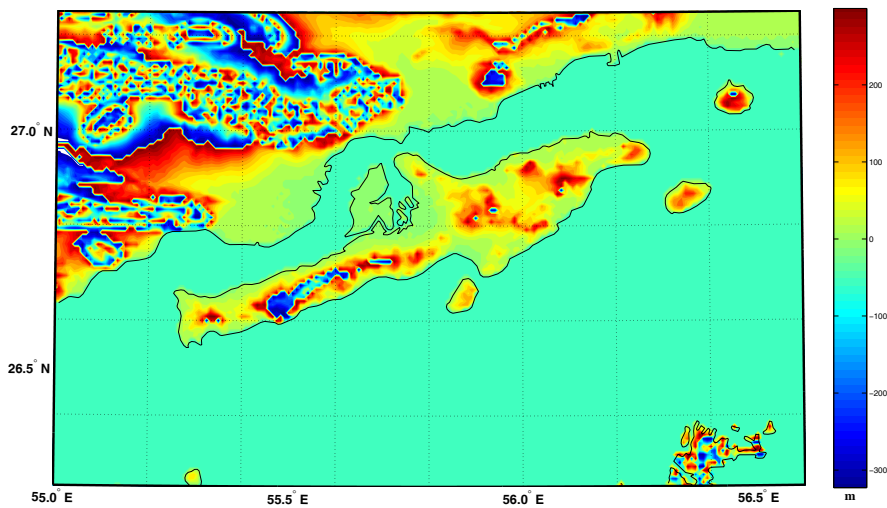
انحراف معیار	متوسط	ماکزیموم	مینیموم	درجه و مرتبه	مدل ژئوپتانسیل جهانی
30.76	-28.79	4.48	-64.95	360	EGM96
30.71	-28.74	4.56	-64.91	360	PGM2000A
28.16	-26.28	7.62	-63.07	360	EIGEN - CG01C



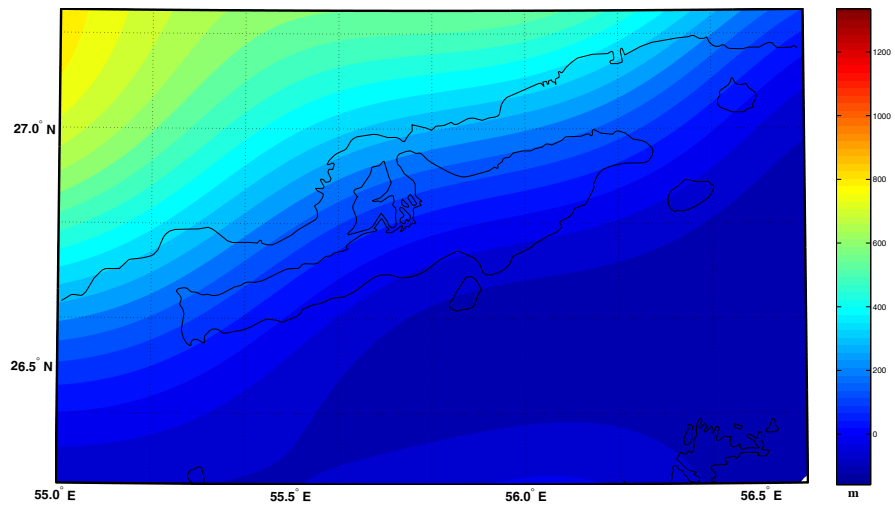
شکل ۱. نقشه توزیع نقاط گرانی جزیره قشم برای ۳۱۹ نقطه مشاهده شده از سوی سازمان نقشه برداری کشور.



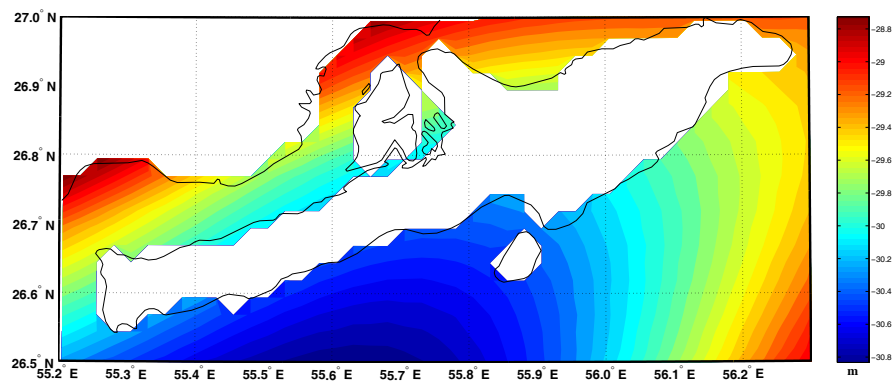
شکل ۲. نقشه تغییرات شتاب گرانی در جزیره قشم براساس نقاط مشاهده شده از سوی سازمان نقشه برداری کشور.



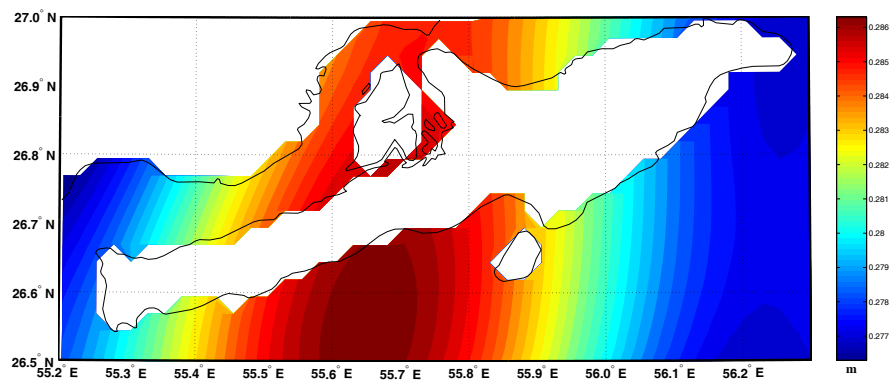
شکل ۳. نقشه توپوگرافی براساس ارتفاعات استخراج شده از بانک داده SRTM.



