

## توازن و امواج گرانی-لختی در یک مدل کژفشار دولایه‌ای

محمد جغتایی<sup>۱\*</sup>، علیرضا محب‌الحججه<sup>۲</sup> و عباسعلی علی‌اکبری بیدختی<sup>۳</sup>

<sup>۱</sup> دانشجوی دکتری هواشناسی، گروه فیزیک فضا، موسسه ژئوفیزیک دانشگاه تهران، ایران

<sup>۲</sup> دانشیار، گروه فیزیک فضا، موسسه ژئوفیزیک دانشگاه تهران، ایران

<sup>۳</sup> استاد، گروه فیزیک فضا، موسسه ژئوفیزیک دانشگاه تهران، ایران

(دریافت: ۸۹/۳/۱۰، پذیرش نهایی: ۹۱/۴/۱۳)

### چکیده

از جمله مسائل بنیادین در دینامیک جو، اقیانوس و شاره‌های ژئوفیزیکی به طور کل بررسی میزان برقراری "توازن"، وجود و ساختار توازن‌های از مرتبه دلخواه، شکست توازن و تولید امواج گرانی-لختی در تحول زمانی شارش‌های تاواری (vortical) است. در مدل کژفشار دولایه‌ای روی صفحه  $f$ ، با آزمایش عددی و استفاده از تجزیه موج-تاوه، رابطه توازن بهینه یا نزدیک به بهینه در اعداد راسبی کوچک در گستره بین  $0.07$  تا  $0.79$  تحقیق می‌شود. در این آزمایش عددی همچنین طیف انرژی روابط توازن با طیف انرژی تلاطم دو بُعدی در ابعاد گوناگون مقایسه می‌شود. افت و خیز روی طیف انرژی (حاصل از امواج گرانی-لختی) به برهم کنش موج-موج یا موج-تاوه نسبت داده می‌شود. در افت و خیز روی طیف انرژی نسبت طول موج تحریک شده به شعاع تغییر شکل راسبی بین نیم تا یک تغییر می‌کند. ارتباط بین طیف انرژی و روند انرژی در دسترس خطی شده نامتوازن بررسی می‌شود. در روابط توازن بهینه، یک شکست در آشبار وارونه طیف انرژی در بزرگ‌مقیاس وجود دارد. در آزمایش عددی پیش گفته، ارتباط بین بیشینه انرژی امواج گرانی-لختی با بیشینه عدد راسبی در حین تحول زمانی شارش، در رابطه توازنی بهینه در هشت سامانه شارشی بررسی می‌شود. نتایج، یک ارتباط نمایی بین دامنه امواج گرانی-لختی با عدد راسبی را نشان می‌دهد. نتایج حاصل با نظریه‌های دینامیکی موجود حاصل از بسط مجانبی معادلات بسط کاملاً هم‌خوانی و با تحلیل صورت گرفته بر مبنای نتایج آزمایش دولایه‌ای ویلیامز و همکاران (۲۰۰۸) مغایرت دارد.

واژه‌های کلیدی: تاوایی پتانسیلی، جریان تاوه‌ای، رابطه توازن، طیف انرژی، تجزیه موج-تاوه

### Balance and inertia-gravity waves in a two-layer baroclinic model

Joghataei, M.<sup>1</sup>, Mohebalhojeh, A. R.<sup>2</sup> and Aliakbari-Bidokhti, A. A.<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Ph.D. Student of Meteorology, Space Physics Department, Institute of Geophysics, University of Tehran, Iran

<sup>2</sup>Associate Professor, Space Physics Department, Institute of Geophysics, University of Tehran, Iran

<sup>3</sup>Professor, Space Physics Department, Institute of Geophysics, University of Tehran, Iran

(Received: 31 May 2010, Accepted: 03 Jul 2012)

### Abstract

Balance, breakdown of balance, and generation of inertia-gravity waves in vortical flows are fundamental topics of prime importance in geophysical fluid dynamics. This research aims to find the optimum balance relation as well as the Rossby-number variation of the spontaneous generation of inertia-gravity waves in a baroclinic, two-layer, Boussinesq model on a doubly-periodic  $f$ -plane geometry for a range of Rossby numbers between 0.07 and 0.79.

The setup of the experiments is an initially axisymmetric vortex in each layer formed by a circular contour of Rossby-Ertel potential vorticity (PV) surrounded by a

background, uniform PV of the same magnitude in the two layers. The strength of the uniform PV within the upper-layer (lower-layer) vortex is stronger (weaker) with respect to the background PV. Alternatively, the PV anomaly is positive (negative) in the upper (lower) layer. This setup is amenable to baroclinic instability, which is triggered by inserting random noise of very small magnitude on the contour representation of the vortices in the two layers. The initial distribution of PV is inverted by means of the first three members of the  $\delta\delta$ ,  $\delta\gamma$ , and  $\gamma\gamma$  hierarchies of balance relations, comprising nine PV inversion procedures and thus nine ways of determining imbalance through wave-vortex decomposition. For each regime of flow, nine experiments are carried out using one of the nine balance relations to construct the initial conditions. The onset of instability leads to breakdown of symmetry, generation of Rossby waves around the vortices, complex vortex-vortex, wave-vortex, and wave-wave interactions. The focus is, however, on the spontaneous generation of imbalance. For each of the nine experiments, PV inversion by means of the same balance relation employed to construct the initial conditions is used to determine the amount of imbalance. The minimum imbalance is then sought over the nine balance relations.

The energy spectra of imbalance as obtained using various balance relations are also investigated in order to gain insight into the nature of imbalance. Fluctuations on the spectra appear to be related to wave-vortex and wave-wave interactions. The relation between the spectra and the evolution of linear available energy of imbalance is also studied.

As the most important outcome of the present research, the relation between the amplitude of inertia-gravity waves generated during the evolution of unstable, vortical flows and the Rossby number is obtained by spanning the parameter space by changing the strength of the PV anomaly and the nondimensional acceleration due to gravity. The results obtained agree with an exponentially-small functional relation between the amplitude of the inertia-gravity waves and the Rossby number. While this exponentially-small relation agrees with the asymptotic theories available, it is in sharp contrast with the linear relation obtained by Williams et. al, (2008) using their laboratory two-layer experiments.

**Key words:** Potential vorticity, Vortical flow, Balance relation, Energy spectrum, Wave-vortex decomposition

## ۱ مقدمه

که امواج گرانی-لختی را حذف می کنند، توصیف کرد. این مدل ها را با عنوان مدل متوازن (Balance Model) می شناسند. هر مدل متوازن دو مولفه دارد. یک جزء پیش یابی که تحول زمانی کمیت ارباب (Master variable) را بررسی می کند. یک جزء فرایابی که شامل شرایط توازن مناسبی است که به آنها روابط برده ای (Slave relation) گویند. این مدل ها در واقع حالت گسترش یافته ای از توازن های باد زمین گرد و باد گرایان با اعداد بی بُعد فرود و راسبی غیر صفر

دینامیک بزرگ مقیاس جو و اقیانوس شامل دو بخش است: بخش اول شارش تقریباً زمین گرد، با بسامد کم و مولفه متوازن و بخش دیگر امواج گرانی-لختی حاصل از بخش نامتوازن با بسامد زیاد. شارش های جو-اقیانوسی از قبیل امواج کژ فشار عرض های میانی و پیچک های میان مقیاس اقیانوسی تا حد زیادی متوازن اند، بدان معنا که می توان با مدل های متوازن توصیفشان کرد. این شارش ها را می توان با معادلات تحویل یافته ای

