

مدل‌سازی محلی میدان گرانی زمین با استفاده از تابع‌های پایه شعاعی، بررسی موردنی: مدل‌سازی میدان گرانی در سواحل خلیج فارس

عبدالرضا صفری^۱، محمدعلی شریفی^۲ و اسماعیل فروغی^{۳*}

^۱ دانشیار، گروه مهندسی نقشه‌برداری، پردیس دانشکده‌های فنی دانشگاه تهران، ایران

^۲ استادیار، گروه مهندسی نقشه‌برداری، پردیس دانشکده‌های فنی دانشگاه تهران، ایران

^۳ دانشجوی کارشناسی ارشد ژئودزی، گروه مهندسی نقشه‌برداری، پردیس دانشکده‌های فنی دانشگاه تهران، ایران

(دریافت: ۹۱/۱۰/۵، پذیرش نهایی: ۹۲/۲/۲۴)

چکیده

یکی از هدف‌های مهم ژئودزی، مدل‌سازی محلی میدان گرانی زمین است. یکی از روش‌ها برای مدل‌سازی محلی میدان گرانی زمین استفاده از تابع‌های پایه شعاعی کروی است. در این تحقیق از تابع‌های پایه شعاعی برای مدل‌سازی محلی میدان گرانی با استفاده از داده‌های بی‌هنگاری جاذبه و بی‌هنگاری پتانسیل حاصل از ارتفاع‌سنگی ماهواره‌ای در مناطق ساحلی استفاده شده است. برای این منظور بی‌هنگاری پتانسیل به صورت ترکیبی از این تابع‌ها در نظر گرفته می‌شود. در این تحقیق برای مدل‌سازی از هسته دوقطبی شعاعی مرتبه اول استفاده شده است. برای تعیین پارامترهای مدل‌سازی با استفاده از این تابع‌های شعاعی، الگوریتم لونبرگ-مارکواردت به کار رفته است. برای تعیین پهنه‌های تعداد، مکان، عمق و ضرایب مقیاس تابع‌های پایه، بی‌هنگاری پتانسیل، برآورد، و سپس نتیجه با بی‌هنگاری پتانسیل مشاهده شده در نقاط آزمون مقایسه می‌شود. از نکات برجسته در این تحقیق تعداد کم تابع‌های پایه شعاعی کروی برای مدل‌سازی میدان گرانی در مقایسه با الگوریتم‌های مشابه است. برای ارزیابی روش عرضه شده، میدان گرانی با استفاده از بی‌هنگاری جاذبه مشاهده شده در منطقه فارس ساحلی و همچنین بی‌هنگاری پتانسیل حاصل از ارتفاع‌سنگی ماهواره‌ای در خلیج فارس، مدل‌سازی شده است.

واژه‌های کلیدی: تابع پایه شعاعی کروی، مدل‌سازی میدان گرانی زمین، الگوریتم لونبرگ-مارکواردت

Local gravity field modeling using radial basis functions, case study: coastal area of the Persian Gulf

Safari, A.¹, Sharifi, M. A.² and Foroughi, I.^{3*}

¹Associate Professor, Department of Surveying and Geomatics Engineering, University College of Engineering, University of Tehran, Iran

²Assistant Professor, Department of Surveying and Geomatics Engineering, University College of Engineering, University of Tehran, Iran

³M.Sc. Student of Geodesy, Department of Surveying and Geomatics Engineering, University College of Engineering, University of Tehran, Iran

(Received: 25 Dec 2012, Accepted: 14 May 2013)

Summary

The determination of the earth Gravity field has various applications in geodesy and geophysics. Measuring the earth gravity field can be divided into satellite, airborne and terrestrial methods. Traditional method for gravity field modeling using these data is approximation by spherical harmonics expansion. Although spherical harmonic is one of the most popular methods to approximate gravity filed, based on their global characteristic, a small regional variation make big changes in whole spherical harmonic

coefficients:

$$T(x) = \frac{GM}{R_E} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{R_E}{|x|} \right)^{l+1} \sum_{m=-l}^l \bar{C}_{lm} \bar{P}_m(\sin \varphi)$$

Where x is a point with spherical coordinate, λ, φ, r and \bar{P}_m are normalized Legendre functions up to degree and order l, m and \bar{C}_{lm} are spherical harmonic coefficients.

To deal with this problem, different groups of regional basis systems were introduced, as in case we can refer to gravity field modeling using radial basis functions:

$$T(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \Psi_i(x)$$

Where α_i are the expansion coefficients (scale coefficients) and Bjerhammar is a sphere with radius R which is entirely inside the topographic masses of the earth, ψ_n are the set of radial basis functions with following representation:

$$\Psi(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{4\pi R^2} \psi_k \left(\frac{R}{|x|} \right)^{k+1} P_k \left(\frac{x}{|x|}, \frac{y}{|y|} \right)$$

Where y, x are points inside and outside of the Bjerhammar sphere respectively, p_k is the Legendre polynomial of degree k and ψ_k are the Legendre coefficients, the point y is called the centre of the RBF. If locations and depths and coefficients as Radial basis function's parameters are chosen properly we will have a good representation of potential anomaly and related earth functions. In this paper we used Levenberg Marquardt algorithm (LM) to find optimal RBF parameters, LM is a iterative regularization method, can find the best answer with following equation:

$$x_{i+1} = x_i - (H + \mu I)^{-1} \nabla f(x_i)$$

Where H is the Hessian matrix evaluated at x_i , this update rule is used as follows, if the error goes down following an update, it implies that our quadratic assumption on f is working well and we reduce λ (usually by a factor of 10) and vice versa.

In this paper, we used combination of gravity data (gravity anomaly) and gravity potential data (gravity potential anomaly) derived from satellite altimetry. Significant points in this algorithm are: removing global effect of gravity anomaly by spherical harmonic up to degree and order 360 (EGM2008) and centrifugal force from gravity anomaly data, using potential anomaly in test area those are calculated on Bruns formula from satellite altimetry data, removing global effect of potential anomaly by spherical harmonic up to degree and order 360 (EGM2008) and centrifugal force from the previous step data, forming the observation equations with radial multipole of order 1 by residual gravity anomaly and residual potential anomaly data. Levenberg Marquardt algorithm is then used to choose optimal number and, location and depth of the radial basis functions. We also used some of potential anomaly observations as control point s in the region of coastal Persian Gulf for appraisal this algorithm and then present the gravity field in this area.

Keywords: Levenberg Marquardt algorithm, GPS leveling data, Spherical harmonic, Gravity field, Satellite altimetry

۱ مقدمه

اندازه‌گیری میدان گرانی زمین را می‌توان به روش‌های مدل‌سازی میدان گرانی زمین دارای کاربردهای ماهواره‌ای (Satellite Gravimetry)، هوایی (Airborne) و ژئوفیزیکی فراوانی است. روش‌های

هولسچنیدر و همکاران، ۲۰۰۳؛ چمبودوت و همکاران، ۲۰۰۵؛ پنت و همکاران، ۲۰۰۶؛ کلیس و ویتور، ۲۰۰۷؛ بیهاری، ۱۹۷۶؛ فریدن و همکاران، ۱۹۹۸؛ فریدن و روترا، ۱۹۸۳؛ فریدن و همکاران، ۱۹۹۷؛ کوشه و همکاران، ۱۹۹۸؛ لکمن، ۱۹۸۱؛ تیشرنینگ، ۱۹۸۶؛ لکمن و مارچنکو و همکاران، ۲۰۰۱؛ آیکر و همکاران، ۲۰۰۴؛ بالها و همکاران، ۱۹۸۶؛ هاردی و گوپفرد، ۱۹۷۵؛ هیکن، ۱۹۸۱ و سانکل، ۱۹۸۱) اشاره کرد.