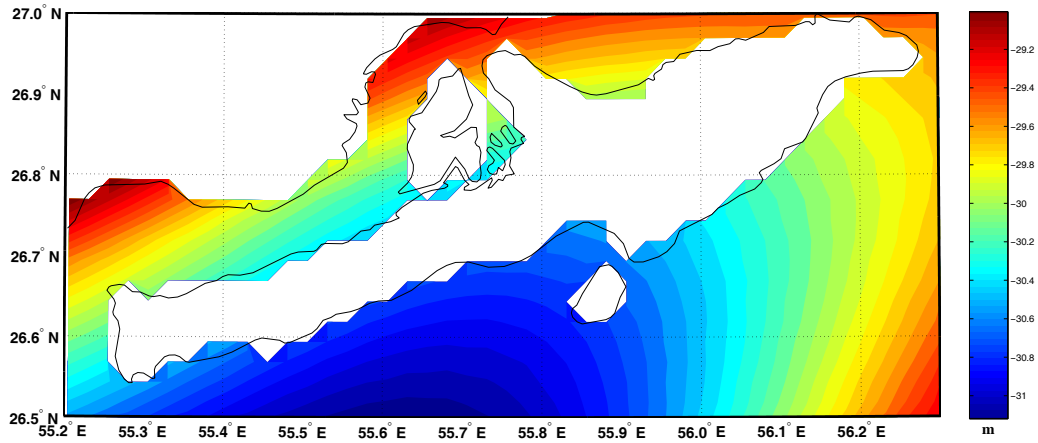
شکل ۴. نقشه توپوگرافی براساس ارتفاعات استخراج شده از بسط هارمونیک‌های توپوگرافی تا درجه و مرتبه ۳۶۰.



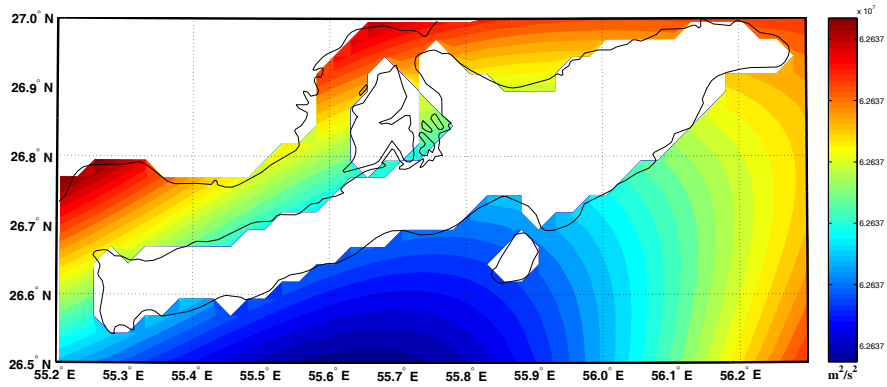
شکل ۵. تغییرات سطح متوسط آب دریا با استفاده از مدل CSRMSS95 در منطقه جزیره قشم.



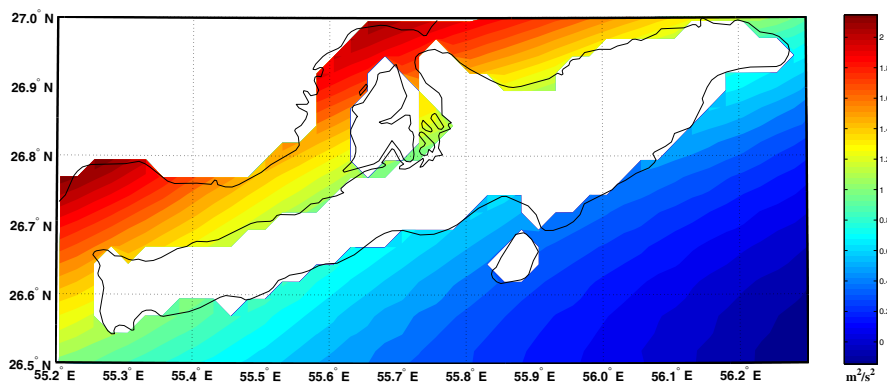
شکل ۶. تغییرات توپوگرافی سطح آب دریا با استفاده از مدل POCM-4B در منطقه جزیره قشم.



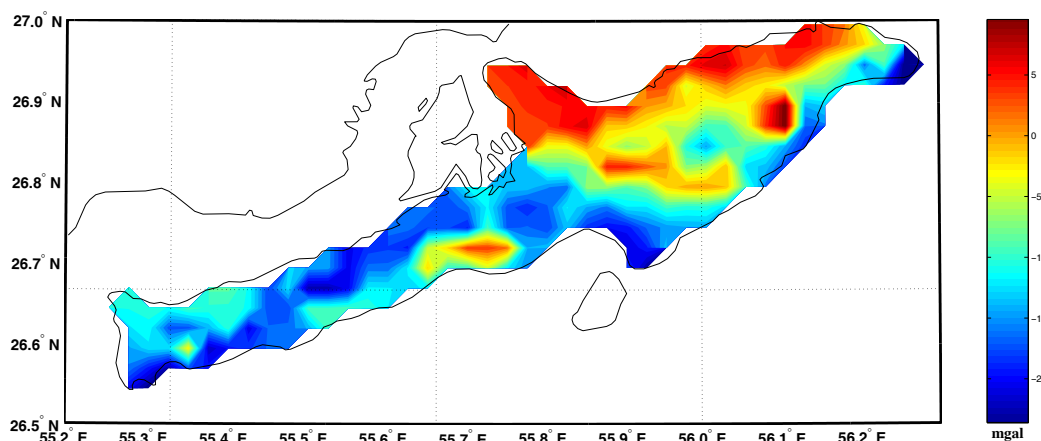
شکل ۷. تغییرات ارتفاع ژئوئید حاصل از مشاهدات ارتفاعسنجی ماهواره‌ای در منطقه جزیره قشم.



شکل ۸. تغییرات پتانسیل گرانی واقعی حاصل از مشاهدات ارتفاعسنجی ماهواره‌ای روی سطح بیضوی در منطقه جزیره قشم.