پریشیدگی فشار  $p$  می‌گیرد (محب الحجه و دریچل، ۲۰۰۴):

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -g \nabla h - f \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{v} \quad (1)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} = -(1+h) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (2)$$

در اینجا  $f = 2\Omega$  پارامتر کوریولیس،  $\mathbf{v}$  بردار سرعت،  $u$  و  $v$  مولفه‌های سرعت در راستاهای  $x$  و  $y$  است. دقت شود که معادله پیوستگی بر ضخامت میانگین تقسیم شده تا صورت ساده‌تری به دست آید. معادله تکانه را می‌توان به تناظر برحسب تاوایی و واگرایی به شکل معادلات (۳) نوشت:

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + \nabla^2 p - f \zeta = -\nabla \cdot (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) = 2J(u, v) - \nabla \cdot (\mathbf{v} \delta) \quad (3)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + f \delta = -\nabla \cdot (\mathbf{v} \zeta)$$

که  $\zeta$  تاوایی نسبی  $\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ ،  $\delta$  واگرایی  $\delta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$  و  $J$  عملگر ژاکوبین است. میدان سرعت

را می‌توان به صورت هلمهولتز  $\mathbf{v} = \hat{\mathbf{z}} \times \nabla \psi + \nabla \chi + \bar{\mathbf{v}}$  تجزیه کرد که در آن  $\psi$  تابع جریان،  $\chi$  پتانسیل سرعت و  $\bar{\mathbf{v}}$  میانگین میدان سرعت روی حوزه است که برای سادگی می‌توان آن را صفر اختیار کرد. معادلات پیوستگی و تاوایی منجر به پایستاری تاوایی پتانسیلی  $q = \frac{f + \zeta}{1+h}$  می‌شود. به راحتی می‌توان اثبات کرد که معادلات چندلایه‌ای که حول حالت پایه ساکن خطی شده‌اند در فضای مدهای بهنجار کاملاً از یکدیگر مستقل‌اند. بنابراین با تصویر کردن روی مدهای قائم، فضای مدهای بهنجار چندلایه‌ای شامل زیر فضاهای آب کم عمق خطی شده است. براین اساس، با تصویر معادلات چندلایه‌ای به مدهای قائم، معادلات توازن آب کم عمق به راحتی به

هستند و همگی امواج گرانی-لختی را حذف می‌کنند. توازن در معنای عام را می‌توان به صورت روابط تابعی بین مدهای گرانی-لختی و مد راسبی و به عبارتی دیگر رابطه‌ای بین کمیت‌های برده و ارباب تعریف کرد (وارن و همکاران، ۱۹۹۵؛ ولیس، ۱۹۹۶؛ بوکوو، ۱۹۹۷؛ و مک‌این‌تایر و نورتن، ۲۰۰۰).

به طور کلی در حین تحول زمانی شارش، توازن در جایی شکسته می‌شود. از راه بررسی نحوه عدول از توازن و میزان متوازن نبودن در حین تحول زمانی شارش، به مقدار دقت روابط توازن پی می‌بریم. متناظر با جواب‌های فیزیکی شارش در فضای فیزیکی یک خمینه (manifold) یا بس‌لا در فضای فازی تعریف می‌شود. میزان دقت هر رابطه توازن با بررسی فاصله خمینه متوازن از خمینه بسیط (که حاصل از معادلات بسیط هستند) بررسی می‌شود. از آنجا که امروزه دلایل قوی برای نفی وجود خمینه آرام (Slow manifold) در دست است، هنوز آزمایش‌های عددی برای نزدیک شدن به شبه خمینه آرام (Slow quasi-manifold) ادامه دارد.

## ۲ فرمول‌بندی

مدل با دو لایه با دمای پتانسیلی  $\theta_1$  و  $\theta_2$ ، ضخامت میانگین  $H_1$  و  $H_2$ ، پریشیدگی ضخامت  $h_1$  و  $h_2$  و استفاده از تقریب بوسینسک ساخته می‌شود. در اینجا اندیس ۱ برای لایه زیرین، اندیس ۲ برای لایه زبرین، و پریشیدگی با انحراف از میانگین افقی تعریف می‌شود. در معادلات آب کم عمق چندلایه‌ای برای صفحه ثابت چرخان با سرعت زاویه‌ای  $\Omega$ ، موسوم به صفحه  $f$ ، در هر لایه معادلات تکانه (۱) و پیوستگی (۲) همان صورت معادلات آب کم عمق تک لایه‌ای را دارند، تنها با این تفاوت که جای  $gh$  را در معادلات آب کم عمق که در آن  $g$  معرف شتاب گرانی است

معادلات چینه‌بندی شده تعمیم می‌یابند.

با تعمیم سلسله‌های روابط توازن تعریف شده برای معادلات آب کم عمق روی صفحه  $f$  (محب‌الحجه و دریچل، ۲۰۰۱)، می‌توان برای معادلات بسیط (Primitive Equation) چندلایه‌ای سلسله‌های متناظر را تعریف کرد که خمینه گرانی (با واگرایی و تاوایی) آزمون گرد  $\gamma = f \zeta - \nabla^2 p$  را به خمینه راسبی (با تاوایی پتانسیلی خطی شده  $q_l = \zeta - fh$ ) مرتبط می‌کند. این سلسله‌ها عبارت‌اند از  $\frac{\partial^N \delta}{\partial t^N} = \frac{\partial^{N+1} \delta}{\partial t^{N+1}} = 0$  یا توازن  $\delta - \gamma$  و  $\frac{\partial^N \delta}{\partial t^N} = \frac{\partial^N \gamma}{\partial t^N} = 0$  یا توازن  $\gamma - \delta$  که هر یک برای  $N=0,1,\dots$  تعریف می‌شوند. از این روابط توازن می‌توان برای تعیین توازن دست‌یافتنی برای شارش تحت معادلات بسیط مورد بررسی، استفاده کرد. با اکتفا به این توضیح، معادلات سه سلسله را برای معادلات بسیط چندلایه‌ای عرضه می‌کنیم (برای جزئیات رجوع کنید به محب‌الحجه و دریچل، ۲۰۰۴).

الف- توازن  $\delta - \delta$

دستیابی به معادلات فرایافتی لازم برای تعیین میدان‌های ضخامت، واگرایی، تاوایی و سرعت با تصویر به مدهای بهنجار میسر است. چنانچه معادله واگرایی را بر حسب فشار دوباره نویسی و از طرفین  $f^2 h$  را کم کنیم و معادله حاصل را به فضای مدهای قائم ببریم، معادله (۴) حاصل می‌شود:

$$\mathcal{H}_m \check{h} = f \check{q}_l + \overline{2J(u,v) - \nabla \cdot (\mathbf{v}\delta)} - \check{\delta}^{(1)} \quad (4)$$

که در آن  $\mathcal{H}_m = c_m^2 \nabla^2 - f^2$  عملگر هلمهولتز پیراسته،  $\check{\delta}^{(1)} = \frac{\partial \delta}{\partial t}$  مشتق زمانی واگرایی در فضای مدهای قائم (علامت کلاه وارونه اشاره به فضای مدهای قائم دارد)، و  $c_m$  تندی فاز مد قائم گرانی-لختی  $m$  در حد موج کوتاه است.

