

انتقال رو به پایین بی‌هنجاری‌های گرانی هلمرت برای تعیین دقیق ژئوئید در ایران

مهدی گلی^{۱*}، مهدی نجفی علمداری^۲ و پتر ونیچک^۳

^۱ استادیار، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه شاهرود، ایران

^۲ دانشیار، گروه هیدروگرافی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران شمال، ایران

^۳ استاد، دانشکده ژئودزی و ژئوماتیک، دانشگاه نیوبرانزویک، کانادا

(دریافت: ۸۸/۶/۲۸، پذیرش نهایی: ۹۰/۱۱/۱۱)

چکیده

روش استوکس برای حل مسئله مقدار مرزی نیاز به حذف اثر گرانی توپوگرافی بالای ژئوئید دارد. فضای هلمرت یک مدل مناسب برای حل مسئله مقدار مرزی ژئوئید است. هدف این تحقیق تعیین دقیق ژئوئید به روش استوکس-هلمرت در منطقه ایران با تاکید بر نحوه گسسته‌سازی انتگرال پواسون است. در این تحقیق از گسسته‌سازی نقطه-متوسط و متوسط-متوسط برای تعیین بی‌هنجاری‌های متوسط در سطح ژئوئید استفاده شده است. محاسبات ما نشان می‌دهد که اختلاف بین این دو مدل گسسته‌سازی انتگرال پواسون در ارتفاع ژئوئید در منطقه آزمون در حدود دسی‌متر است. با این حال در مقایسه با ۲۱۳ نقطه GPS-Leveling دقت مطلق و نسبی ژئوئید گرانی هر دو مدل متوسط و نقطه‌ای در منطقه آزمون در حدود ۴۶ سانتی‌متر است.

واژه‌های کلیدی: انتقال رو به پایین، بی‌هنجاری گرانی هلمرت، تعیین دقیق ژئوئید، استوکس-هلمرت، مدل گسسته سازی

Downward continuation of Helmert gravity anomaly to precise determination of geoid in Iran

Goli, M.¹, Najafi-Alamdari, M.² and Vaníček, P.³

¹Assistant Professor, Faculty of Civil Engineering, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran

²Associate Professor, Faculty of Marine Science and Technology, Islamic Azad University, North Tehran Branch, Tehran, Iran

³Professor, Department of Geodesy and Geomatics Fredericton, NB, New Brunswick University, Canada

(Received: 19 Sep 2009, Accepted: 31 Jan 2012)

Abstract

The use of Stokes boundary value problems for the determination of the geoid requires that gravity anomalies (as boundary values) are known on geoid (as boundary). While, the gravity observations are measured on the Earth's surface, to obtain boundary data, the surface gravity anomalies are downward from the terrain onto geoid. For downward continuation (DWC) of surface gravity anomalies, the Poisson integral can be used if the disturbing potential corresponding to gravity anomalies have harmonics everywhere above the geoid. But free-air gravity anomalies are non harmonics due to presence of (topographical+atmospherical) masses above the geoid. In the geoid accounting for the topography was first suggested by Helmert put in practice for example by Martinec and Vaníček (1994), and ultimately applied in the Stokes-Helmert scheme (Vaníček et. al, 1999). The second condensation method proposed by Helmert, involves the condensation of the topographic and atmospheric masses outside the geoid onto the geoid in the form of a surface layer.

As the Helmert disturbing potential is harmonic above the geoid, we use the Poisson

solution formulated for harmonic functions. A critical and unavoidable problem encountered in the DWC is the implementation of discretization of the Poisson integral. Several discretization schemes have been proposed by, e.g., Matrinec (1996), Vaníček et al. (1996) and Sun and Vaníček (1998). In mean-mean model the mean values on the surface are transformed to the corresponding mean values on the geoid by doubly averaged Poisson kernel. The point-point model transformed point surface values to point geoid values. The in point-mean the mean values of geoid are obtained from the point values on the Earth's surface by averaged Poisson kernel.

Normally, mean anomalies are evaluated from several/many point values on the Earth's surface on the regular grid. Also the finite element method of evaluation of Stokes integral needs that mean anomaly to be given on the geoid. Therefore we have to use the mean-mean model of discretization of Poisson integral. But In Iran, the distribution of observed point gravity data are very spars and it involves the big gaps in Alborz and Zagros mountainous areas as well as in deserts and sea. The gaps usually are filled by the high resolution satellite geopotential model. Therefore in most cells, the mean gravity anomalies are predicted/computed from few point values or geopotential model. In this case, the mean values tend to point values.

We employed both point-mean and mean-mean models of DWC in Stokes-Helmert method to precise determination of geoid in Iran. The long wavelengths part of geoid up to degree and order 180/180 is determined using the EGM08 model. As external evidence, the two geoids were compared to the GPS solution at 213 points into the national height network. The RMS of differences between two geoids and GPS-levelling data are 46cm without any applying correction surface. The RMS of difference between two geoid models is about 4cm and it can be reached up to 35cm in mountainous area. As a result, we cannot able to decide to suitable discretization model of Poisson integral due to very poor distribution of gravity data in Iran.

Key words: Downward continuation, Helmert gravity anomaly, Precise geoid determination, Stokes-Helmert, Discretization model

۱ مقدمه

توپوگرافی قرار دارد، لازم است که برای برقراری شرط پیش گفته، اثر گرانی توپوگرافی به طور محاسباتی از بالای ژئوئید حذف و به شکلی در زیر و یا روی ژئوئید جایگزین شود (ونیچک و مارتینک، ۱۹۹۴). این کار باعث تغییر پتانسیل گرانی زمین و تغییر موقعیت سطح ژئوئید به سطح دیگری به نام کو-ژئوئید می شود. از آنجا که تغییر پتانسیل گرانی کوچک است، جدائی دو سطح فوق نیز کوچک خواهد بود به طوری که کو-ژئوئید محاسبه شده با دقت خوب قابل برگشت به ژئوئید است. در روش استوکس-هلمرت، توپوگرافی بالای ژئوئید به صورت لایه سطحی با چگالی سطحی معلوم