شکل ۹. تغییرات پتانسیل گرانی تفاضلی حاصل از مشاهدات ارتفاعسنجی ماهواره‌ای در منطقه جزیره قشم بعد از حذف میدان گرانی مرجع تا درجه و مرتبه $360/360$ به علاوه میدان گریز از مرکز و اثر جرم‌های در فاصله نزدیک از روی پتانسیل گرانی واقعی حاصل از ارتفاعسنجی ماهواره‌ای.



شکل ۱۰. شتاب گرانی باقی مانده بعد از حذف میدان گرانی مرجع تا درجه و مرتبه $360/360$ به علاوه میدان گریز از مرکز و اثر جرم‌های در فاصله نزدیک از روی شتاب گرانی مشاهده شده.

واریانس ارائه شده است. در این روش پارامتر پایداری سازی به صورت نسبت $\sigma_{\text{Gravity Acc.}}^2 / \sigma_{\delta W(X)}^2$ تعریف شد. که در این رابطه $\sigma_{\text{Gravity Acc.}}^2$ و $\sigma_{\delta W(X)}^2$ به ترتیب مؤلفه‌های واریانس برای شتاب گرانی تفاضلی و پتانسیل گرانی تفاضلی است. مقدار پارامتر پایداری سازی برابر 4.596132×10^{-6} به دست آمد. شکل ۱۱ نشان‌دهنده مراحل تکرار برای تعیین مؤلفه‌های واریانس مشاهدات (۱) ارتفاع‌سنجی ماهواره‌ای و (۲) اندازه بردار شتاب گرانی است.

نتیجه انتقال به سمت پایین در شکل ۱۲ نشان داده شده است. بعد از اینکه، از کمیت‌های تفاضلی، به پتانسیل گرانی تفاضلی روی سطح بیضوی، رسیدیم، می‌بایست اثرات برداشته شده را مجدداً در سطح بیضوی مرجع اضافه کرد. اطلاعات برداشته شده در مرحله حذف عبارت‌اند از:

- ۱- اثرهای میدان ناشی از مدل ژئوپتانسیلی جهانی بر حسب ضرایب هارمونیک بیضوی تا درجه و مرتبه ۳۶۰ به علاوه میدان گریز از مرکز.
- ۲- اثرهای میدان گرانی جرم‌های باقی مانده روی سطح

برای محاسبه عددی معادله انتگرالی آبل - پواسون بیضوی اصلاح شده، روی سطح بیضوی مرجع $\mathbb{E}_{a,b}^2$ یک شبکه منظم $3' \times 3'$ در منطقه جزیره قشم، در محدوده جغرافیایی $55.1810^\circ E \leq \lambda \leq 56.3310^\circ E$ و $26.4690^\circ N \leq \phi \leq 27.0190^\circ N$ انتخاب شد. بنابراین مجهول‌های یا به عبارت دیگر تعداد نقاطی که از راه انتقال به سمت پایین پتانسیل گرانی تفاضلی در آن نقاط تعیین می‌شود، برابر ۲۸۸ نقطه است.

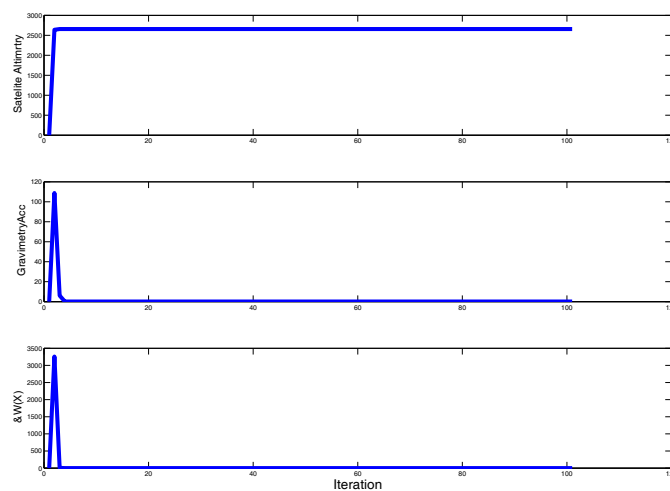
از پتانسیل جاذبه تفاضلی حاصل از مشاهدات ارتفاع‌سنجی ماهواره‌ای، در حکم مجهول‌های وزن‌دار در روند انتقال به سمت پایین استفاده می‌شود. تعداد معادلات مشاهدات ۴۸۷ است، که از این تعداد، ۱۶۸ تای آنها مربوط به مشاهدات حاصل از ارتفاع‌سنجی ماهواره‌ای است.

برای عملی ساختن روند انتقال به سمت پایین، کمیت‌های تفاضلی، برای به دست آوردن جوابی معتبر برای پتانسیل جاذبه تفاضلی روی سطح بیضوی مرجع، از فن مؤلفه واریانس استفاده شده است (کوخ و کوشه، ۲۰۰۲). در جدول ۶ نتایج به دست آمده برای مؤلفه‌های

تفاوت ژئوئید حاصل با ژئوئید GPS/Leveling در جزیره قشم در شکل ۱۷ نشان داده شده است. این شکل به خوبی نشان می‌دهد که ژئوئید محاسبه شده در این مقاله دارای همخوانی خوبی با ژئوئید GPS/Leveling است. نتایج مقایسه ژئوئید حاصل از تلفیق مشاهدات گرانی‌سنجی و ارتفاع‌سنجی ماهواره‌ای با ژئوئید حاصل از GPS/Leveling در جدول ۷ داده شده است. نتایج نشان می‌دهد تفاوت ژئوئید با نقاط GPS/Leveling حدود ۳ سانتی‌متر با انحراف معیار ۲۶ سانتی‌متر است. تفاوت دو مدل می‌تواند ناشی از اعمال نشدن تصحیح صفر ارتفاعی به شبکه ارتفاعی و خطای موجود در ژئوئید GPS/Leveling باشد. در این جدول همچنین تفاوت ژئوئید جهانی حاصل از مدل EIGEN-GL04C با ژئوئید GPS/Leveling ارائه شده است این مدل جدیدترین مدل با درجه و مرتبه ۳۶۰ ارائه شده با GFZ است (فورست و همکاران، ۲۰۰۵). نتیجه این تفاوت نشان می‌دهد که ژئوئید محاسبه شده براساس روش ارائه شده در این مقاله دارای کارایی بهتری نسبت به مدل جهانی است و برای محاسبه ژئوئید نمی‌توان فقط به مدل جهانی اکتفا کرد.