برای توازن  $\delta$  دو مشتق زمانی متوالی را برابر صفر قرار می‌دهیم و با مشتق‌گیری متوالی از معادله  $\delta$  خواهیم داشت:

$$\mathcal{H}_m \check{\delta}^{(n)} = \overline{f \nabla \cdot (\mathbf{v}\zeta) - \{2J(u,v) - \nabla \cdot (\mathbf{v}\delta)\}^{(n+1)} + \delta^{(n+2)}} - c_m^2 \nabla^2 \nabla \cdot (\mathbf{v}h)^{(n)}, \quad (n=0,1,\dots,N-1) \quad (5)$$

با حل هم‌زمان دو معادله (۴) و (۵) و استفاده از متغیرهای کمکی در معادلات (۶):

$$\zeta^{(n)} = \{-f \delta - \nabla \cdot (\mathbf{v}\zeta)\}^{(n-1)} \quad (6)$$

$$h^{(n)} = \{-\delta - \nabla \cdot (\mathbf{v}h)\}^{(n-1)}$$

مرتبه‌های متفاوت توازن  $\delta$  حاصل می‌شود. هر مرتبه توازن را یا با مرتبه نامی آن و یا با جفت‌متغیرهایی که قطع می‌شوند، می‌شناسیم؛ با این توضیح که هر رابطه‌ای که در آن پایین‌نویس  $m$  حضور دارد، در فضای مد قائم صورت می‌گیرد. برای سهولت نگارش، از این پس علامت کلاه وارونه از روابط در فضای مد قائم برداشته می‌شود.

ب- توازن  $\delta - \gamma$

اولین مرتبه این توازن یعنی  $\delta = \gamma = 0$  چیزی جز توازن زمین‌گرد نیست. در این سلسله توازن، دو مشتق زمانی هم‌مرتبه  $\delta$  و  $\gamma$  از مشتق زمانی معادلات بسیط حذف می‌شود (معادلات (۷)). این سلسله توازن را برای  $N > 0$  به صورت مختصر زیر است:

$$\gamma = -2J(u,v) + \nabla \cdot (\mathbf{v}\delta) + \delta^{(1)}$$

$$\mathcal{H}_m \delta^{(n)} = \{f \nabla \cdot (\mathbf{v}\zeta) - c_m^2 \nabla^2 \nabla \cdot (\mathbf{v}h)\}^{(n)} + \{-2J(u,v) + \nabla \cdot (\mathbf{v}\delta)\}^{(n+1)} + \delta^{(n+2)}$$

$$(n=0,1,\dots,N-2) \quad (7)$$

$$\mathcal{H}_m \delta^{(N-1)} = \{f \nabla \cdot (\mathbf{v}\zeta) - c_m^2 \nabla^2 \nabla \cdot (\mathbf{v}h)\}^{(N-1)} + \gamma^{(N)}$$

$$\delta^{(N)} = 0, \gamma^{(N)} = 0$$

$$\zeta^{(n)} = \{-f \delta - \nabla \cdot (\mathbf{v}\zeta)\}^{(n-1)}, \quad (n=0,1,\dots,N-1)$$

$$h^{(n)} = \{-\delta - \nabla \cdot (\mathbf{v}h)\}^{(n-1)}, \quad (n=0,1,\dots,N-1)$$

$$\mathbf{v}^{(n)} = \hat{z} \times \nabla \nabla^{-2} \zeta^{(n)} + \nabla \nabla^{-2} \delta^{(n)}, \quad (n=0,1,\dots,N)$$

اولیری است (دریچل و آمیام، ۱۹۹۷؛ دریچل و همکاران، ۱۹۹۹).

طی آزمایش‌های عددی صورت گرفته (جغتایی و محب الحججه، ۱۳۸۸) مشاهده شده است که اگر میدان PV اولیه برای کلیه آزمایش‌ها با استفاده از توازن بولین-چارنی وارون شود، توان جدایش مدل برای روابط توازنی متفاوت، کم خواهد آمد. در این سری آزمایش‌های عددی برای بررسی هر رابطه توازن، آغازگری نیز با همان رابطه صورت می‌گیرد. به عبارت دیگر، نقطه شروع هر خمینه توازن روی خود آن خمینه قرار داده می‌شود. با استفاده از الگوریتم CASL، میدان حاصل از آغازگری برای انتگرال‌گیری معادلات بسط دولایه‌ای به مدت ۵۰ روز به کار برده می‌شود. در حین انتگرال‌گیری زمانی، داده‌ها در بازه‌های نیم‌روز ذخیره می‌شود. در زمان‌های 0.5, 1, 1.5, ..., 50 t میدان PV با روابط توازن وارون می‌شود تا میدان متوازن متناظر به دست آید. میدان متوازن از میدان حاصل از معادلات بسط کسر می‌شود تا میدان نامتوازن به دست آید. این میدان در فضای فیزیکی حاصل از برهم‌کنش‌های غیرخطی موج-موج، موج-تاوه و تاوه-تاوه است. در تولید و تحول امواج گرانی-لختی، کلیه برهم‌کنش‌های غیرخطی بالا شرکت دارند. به این ترتیب میدان‌های متوازن و نامتوازن متناظر با سه رابطه اول هر کدام از سه سلسله روابط توازنی یعنی:

$$\begin{aligned} &(\delta, \delta^{(1)}), (\delta^{(1)}, \delta^{(2)}), (\delta^{(2)}, \delta^{(3)}), \\ &(\delta^{(1)}, \gamma^{(1)}), (\delta^{(2)}, \gamma^{(2)}), (\delta^{(3)}, \gamma^{(3)}), \\ &(\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}), (\gamma^{(2)}, \gamma^{(3)}), (\gamma^{(3)}, \gamma^{(4)}) \end{aligned} \quad (9)$$

محاسبه می‌شود. در اینجا برای سهولت ارجاع از dd1 برای  $(\delta, \delta^{(1)})$ ، dd2 برای  $(\delta^{(1)}, \delta^{(2)})$ ، dd3 برای  $(\delta^{(2)}, \delta^{(3)})$ ، dg1 برای  $(\delta^{(1)}, \gamma^{(1)})$ ، dg2 برای  $(\delta^{(2)}, \gamma^{(2)})$ ، dg3 برای  $(\delta^{(3)}, \gamma^{(3)})$ ، gg1 برای  $(\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)})$ ، gg2 برای  $(\gamma^{(2)}, \gamma^{(3)})$  و gg3 برای  $(\gamma^{(3)}, \gamma^{(4)})$  در روابط ۹ استفاده می‌کنیم.

ج- توازن  $\gamma - \gamma$

این سلسله روابط توازنی  $\gamma^{(N)} = \gamma^{(N+1)} = 0$  را به ازای  $N \geq 0$  در بردارد. معادلات متناظر این سلسله توازن به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \gamma &= -2J(u, v) + \nabla \cdot (\mathbf{v}\delta) + \delta^{(1)} \\ \mathcal{H}_m \delta^{(n)} &= \{f \nabla \cdot (\mathbf{v}\zeta) - c_m^2 \nabla^2 \nabla \cdot (\mathbf{v}h)\}^{(n)} \\ &+ \{-2J(u, v) + \nabla \cdot (\mathbf{v}\delta)\}^{(n+1)} + \delta^{(n+2)} \\ (n &= 0, 1, \dots, N-2) \\ \mathcal{H}_m \delta^{(N-1)} &= \{f \nabla \cdot (\mathbf{v}\zeta) - c_m^2 \nabla^2 \nabla \cdot (\mathbf{v}h)\}^{(N-1)} \\ &+ \gamma^{(N)}, (n = N-1, N) \\ \gamma^{(N)} &= 0, \gamma^{(N+1)} = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