تعیین ژئوئید به روش استوکس نیازمند معلوم بودن بی هنجاری های گرانی در روی ژئوئید است. در روش استوکس، بی هنجاری پتانسیل، در قالب یک مدل هماهنگ (هارمونیک)، و ژئوئید در حکم سطح تراز مبنای ارتفاعات، از حل معادله دیفرانسیل لاپلاس با شرایط مرزی معلوم تعیین می شوند. در اینجا مرز ژئوئید و مقادیر مرزی بی هنجاری گرانی در سطح آن می باشند. مقادیر مرزی از اندازه گیری شتاب گرانی در سطح زمین تامین می شوند. شرط هماهنگ بودن پتانسیل گرانی در بالای توپوگرافی (توده بیرون از ژئوئید) آن صادق است. برای محاسبه ژئوئید که قسمتی از آن در قاره ها و در داخل

تحلیلی را با روش پواسون مقایسه کرد. براساس تحقیقات او شعاع بهینه برای انتگرال پواسون ۱ درجه، بهترین مدل برای گسسته‌سازی مدل متوسط-متوسط بود. او همچنین او روشن ساخت که روش پواسون از روش تحلیلی نتایج بهتری را داراست. سون (۲۰۰۳) پیشنهاد استفاده از مدل نقطه-متوسط را به‌جای متوسط-متوسط برای داده‌های کانادا مطرح کرد.

محاسبه انتگرال استوکس به‌روش اجزای محدود نیازمند به معلوم بودن بی‌هنجاری‌های گرانی متوسط روی یک شبکه منظم دارد. از آنجا که داده‌های گرانی به‌صورت نقطه‌ای و نامنظم برداشت می‌شوند، باید آنها در یک فرایند میانگین‌گیری روی یک شبکه با ابعاد مناسب محاسبه شوند. در فرایند میانگین‌گیری بخشی از بسامدهای زیاد سیگنال بی‌هنجاری گرانی فیلتر می‌شوند. از این رو داده‌های متوسط نرم‌تر از بی‌هنجاری‌های نقطه‌ای هستند. هدف این مقاله تعیین دقیق ژئوئید با استفاده از فضای هلمرت با تاکید بر مدل‌های متوسط و نقطه‌ای گسسته‌سازی انتگرال پواسون است. اگرچه که انتخاب مدل گسسته‌سازی وابسته به نوع داده‌های موجود در سطح زمین و روی ژئوئید است و اختیاری نیست. با این حال با وجود داده‌های بسیار پراکنده در منطقه ایران، این امکان وجود دارد که حداقل برای مناطق وسیعی بی‌هنجاری‌های متوسط حاصل از فرایند میانگین‌گیری بیشتر خواص نقطه‌ای آشکار سازند. این موضوع در داده‌های بی‌هنجاری‌های متوسط کانادا به‌چشم می‌خورد (تنزر و همکاران، ۲۰۰۳).

۲ انتقال رو به پایین

معادله انتگرال پواسون را براساس حل معادله دیریکله می‌توان به‌ترتیب زیر نوشت (وینچک و همکاران، ۲۰۰۶):

روی ژئوئید بر مبنای حفظ جرم زمین و یا با حفظ مرکز جرم زمین روی ژئوئید تحکیم می‌شود. از آن‌جا که فرمول تحکیم توپوگرافی مشخص است، محاسبه دقیق جابه‌جایی دو سطح ژئوئید و کو-ژئوئید، برای تعیین نهایی ژئوئید، قابل محاسبه است.

روش استوکس نیازمند معلوم بودن بی‌هنجاری‌های گرانی در سطح ژئوئید است. در حالی که مشاهدات گرانی در سطح زمین اندازه‌گیری و محاسبه می‌شوند. لذا این اطلاعات باید در مرحله انتقال رو به پایین روی ژئوئید منتقل شود. تاکنون از معکوس انتگرال پواسون برای انتقال رو به پایین بی‌هنجاری‌های گرانی استفاده شده است. رجوع کنید به (مارتینک، ۱۹۹۶؛ وینچک و همکاران، ۱۹۹۶؛ مارتینک و گرافارند، ۱۹۹۷؛ سون و وینچک، ۱۹۹۸؛ اردلان، ۱۹۹۹؛ هیوانگ، ۲۰۰۲؛ هیوانگ و همکاران، ۲۰۰۳؛ سون، ۲۰۰۳؛ هیوانگ و ورنوا، ۲۰۰۵). وینچک و همکاران (۱۹۹۶) مدل گسسته‌سازی متوسط-متوسط انتگرال پواسون (انتقال بی‌هنجاری‌های متوسط روی سطح زمین به بی‌هنجاری‌های متوسط روی ژئوئید) را معرفی و استفاده کردند. مدل گسسته‌سازی نقطه-نقطه (انتقال بی‌هنجاری‌های نقطه‌ای در سطح زمین به بی‌هنجاری‌های نقطه‌ای روی ژئوئید) در تحقیق مارتینک (۱۹۹۶) معرفی شد. مسائل عددی متفاوت انتقال رو به پایین بی‌هنجاری‌های گرانی هلمرت با گام ۵ دقیقه در تحقیق سون و وینچک (۱۹۹۸) بررسی شد. در این تحقیق انتقال رو به پایین بی‌هنجاری‌های نقطه‌ای در سطح زمین به بی‌هنجاری‌های نقطه‌ای متناظر در سطح ژئوئید را به‌علت خطای بالا در محاسبه کرنل پواسون رد شد. همچنین روشن شد که انتقال رو به پایین بی‌هنجاری‌های ۵ دقیقه مسئله‌ای پایدار است. بررسی کاملی روی انتقال رو به پایین بی‌هنجاری‌های گرانی متوسط و نقطه‌ای، انتخاب شعاع انتگرال‌گیری مناسب را هیوانگ (۲۰۰۲) عملی ساخت. همچنین او روش انتقال رو به پایین