بیضوی تا شعاع ۵۵ کیلومتر حول نقاط مشاهداتی. بنابراین در مرحله بازگشت، ابتدا اثر گرانی حاصل از جرم‌های توپوگرافی باقی‌مانده برحسب پتانسیل برای نقاط مورد نظر روی سطح بیضوی محاسبه می‌شود. این اثر در شکل ۱۳ نشان داده شده است. در مرحله بعد، پتانسیل میدان ناشی از مدل ژئوپتانسیلی جهانی برحسب ضرایب هارمونیک بیضوی تا درجه و مرتبه ۳۶۰ به علاوه میدان گریز از مرکز برای نقاط گریز روی سطح بیضوی محاسبه می‌شود. تغییرات پتانسیل گرانی جهانی در شکل ۱۴ نشان داده شده است. با بازگرداندن اثر جرم‌های حذف شده (اثر مدل ژئوپتانسیل جهانی تا درجه و مرتبه ۳۶۰ به علاوه میدان گریز از مرکز و میدان حاصل از جرم‌های باقی‌مانده) به صورت کمیت پتانسیل، پتانسیل گرانی روی سطح بیضوی مرجع یعنی $w(X)$ خواهد شد. شکل ۱۵ نشان‌دهنده تغییرات پتانسیل گرانی واقعی روی بیضوی است.

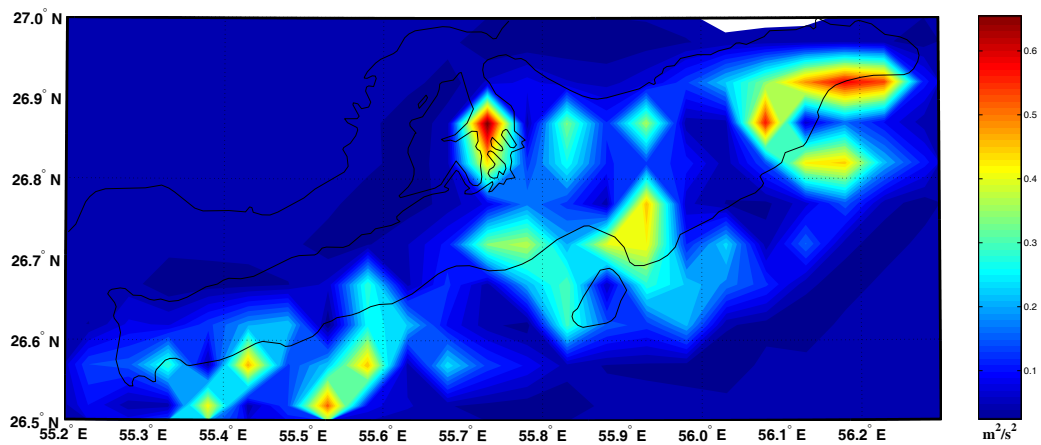
با معلوم بودن پتانسیل سطح ژئوئید و کاربرد فرمول برنز بیضوی (Bruns Formula) ارتفاع ژئوئید روی نقاط این شبکه به دست خواهد آمد. شکل ۱۶ نشان‌دهنده تغییرات ارتفاع ژئوئید حاصل در منطقه جزیره قشم است.



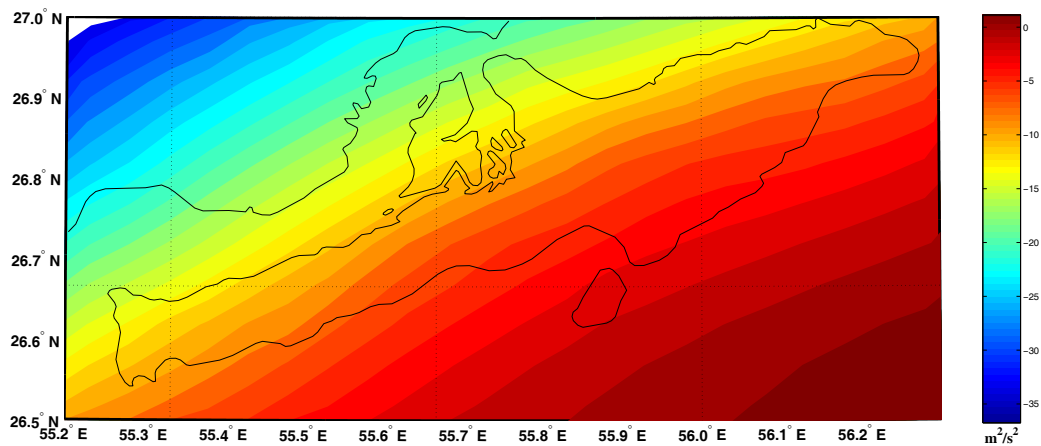
شکل ۱۱. منحنی همگرایی وزن مشاهدات و مجهول‌های در معیار پارامتر پایدارسازی برابر 4.596132×10^{-6} است.

جدول ۶. نتایج به دست آمده برای مؤلفه‌های واریانس.