### ۳ مشخصات آزمایش عددی

مجموعه‌ای از آزمایش‌های عددی طراحی و با توجه به هدف این پژوهش برای ۵۰ روز اجرا شده است. هدف از این آزمایش‌ها، درک بهتر تحول زمانی بلندمدت قسمت‌های متوازن و نامتوازن شارش با کاربرست فرایندی موسوم به تجزیه موج-تاوه است. آزمایش‌های عددی برای مدل دولایه‌ای به صورت زیر اجرا می‌شود. ابتدا در فرایند آغازگری میدان تاوایی پتانسیلی، برای اختصار PV (Potential Vorticity)، اولیه وارون می‌شود. یعنی در گام اول، PV با یک رابطه توازن وارون می‌شود و سایر میدان‌های دینامیکی از قبیل سرعت و ضخامت لایه استخراج می‌شود. در الگوریتم "فرابرد پربندی نیمه‌لاگرنژی" موسوم به CASL (Contour-advection semi-Lagrangian)، میدان PV با فرابرد پربندی و سایر میدان‌ها بوسیله روش‌های معمول طیفی وار انتگرال‌گیری می‌شوند. در واقع در این الگوریتم فرض می‌شود که میدان زیر شبکه‌ای PV در میدان سرعت فرارفتی تاثیری ندارد. ابتکار مهم به کار رفته در ساخت این الگوریتم تبدیل سریع میدان لاگرنژی PV به میدان اولیری و متعاقب آن محاسبه میدان سرعت در نمایش

ناپایداری‌های کژفشار عرض‌های میانه، بی‌هنجاری PV تراز بالا مثبت و بی‌هنجاری PV تراز پایینی منفی است. این آزمایش‌ها برای چهار مورد بی‌هنجاری PV ترتیب داده شده‌اند به قسمی که اختلاف بین بیرون و درون لوله بالا و لوله پایین در هر آزمایش به ترتیب برابر با  $\pm 0.125f, \pm 0.25f, \pm 0.5f, \pm 0.75f$  است.

شارش در آب کم عمق، بیشتر با اعداد بی‌بعد فرود و راسبی کنترل می‌شود. عدد فرود از نظر دینامیکی معرف شدت چینه‌بندی شاره است به طوری که عدد فرود کوچک چینه‌بندی قوی، و عدد فرود بزرگ چینه‌بندی ضعیف را مشخص می‌کند. عدد راسبی معرف قدرت چرخش زمینه و مقادیر کوچک آن مبین چرخش زمینه قوی است. پس با تغییر بی‌هنجاری تاوایی، شارش از چرخش زمینه قوی و چینه‌بندی قوی (شارش نزدیک به زمین‌گرد) به چرخش زمینه ضعیف‌تر و چینه‌بندی ضعیف‌تر سوق می‌یابد. شارش موسوم به باد گردایان متناظر با چرخش زمینه ضعیف و چینه‌بندی قوی است.

اندازه هر بردار در فضای فاز از ضرب داخلی بین بردارهای حالت به دست می‌آید. علاوه بر این که این فاصله در فضای فاز با معنی است، در فضای فیزیکی نیز مفهوم انرژی در دسترس خطی شده (L.A.E) (Linearized available energy) را دارد. بنابراین از L.A.E می‌توان در حکم سنجه اصلی برای بررسی فاصله بین خمینه بسیط و خمینه متوازن یا به عبارتی بررسی متوازن نبودن استفاده کرد. ضرب داخلی طبیعی برای بردارهای  $\mathbf{x}_1 = (u_1, v_1, h_1)$  و  $\mathbf{x}_2 = (u_2, v_2, h_2)$  در فضای مد بهنجار به صورت رابطه زیر است:

$$(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \iint \sum_{l=1}^L (u_l u_2 + v_l v_2 + h_l p_2) dx dy \quad (10)$$

این ضرب داخلی یعنی معادله (۱۰) می‌تواند برای تعریف یک نُرم در فضای برداری مدهای بهنجار

برای بررسی نحوه عملکرد روابط توازن و تولید امواج گرانی-لختی در سامانه‌های شارشی گوناگون، بررسی‌های دینامیکی روی هشت نقطه در فضای پارامتری صورت پذیرفته است. فضای پارامتری بر مبنای دو کمیت ساخته می‌شود، یکی مقدار بی‌هنجاری PV در گذر از پیرامون تاوه اولیه به درون آن و دیگری مقدار بدون بُعد شتاب گرانی که تعیین‌کننده دو شعاع تغییر شکل راسبی  $\frac{c_1}{f}$  برای مد بیرونی (فشارورد) و  $\frac{c_2}{f}$  برای مد درونی (کژفشار) است. به ازای چهار مقدار  $0.125f, 0.25f, 0.5f$  و  $0.75f$  برای بی‌هنجاری PV و دو مقدار ۱۰۰ و ۲۰۰ برای شتاب گرانی بدون بُعد، در مجموع هشت نقطه در فضای پارامتری به دست می‌آید. معادل دو شتاب گرانی پیش گفته، دو شعاع تغییر شکل راسبی  $L_H = 0.2458$  و  $L_H = 0.3477$  برای مد درونی به دست می‌آید. از این پس برای ارجاع در شکل‌ها و نتایج از این دو مقدار شعاع راسبی استفاده می‌شود.

برای مدل دولایه‌ای هم‌دمای پتانسیلی روی صفحه  $f$ ، دمای پتانسیلی لایه پایینی ۲۷۰ و لایه بالایی ۳۳۰ در نظر گرفته می‌شود. حوزه انتگرال گیری  $[-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$  به صورت دوره‌ای در هر دو راستا است. این امر امکان استفاده از روش طیفی وار را برای حصول دقت زیاد در محاسبه مشتقات فضایی فراهم می‌کند. پارامتر کوریولیس ثابت و برابر با  $4\pi$  در نظر گرفته می‌شود. با این انتخاب، واحد زمان برابر با یک روز می‌شود. ارتفاع میانگین هر لایه را برابر با یک ( $H = 1$ ) می‌گیریم. تعداد نقاط شبکه‌ای  $256 \times 256$  و گام زمانی  $\Delta t = 10^{-3}$  اختیار می‌شود که به ازای آن  $\frac{\Delta t}{\Delta x} = 0.6$  و بنابراین دقت زمانی لازم برای آشکارسازی امواج گرانی سریع فراهم می‌شود. میدان PV در هر لایه به صورت لوله‌ای از PV یکنواخت نمایش داده می‌شود. در مجموع دو لوله PV با علامت‌های مخالف به صورت هم‌محور روی یکدیگر قرار دارند. مشابه

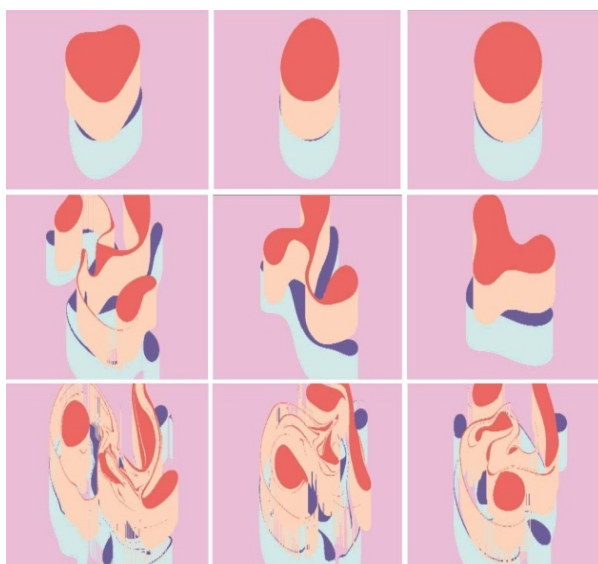
و ۳-الف).