در مدل‌سازی میدان گرانی زمین با استفاده از تابع‌های پایه شعاعی کروی از ترکیب خطی این تابع‌های استفاده می‌شود، لذا تعیین تعداد این تابع‌های، ضرایب بسط (یا پارامتر مقیاس) و انتخاب بهینه مراکز آنها اهمیت زیادی دارد.

در زمینه انتخاب بهینه مراکز SRBF می‌توان به کارهای (بارتلمس، ۱۹۸۶؛ کلیس و ویتور، ۲۰۰۷؛ آتنونی و همکاران، ۲۰۰۸) اشاره کرد، در کار (بارتلمس، ۱۹۸۶) به طور همزمان محل بهینهٔ مراکز تابع‌های و پهنه‌ای باند آنها تعیین می‌شود و در کار کلیس و ویتور، ۲۰۰۷؛ یک شبکه همفاصله کروی در حکم مراکز این تابع‌ها در نظر گرفته می‌شود.

کلیس و ویتور (۲۰۰۷) و کلیس و همکاران (۲۰۰۸) یک راهبرد برای تعیین بهینه مراکز و پهنه‌ای باند SRBF‌ها عرضه کردند، این روش برای داده‌های با توزیع متفاوت (مانند مجموعه داده‌های گوناگون با پراکندگی نامنظم) طراحی شده است. شبکه اولیه مراکز تابع‌ها در این روش ابتدا به صورت یک شبکه منظم است و پس از اعمال یک مرحله سرشکنی، منطقه موردنظر را به قسمت‌های کوچک‌تر تقسیم می‌کند و برای هر کدام مراکز جدیدی در محل‌هایی که باقی مانده‌ها بزرگ هستند اضافه می‌شود تا آنجا که دقت موردنظر برای کل منطقه حاصل شود. در این صورت پهنه‌ای باند هر مرحله در حکم تابعی از پراکندگی داده‌ها با استفاده از روش تعیین پارامتر GCV

(Gravimetry) و روش‌های زمینی (Terrestrial Gravimetry) تقسیم‌بندی کرد. با استفاده از روش‌های ماهواره‌ای می‌توان طول موج‌های بلند میدان گرانی زمین را به علت پوشش یکنواخت زمین با ماهواره‌ها با دقت خوبی اندازه‌گیری کرد. برای همین منظور در طی سال‌های اخیر تحقیقات گسترده‌ای در خصوص اندازه‌گیری میدان گرانی با استفاده از ماهواره‌ها صورت گرفته است. در این راستا ماهواره‌های زیادی نیز پرتاب شده است که از جمله مشهورترین این ماهواره‌ها می‌توان به CHAMP، GRACE و GOCE اشاره کرد. از طرف دیگر دقت اندازه‌گیری میدان گرانی زمین با ماهواره‌ها در طول موج‌های متوسط و کوتاه به علت ارتفاع زیاد آنها بهشدت کاهش می‌یابد. برای اندازه‌گیری طول موج متوسط از روش‌های هوایی، و طول موج‌های کوتاه میدان گرانی زمین از روش گرانی‌سنگی زمینی استفاده می‌شود. یکی از روش‌های مرسوم برای تقریب میدان گرانی زمین با استفاده از این داده‌های مشاهده شده، تقریب با استفاده از بسط هماهنگ‌های کروی است. ولی به علت مشخصه جهانی این تابع‌ها، تغییرات محلی کوچک منجر به تغییر در همهٔ ضرایب هماهنگ‌های کروی می‌شود. برای حل این مشکل، گروه‌های متفاوتی از سامانه‌های پایه برای مدل‌سازی محلی پیشنهاد شده است. از جمله این سامانه‌های محلی می‌توان به مدل‌سازی میدان گرانی زمین با استفاده از تابع‌های پایه شعاعی کروی اشاره کرد. تابع‌های پایه شعاعی کروی (SRBF) به طور وسیع در مدل‌سازی میدان گرانی مورد استفاده قرار گرفته‌اند. از جمله کارهای صورت گرفته در خصوص مدل‌سازی میدان گرانی زمین با استفاده از تابع‌های پایه شعاعی می‌توان به کارهای (هکین، ۱۹۸۱؛ بارتلمس، ۱۹۸۶؛ ورمیر، ۱۹۸۲، ۱۹۸۳، ۱۹۸۴، ۱۹۹۵؛ مارچنکو، ۱۹۸۸؛ مارچنکو و همکاران، ۲۰۰۱؛ بلکمن و توکی، ۱۹۹۸؛ اشجیت و همکاران، ۲۰۰۴، ۲۰۰۵، ۲۰۰۷؛ ۱۹۵۸

پارامترهای محاسبه شده برای تابع‌های پایه شعاعی برای تعیین بی‌هنگاری پتانسیل به کار می‌رود.

در بخش ۲ این مقاله مدل‌سازی محلی میدان گرانی با استفاده از تابع‌های پایه شعاعی کروی بیان شده است و در بخش سوم الگوریتم لونبرگ مارکواردت آمده است. در بخش چهارم برای بررسی کارایی روش عرضه شده مدل‌سازی محلی میدان گرانی زمین در منطقه فارس ساحلی، با استفاده از داده‌های شتاب جاذبه مشاهده شده و بی‌هنگاری پتانسیل حاصل از ارتفاع‌سنگی ماهواره‌ای بیان شده است. در بخش پنجم به بحث و نتیجه‌گیری پرداخته می‌شود.

۲ مدل‌سازی محلی میدان گرانی با استفاده از تابع‌های پایه شعاعی کروی

براساس قضیه رونگه-کراوپ برای تابع هماهنگ در خارج سطح زمین و در بی‌نهایت منظم T دنباله تابع‌های Ψ_n که در خارج σ_B (کره بیهار) هماهنگ است و در بی‌نهایت منظم هستند، وجود دارند که به تابع T در روی و خارج سطح کمکی $\tilde{\tau}$ (با انحنای بی‌نهایت) به طور یکنواخت همگرا می‌شوند (مارچنکو، ۱۹۹۸). بنابراین زمینه نظری بسط T به سری تابع‌های غیرمتعادم وجود دارد. در رابطه (۱)، α_i ها ضرایب بسط (ضرایب مقیاس) هستند. کره بیهار σ_B کره‌ای به‌شعاع R بوده که به طور کامل در داخل توپوگرافی زمین قرار دارد. دسته‌ای از تابع‌های Ψ_n ، تابع‌های پایه شعاعی کروی هستند که دارای نمایشی به‌شکل زیرند:

$$T(P) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \Psi_i(P) \quad (1)$$

$$\Psi(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{4\pi R^2} \psi_k \left(\frac{R}{|x|} \right)^{k+1} P_k \left(\frac{x}{|x|} \cdot \frac{y}{|y|} \right) \quad (2)$$

که در آن، ψ_k ضرایب لژاندر و P_k چندجمله‌ای‌های لژاندر تا درجه k ، $y \in \sigma_B^{\text{int}}$ ، $k \in \mathbb{Z}$ (فضای داخلی کره بیهار) و

انتخاب می‌شود. در این روش وزن دسته مشاهدات متفاوت و پارامتر پایدارسازی با استفاده از روش‌های تعیین مؤلفه‌های وریانس (VCE) تعیین می‌شود. آنان مدعی اند که این روش قابلیت پایدارسازی برای مجموعه مشاهدات حجمی را دارد و درنهایت نیز بی‌هنگاری پتانسیل نیز برآورد می‌شود. در این روش پیشنهاد می‌شود که تعداد تابع‌های پایه شعاعی ۲۰ درصد تعداد کل مشاهدات انتخاب شود که این نکته در مشاهدات زیاد باعث افزایش زمان و حجم محاسبات می‌شود.