ژئوید میانگین بگیریم:

$$\begin{aligned} \Delta g_t^i &= \frac{R}{4\pi r_t^i(\Omega)} \int_{\Omega_c} \int_{\Omega_g} \Delta g_g K(r, \psi, R) d\Omega' \\ &= \frac{R}{4\pi r_t^i(\Omega)} \int_{\Omega_c} \overline{\Delta g_g K(r, \psi, R)} d\Omega'. \end{aligned} \quad (5)$$

شکل گسسته انتگرال (۵) به صورت زیر بیان می شود.

$$\Delta g_t^i = \frac{R}{4\pi(R+H_i)} \sum_j \overline{K_{ij}} \overline{\Delta g_g^j}, \quad (6)$$

که $\overline{\Delta g_g^j}$ بی هنجاری متوسط و $\overline{K_{ij}}$ متوسط کرنل پواسون در روی سطح ژئوید است.

$$\overline{K_{ij}} = \int_{C_j} K(r_t^i, \psi_{ij}, R) d\Omega'. \quad (7)$$

معمولاً داده های بی هنجاری گرانی روی گریدهای منظم میانگین گیری و عرضه می شوند. گرچه میانگین گیری به منزله یک فیلتر بخشی از بسامدهای زیاد و مفید را از بین می برد. با این حال باعث کاهش نوفه ها و جلوگیری از خوشه ای شدن بی هنجاری های گرانی می شود. نزدیکی بیش از حد و خوشه ای شدن مشاهدات باعث ناپایداری دستگاه معادلات خطی حاصل از انتقال رو به پایین می شود. انتگرال پواسون برای تعیین بی هنجاری های متوسط گرانی از بی هنجاری های متوسط زمینی با دوبرار متوسط گیری از انتگرال (۱) حاصل می شود (وینیچک و همکاران، ۱۹۹۶).

$$\begin{aligned} \overline{\Delta g_t^i} &= \frac{R}{4\pi r_t^i(\Omega)_{A_i}} \int_{\Omega_c} \int_{\Omega_g} \overline{\Delta g_g K(r, \psi, R)} d\Omega' \\ &= \frac{R}{4\pi r_t^i(\Omega)_{A_i}} \int_{\Omega_c} \int_{\Omega_g} \overline{\Delta g_g K(r, \psi, R)} d\Omega' \\ &= \frac{R}{4\pi r_t^i(\Omega)_{A_i}} \int_{\Omega_c} \overline{\Delta g_g} \int_{\Omega_g} \overline{K(r, \psi, R)} d\Omega' \\ &= \frac{R}{4\pi r_t^i(\Omega)_{A_i}} \int_{\Omega_c} \overline{\Delta g_g K(r, \psi, R)} d\Omega', \end{aligned} \quad (8)$$

که در حالت گسسته داریم:

$$\forall \Omega \in \Omega_0, \quad (1)$$

$$r_t(\Omega) \geq R: \Delta g[r_t(\Omega), \Omega]$$

$$= \frac{R}{4\pi r_t(\Omega)} \int_{\Omega} \Delta g(R, \Omega') K[r_t(\Omega), \psi(\Omega', \Omega), R] d\Omega',$$

که $K(r, \psi, R)$ کرنل پواسون است:

$$\forall \Omega \in \Omega_0,$$

$$r_t(\Omega) \geq R: K[r_t(\Omega), \psi(\Omega', \Omega), R] \quad (2)$$

$$= R \frac{r_t(\Omega)^2 - R^2}{d^3(r_t(\Omega), \psi(\Omega', \Omega), R)},$$

$\Delta g(R, \Omega')$ و $\Delta g[r_t(\Omega)]$ بی هنجاری گرانی در سطح زمین و ژئوید، Ω زاویه زمین مرکز مربوط به نقطه (θ, λ) و d فاصله فضایی بین دو نقطه (r_t, Ω) و نقطه انتگرال گیری (R, Ω') است. بر طبق معادله (۱) بی هنجاری گرانی در موقعیت $r > R$ را از یک ترکیب خطی از بی هنجاری های روی سطح $r = R$ است. این فرایند را انتقال رو به بالا می نامند. در عمل از معکوس این رابطه در انتقال رو به پایین استفاده می شود؛ یعنی از حل معکوس رابطه فوق با معلوم بودن بی هنجاری های گرانی در خارج کره به شعاع R به بی هنجاری های گرانی در روی ژئوید رسید. معادله انتگرالی (۱) برای انتقال رو به پایین یک معادله انتگرالی فردهولم نوع اول است. شکل گسسته انتگرال ۱ را می توان به صورت زیر نوشت.

$$\Delta g_t^i = \sum_{j=1}^M B_{ij} \Delta g_g^j, \quad (3)$$

$$B_{ij} = \frac{R}{4\pi r_t^i} S_j K(r_t^i, \psi_{ij}, R) \quad (4)$$

که Δg_t^i و Δg_g^j به ترتیب بی هنجاری های گرانی در سطح ژئوید و زمین است. S_j نیز مساحت سلول ها روی سطح ژئوید است. در حالت معکوس انتگرال (۱) بی هنجاری های نقطه ای در سطح زمین را به بی هنجاری نقطه ای در سطح ژئوید تبدیل می کند. برای تعیین بی هنجاری های متوسط در سطح ژئوید از بی هنجاری های نقطه ای در سطح زمین کافی است از انتگرال (۱) در سطح

بی‌هنجاری‌ها در سطح زمین (بردار b) و یا حتی مقدار صفر در نظر گرفت. تکرار ژاکوبی برای معادلات خطی خوش‌وضعی که $\|I-A\| < 1$ باشد همگرا است. $\|I-A\|$ نرم ماتریس برابر با بزرگ‌ترین مقدار ویژه ماتریس است. محاسبات مان‌نشان می‌دهد که بزرگ‌ترین مقدار ویژه ماتریس پیش‌گفته در منطقه مورد بررسی کمتر از یک است. تکرارهای ژاکوبی را می‌توان تا حصول شرط $\max |x^{k+1} - x^k| < \varepsilon$ ادامه داد که ε تلورانس خاتمه تکرارها و برابر ۱۰ میکروگال (دقت محاسبات برای رسیدن به ژئوئید با دقت ۱ سانتی‌متر) است.