از آنجا که در این سامانه شارشی، تاوایی زمینه بر تاوایی نسبی غالب است، انحراف از تاوایی زمینه کم و در نتیجه میدان نامتوازن کوچکی تولید می‌شود. رابطه توازن  $ddl$  در واقع قسمت اعظم انرژی را در حکم انرژی نامتوازن معرفی می‌کند و انرژی نامتوازن را حدود یک مرتبه از دیگر روابط بزرگ‌تر به دست می‌دهد. در شارش با چینه‌بندی قوی‌تر یعنی  $L_H = 0.3477$  (شکل ۲-الف)، تفاوت عمده با شارش با چینه‌بندی ضعیف‌تر (شکل ۳-الف) در روند رسیدن به حالت مانا است. به علاوه در روزهای پایانی جدایی بین روابط توازن بیشتر است. از دیدگاه فیزیک مسئله، به نظر می‌آید که پریشیدگی اولیه تا روز دهم کاملاً تنظیم می‌شود و از آن به بعد میدان نامتوازن حاصل از برهم‌کنش تاوه-تاوه است (روند انرژی در دسترس خطی شده نامتوازن حاصل از برهم‌کنش موج-موج یا موج-تاوه به صورت نمایی تغییر می‌کند). با تقویت چینه‌بندی در سامانه زمین‌گرد می‌توان به ویژگی فیزیکی میدان نامتوازن پی‌برد.

به صورت  $\|x\| = (\mathbf{x}, \mathbf{x})^{\frac{1}{2}}$  به کار رود. برای حالتی که لایه‌ها ضخامت میانگین یکسان داشته باشند، صرف نظر از یک فاکتور ثابت، این نُرم معادل نُرم انرژی پریشیدگی می‌شود (ریپا، ۱۹۹۱) که از نظر فیزیکی همان انرژی در دسترس خطی شده است و به آن با L.A.E ارجاع می‌کنیم.

#### ۴ نتایج حل عددی

برای آشنایی با آزمایش عددی صورت گرفته، شکل ۱ نمایش تصویری فرارفت تاوایی پتانسیلی برای مدت ۴۰ روز برای شارش  $\Delta q = 0.125f$  و  $L_H = 0.2458$  حاصل از الگوریتم CASL را نشان می‌دهد. در شکل‌های ۲ و ۳ تحول زمانی، برای هشت نقطه در فضای پارامتری نشان داده شده است. در شارش با  $\Delta q = \pm 0.125f$  تاوایی نسبی تقریباً  $\frac{1}{8}$  تاوایی زمینه و بنابراین شارش به توازن زمین‌گرد بسیار نزدیک است. سلسله‌های  $dd$  و  $dg$  و  $gg$  عموماً تا روز چهارم، روند افزایشی نشان می‌دهد و سپس تا روز آخر روند کاهشی را دنبال می‌کند (شکل‌های ۲-الف



شکل ۱. نمایش فرارفت تاوایی پتانسیلی مدل دولایه‌ای حاصل از الگوریتم CASL برای مدت ۴۰ روز در بازه‌های زمانی پنج‌روزه برای شارش  $\Delta q = 0.125f$  و  $L_H = 0.2458$ . از بالا سمت راست به ترتیب مربوط به روزهای اول، پنجم، دهم، پانزدهم، بیستم، بیست‌وپنجم، سی‌ام، سی‌وپنجم و چهارم از شارش.

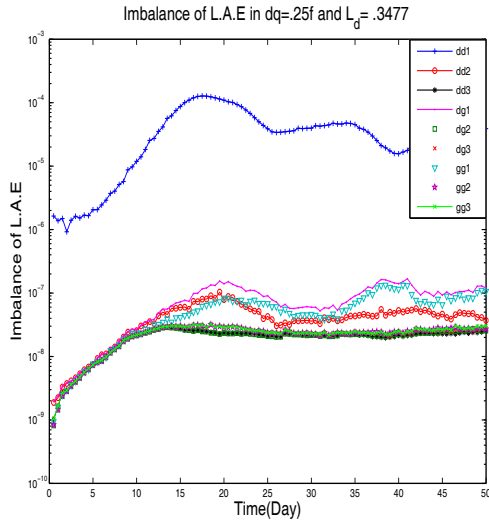
در  $\Delta q = \pm 0.25f$  به طور کلی روند انرژی نامتوازن برای کلیه روابط توازن، تا روز پانزدهم روند افزایشی دارد (شکل های ۲-ب و ۳-ب). از روز پانزدهم تا روز بیستم و پنجم یک روند کاهش نسبی تا رسیدن به حالت تقریباً مانا دیده می شود. با کمی دقت بیشتر درمی یابیم حالت تقریباً مانا با روندی افزایشی همراه است که روی آن دو نوع افت و خیز وجود دارد؛ یکی با دوره پنج تا ده روز ناشی از برهم کنش موج-تاوه و دیگری با دوره یک تا دو روز که عمدتاً از نوع برهم کنش موج-موج است. روند اخیر در رابطه توازن  $dg1, dd1$  واضح تر است (شکل ۲-ب). روند کلی نیز مجدداً به برهم کنش تاوه-تاوه و شکل فضایی تاوه ها ارتباط دارد. تا روز پانزدهم با برهم کنش دو تاوه به صورت ایجاد زبانه های موجی، از تقارن فضایی خارج می شود. از روز پانزدهم تا روز بیست و پنجم، تاوه اولیه به سه تاوه با اندازه های متفاوت شکسته می شود و این تاوه ها از یکدیگر فاصله می گیرند. بعد از روز بیست و پنجم تاوه ها به یکدیگر نزدیک می شوند و برهم کنش بین آنها بیشتر می شود و درست به همین دلیل، انرژی در دسترس خطی شده نامتوازن، افزایش می یابد (شکل ۱). سلسله های  $dg$  و  $gg$  روند همگرایی را سریع طی می کند و برای آشکارسازی میدان نامتوازن تاوه-تاوه به طرز موثری دقیق هستند ولی به نظر در آشکارسازی میدان نامتوازن حاصل از برهم کنش موج-موج یا موج-تاوه متناظر با فیزیک مسئله ضعیف عمل می کنند (به جز مرتبه اول آنها). در شارش با چینه بندی قوی تر، توان جدایی روابط توازن بیشتر است (شکل ۲-ب) و بین مرتبه های متفاوت توازن تفکیک بیشتری دیده می شود. در این سامانه، طیف انرژی برای روابط توازن تا حدی تفکیک می شود که این تفکیک به ویژه در بزرگ مقیاس نمایان است. در طول این روند شاهد دو افت و خیز در میان مقیاس و یک افت و خیز در کوچک مقیاس هستیم که دو افت و خیز اولیه ناشی از