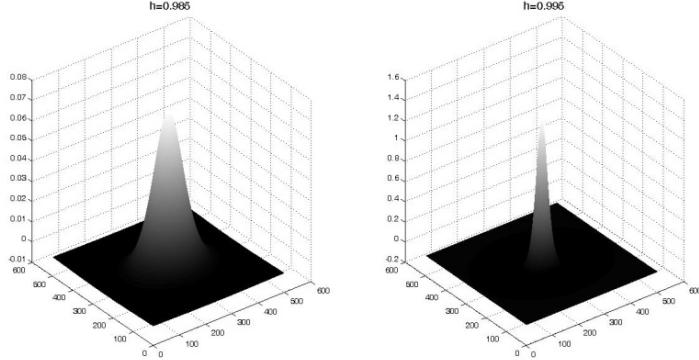
آنونی و همکاران (۲۰۰۸) از روش دیگر برای انتخاب پارامترهای مجھول تابع‌های پایه کروی استفاده کردند، در این روش برخلاف روش مطرح شده کلیس و همکاران، پارامترهای تابع‌های پایه شعاعی کروی به‌نحوی انتخاب می‌شود که به صورت بهینه‌ای به داده‌های مشاهداتی منطبق شوند. آنها برای این‌کار از الگوریتم لونبرگ مارکواردت در یک فرایند تکراری و براساس مقدار باقی‌مانده‌ها تابع‌های دیگری به مجموعه قبلی اضافه می‌کنند. نکته حائز اهمیت در این روش آن است که اگر ضرایب و پهنهای باند تابع‌های پایه کروی به درستی انتخاب نشوند، تعداد تابع‌ها در هر مرحله بیشتر می‌شود و در نتیجه بدوضوعی مسئله پیش خواهد آمد و در نتیجه نیاز به پایدارسازی خواهیم داشت. باید توجه داشت که در روش آنونی و کلر پتانسیل گرانی بهینه برآورد نمی‌شود و در آن فقط به مدل‌سازی مشاهدات جاذبه در یک فرایند تکراری با استفاده از تابع‌های پایه شعاعی کروی اکتفاء شده است.

در این مقاله ابتدا شبکه‌ای منظم از تابع‌های پایه شعاعی کروی در منطقه مورد بررسی در نظر گرفته می‌شود، سپس با استفاده از الگوریتم لونبرگ مارکواردت پهنهای باند و مراکز بهینه تابع‌ها تعیین می‌شود. تعداد تکرار براساس دقت مورد درخواست برای داده‌های بی‌هنگاری جاذبه باقی‌مانده محاسبه شده تعیین می‌شود. در مرحله بعد

کروی، موقعیت قرارگرفتن این تابع‌های در یک شبکه نقش مهمی برای مدل‌سازی بهینه میدان گرانی زمین دارد. بنابراین مجھولات اصلی در مدل‌سازی میدان گرانی زمین عبارت‌اند از پارامتر مقیاس و شکل موقعیت مسطحاتی تابع‌های پایه که مراکز تابع‌های پایه شعاعی نامیده می‌شوند. تابع‌های پایه شعاعی کروی در حالی می‌توانند نمایش مناسبی از بی‌هنجاری پتانسیل سطح زمین به دست دهند که پارامترهای معرف آنها به درستی انتخاب شود (آتنوی و همکاران، ۲۰۰۸). در جدول ۱ مثال‌هایی از تابع‌های پایه شعاعی کروی با ضرایب لزاندر آنها آمده است.

$x \in \overline{\sigma_B^{ext}}$ (فضای خارجی کره بیهمر) است. فاصله $d = R - |y|$ را عمق تابع پایه شعاعی کروی مینامند (تنز و کلیس، ۲۰۰۸). شکل یا عمق هر تابع میزان فرورفتگی آن را در کره بیهمر تعیین می‌کند، هرچه میزان این فرورفتگی بیشتر باشد تابع‌ها شکل نرم‌تری خواهد داشت و تاثیر آنها برای طول موج‌های بلند است و بر عکس، تابع‌های با عمق کمتر دارای شکل تیزتری هستند و فقط نماینده طول موج‌های کوتاه از فضای مدل خواهند بود (آتنوی و همکاران، ۲۰۰۸)، شکل ۱ نمایش یک تابع پایه کروی با دو عمق متفاوت است:

علاوه بر پارامترهای مقیاس و شکل تابع‌های پایه



شکل ۱. تاثیر پارامتر شکل (عمق) روی تابع‌های پایه شعاعی کروی.

جدول ۱. مثال‌هایی از تابع‌های پایه شعاعی کروی با ضرایب لزاندر آنها (کلیس و همکاران، ۲۰۰۸).

جرم نقطه‌ای		
چندقطبی شعاعی از مرتبه m	$\psi_l = \frac{4\pi R}{2l+1} \lambda^l, \quad \lambda = \frac{ y }{R}$	$\psi(x, y) = \frac{1}{ x-y }$
ویولت پواسون از مرتبه m	$\psi_l = \begin{cases} \left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{\lambda^{l-m}}{2l+1}} & l \geq m \\ 0 & l < m \end{cases}, \quad \lambda = \frac{ y }{R}$	$\psi(x, y) = \frac{1}{m!} \left(\frac{\partial}{\partial y }\right)^m \frac{1}{ x-y }$
پواسون	$\psi_l = l^m \lambda^l, \lambda = \frac{ y }{R}$	$\psi(x, y) = \frac{1}{4\pi R^2} (2\chi_{m+1} + \chi_m)$ $\chi_m = \left(y \frac{\partial}{\partial y }\right)^m \frac{1}{ x-y }$
	$\psi_l = \begin{cases} \frac{4\pi R^3}{l-1} & l \geq 2 \\ 0 & l=0,1 \end{cases}$ $\psi_l = \lambda^l$	$\psi(x, y) = \frac{1}{4\pi R} \frac{ x ^2 - y ^2}{ x-y ^3}$

گرفت:

$$f(x) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m r_j^2(x) \quad (6)$$

که در آن، $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ بردار مجهولات و $r(x) = (r_1(x), r_2(x), r_3(x), \dots, r_m(x))$ بردار باقی مانده‌ها است، بردار باقی مانده‌ها برداری است که از تفاضل مقادیر واقعی و مقادیر برآورد شده از تابع غیرخطی موردنظر حاصل می‌شود، تابع $(x)_r$ تابعی غیرخطی است و جواب در روش لونبرگ مارکواردت به صورت تکراری با استفاده از معادله (7) بدست می‌آید (رنگانتان، ۲۰۰۴).

$$x_{i+1} = x_i - (H + \lambda I)^{-1} \nabla f(x_i) \quad (7)$$

که در آن، H هسین ماتریس ضرایب است که به صورت رابطه (8) محاسبه می‌شود:

$$H = \nabla^2 f(x) \quad (8)$$

و λ پارامتر پایدارسازی است. نحوه تعیین λ در این الگوریتم به این صورت است که اگر خطا در مرحله‌ای افزایش یابد، λ را افزایش می‌دهند (معمولًا با ضریبی از ۱۰) و بر عکس. تکرار به همین ترتیب ادامه می‌یابد تا مقادیر نهایی خطاهای از آستانه موردنظر کوچک‌تر شود.

الگوریتم لونبرگ مارکواردت یک الگوریتم تکراری برای پایدارسازی است. تکرار تا جایی ادامه پیدا می‌کند که پارامتر مجهول به جواب واقعی نزدیک شود، اما باید توجه داشت که با افزایش تکرار، با وجود اینکه نتیجه برای تابع f ممکن است بهبود یابد (شکل ۲) اما از یک مرحله به بعد افزایش تکرار منجر به نتیجه بهتر برای پارامتر مجهول نخواهد شد (شکل ۳) (انگل و کوگلر، ۲۰۰۶).

در مسئله مطرح شده در این مقاله، تابع f ترکیبی خطی از تابع‌های پایه شعاعی کروی بیان شده در معادله (۳) و پارامترهای مجهول نیز همان‌طور که قبل اشاره شد، مراکز تابع‌های پایه کروی، مقیاس و شکل هستند و مشاهدات نیز بی‌هنجری جاذبه باقی‌مانده است.