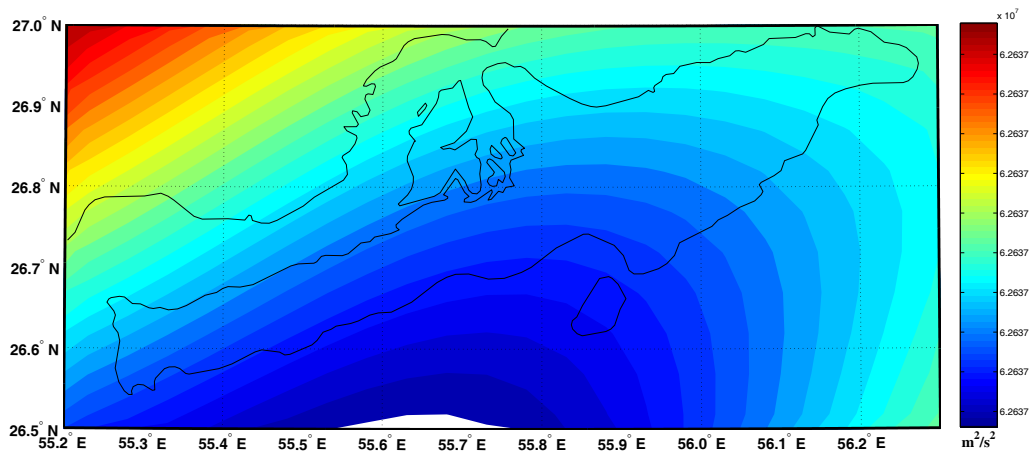
$(0.3821 \text{ mGal})^2$	برآورد نهایی واریانس مشاهدات از نوع اندازه بردار شتاب گرانی ($\sigma_{\text{Gravity Acc.}}^2$)
$(31.55 \text{ m}^2/\text{s}^2)^2$	برآورد نهایی واریانس مشاهدات از نوع ارتفاع‌سنجی ماهواره‌ای ($\sigma_{\text{Satellite Alt.}}^2$)
$(0.4231 \text{ m}^2/\text{s}^2)^2$	برآورد نهایی واریانس مجهول‌های (پتانسیل گرانی تفاضلی روی بیضوی) ($\sigma_{\delta W(X)}^2$)



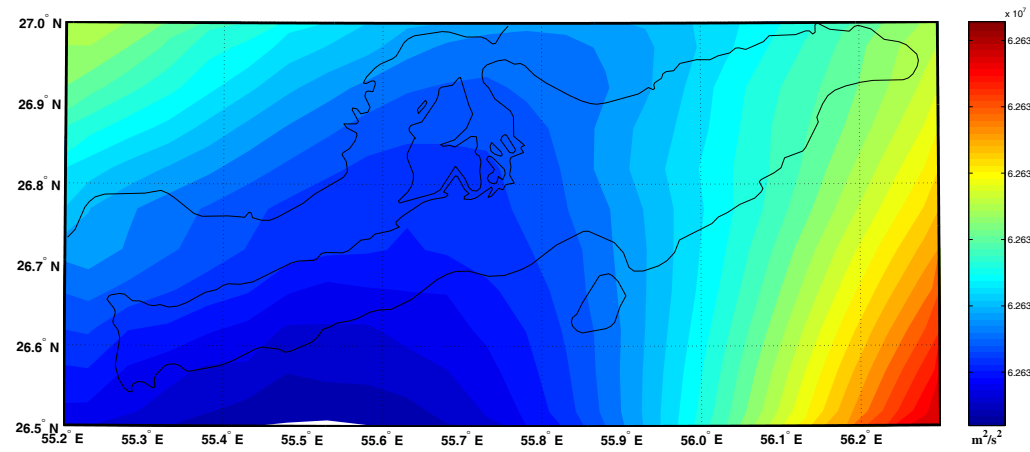
شکل ۱۲. پتانسیل گرانی تفاضلی براساس انتقال به سمت پایین کمیت‌های تفاضلی.



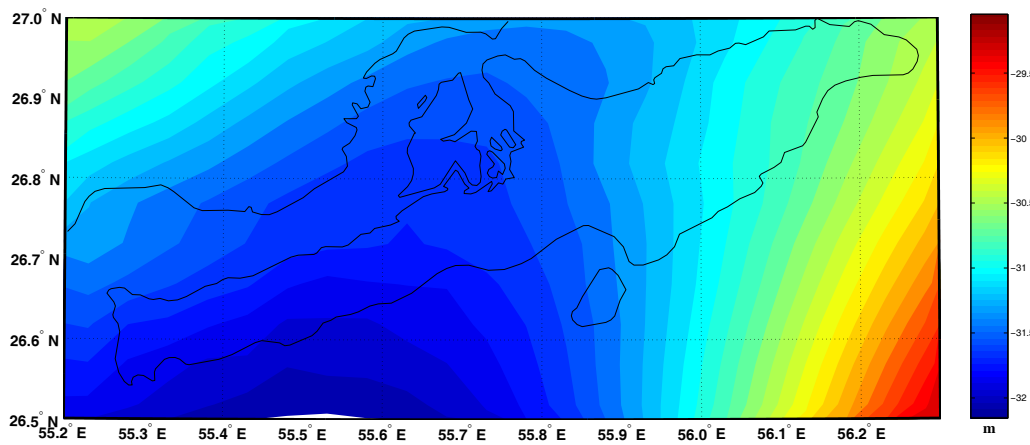
شکل ۱۳. پتانسیل جاذبه حاصل از توپوگرافی باقی مانده.



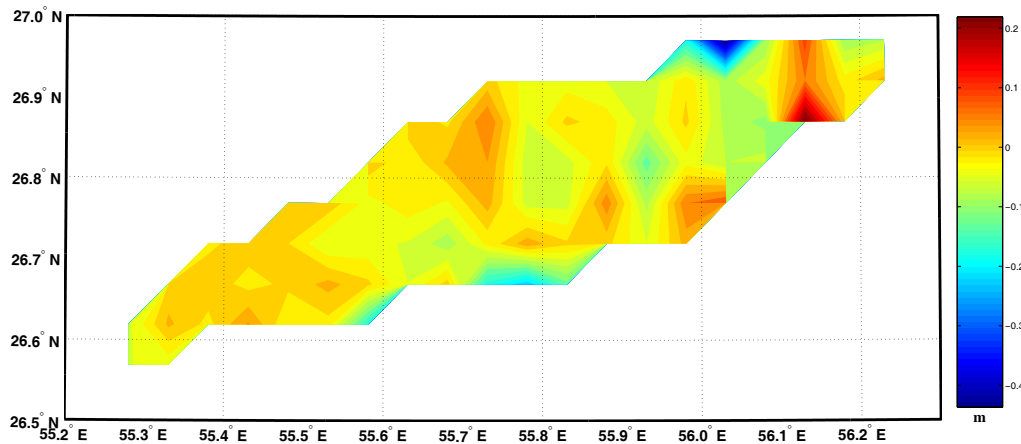
شکل ۱۴. تغییرات پتانسیل گرانی مرجع حاصل از بسط هارمونیک‌های تا درجه و مرتبه ۳۶۰.