برهم کنش موج-تاوه، و انحنای کوچک مقیاس ناشی از برهم کنش موج-موج است. برای افت و خیز میان مقیاس، طول موج تحریک شده، نصف شعاع راسی است (شکل ۴-ب). در  $\Delta q = \pm 0.5f$  با دور شدن از سامانه زمین گرد، برهم کنش های موج-تاوه و موج-موج روی روند میدان های نامتوازن حاصل از کلیه روابط توازن، نمود بیشتری دارد. دامنه امواج گرانی-لختی بیشتر می شود و بین مرتبه های متفاوت روابط توازن در هر سلسله، جدایی قابل ملاحظه ای دیده می شود. در این سامانه شارشی سلسله های  $dg$  و  $gg$  بهتر جنس میدان نامتوازن را مشخص می کنند. به طور کلی پس از طی پنج تا ده روز، پریشیدگی اولیه با تنظیم انرژی نامتوازن به روند مانا می رسد (شکل های ۲-ج و ۳-ج). روی این روند مانا (که حاصل از میدان نامتوازن تاوه-تاوه است)، میدان نامتوازن حاصل از برهم کنش های موج-تاوه و موج-موج سوار است. اعمال قید متوسط روی متغیر  $\delta$  و  $\gamma$  بهترین رابطه توازن را برای تشخیص میدان نامتوازن به ویژه برای روزهای پایانی به دست می دهد. با تقویت چینه بندی جدایی نتایج روابط توازن بیشتر است (شکل ۲-ج). بعضی از روابط توازن برهم کنش تاوه-تاوه را با دقت زیاد نشان می دهند و بعضی دیگر از روابط توازن برهم کنش های موج-تاوه و موج-موج را بهتر و با دامنه بلندتر آشکار می کنند (مثلاً روابط  $gg1, dd2$ ). برای اکثر روابط توازن، سه قله در روزهای دهم، بیستم و سی ام دیده می شود. تاوه اولیه پس از روز دهم به دو تاوه شکسته و از شکست آنها موج تولید می شود. در نتیجه، افت و خیزهای بعدی حاصل از برهم کنش موج-تاوه است. این برهم کنش با تقویت چینه بندی بهتر آشکار می شود (شکل ۲-ج). طیف انرژی روابط توازن در این سامانه شارشی، علاوه بر بزرگ مقیاس تا حدود میان مقیاس نیز جدایی زیادی دارند (شکل ۴-ج). طیف انرژی رابطه توازنی  $dg2$ ، در بزرگ مقیاس کمترین

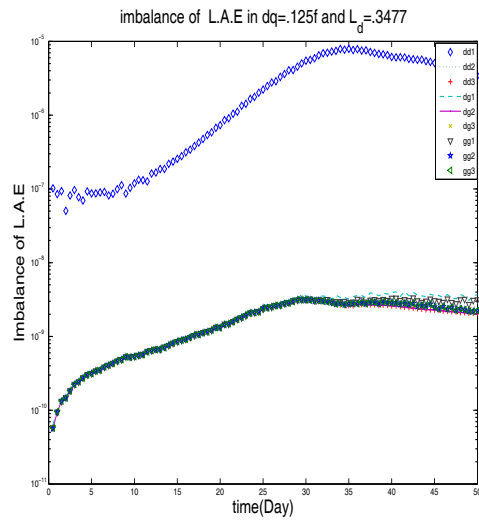


نزدیک به سامانه شارشی بادگردان است. در این سامانه، شارش زودتر به حالت مانا می‌رسد و دامنه و تعداد افت‌وخیزهای آن زیاد است. در این سامانه شارشی میدان انرژی نامتوازن تا روز پنجم، روند افزایشی دارد و سپس به حالت تقریباً مانا می‌رسد (شکل ۳-د).

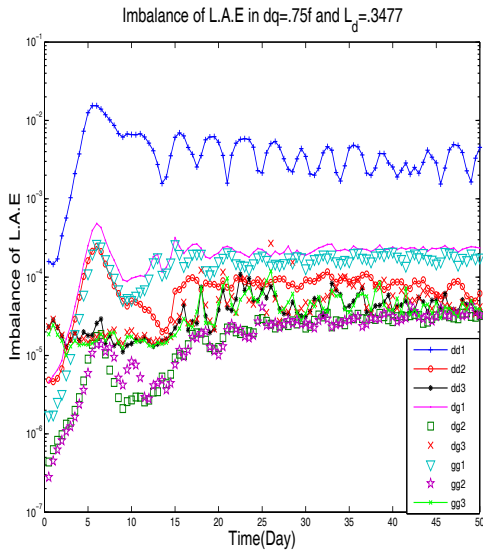
مقدار انرژی را همراه یک شکستگی انرژی نشان می‌دهد. مقیاس طولی امواج تحریک شده حاصل از برهم‌کنش موج-تاوه یا موج-موج تقریباً  $0.64f$  شعاع راسبی است. طول موج بزرگ مقیاس بیشینه حدود هشت برابر شعاع راسبی است (شکل ۴-ج). در  $\Delta q = \pm 0.75f$  سامانه



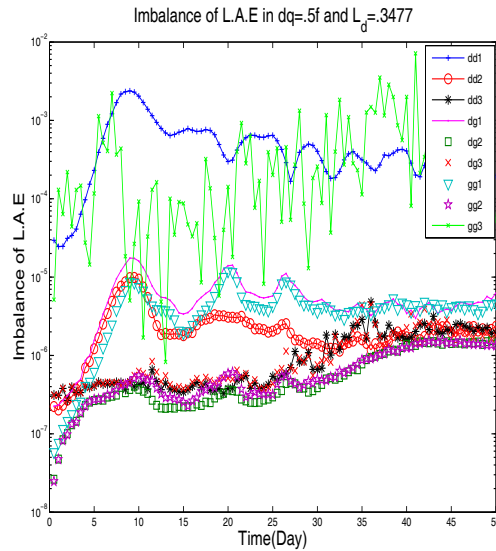
(ب)



(الف)

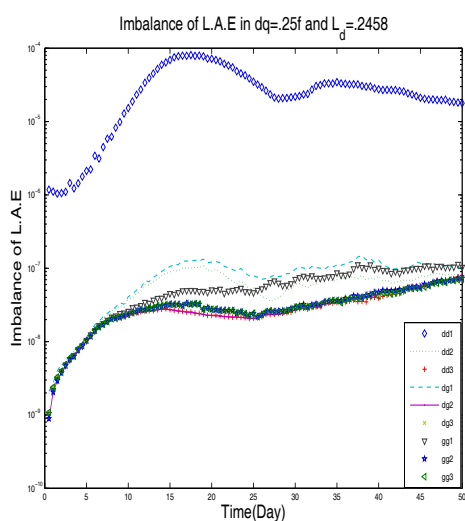


(د)

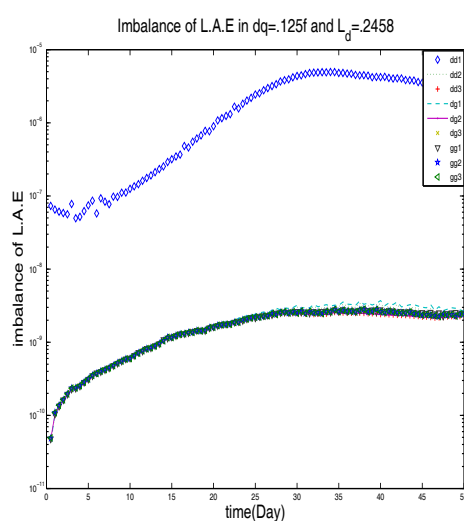


(ج)

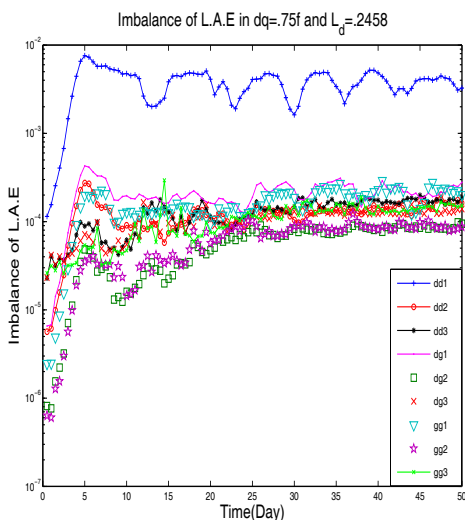
شکل ۲. تحول زمانی انرژی در دسترس خطی شده نامتوازن برای سه مرتبه اول از هر سلسله توازن در شارش، (الف)  $\Delta q=0.125f$ ، (ب)  $\Delta q=0.25f$ ، (ج)  $\Delta q=0.5f$  و (د)  $\Delta q=0.75f$  به ازای  $L_q=0.3477$ .