در رابطه (۱) درجه بسط بی‌نهایت است و از نظر عددی محاسبه آن امکان‌پذیر نیست. بنابراین یکی از مشکلاتی که در مدل‌سازی با استفاده از رابطه (۱) با آن مواجه هستیم تعیین درجه حداکثر بسط و یا به عبارت دیگر تعیین حداکثر تعداد تابع‌های پایه شعاعی برای مدل‌سازی در منطقه است. به همین علت رابطه (۱) را باید به‌ازای یک درجه حداکثر بسط M قطع کرد. بنابراین رابطه (۱) به شکل رابطه (۳)

$$T(P) = \sum_{i=1}^M \alpha_i \Psi_i(P) \quad (3)$$

در مدل‌سازی میدان گرانی زمین مورد استفاده قرار می‌گیرد. ارتباط بین بی‌هنجری پتانسیل T و سایر تابعک‌های میدان گرانی نظیر بی‌هنجری جاذبه و نوسان جاذبه به صورت روابط (۴) و (۵) است (موریتز، ۱۹۶۷):

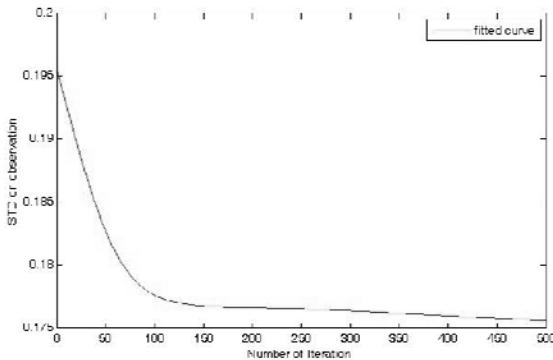
$$\Delta g = -\frac{2}{r} T - \frac{\partial T}{\partial r} \quad (4)$$

$$\delta g = -\frac{\partial T}{\partial r} \quad (5)$$

۳ الگوریتم لونبرگ مارکواردت

همان‌طور که در بخش قبل اشاره شده در مدل‌سازی میدان گرانی زمین با استفاده از تابع‌های پایه شعاعی کروی باید پارامترهای مدل، نظیر مراکز بهینه تابع‌ها، ضرایب مقیاس و شکل را تعیین کرد. الگوریتم لونبرگ مارکواردت (LM)(Levenberg Marquardt) روشی برای پیدا کردن کمینه تابعی است که از مجموع مربعات یک تابع غیرخطی تشکیل شده باشد، این روش را می‌توان به منزله ترکیبی از دو روش steepest descent و newton Gauss در نظر گرفت (مانولیس و لورایس، ۲۰۰۵).

تابعی را که الگوریتم لونبرگ مارکواردت به دنبال کمینه کردن آن است، می‌توان به صورت رابطه (۶) در نظر

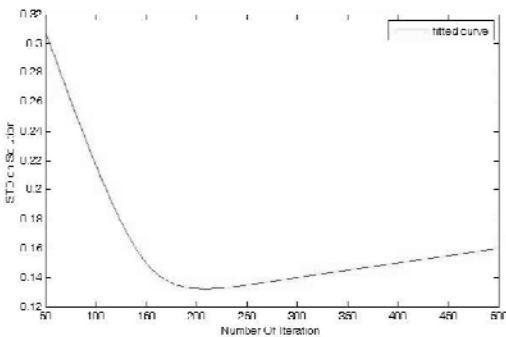


شکل ۲. افزایش تکرار و بهبود انحراف معیار باقیماندها برای تابع یک مسئله نمونه $\|F(x_k) - y\|$

در شکل ۶ نمایش داده شده است. با توجه به اینکه هدف مدل‌سازی محلی میدان گرانی است، اثر جهانی میدان جاذبه شامل میدان جاذبه حاصل از بسط هماهنگ‌های کروی تا درجه و مرتبه ۳۶۰ محاسبه شده با استفاده از مدل EGM 2008 از روی مشاهدات حذف شد. تغییرات این اثر در شکل ۷ آمده است. تغییرات بی‌هنجاری جاذبه باقی‌مانده در شکل ۸ نشان داده شده است. مشاهده دیگری که در این منطقه برای مدل‌سازی در نظر گرفته شده است، بی‌هنجاری پتانسیل حاصل از ارتفاع‌سنگی ماهواره‌ای است. برای محاسبه بی‌هنجاری پتانسیل در منطقه آزمون از ژئوئید دریایی استفاده شد. این ژئوئید دریایی با در اختیار داشتن سطح متوسط دریا و توپوگرافی سطح دریا با استفاده از رابطه زیر محاسبه شده است:

$$N = h_{MSL} - h_{SST} \quad (9)$$

۴ بررسی موردی: مدل‌سازی محلی میدان گرانی با استفاده از تابع‌های پایه شعاعی
برای آزمون عددی روش عرضه شده منطقه‌ای در محدوده $26.39 < \phi < 27.11$ و $53.42 < \lambda < 55.57$ شد. در این منطقه، شتاب جاذبه در نقطه مشاهده شده و بی‌هنجاری پتانسیل حاصل از ارتفاع‌سنگی ماهواره‌ای در ۴۱۳ نقطه در دسترس است. تغییرات ارتفاعی این منطقه در شکل ۴ و تغییرات شتاب گرانی مشاهده شده در این منطقه در شکل ۵ نشان داده شده است. ابتدا با استفاده از شتاب گرانی‌های مشاهده شده، بی‌هنجاری جاذبه محاسبه شد. برای این کار شتاب گرانی نرمال براساس رابطه سومیگلیانا پیزتی محاسبه شد (هیکانن و موریت، ۱۹۶۷) و پس از کم کردن آنها از شتاب گرانی مشاهداتی، بی‌هنجاری جاذبه به دست آمد که تغییرات آن



شکل ۳. نحوه بهبود پارامتر مجھول نسبت به افزایش تکرار برای یک مسئله نمونه $\|x_k - x\|$

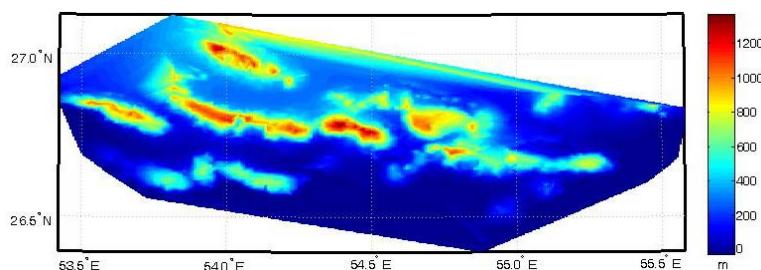
به ترتیب در شکل‌های ۱۱ و ۱۲ نشان داده شده است. اکنون از دو مشاهده بی‌هنگاری جاذبه باقی‌مانده و بی‌هنگاری پتانسیل باقی‌مانده برای مدل‌سازی محلی میدان گرانی در منطقه فارس ساحلی استفاده می‌کنیم. در این تحقیق برای مدل‌سازی محلی میدان گرانی از هسته دوقطبی شعاعی مرتبه اول (جدول ۱) استفاده شده است. برای کنترل و ارزیابی این روش، تعدادی از مشاهدات بی‌هنگاری پتانسیل باقی‌مانده در محدوده سورننظر، در حکم نقاط کنترل در نظر گرفته می‌شود. در ضمن بی‌هنگاری پتانسیل مشاهده شده در این نقاط دخالتی در محاسبات و تحلیل RBF‌ها ندارد و از آنها برای ارزیابی مدل نهایی استفاده می‌شود.