۳ روش استوکس - هلمرت برای تعیین دقیق ژئوئید تبدیل پتانسیل گرانی زمین واقعی W به پتانسیل گرانی زمین هلمرت W^h بعد از تحکیم توپوگرافی و جوّ روی ژئوئید به صورت رابطه (۱۱) است.

$$W^h = W - \delta V; \quad \delta V = (V' + V^a) - V^c, \quad (11)$$

که در آن V' پتانسیل گرانی توپوگرافی، V^a پتانسیل گرانی جوّ، V^c پتانسیل گرانی لایه با چگالی سطحی و δV اختلاف پتانسیل دو فضای پتانسیل فوق است و آن را پتانسیل باقی‌مانده می‌نامند. بی‌هنجاری گرانی هلمرت به صورت زیر تعریف می‌شود (ونیچک و همکاران، ۱۹۹۹):

$$\forall r > r_e, \Omega \in \Omega_0: \\ \Delta g^h(r, \Omega) \approx g^h(r, \Omega) \\ - \gamma [r - Z^h(r, \Omega), \Omega] \quad (12)$$

که در آن γ شتاب گرانی نرمال، Z^h بی‌هنجاری ارتفاعی در فضای هلمرت، r فاصله زمین مرکز، $\Omega = (\theta, \lambda)$ امتداد زمین مرکز و Ω_0 کل فضای مربوط به $[\phi \in \langle -\pi/2, \pi/2 \rangle, \lambda \in \langle 0, 2\pi \rangle]$ است.

همچنین از برای تابع نوسان گرانی در فضای هلمرت

$$\overline{\Delta g^i} = \frac{R}{4\pi(R + H_i)} \sum_j \overline{K_{ij}} \overline{\Delta g^j}, \quad (9)$$

که A_i مساحت سلول زمینی و $\overline{K_{ij}}$ کرنل پواسون با دوبار متوسط‌گیری است.

در هر سه مدل نقطه - نقطه (انتقال رو به پایین بی‌هنجاری‌های نقطه‌ای در سطح زمین برای تعیین بی‌هنجاری‌های نقطه‌ای در سطح ژئوئید) نقطه - متوسط (انتقال رو به پایین بی‌هنجاری‌های نقطه‌ای برای تعیین بی‌هنجاری‌های متوسط) و متوسط - متوسط (انتقال رو به پایین بی‌هنجاری‌های متوسط برای تعیین بی‌هنجاری‌های متوسط) با حل یک دستگاه معادله خطی $Ax = b$ روبه‌رو می‌شویم. سون و ونیچک (۱۹۹۸) روشن ساختند که انتقال رو به پایین بی‌هنجاری‌های متوسط $5' \times 5'$ هلمرت یک مسئله خوش‌وضع است. بدین معنی که جواب یکتای پایدار برای این دستگاه معادله خطی براساس شرط‌های آدامار وجود دارد. این مسئله را ونگ (۲۰۰۱) با استفاده از شرط پیکار گسسته تایید کرد.

با توجه به داده‌های گرانی موجود به کاررفته در این مقاله (منطقه ایران) که حداکثر یک گرید $10' \times 10'$ است می‌توان گفت مسئله انتقال رو به پایین بی‌هنجاری‌های هلمرت خوش‌وضع است. برای حل دستگاه معادلات ناشی از انتقال رو به پایین، $Ax = b$ ، روش ساده تکراری ژاکوبی را می‌توان به کار برد (هیوانگ، ۲۰۰۲):

$$Ax = b, \\ A = B + I, \\ (B + I)x = b, \\ x = -Bx + b, \\ x = -(A - I)x + b, \\ x = x - Ax + b. \quad (10)$$

$$x^{k+1} = x^k - Ax^k + b, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

برای شروع تکرار، مقادیر اولیه x^0 را می‌توان مقدار

داریم:

در نقطه (r, Ω) می‌نامند (وینچک و مارتینک، ۱۹۹۴). در

تقریب کروی می‌توان نوشت:

$$-\frac{\partial \gamma(r, \Omega)}{\partial r} \frac{1}{\gamma(r, \Omega)} \approx \frac{2}{r} \quad (18)$$

در نهایت می‌توان ارتباط بین بی‌هنجاری هوای آزاد با بی‌هنجاری هلمرت در روی سطح زمین را از رابطه زیر به‌دست آورد:

$$\forall r > r_e, \Omega \in \Omega_0 : \quad (19)$$

$$\Delta g^h(r, \Omega) \approx \Delta g(r, \Omega) + \frac{\partial \delta V(r, \Omega)}{\partial r} + \frac{2}{r} \delta V^h(r, \Omega)$$

برای حل مسئله شرایط مرزی لازم است که مقادیر بی‌هنجاری گرانی هلمرت به سطح کو-ژئوئید منتقل شوند. در اینجا کو-ژئوئید در حکم مرز و بی‌هنجاری‌های منتقل شده به آن به‌منزله مقادیر مرزی خواهند بود. انتقال بی‌هنجاری‌ها در دو مرحله صورت می‌گیرد. نخست آنها از سطح زمین به سطح ژئوئید، سپس از آنجا به سطح کو-ژئوئید منتقل می‌شوند. برای انتقال به ژئوئید، از آنجا که گرادیان ارتفاعی شتاب گرانی در فضای هلمرت یک تابع نامعلوم است، از انتگرال پواسون استفاده می‌شود که این اثر در بخش قبل توضیح داده شد. تصحیح DWC عبارت است از سهم ناشی از انتقال بی‌هنجاری گرانی از سطح زمین روی ژئوئید:

$$\Delta g^h(R, \Omega) = \Delta g^h(r, \Omega) + DWC + SITE + SIAE \quad (20)$$

بی‌هنجاری گرانی هلمرت در سطح ژئوئید $\Delta g^h(R, \Omega)$ باید به سطح کو-ژئوئید انتقال یابد (نجفی علمداری، ۱۹۹۶):

$$\Delta g_c^h - \Delta g_g^h \cong \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial H} \Big|_{r=r_g} (T_c^h - T_g^h) \cong -\frac{2}{R} (\delta V) \quad (21)$$

$$\Delta g_c^h \cong \Delta g_g^h + SITE + SIAE$$

$$\Delta g_c^h = \Delta g_t^h + DWC + SITE + SIAE$$

$$\forall r > r_e, \Omega \in \Omega_0 :$$

$$\delta g^h(r, \Omega) \approx \delta g(r, \Omega) + \frac{\partial \delta V(r, \Omega)}{\partial r} \quad (13)$$