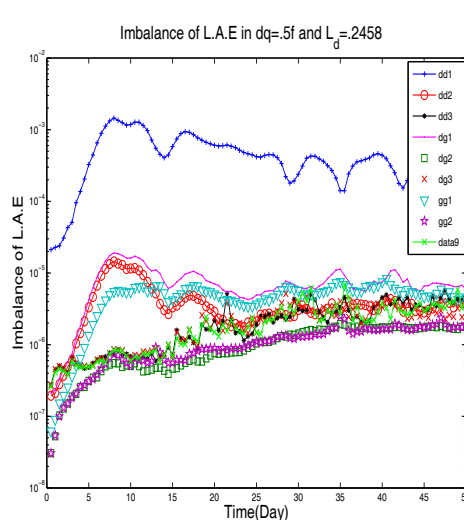
(ب)



(الف)



(د)



(ج)

شکل ۳. تحول زمانی انرژی در دسترس خطی شده نامتوازن برای سه مرتبه اول از هر سلسله توازن در شارش، (الف)  $\Delta q=0.125f$ ، (ب)  $\Delta q=0.25f$ ، (ج)  $\Delta q=0.5f$  و (د)  $\Delta q=0.75f$  به ازای  $L_q=0.2458$ .

موج- تاوه را خوب آشکار نمی کند. ملاحظه می شود در هر سامانه شارشی رفتار روابط توازنی کاملاً تغییر می کند. با افزایش چینه بندی تفاوت قابل ملاحظه ای در توان جدایی مدل ها ایجاد نمی شود. فاز افت وخیز مرتبه اول سلسله dd در مقابل با دیگر روابط توازن است. رابطه gg2 رابطه بهینه با کمترین میدان

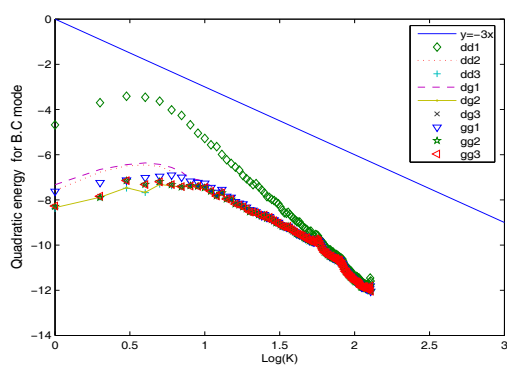
در حالت تقریباً مانای این سامانه شارشی، افت وخیز بیشتری (که عمدتاً حاصل از برهم کنش موج- تاوه است) دیده می شود. چنین به نظر می رسد که در این سامانه رابطه gg این افت وخیز را خوب آشکار می کند. مرتبه دوم رابطه dd با اینکه برای آشکارسازی میدان نامتوازن تاوه- تاوه مناسب است ولی میدان نامتوازن حاصل از

شبه‌آرام در فضای فازی مربوط می‌شود. همان‌طور که گفته شد، در بسط مجانبی معادلات حاکم، اثرات آزمون‌گردی در مرتبه اول عدد راسبی ظاهر می‌شود. بنابراین می‌توان در نگاه اول انتظار داشت که دامنه امواج گرانی-لختی با  $Ro^\beta$  به ازای  $\beta \geq 1$  متناسب باشد (پدلاسکی، ۱۹۸۷). درمقابل دیگر نظریه‌ها حاصل از بسط مجانبی معادلات حاکم و جواب‌های عددی و تحلیلی آن حاکی از آن است که این دامنه با  $Ro^{-1/2} \exp(-\alpha/Ro)$  به ازای  $\alpha$  بزرگ‌تر یا مساوی  $\frac{\pi}{2}$  (ونسته و یاونه، ۲۰۰۴) متناسب است. این نتایج از بسط مجانبی معادلات بسط حاصل می‌شود و تاکنون پژوهشی عددی راجع به دامنه امواج گرانی-لختی در مدل آب‌کم‌عمق دو لایه‌ای صورت نگرفته است.

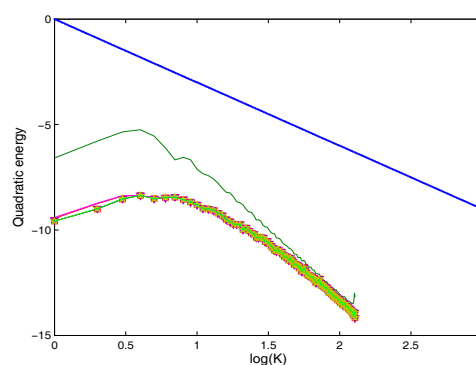
نامتوازن است. روی طیف انرژی این شارش در بزرگ‌مقیاس بین روابط توازنی متفاوت، تفکیک قابل توجهی وجود دارد (شکل ۴-د). روی این روند مجدداً میدان نامتوازن موج-تاوه به خوبی دیده می‌شود. مقیاس طولی امواج تحریک شده حاصل از برهم‌کنش موج-تاوه یا موج-موج در حدود شعاع راسبی است. کمترین انرژی در بزرگ‌مقیاس مربوط به طیف انرژی رابطه توازن dg2 است و درست به همین دلیل کمینه انرژی نامتوازن را نشان می‌دهد (مقایسه شکل‌های ۲-د و ۴-د).

### ۵ دامنه امواج گرانی-لختی

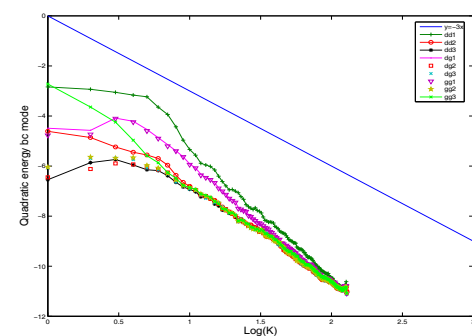
تولید امواج گرانی-لختی به صراحت به مفهوم خمینه



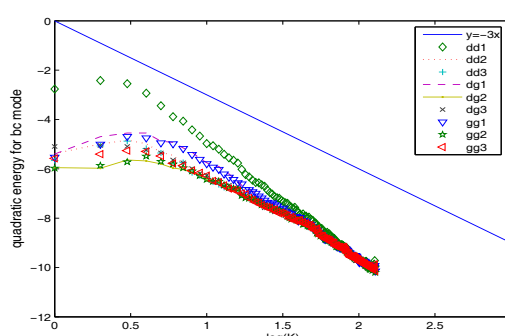
(ب)



(الف)

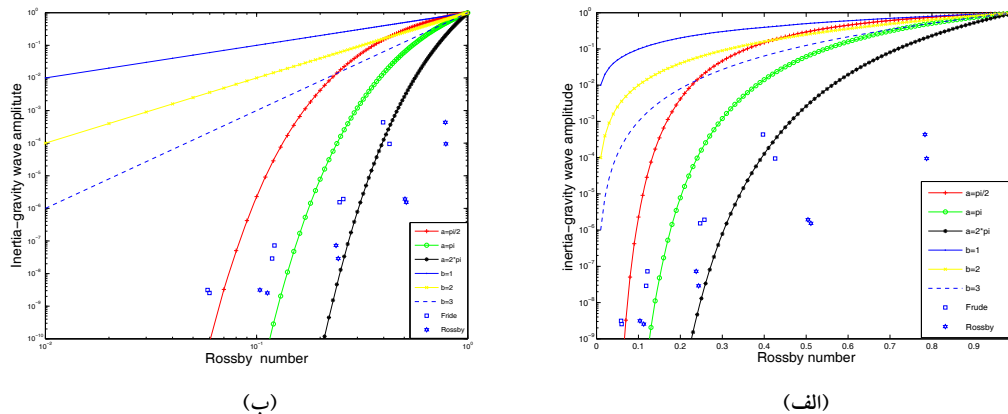


(د)



(ج)

شکل ۴. طیف انرژی مربعی سه مرتبه اول از هر سه سلسله توازن در شارش، (الف)  $\Delta q=0.125f$ ، (ب)  $\Delta q=0.25f$ ، (ج)  $\Delta q=0.5f$  و (د)  $\Delta q=0.75f$  به ازای  $L_H=0.2458$  برای مدل کزفشار. خط ممتد، طیف تلاطم دو بعدی است.