برای انتخاب موقعیت بهینه تابع‌های پایه شعاعی ابتدا شبکهٔ منظمی بهمنزله مرکز این تابع‌ها در منطقه آزمون در نظر گرفته می‌شود. سپس با در نظر گرفتن روابط (۳) و (۴) معادلات مشاهدات برای بی‌هنگاری جاذبه باقی‌مانده و بی‌هنگاری پتانسیل باقی‌مانده ایجاد می‌شود. طبیعی است در نظر گرفتن یک شبکه متراکم باعث مدل‌سازی بهینه‌تر مشاهدات (شکل ۱۳) ولی بزرگ‌تر شدن اعداد شرط ماتریس ضرایب و در نتیجه ناپایداری آن می‌شود. برای حل این مشکل از روش سرشکنی غیرخطی تکراری لونبرگ-مارکواردت استفاده شد. معیار توقف تکرار در این الگوریتم، دستیابی به دقت $0/1 \text{ mGal}$ برای نقاط کنترل در نظر گرفته شد و پس از برآورد پارامترهای مقیاس، موقعیت و پهنه‌ای باند به این روش، با استفاده از رابطه (۳)، بی‌هنگاری پتانسیل باقی‌مانده در منطقه آزمون محاسبه شد. نتیجه در نقاط کنترل با بی‌هنگاری پتانسیل مشاهده شده مقایسه شده و انحراف معیار نظیر به آن محاسبه شد. برای انتخاب شبکه با تعداد مراکز بهینه، روش

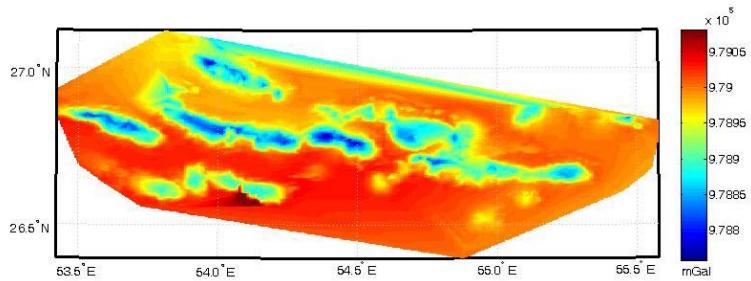
برای محاسبه سطح متوسط دریا از مدل جهانی CSRMS95 استفاده شد. این مدل سطح متوسط آب دریا از مشاهدات ارتفاع سنجی ماهواره‌ای حاصل شده است. به منظور محاسبه این سطح متوسط از داده‌های حاصل از ماهواره TOPEX/POSEIDON، ماهواره ERS-1 و ماهواره Geosat استفاده شده است (کیم و همکاران، ۱۹۹۵). برای محاسبه توپوگرافی سطح آب دریا در سواحل و آبهای اطراف جزیره قشم نیز از مدل Global Parallel Ocean Circulation (POCM-4B Model) استفاده شد. این مدل به روش مشاهدات روزانه میدان استرس باد (Wind stress field) و مشاهدات ماهانه جریان‌های گرمایی سطح متوسط آب دریا (Mean sea surface heat fluxes) از سال ۱۹۸۷ تا ۱۹۹۴ به دست آمده است (استامر و همکاران، ۱۹۹۶). این مدل از بسط هماهنگ‌های کروی تا درجه و مرتبه ۳۶۰ بیان می‌شود (رب، ۱۹۹۸). تغییرات ژئوئید دریایی حاصل در خلیج فارس در شکل ۹ نشان داده شده است. با استفاده از تبدیل برونز بیضوی (اردلان و گرافارند، ۲۰۰۱)، ارتفاع ژئوئید به دست آمده از مشاهدات ارتفاع سنجی ماهواره‌ای را به بی‌هنگاری پتانسیل روی سطح بیضوی تبدیل می‌کنیم. تغییرات بی‌هنگاری پتانسیل روی سطح بیضوی حاصل از مشاهدات ارتفاع سنجی ماهواره‌ای، در خلیج فارس در شکل ۱۰ نشان داده شده است. در مرحله بعد اثر میدان جاذبه تا درجه و مرتبه ۳۶۰ بی‌هنگاری پتانسیل از مدل EGM2008 محاسبه و از روی بی‌هنگاری پتانسیل مشاهده شده حذف می‌شود. تغییرات بی‌هنگاری پتانسیل تا درجه و مرتبه ۳۶۰ و بی‌هنگاری پتانسیل باقی‌مانده

مراکز شبکه و برآورد پارامترهای مقیاس، شکل و موقعیت، بی‌هنگاری جاذبه، مقادیر باقی‌مانده، و نیز بی‌هنگاری پتانسیل باقی‌مانده در منطقه آزمون محاسبه شد. شکل‌های ۱۵ و ۱۶ به ترتیب نمایش بی‌هنگاری جاذبه و مقادیر باقی‌مانده هستند و تغییرات بی‌هنگاری پتانسیل باقی‌مانده در شکل ۱۷ نشان داده شده است. سپس اثرات حذف شده شامل بسط هماهنگ‌های کروی تا درجه و مرتبه ۳۶۰ بی‌هنگاری پتانسیل بازگردانده می‌شود. این اثر برای منطقه مورد بررسی در شکل ۱۸ نشان داده شده است. بی‌هنگاری پتانسیل در منطقه آزمون از جمع اثر بازگردانده شده و بی‌هنگاری پتانسیل باقی‌مانده محاسبه شده از مرحله قبل محاسبه می‌شود. تغییرات بی‌هنگاری پتانسیل در منطقه مورد بررسی در شکل ۱۹ نشان داده شده است. با در اختیار داشتن بی‌هنگاری پتانسیل سطحی در این منطقه می‌توان شبئژنؤید و سایر تابعک‌های سطحی میدان گرانی زمین را محاسبه کرد.

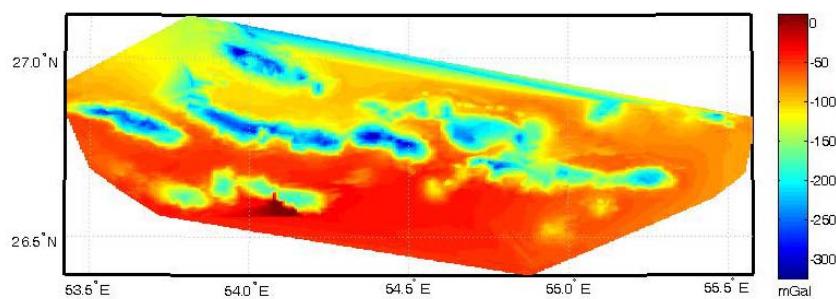
بهازای شبکه‌های منظم از نقاط با تعداد هسته‌های متفاوت تکرار شده و انحراف معیار نتایج محاسبه شد. تغییرات انحراف معیار بی‌هنگاری پتانسیل باقی‌مانده در نقاط کنترل در شکل ۱۴ نشان داده شده است. همان‌طور که در شکل دیده می‌شود، با افزایش تعداد نقاط شبکه، انحراف معیار برای بی‌هنگاری پتانسیل ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد. چنین نتیجه‌ای برای هر مسئله وارون نظری این مسئله قابل درک است. لذا با در نظر گرفتن این تغییرات می‌توان تعداد بهینه مراکز شبکه را تعیین کرد. با در نظر گرفتن شکل ۱۴ تعداد بهینه این هسته‌ها (تعداد نقاط شبکه) ۱۶۹ است. تعداد تابع‌های پایه شعاعی در مقایسه با تعداد کل مشاهدات (۶۷۶۳ مشاهده) بسیار کم است. این در حالی است که در روش پیشنهاد شده (کلیس و همکاران، ۲۰۰۸) تعداد بهینه تابع‌های پایه شعاعی کروی برابر ۲۰ درصد کل مشاهدات (۱۳۵۳ تابع پایه شعاعی) پیشنهاد می‌شود که بهوضوح نشان‌دهنده سرعت زیاد مدل‌سازی در این روش نسبت به روش پیشنهاد شده (کلیس و همکاران، ۲۰۰۸) است. پس از تعیین تعداد بهینه



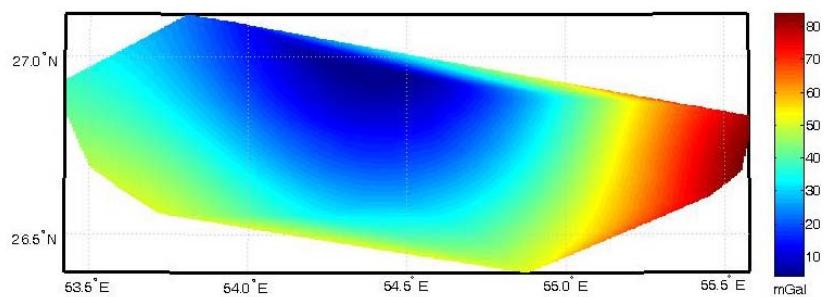
شکل ۴. تغییرات ارتفاعی منطقه مورد بررسی (شمال خلیج فارس).