که جمله $\frac{\partial \delta V(r, \Omega)}{\partial r}$ در رابطه اخیر اثر مستقیم پتانسیل باقی‌مانده بر شتاب گرانی است (مارتینک و وینچک، ۱۹۹۴). همچنین بی‌هنجاری گرانی را می‌توانیم از رابطه آن با نوسان گرانی به‌دست آوریم:

$$\forall r > r_e, \Omega \in \Omega_0 : \quad (14)$$

$$\Delta g^h(r, \Omega) \approx \delta g^h(r, \Omega) + \frac{\partial \gamma(r, \Omega)}{\partial r} Z^h(r, \Omega)$$

که در این رابطه $Z^h(r, \Omega)$ فاصله سطح زمین تا تلوروئید در فضای هلمرت است. شتاب گرانی نرمال روی تلوروئید از رابطه

$$\forall r > r_e, \Omega \in \Omega_0 : \quad (15)$$

$$\gamma[r - Z^h(r, \Omega), \Omega] \approx \gamma(r, \Omega) - \frac{\partial \gamma(r, \Omega)}{\partial r} Z^h(r, \Omega)$$

به‌دست می‌آید. با کمی محاسبات خواهیم داشت:

$$\forall r > r_e, \Omega \in \Omega_0 : \quad (16)$$

$$Z^h(r, \Omega) = Z(r, \Omega) - \frac{\delta V(r, \Omega)}{\gamma(r, \Omega)}$$

با در نظر گرفتن همه روابط فوق بی‌هنجاری گرانی هلمرت از بی‌هنجاری هوای آزاد به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

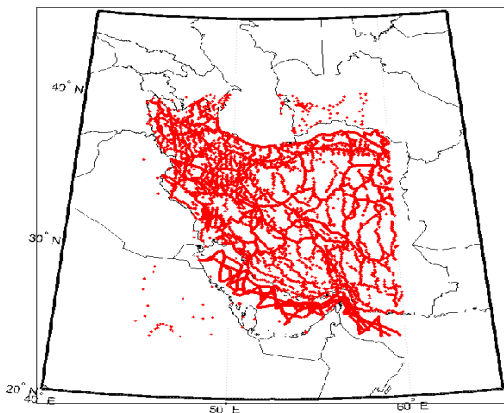
$$\forall r > r_e, \Omega \in \Omega_0 : \quad (17)$$

$$\Delta g^h(r, \Omega) \approx \Delta g(r, \Omega) + \frac{\partial \delta V^h(r, \Omega)}{\partial r} - \frac{\partial \gamma(r, \Omega)}{\partial r} \Big|_{r=Z^h(r, \Omega)} \frac{\delta V^h(r, \Omega)}{\gamma(r, \Omega)}$$

جمله سوم معادله اخیر را اثر ثانویه غیرمستقیم توپوگرافی

$$\Delta g_t^h = \Delta g_t^{CB} + 2\pi\rho_0 GH^o - \delta g^{tc} + \frac{\partial}{\partial r}(\delta V^T + \delta V^a) + \frac{2}{R} H^o \Delta g^B + \frac{2}{R}(\delta V^T + \delta V^a) + \varepsilon_t \quad (23)$$

که Δg_t^{CB} بی‌هنجاری گرانی بوگه کامل کلاسیک، $2\pi\rho_0 GH^o$ جمله تبدیل بی‌هنجاری بوگه به هوای آزاد، δg^{tc} اثر ناهمواری توپوگرافی اطراف، $\frac{\partial}{\partial r}(\delta V^T + \delta V^a)$ اثر مستقیم توپوگرافی DTE و DAE، δg^{tc} متوسط اثر ناهمواری توپوگرافی اطراف، $\frac{2}{R} H^o \Delta g^B$ تصحیح ژئوئید به کوازی ژئوئید، $\frac{2}{R}(\delta V^T + \delta V^a)$ اثر ثانویه غیر مستقیم توپوگرافی و جو و ε_t تصحیحات بیضوی است. شکل ۲ بی‌هنجاری‌های متوسط هوای آزاد که حاصل از بی‌هنجاری‌های متوسط بوگه به دست آمده‌اند را نشان می‌دهد. با محاسبه کلیه اثرات نامبرده در فرمول (۲۳) بی‌هنجاری‌های سطحی هلمرت محاسبه می‌شود شکل ۳. با توجه به خالی بودن مناطق زیادی از ایران گام مناسب برای ایجاد شبکه منظم ۱۰ دقیقه انتخاب شد. گرچه که این گام با توجه به تغییرات شدید توپوگرافی و تغییرات محلی ژئوئید در ایران بسیار بزرگ است، اما استفاده از گام‌های کوچک‌تر نظیر ۵ دقیقه با توجه به کمبود داده باعث ایجاد یک شبکه مصنوعی کرده و عملاً کیفیت نتایج را بهبود نخواهد بخشید.



شکل ۱. توزیع بی‌هنجاری‌های شتاب گرانی BGI و NCC در ایران.