شکل ۵. دامنه امواج گرانی-لختی برحسب  $Ro$ ، (الف) گراف نیمه لگاریتمی (ب) گراف تمام لگاریتمی.

و متوازن از یک شارش به شارش دیگر تغییر می کند. عموماً رقابتی بین رابطه های توازن مرتبه دوم سلسله های  $\delta - \gamma$  و  $\gamma - \gamma$  در اکتساب بهینگی در هر شارش دیده می شود. افت و خیز روی طیف انرژی حاصل از امواج گرانی را می توان به شکل مفهومی به برهم کنش های موج - موج و موج - تاوه نسبت داد. با توجه به افت و خیز روی طیف انرژی، نسبت طول موج تحریک شده به شعاع تغییر شکل راسبی بین نیم تا یک تغییر می کند. مهم ترین نتیجه این مقاله اما وجود ارتباط نمایی بین دامنه امواج گرانی-لختی با عدد راسبی است که با نتایج نظریه های دینامیکی موجود حاصل از بسط مجانبی معادلات بسیط هم خوانی و با تحلیل صورت گرفته ویلیامز و همکاران (۲۰۰۸) بر مبنای نتایج مدل دولایه ای آزمایشگاهی، مغایرت دارد. این مغایرت ممکن است ناشی از عوامل گوناگونی باشد که بررسی آنها نیازمند تحقیق بیشتر در راستای مقاله فعلی است. از جمله این عوامل می توان به تفاوت در روش آشکار سازی و تعیین بزرگی امواج گرانی-لختی و نیز تفاوت در نوع اتلاف میان کار عددی فعلی و کار آزمایشگاهی ویلیامز و همکاران (۲۰۰۸) اشاره کرد. از اقدامات لازم برای رسیدن به تصویر کامل تری در مورد نرده بندی بزرگی تولید امواج گرانی-لختی با عدد

ویلیامز و همکاران (۲۰۰۸) در یک مدل دو لایه ای آزمایشگاهی، انتشار امواج گرانی-لختی را به روش آزمایشگاهی خاصی در مرز دو لایه آشکار سازی کردند و سپس با فن پردازش تصویر با فیلترهای رنگی مخصوص، دامنه امواج گرانی-لختی را اندازه گیری کردند. نتایج کار آنها وجود رابطه ای خطی بین عدد راسبی و دامنه امواج گرانی-لختی را آشکار می سازد و به این ترتیب نظریه های موجود را به چالش می کشد. به عبارت دقیق تر، رابطه بین عدد راسبی و دامنه امواج گرانی-لختی به صورت  $RO^\beta$  است که در آن  $1 < \beta < 2$  به دست می آید. در بررسی هشت نقطه در فضای پارامتری در رابطه توازن بهینه، بیشینه عدد راسبی و فرود در تحول زمانی شارش انتخاب می شود. سپس قله میدان انرژی نامتوازن را در حکم بیشینه دامنه امواج گرانی-لختی بر حسب عدد راسبی رسم می کنیم. برای تغییرات دامنه امواج گرانی-لختی با عدد راسبی، نتایج ارتباط نمایی (شکل ۵-الف) و نبود ارتباط خطی (شکل ۵-ب) را نشان می دهد.

## ۶ نتیجه گیری

روابط توازن بهینه و توانایی جداسازی میدان های نامتوازن

- Vallis, G. K., 1996, Potentia vorticity inversion and balanced equations of motion for rotating and stratified flows, *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **122**, 291-322.
- Vanneste, J. and Yavneh, I., 2004, Exponentially small inertia-gravity waves and the breakdown of quasigeostrophic balance, *J. Atmos. Sci.*, **61**, 211-223.
- Warn, D., Bokhove, O., Shepherd, T. G., and Vallis, G. K., 1995, Rossby number expansions, slaving principles, and balance dynamics, *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **121**, 723-739.
- Williams, P. D., Read, P. L. and Haine, T. W. N., 2008, Inertia-gravity waves emitted from balanced flow, observations, properties, and consequences, *J. Atmos. Sci.*, **65**, 3543-3556.
- راسبی، پوشش بزرگ تر فضای پارامتری لازم است. امید است که در ادامه با این کار بتوان با قطعیت بیشتر درستی یا نادرستی روابط مطرح شده، از نمایی تا خطی، را تعیین کرد.
- منابع
- جغتایی، م. و محب الحججه، ع. ر.، ۱۳۸۸، بررسی توازن و امواج گرانی-لختی در یک مدل دو لایه‌ای کژفشار، دوازدهمین کنفرانس دینامیک شماره‌ها.
- جغتایی، م.، محب الحججه، ع. ر. و علی اکبری بیدختی، ع. ع.، ۱۳۸۸، رابطه توازن بهینه در یک مدل کژفشار دو لایه‌ای بر روی صفحه  $f$  هشتمین کنفرانس پیش‌بینی عددی وضع هوا.
- Bokhove, O., 1997, Slaving principles, balanced dynamics, and the hydrostatic Boussinesq equations, *J. Atmos. Sci.*, **54**, 1662-1674.
- Dritschel, D. G. and Ambaum, M. H. P., 1997, A contour-advective semi-Lagrangian algorithm for the simulation of fine-scale conservative fields, *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **123**, 1097-1130.
- Dritschel, D. G., Polvani, L. M. and Mohebalhojeh, A. R., 1999, The contour-advective semi-Lagrangian algorithm for the shallow-water equations, *Mon. Wea. Rev.*, **127**, 1151-1165.
- Leith, C. E., 1980, Nonlinear normal mode initialization and quasi-geostrophic theory, *J. Atmos. Sci.*, **37**, 958-968.
- McIntyre, M. E. and Norton, A., 2000, Potential vorticity inversion on a hemisphere, *J. Atmos. Sci.*, **57**, 1214-1235.
- Mohebalhojeh, A. R. and Dritschel, D. G., 2001, Hierarchies of balance conditions for the  $f$ -plane shallow-water equations, *J. Atmos. Sci.*, **58**, 2411-2426.
- Mohebalhojeh, A. R. and Dritschel, D. G., 2004, Contour-advective semi-Lagrangian algorithms for many-layer primitive-equation models, *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **130**, 347-364.
- Pedlosky, J., 1987, *Geophysical fluid dynamics*, 2nd Ed., Springer Press, New York, NY, 710 pp.
- Ripa, P., 1991, General stability conditions for a multi-layer model, *J. Fluid Mech.*, **222**, 119-137.