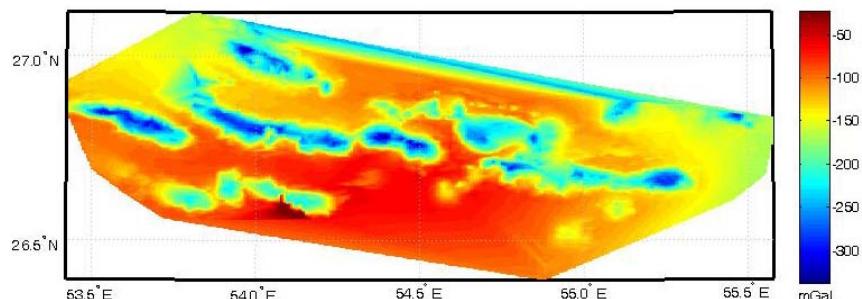
شکل ۵. تغییرات شتاب گرانی مشاهده شده در منطقه مورد بررسی.



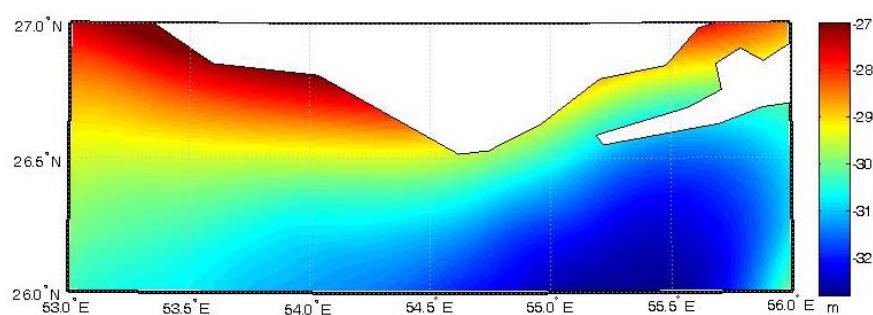
شکل ۶. تغییرات بی‌هنگاری جاذبه مشاهده شده در منطقه مورد بررسی.



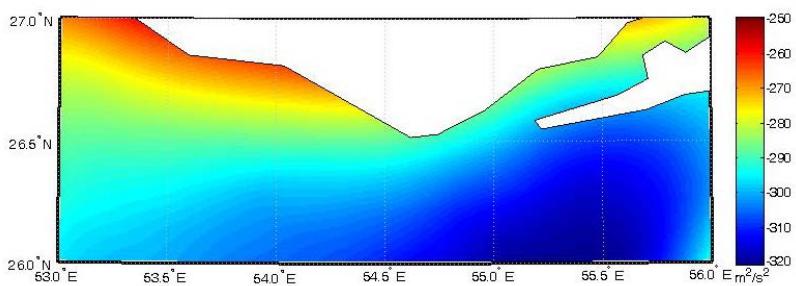
شکل ۷. تغییرات بی‌هنگاری جاذبه حاصل از بسط هماهنگ‌های کروی تا درجه و مرتبه ۳۶۰ با استفاده از مدل EGM2008.



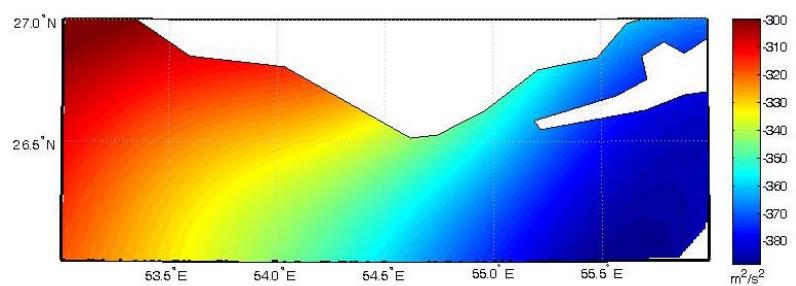
شکل ۸. تغییرات بی‌هنگاری جاذبه باقی‌مانده در منطقه مورد بررسی.



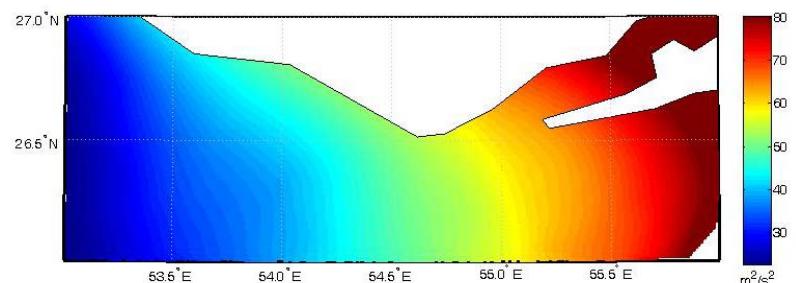
شکل ۹. تغییرات ژئوپید دریابی حاصل از ارتفاع‌سنجی ماهواره‌ای.



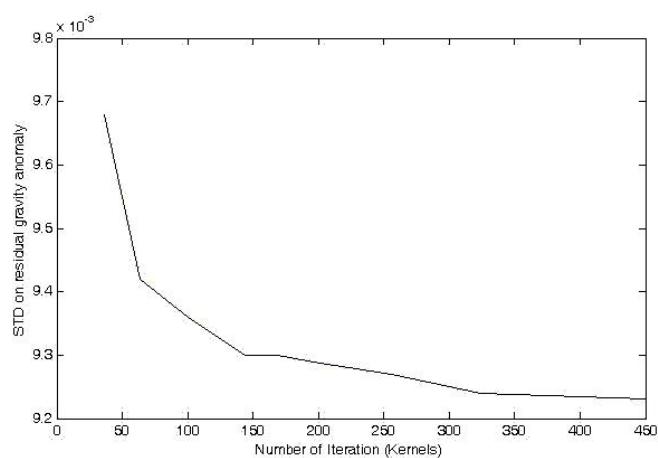
شکل ۱۰. تغییرات بی‌هنگاری پتانسیل حاصل از ارتفاع سنجی ماهواره‌ای در منطقه مورد بررسی (شمال خلیج فارس).