در عمل از تلفیق اطلاعات ماهواره‌ای و زمینی برای تعیین ارتفاع ژئوئید و یا کوژئوئید استفاده می‌شود. تغییرات عمده ژئوئید از طول موج‌های بلند تا درجه و مرتبه L از مدل‌های ژئوپتانسیل به دست می‌آید. تغییرات جزئی و محلی ژئوئید را کوژئوئید باقی‌مانده می‌نامند. کوژئوئید سطح هم‌پتانسیل نظیر سطح ژئوئید در فضای هلمرت است. جدایی هندسی دو سطح ژئوئید و کوژئوئید با فرمول،

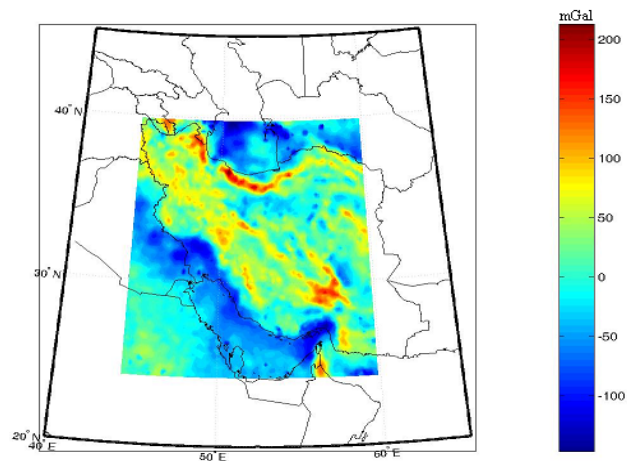
$$PITE = \frac{\delta V(R, \Omega)}{\gamma_0(\Omega)} \quad (22)$$

به دست می‌آید. PITE را اثر غیرمستقیم و اولیه توپوگرافی در پتانسیل می‌نامند (مارتینک و ونیچک، ۱۹۹۴).

۴ محاسبات عددی

در این مقاله با توجه به محدودیت دسترسی به داده‌های گرانی، تعیین ژئوئید برای منطقه مرکزی ایران مدنظر است. برای محاسبات داده‌های ارتفاعی SRTM شامل مدل‌های رقومی زمین با گام‌های ۳ و ۳۰ ثانیه قوسی، مدل ارتفاعی کل زمین با گام ۵ دقیقه ETOPO5 و همچنین داده‌های شتاب گرانی از سازمان نقشه‌برداری (شامل ۸۹۴۸ نقطه زمینی) و اطلاعات بانک BGI (شامل ۸۸۶۸ نقطه زمینی و ۶۸۲۶ نقطه دریایی) مورد استفاده قرار گرفت. شکل ۱ توزیع نقاط شتاب گرانی موجود در ایران پس از حذف مشاهدات اشتباه مشتمل بر ۲۲۱۵۶ نقطه را نشان می‌دهد.

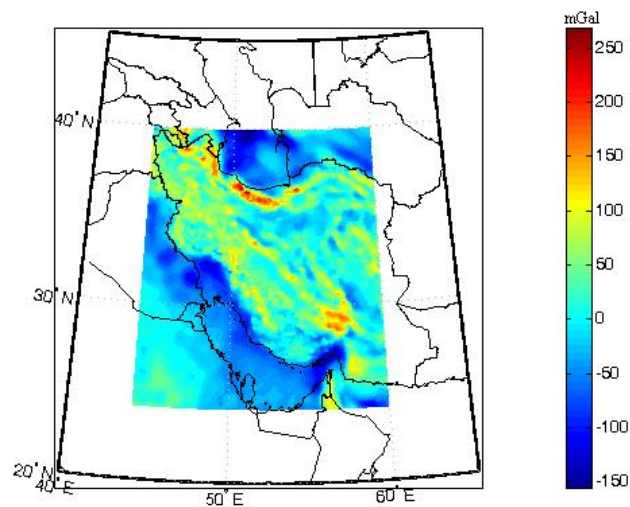
برای محاسبه بی‌هنجاری‌های هلمرت باید اثرات توپوگرافی و جو هلمرت را روی سطح زمین محاسبه کنیم. به سبب نرمی بی‌هنجاری‌های بوگه و سهولت پیش‌بینی آنها در مناطق خالی بی‌هنجاری‌های هلمرت با استفاده از این بی‌هنجاری‌ها محاسبه می‌شود (ونیچک و همکاران، ۱۹۹۹):



شکل ۲. بی‌هنجاری هوای آزاد متوسط با گام $10'$ (Min=-155.51, Max=236.498, Mean=3.052, and STD=54.078 mGal).

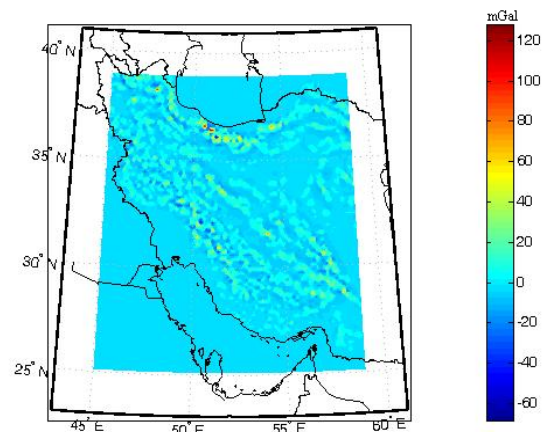
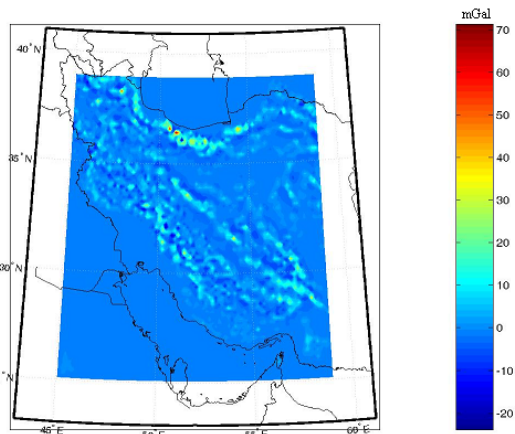
دشواری‌تر می‌کند. در همین راستا سهم انتقال رو به پایین بی‌هنجاری‌های سطحی متوسط به بی‌هنجاری‌های متوسط در روی ژئوئید نسبت به انتقال رو به پایین بی‌هنجاری‌های سطحی نقطه‌ای به بی‌هنجاری‌های متوسط در سطح ژئوئید بیشتر است (شکل‌های ۵ و ۶). این مسئله در تعداد تکرارهای روش تکراری ژاکوبی کاملاً دیده می‌شود. البته با توجه به گام زیاد بین داده‌های این مسئله باعث ناپایداری مسئله نخواهد شد.