شکل ۱۵. تغییرات پتانسیل گرانی واقعی روی بیضوی مرجع.



شکل ۱۶. ژئوئید حاصل از تلفیق شتاب گرانی و ارتفاع‌سنجی ماهواره‌ای در جزیره قشم.



شکل ۱۷. تفاوت ژئوئید حاصل با ژئوئید GPS/Leveling در جزیره قشم.

جدول ۷. نتایج تفاوت ژئوئید به دست آمده با ژئوئید GPS/Leveling (متر).

کمیت	مینیموم	متوسط	ماکزیموم	انحراف معیار
تفاوت ژئوئید محاسبه شده با ژئوئید GPS/Leveling	-0.59	0.03	0.61	0.24
تفاوت ژئوئید جهانی حاصل از مدل EIGEN-GLO4C با ژئوئید GPS/Leveling	0.07	0.44	1.13	0.22

۵ نتیجه گیری

در این مقاله مسئله مقدار مرزی گرانی سنجی - ارتفاع سنجی ماهواره‌ای با مرزهای ثابت به منظور تعیین ژئوئید در جزایر معرفی شد. از جمله مزایای این روش می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

- وجود و یکتایی جواب به ازای اندازه‌های گوناگون منطقه خشکی.
- کاربرد فرمول برونز بیضوی برای تبدیل ارتفاع ژئوئید به پتانسیل تفاضلی در روی سطح بیضوی.
- کاربرد روش کوخ-کوشه برای تعیین وزن نسبی مشاهدات.

علاوه بر این براساس نتایج این تحقیق:

- ۱- با توجه به جدول ۵، و مقایسه نتایج مدل‌های

EIGEN-CG01C و PGM2000A، EGM96

می‌توان دریافت که مدل EIGEN-CG01C در جزیره قشم دارای سازگاری بهتری با مشاهدات شتاب گرانی نسبت به دو مدل دیگر است.

۲- پتانسیل گرانی روی سطح بیضوی مرجع $\mathbb{E}_{a,b}^2$ در حکم

جواب مسئله مقدار مرزی پواسون، می‌تواند از تابع‌های مشاهداتی مختلفی، به طور جداگانه برآورد شود. ترکیب مشاهدات نامتجانس نیازمند برآورد وزن نسبی صحیح مشاهدات از انواع متفاوتی است که می‌تواند از راه برآورد مؤلفه‌های واریانس مشاهدات از انواع گوناگون صورت گیرد.

در این تحقیق، تلفیق مشاهدات از انواع (۱) اندازه بردار شتاب گرانی زمینی، (۲) ژئوئید ارتفاع سنجی

تلفیق اطلاعات ارتفاعسنجی ماهواره‌ای با مشاهدات گرانی از نوع اندازه‌ی شتاب گرانی در یک مسئله مقدار مرزی به صورت توام ارائه و کارایی آن به صورت عددی تأیید و بدین ترتیب راه برای تعیین ژئوئید در جزایر بر مبنای یک مسئله مقدار مرزی گرانی‌سنجی - ارتفاعسنجی ماهواره‌ای با مرز ثابت در جزایر هموار شده است.

منابع

اردلان، ع.، و عرب صاحبی، ر.، ۱۳۸۴، تعیین ژئوئید محلی با استفاده از داده‌های مرزی حاصل از گرانی‌سنجی و ارتفاعسنجی ماهواره‌ای مطالعه خاص: ژئوئید دقیق ایران. نشریه دانشکده فنی دانشگاه تهران، جلد ۳۹ شماره ۵.

اردلان، ع.، صفری، ع.، و جمعگی، ع.، ۱۳۸۶، بررسی اثر مدل رقومی زمین در تعیین ژئوئید بدون استفاده از روش استوکس. مجله فیزیک زمین و فضا. جلد ۳۳ شماره ۱.

صفری، ع.، و اردلان، ع.، ۱۳۸۳، تعیین ژئوئید محلی با استفاده از داده‌های مرزی حاصل از گرانی‌سنجی و ارتفاعسنجی ماهواره‌ای مطالعه خاص: ژئوئید دقیق ایران. نشریه دانشکده فنی دانشگاه تهران، جلد ۳۸ شماره ۶.

Anzenhofer, M., Shum, C. K., and Rentsh, M., 1999, Coastal altimetry and applications, Department of Civil and Environmental Engineering and Geodetic Science of the Ohio State University, Columbus Ohio, Report No. 464.

Arabelos, D., 1989, Gravity field approximation in the area of Greece with emphasis on local characteristics. B. Geod., 63, 69-84.

Arabelos, D., and Tziavos, I. N., 1996, Combination of ERS-1 and TOPEX altimetry for precise geoid and gravity recovery in the Mediterranean Sea: Geophys. J. Int. 125, 285-302.

ماهواره‌ای در مسئله انتقال به سمت پایین ژئوئید، شوند. برای این منظور روش کوخ-کوشه مورد استفاده قرار گرفت؛ تا ضمن پایداری مسئله انتقال به سمت پایین، مؤلفه‌های واریانس مشاهدات و مجهول‌های نیز برآورد شوند. براساس نتایج جدول ۶ مؤلفه واریانس مشاهدات از نوع اندازه بردار شتاب گرانی در مسئله انتقال به سمت پایین برابر $(0.3821 \text{ mGal})^2$ و مؤلفه واریانس مشاهدات از نوع ژئوئید حاصل از ارتفاعسنجی ماهواره‌ای در مسئله انتقال به سمت پایین مقدار $(31.55 \text{ m}^2 / \text{s}^2)^2$ برآورد شد. مؤلفه واریانس پتانسیل تفاضلی برآورد شده روی سطح بیضوی فرانس نیز $(0.4231 \text{ m}^2 / \text{s}^2)^2$ برآورد شد.