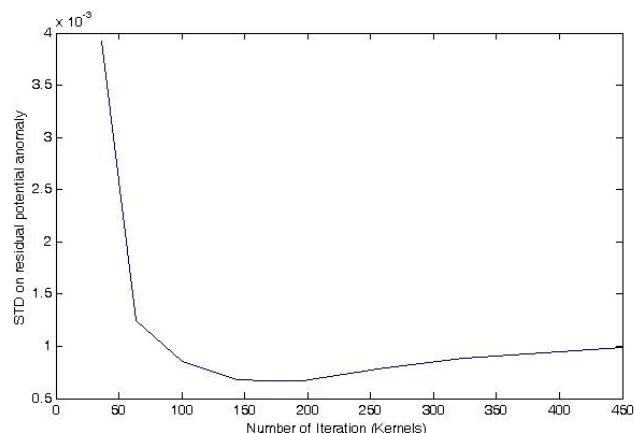
شکل ۱۱. تغییرات بی‌هنگاری پتانسیل حاصل از بسط هماهنگ‌های کروی تا درجه و مرتبه ۳۶۰ و پتانسیل گریز از مرکز با استفاده از مدل EGM2008 در دریا.



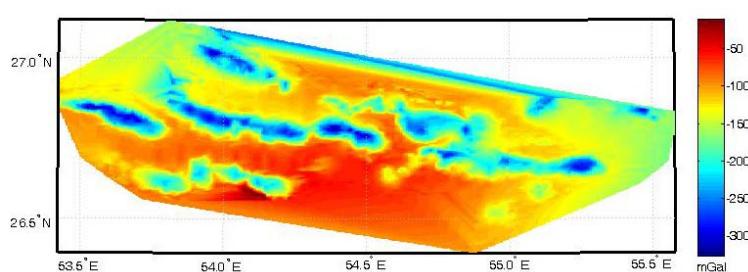
شکل ۱۲. تغییرات بی‌هنگاری پتانسیل باقی‌مانده در دریا.



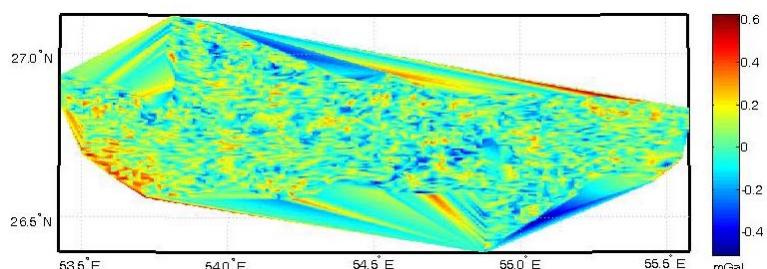
شکل ۱۳. تغییرات انحراف معیار بی‌هنگاری جاذبه باقی‌مانده محاسبه شده با استفاده از تابع‌های پایه شعاعی.



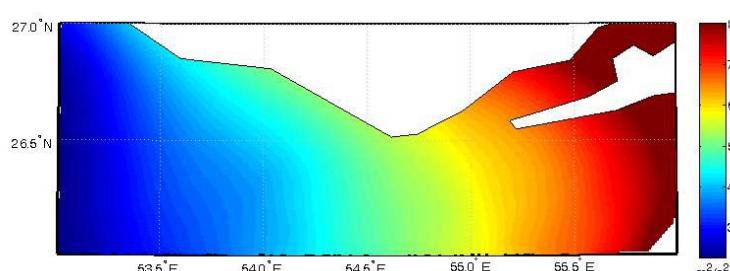
شکل ۱۴. تغییرات انحراف معیار بی‌هنگاری پتانسیل جاذب باقی‌مانده محاسبه شده با استفاده ازتابع‌های پایه شعاعی.



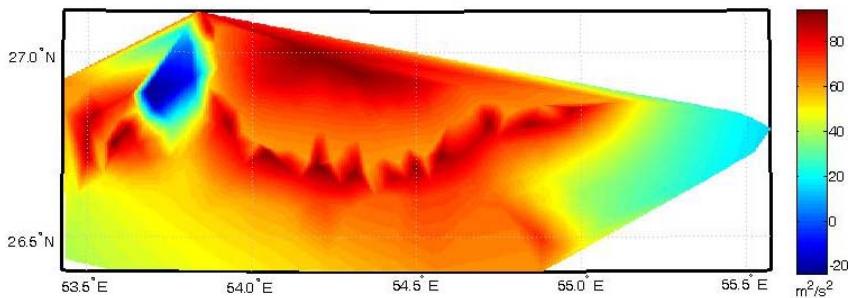
شکل ۱۵. تغییرات بی‌هنگاری جاذب باقی‌مانده محاسبه شده باتابع‌های پایه شعاعی کروی.



شکل ۱۶. تغییرات اختلاف بی‌هنگاری جاذب باقی‌مانده مشاهده شده و محاسبه شده باتابع‌های پایه شعاعی کروی.



شکل ۱۷. تغییرات بی‌هنگاری پتانسیل باقی‌مانده برآورده شده باتابع‌های پایه کروی.



شکل ۱۸. تغییرات پتانسیل باقی‌مانده محاسبه شده با RBF با استفاده از مشاهدات بی‌هنگاری جاذبه باقی‌مانده و بی‌هنگاری پتانسیل حاصل از ارتفاع‌سنجی ماهواره‌ای در منطقه مورد بررسی.

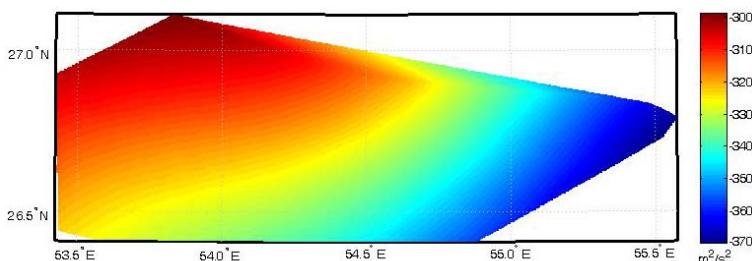
میزان اختلاف بین ارتفاع ژئویید و شبه ژئویید براساس رابطه^{۱۰} زیر قابل محاسبه است (فدرستون و کربای، ۱۹۹۸):

$$N - \zeta \approx \frac{\Delta g^B}{\gamma} H. \quad (10)$$

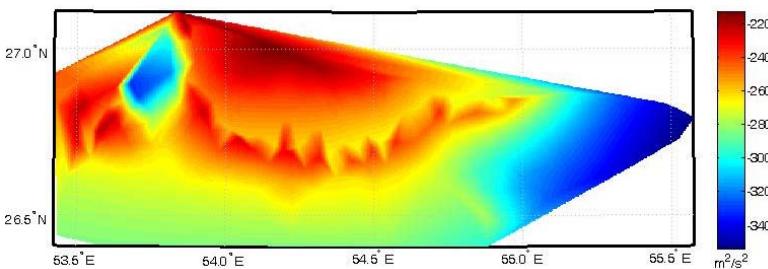
که در آن، H ارتفاع ارتومنتریک، Δg^B بی‌هنگاری بوگه و γ میدان نرمال سومیگلیانا پیزتی محاسبه شده در این نقاط است. اختلاف بین ژئویید و شبه ژئویید در نقاط کنترل، براساس رابطه (۱۰) محاسبه شد، نتیجه این اختلاف در جدول ۲ آمده است. با معلوم بودن ارتفاع ژئویید محاسبه شده از روش بالا و ارتفاع ژئویید حاصل از GPS-Leveling، صحت نتایج بررسی شد. انحراف معیار اختلاف ارتفاع ژئویید حاصل از دو روش برابر ۳cm است. این نتیجه نشان می‌دهد که روش پیشنهادی دارای دقیق خوبی برای محاسبه ارتفاع ژئویید است.

و نیز با استفاده از همان روابط spherical approximation منطقه به دست می‌آوریم که توزیع آن به صورت شکل ۱۹ است و نیز در نهایت پتانسیل جاذبه از مرتبه ۰ تا ۳۶۰ را به دست آورده‌ایم که از RBF ها به دست آورده‌یم اضافه می‌کنیم تا پتانسیل نهایی به دست آید که توزیع آن به صورت شکل ۲۰ است.