با توجه به اینکه در حالت اجزای محدود، انتگرال استوکس نیاز به معلوم بودن بی‌هنجاری متوسط دارد، لذا فقط از مدل‌های نقطه-متوسط و متوسط-متوسط می‌توان در انتقال رو به پایین استفاده کرد. انتقال رو به پایین بی‌هنجاری‌های سطحی هلمرت با استفاده از مدل‌های نقطه-متوسط (معادله ۶) و متوسط-متوسط (معادله ۹) صورت گرفت. با توجه به اینکه عملگر دوبار متوسط گرفته شده پواسون (\bar{K}) یک عملگر نرم است، این انتقال رو به پایین بی‌هنجاری‌های متوسط-متوسط



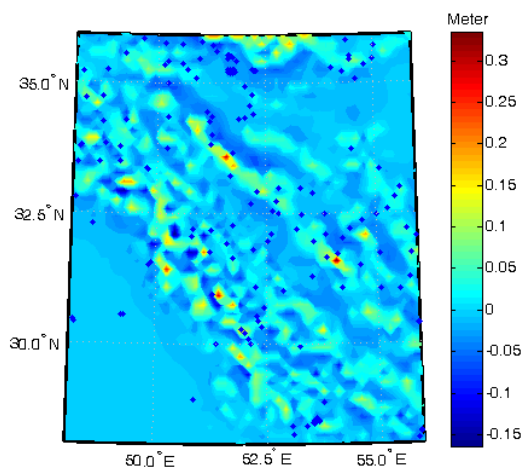
شکل ۳. بی‌هنجاری هلمرت با گام $10'$ در سطح زمین (Min=-158.633, Max=280.942, Mean=3.462, and STD=53.640 mGal).

گفت ژئوئیدهای حاصل، دارای دقت محلی بهتری نسبت به مدل جهانی EGM08 هستند. با این حال میزان بهبود آنها کم است که این امر ناشی از نبود اطلاعات محلی است. به هر حال ژئوئید محاسبه شده یک ژئوئید تا درجه و مرتبه ۱۸۰/۱۸۰ است و عوارض محلی ژئوئید را در بر نمی‌گیرد.



شکل ۴. سهم انتقال رو به پایین بی‌هنجاری‌های متوسط به بی‌هنجاری‌های متوسط روی ژئوئید (Min=-69.946, Max=133.815, Mean=0.723, and STD=7.874 mGal).

شکل ۵. سهم انتقال رو به پایین بی‌هنجاری‌های نقطه‌ای به بی‌هنجاری‌های متوسط روی ژئوئید (Min=-24.639, Max=74.052, Mean=0.670, and STD=4.110mGal).



شکل ۶. اختلاف ژئوئیدهای محاسبه شده با استفاده از مدل‌های گسسته‌سازی نقطه-متوسط و متوسط-متوسط انتگرال پواسون و توزیع مکانی نقاط GPS-levelling (Min=-0.164, Max=0.345, Mean=0.004, and STD=0.041 Meter).

برای بررسی تفاوت دو روش در ارتفاع ژئوئید، ژئوئید گرانی مربوط به هر روش محاسبه شد. برای طول موج‌های بلند ژئوئید از مدل ژئوپتانسیل EGM08 تا درجه و مرتبه ۱۸۰/۱۸۰ استفاده شد. ضرایب درجات پایین این مدل صرفاً از اطلاعات تجزیه و تحلیل ماهواره GRACE محاسبه شده است (پاولیس و همکاران، ۲۰۰۸). همچنین کرنل انتگرال استوکس برای درجه ۱۸۰ به روش ونیچک-کلوزبرگ (۱۹۸۷) اصلاح و فاصله کروی ۳ درجه برای انتگرالگیری انتخاب شد. خطای برش انتگرال نیز در محاسبه شد.

اختلاف بین ژئوئیدهای حاصل از دو روش نقطه‌ای و متوسط در حدود دسی متر است (شکل ۶). براساس این شکل، تفاوت بین دو روش سامانمند (سیستماتیک) نیست اما به نظر می‌رسد که این مقدار در کوهستان‌ها بیشتر است. برای بررسی کیفیت ژئوئیدهای حاصل از تعداد ۲۱۳ نقطه GPS-levelling موجود در منطقه استفاده شد.

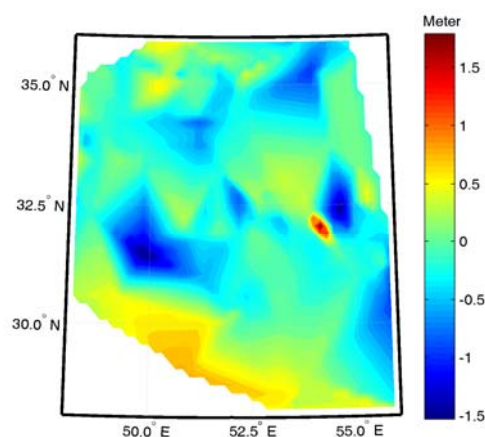
در قیاس با ژئوئید هندسی، هر دو ژئوئید گرانی دارای دقت نسبی و مطلق حدود ۴۶ سانتی متر هستند. محاسبات ما نشان می‌دهد که دقت ژئوئید EGM08 روی همین نقاط GPS-levelling برابر ۵۸ سانتی متر است. لذا می‌توان

ژئوئید در آنها باید از نوعی متوسط گیری و یا درون یابی استفاده کنیم. در این حالت اختلاف دو مدل ژئوئید که بیشتر به صورت اتفاقی است (شکل ۶) در روی نقاط GPS-levelling کم می شود. در صورت وجود داده های دیگر نظیر اطلاعات گرانی اکتشافی نفت و گاز، اطلاعات چگالی، امکان دسترسی به دقت های بهتر در حدود دسی متر برای ژئوئید در ایران مهیا است. در این مقاله به علت در اختیار نبودن مدل تغییرات جانبی چگالی مناسب، از اثر آن صرف نظر شد.