۳- با در اختیار داشتن سطح متوسط آب دریا و توپوگرافی سطح دریا حاصل از مدل POCM-4B ارتفاع ژئوئید در مناطق دریایی محاسبه شد. دقت پایین مدل POCM-4B می‌تواند باعث کاهش دقت ژئوئید دریایی حاصل شود. از طرف دیگر همان‌طوری که در شکل ۶ دیده می‌شود، توپوگرافی سطح دریا در منطقه اطراف جزیره قشم حدود ۳۰- سانتی‌متر است. بنابراین در نظر نگرفتن توپوگرافی سطح دریا در محاسبه ژئوئید معادل خطایی در حدود ۰/۱ میلی‌گال در فضای گرانی است. با در نظر گرفتن این نکته حتی دقت کم مدل POCM-4B در منطقه آزمایش نیز از اهمیت استفاده از ژئوئید دریایی در نقش داده مرزی برای تعیین ژئوئید نمی‌کاهد.

۴- براساس نتایج جدول ۷، تفاوت مدل ژئوئید با ژئوئید حاصل از GPS/Leveling در نقاط GPS/Leveling به طور متوسط حدود ۳ سانتی‌متر با انحراف معیار ۲۴ سانتی‌متر است. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که روش جدید برای محاسبه ژئوئید در جزایر حاصل از

- resolution global gravity model derived from combination of GRACE and CHAMP mission and altimetry-gravimetry surface gravity data, Poster g004 EGU-A-04561 presented at EGU General Assembly 2005, Vienna, Austria, 24-29.
- Gaposchkin, E. M., 1980, Global gravity field to degree and order 30 from Geos 3 satellite altimetry and other data. *J. Geophys. Res.*, **85**, 7221-7234.
- Grafarend E. W., and Ardalan A. A., 1999b, World Geodetic Datum 2000, *J. Geodesy*, **73**, 611-623.
- Grafarend, E. W., and Keller, W., 1995, Setup of observational functionals in gravity space as well as in geometry space. *Manuscr Geod.*, **20**, 301-305.
- Hofmann-Wellenhof, B., 1985, The use of multipoles for the altimetry-gravimetry problem. Internal report, Technical University Graz.
- Holota, P., 1982, The altimetry-gravimetry boundary value problem. In Utilization of observations of artificial satellites of the earth for the purposes of geodesy, Proc. Int. Sci. Conf. of Sec. 6, Intercosmos, Bulgaria, Albena, Varna, Sept. 1980, pages 243-249.
- Holota, P., 1983a, The altimetry gravimetry boundary value problem i: linearization, friedrich's inequality. *Boll. Geodesia Sci. Affini*, **17**, 13-32.
- Holota, P., 1983b, The altimetry gravimetry boundary value problem ii: weak solution, v-ellipticity. *Bolletino de Geodesia e Scienze Affini*, **17**, 69-84.
- Jinghai, Y., and Xiaoping, W., 1997, The solution of mixed boundary value problems with the reference ellipsoid as boundary. *J. Geodesy*, **71**, 454-460.
- Keller W., 1996, On a scalar fixed altimetry-gravimetry boundary value problem. *J. Geodesy*, **70**, 459-469.
- Kiamehr, R., and Sjoberg, L. E., 2005, Effect of the SRTM global DEM model on the determination of a high-resolution geoid model: a case study in Iran. *J. Geodesy*, **79**, 540-551.
- Kim, M. C., Tapley, B. D., Shum, C. K., and Ries, J. C., 1995, Center for Space Research Mean Sea Surface Model, Presented at the TOPEX/Poseidon working Team Meeting, Pasadena California.
- Koch, K-R, and Kusche, J., 2002, Regularization of geopotential determination from satellite data by variance components: *J. Geodesy.*, **76**, Arabelos, D., and Vermeer M., 1996, Gravity field mapping from a combination of satellite altimetry and sea gravimetry in the Mediterranean Sea. Reports of the Finnish Geodetic Institute, 96: 1.
- Ardalan, A. A., 1999, High-resolution regional geoid computation in the World Geodetic Datum 2000 based upon collocation of linearized observationals of the type GPS, gravity potential and gravity intensity. PhD Thesis, Department of Geodesy and GeoInformatics, Stuttgart University, Stuttgart. Available at <http://elib.uni-stuttgart.de/opus/volltexte/2000/665/pdf/PhDonline.pdf>.
- Ardalan A. A., and Grafarend E. W., 2001, Ellipsoidal geoidal undulations (ellipsoidal Bruns formula): case studies, *J. Geodesy*, **75**, 544-552.
- Ardalan, A. A., and Grafarend, E. W., 2003, Ellipsoidal geoidal undulations (ellipsoidal Bruns formula): case studies. *J. Geodesy*, **75**, 544-552.
- Ardalan A. A., and Grafarend E. W., 2004, High-resolution regional geoid computation without applying Stokes's formula: a case study of the Iranian geoid, *J. Geodesy*, **78**, 138-156.
- Ardalan, A. A., and Safari, A., 2004, Terrain correction on the multi-cylindrical equal area map projection of the surface of the reference ellipsoid: *J. Geodesy*, **78**, 114-123.
- Arnold, K., 1981, Complex evaluation of gravity anomalies and data obtained from satellite altimetry. *Gerlands Beitr. Geophys.*, **90**, 38-42.
- Arnold, K., 1984, The compatibility conditions, the uniqueness and the solution of the mixed boundary value problem in geodesy. *Gerlands Beitr. Geophys.*, **93**, 339-355.
- Bjerhammar, A., 1983, A stochastic approach to the mixed boundary value problem in physical geodesy: *Geodesy in Transition* (dedicated to H. Moritz), pages 25-42.
- Bjerhammer, A., and Svensson, L., 1983, On the geodetic boundary value problem for a fixed boundary surface- A satellite approach. *Bull. Geod.*, **57**, 382-393.
- Dermanis, A., 1993, A differential geometric approach to the formulation of geodetic boundary value conditions. *Manuscr. Geodaet.*, **18**, 201-218.
- Forste, C., Flechtner, F., Schmidt, R., Meyer, U., Stubenvoll, R., Barthelmes, F., König, R., Neumayer, K. H., Rothacher, M., Reigber, Ch., Biancale, R., Bruinsma, S., Lemoine, J. M., and Raimondo, J. C., 2005, A new high

- Lemoine, J.-M., Meixner, H., and Raimondo, J. C., 2006, A high resolution global gravity field model combining CHAMP and GRACE satellite mission and surface data: EIGEN-CG01C. Scientific Technical Report; STR 06/07. Potsdam: GeoForschungsZentrum.
- Sacerdote, F., and Sansò, F., 1983a, A contribution to the analysis of altimetry-gravimetry problems. *Bulletin Geodesique*, **57**, 257-272.
- Sacerdote, F., and Sansò, F., 1983b, A contribution to the analysis of the altimetry-gravimetry problem. In *Figure of the Earth, the Moon and other Planets*, Monography Series of VUGTK, pages 123-139.
- Sacerdote, F., and Sanso, F., 1987, Further remarks on the Altimetry-Gravimetry problems: *B. Geod.*, **61**, 65-82.
- Safari, A., 2004, Ellipsoidal boundary value problem for geoid computations via modulus of gravity, astronomical longitude, astronomical latitude, and satellite altimetry observations. Ph.D. thesis. Department of Surveying and Geomatics Engineering University of Tehran (In Persian).
- Safari, A., Ardalan A. A., and Grafarend E. W., 2005, A new ellipsoidal gravimetric, satellite altimetry and astronomic boundary value problem, a case study: The geoid of Iran, *J. Geodyn.*, **39**, 545-568.
- Sanso, F., 1995, The long road from measurements to boundary value problems in physical geodesy. *Manuscr. Geodetica*, **20**, 326-344.
- Sanso, F., and Stock, B., 1985, A numerical experiment in the altimetry-gravimetry problem ii. *Manuscr. Geodaet.*, **10**, 23-31.
- Sanso, F., and Sona, G., 1993, The challenge of computing the geoid in the nineties. *Surveys in Geophysics*, **14**, 339-371.
- Sjöberg, L., 1982, On the altimetry-gravimetry boundary problem. *Boll. Geodesia Sci. Affini*, **4**, 377-392.
- Stammer, D., Tokmakian, R., Semtner, A., and Wunsch, C., 1996, How well does a $1/4^\circ$ global circulation model simulate large-scale ocean observation?, *Geophys. Res.*, **101**, 25779-25812.
- Stephan, E., 1987, Boundary integral equations for mixed boundary value problems in \mathbb{R}^3 . *Math. Nachr.*, **134**, 21-53.
- Svensson, L., 1983, Solution of the Altimetry-Gravimetry problem. *Bull. Geod.*, **57**, 332-353.
- 259-268.
- Koch, K. R., and Pope, A. J., 1972, Uniqueness and existence for the Geodetic Boundary Value Problem using the known surface of the Earth. *Bulletin Geodesique*, **106**, 467-475.
- Lehmann, R., 1999, Boundary-value problems in the complex world of geodetic measurements. *J. Geodesy*, **73**, 491-500.
- Lemoine F. G., Smith D. E., Kunz L., Smith R., Pavlis E. C., Pavlis N. K., Klosko S. M., Chinn D. S., Torrence M. H., Williamson R. G., Cox C. M., Rachlin K. E., Wang Y. M., Kenyon S. C., Salman R., Trimmer R., Rapp R. H., and Nerem, R. S. 1996, The development of the NASA GSFC and NIMA joint geopotential model. In: J. Segawa, H. Fujimoto, and S. Okubo (eds), *Gravity, Geoid and Marine Geodesy*, International Association of Geodesy Symposia, Vol. 117, Springer Berlin Heidelberg pp 461-469.
- Mainville, A., 1986, The altimetry-gravimetry problem using orthonormal base functions. Technical Report 373, Department of Geodetic Science and Surveying, The Ohio State University.
- Pavlis, N. K.; Chinn, D. S.; Cox, C. M.; Lemoine, Frank G., 2000, Geopotential Model Improvement Using POCM4B Dynamic Ocean Topography Information PGM2000A. Goddard Space Flight Center. Document ID: 20010016297.
- Rapp, R. H., 1983, The determination of geoid undulations and gravity anomalies from SEASAT altimeter data. *J. Geophys. Res.*, **88**, 1552-1562.
- Rapp, R. H., 1985, Detailed gravity anomalies and sea surface heights derived from GEOS-3/Seasat altimeter data.
- Rapp, R. H., 1986, Gravity anomalies and sea surface heights derived from a combined GEOS 3/Seasat altimeter data set. *J. Geophys. Res.*, **91**, 4867-4876.
- Rapp, R. H., 1998, The Development of a Degree 360 Expansion of the Dynamic Ocean Topography of the POCM 4B Global Circulation Model, NASA/CR-1998-206877, Goddard Space Flight Center, Greenbelt, MD.
- Rapp, R. H., and Tomislav, B., 1992, Oceanwide Gravity Anomalies from Geos-3, Seasat and Geosat Altimeter Data: *Geophys. Res. Lett.*, **19**, 1979-1982.
- Reigber, Ch., Schwintzer, P., Stubenvoll, R., Schmidt, R., Flechtner, F., Meyer, U., König, R., Neumayer, H., Förste, Ch., Barthelmes, F., Zhu, S. Y., Balmino, G., Biancale, R.,

- Svensson, L., 1988, Some remarks on the altimetry-gravimetry problem. Manuscr. Geodaet., **13**, 63-74.
- Vanicek, P., Wells, D., Derenyi, E., Kleusberg, A., Yazdani, R., Arsenault, T., Christou, N., Mantha, J., and Pagiatakis, S., 1987, Satellite altimetry applications for marine gravity. Department of surveying engineering, university of New Brunswick.
- Von Petersdorff, T., Stephan, E., 1990, Regularity of mixed boundary value problems in \mathbb{R}^3 and boundary element methods on graded meshes. Math. Method Appl Sci, **12**, 229-249.
- Wenzel, H. G., 1998, Ultra hochauflösende Kugelfunktionsmodelle GPM98A und GPM98B des Erdschwerefeldes. In: Progress in Geodetic Science, W. Freeden (ed.) pp. 323-331, Shaker Verlag, Aachen 1998.
- Zhang, C., and Sideris, M. G., 1996, Oceanic gravity by analytical inversion of Hotine's formula. Mar. Geod., **19**, 115-136.