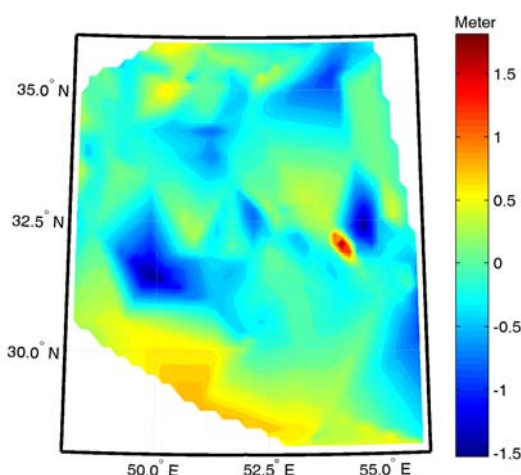
مقایسه ژئوئید حاصل از دو مدل گسسته سازی متوسط - متوسط و نقطه - نقطه انتگرال پواسون با نقاط GPS-Levelling موجود نشان داد که صراحتاً نمی توان یک مدل را به مثابه مدل بهینه برای گسسته سازی انتخاب کرد. این در حالی است که اختلاف ژئوئید دو مدل تفاوتی در حدود دسی متر دارند. گام بزرگ ژئوئید محاسبه شده (۱۰ دقیقه) و تعداد کم داده های GPS-Levelling امکان انتخاب مدل بهینه را سلب کرده است. در این خصوص، استفاده از مدل نقطه - متوسط با توجه به پایداری بیشتر دستگاه معادلات خطی و سرعت محاسبات پیشنهاد می شود.

منابع

- Ardalan, A. A., 1999, High resolution regional geoid computation in the World Geodetic Datum 2000, based upon collocation of linearized observational functionals of the type GPS, gravity potential and gravity intensity, Department of Geodesy and GeoInformatics University of Stuttgart.
- Huang, J., 2002, Computational methods for the discrete downward continuation of the Earth gravity and effects of lateral topographical mass density variation of gravity and geoid, Department of Geodesy and Geomatics Engineering Federicton, UNB.
- Huang, J., Sideris, M. G., Vanicek, P. and Tziavos, I. N., 2003, Numerical investigation of downward continuation techniques for gravity anomalies, Bollettino di Geodesia e Scienze Affini LXII, 1, 33-48.



شکل ۷. اختلاف ژئوئید حاصل از مدل متوسط-متوسط و ژئوئید حاصل از نقاط GPS-Levelling (Min= -1.700, Max= 2.055, Mean= -0.035, and RMS = 0.457 Meter).



شکل ۸. اختلاف ژئوئید حاصل از مدل نقطه-متوسط و ژئوئید حاصل از نقاط GPS-Levelling (Min= -1.68, Max= 2.085, Mean= -0.030, and RMS= 0.458 Meter).

۵ نتیجه گیری

اختلاف معنی داری در حد دسی متر در ژئوئید حاصل از روش های گسسته سازی انتگرال پواسون وجود دارد. اختلاف یکسان این دو مدل در مقایسه با نقاط GPS-levelling ناشی از بزرگ بودن گام ژئوئید محاسباتی (10'×10') است. زیرا نقاط GPS-levelling دقیقاً منطبق بر شبکه ژئوئید محاسبه شده نیستند و برای تعیین

- Vaníček, P., Sun, W., Ong, P., Martinec, Z., Najafi, M., Vajda, P. and Ter Horst, B., 1996, Downward continuation of Helmert's gravity, *Journal of Geodesy*, **71**, 21-34.
- Wong, J. C. F., 2001, On picard criterion and the well-posed nature of harmonic downward continuation, University of New Brunswick.
- Huang, J. and Veronneau, M., 2005, Applications of downward-continuation in gravimetric geoid modeling: case studies in Western Canada, *Journal of Geodesy*, **79**, 135-145.
- Martinec, Z., 1996, Stability investigations of a discrete downward continuation problem for geoid determination in the Canadian Rocky Mountains, *Journal of Geodesy*, **70**(11), 805-828.
- Martinec, Z. and Grafarend, E. W., 1997, Construction of Green's function to the external Dirichlet boundary-value problem for the Laplace equation on an ellipsoid of revolution, *Journal of Geodesy*, **71**, 562-570.
- Martinec, Z. and Vaníček, P., 1994, Direct topographical effect of Helmert's condensation for a spherical geoid, *Man. Geod.*, **19**, 257-268.
- Martinec, Z. and Vaníček, P., 1994, The indirect effect of Stokes-Helmert technique for a spherical approximation of the geoid, *Man. Geod.*, **19**, 213-219.
- Najafi-Alamdari, M., 1996, Contributions towards the computation of a precise regional geoid, University of New Brunswick.
- Pavlis, N. K., Holmes, S. A., Kenyon, S. C., and Factor, J. K., 2008, An Earth gravitational model to degree 2160: EGM08. General Assembly of the European Geosciences Union. Vienna, Austria.
- Sun, W., 2003, On discrete schemes in downward continuation of Gravity International Association of Geodesy, Sapporo, Japan Springer.
- Sun, W. and Vaníček, P., 1998, On some problems of the downward continuation of the 5' x 5' mean Helmert gravity disturbance, *Journal of Geodesy*, **72**, 411-420.
- Tenzer, R., Novac, P., Novac, P., Pagiatakis, S., Veronneau, M., Martinec, Z. and Featherstone, W., 2003, A review of the UNB Stokes-Helmert approach for precise geoid determination in honoring the academic life of Petr Vaníček M. Santos (Ed).
- Vaníček, P., Huang, J., Novak, P., Pagiatakis, S., Veronneau, P., Martinec, Z. and Featherstone, W., 1999, Determination of the boundary values for the Stokes-Helmert problem, *Journal of Geodesy*, **73**(4), 180-192.
- Vaníček, P. and Kleusberg, A., 1987, Canadian geoid: Stokesian approach, *Manuscripta Geodaetica*, **12**, 86-98.
- Vaníček, P. and Martinec, Z., 1994, The Stokes-Helmert scheme for the evaluation of a precise geoid, *Manuscripta Geodaetica*, **19**, 119-128.