برای آزمون نتایج به دست آمده، از ۴ نقطه^{۱۱}-GPS Leveling موجود در این منطقه استفاده شد، بدین‌منظور ابتدا، بی‌هنگاری پتانسیل در این نقاط با استفاده از روش پیشنهادی برآورد و سپس با استفاده از رابطه برنز در میدان نرمال سومیگلیانا پیزتی (اردلان و گرافارند، ۲۰۰۱) ارتفاع شبه ژئویید در این نقاط محاسبه شد. برای محاسبه^{۱۲} ارتفاع ژئویید در نقاط کنترل به اختلاف ژئویید و شبه ژئویید نیاز داریم.



شکل ۱۹. تغییرات بی‌هنگاری پتانسیل حاصل از بسط هماهنگ‌های کروی تا درجه و مرتبه ۳۶۰ با استفاده از مدل EGM2008 در منطقه مورد بررسی.



شکل ۲۰. تغییرات بی‌هنگاری پتانسیل در منطقه مورد بررسی.

جدول ۲. برآورد ارتفاع ژئویید به روش پیشنهادی در نقاط کنترل GPS-Leveling

نقطه ۴	نقطه ۳	نقطه ۲	نقطه ۱	نقط
موقعیت				
$\lambda = 54.1859, \varphi = 26.8097$	$\lambda = 54.5865, \varphi = 27.0473$	$\lambda = 53.4795, \varphi = 27.0828$	$\lambda = 54.9271, \varphi = 26.5960$	ارتفاع ژئویید حاصل از GPS-Leveling
-27.424	-24.874	-26.244	-30.4707	اختلاف ژئویید و شبکه ژئویید در نقاط کنترل
-0.0018	-0.0178	-0.0115	-0.000822	ارتفاع ژئویید محاسبه شده به روش پیشنهادی
-27.324	-24.973	-26.262	-30.412	باقی‌مانده
0.102	-0.099	-0.018	0.0587	

پارامترهای موقعیت و شکل و ضرایب مقیاستابع‌های پایه کروی با الگوریتم لونبرگ مارکواردت. با الگوریتم عرضه شده در این تحقیق، در منطقه فارس ساحلی، با استفاده از داده‌های جاذبی مشاهداتی و بی‌هنگاری پتانسیل حاصل از ارتفاع‌سنگی ماهواره‌ای، تعداد اولیه تابع‌های پایه کروی ۱۶۹ هسته تعیین شد و با استفاده از الگوریتم لونبرگ مارکواردت، عمق متوسط تابع‌های پایه ۳۵ کیلومتر انتخاب شد و درنهایت بی‌هنگاری پتانسیل در این محدوده با استفاده از این پارامترها تعیین شد. برای اعتبارسنجی روش پیشنهادی، از تعدادی نقطه GPS-Leveling در این منطقه استفاده و ارتفاع ژئویید در این نقاط محاسبه شد. انحراف معیار ۳cm برای این نقاط بدست آمد که نشان‌دهنده دقت زیاد روش پیشنهادی در مدل‌سازی میدان گرانی است.

۵ بحث و نتیجه‌گیری

استفاده از تابع‌های پایه شعاعی کروی در ژئودزی برای مدل‌سازی گرانی زمین همواره مورد توجه بوده است. در این تحقیق از تابع‌های پایه شعاعی برای مدل‌سازی محلی میدان گرانی در منطقه فارس ساحلی استفاده شد. از نکات برجسته در این تحقیق می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

- تلفیق مشاهدات شتاب جاذبه و مشاهدات پتانسیل حاصل از ارتفاع‌سنگی ماهواره‌ای برای مدل‌سازی میدان گرانی زمین در سواحل.

- کاهش قابل ملاحظه تعداد تابع‌های پایه و حجم محاسبات نسبت به الگوریتم‌های عرضه شده قبلی.
- تعیین تعداد بهینه تابع‌های پایه کروی با محاسبه انحراف معیار نقاط کنترل با شبکه‌های با تعداد تابع‌های گوناگون.
- افزایش دقت مدل‌سازی، با جایه‌جایی هم‌زمان

- Phys **27**, 79-103.
- Freeden, W., Schreiner, M. and Franke, R., 1997, A survey on spherical spline approximation, Surv Math Ind, **7**, 29-85.
- Heikkinen, M., 1981, Solving the shape of the Earth by using digital density models. Finnish Geodetic Institute, Report 81:2, Helsinki.
- Holschneider, M., Chambodut, A. and Mandea, M., 2003, From global to regional analysis of the magnetic field on the sphere using wavelet frames, Phys Earth Planet Inter, **135**, 107-124.
- Klees, R., Tenzer, R., Prutkin, I. and Wittwer, T. 2008, A data driven approach to local gravity field modeling using spherical radial basis functions, Journal of Geodesy, **82**, 457-471.
- Klees, R. and Wittwer, T., 2007, Local gravity field modeling with multi-pole wavelets, In P Tregoning and C Rizos (eds), Dynamic Planet – Monitoring and Understanding a Dynamic Planet with Geodetic and Oceanographic Tools. International Association of Geodesy Symposia Springer Berlin Heidelberg, **130**, 303-308.
- Kusche, J., Ilk, KH., Rudolph. S. and Thalhammer, M., 1998, Application of spherical wavelets for regional gravity field recovery—a comparative study. In: Forsberg R, et al (ed) Geodesy on the Move, IAG symposia, Vol. **119**. Springer, Berlin, 213-218.
- Lelgemann, D., 1981, On numerical properties of interpolationwith harmonic kernel functions. Manusc Geod., **6**, 157-191.
- Manolis, I. and Lourais, A., 2005, A Brief description of the Levenberg Marquardet algorithm implemented by LEVMAR Institute of Computer Science Foundation for Research and Technology - Hellas (FORTH).
- Marchenko, A. N., 1998, Parameterization of the earth's gravity field, point and line singularities, Leviv Astronomical and Geodetic Society, ISBN 5-7763-4604-5.
- Marchenko, A. N., Barthelmes, F., Meyer, U. and Schwintzer, P., 2001, Regional geoid determination: an application to airplane gravity date in the Skagerrak, Scientific Technical Report, STR01/07, GFZ.
- Panet, I., Chambodut, A., Diament, M., Holschneider, M. and Jamet, O., 2006, New insights on intraplate volcanism in French Polynesia from wavelet analysis of GRACE, CHAMP, and sea surface data. J. Geophys. Res., **111**: B09403.
- Pujol, J., 2007, The solution of non linear inverse problems and the Levenberg – Marquardt

مراجع

- Antoni, M., Keller, W. and Weigelt, M., 2008, Recovery of residual GRACE-observations by radial base functions. VII. Hotine-Marussi Symposium on Theoretical Geodesy, Rome (Italy).
- Ardalan A. A. and Grafarend E. W., 2001, Ellipsoidal geoidal undulations (ellipsoidal Bruns formula): case studies, J. Geodesy, **75**, 544-552.
- Barthelmes, F., 1986, Untersuchungen zur approximationdes äusseren Gravitationsfeldes der Erde durch Punktmassen mit optimierten Positionen. Veröffentlichungendes Zentralinstituts für Physik der Erde, Nr. 92, Potsdam.
- Bjerhammar, A., 1976, A Dirac approach to physical geodesy, Zeitschrift für Vermessungswesen (ZfV) **101**, 41-44.
- Blackman, R. B. and Tukey, J. W., 1958, The measurement of power spectra from the point of view of communication engineering—part II. Bell Syst Tech J485-569.
- Blaha, G., Blessette R. P. and Hadgigeorge, G. 1986, Global point-mass adjustment of the oceanic geoid based on satellite altimetry. Mar, Geodesy, **10**, 97-129.
- Chambodut, A., Panet, I., Mandea, M., Diament, M., Holschneider, M., and Jamet, O., 2005, Wavelet frames: an alternative to spherical harmonic representation of potential fields. Geophysics J. Int., **163**, 875-899.
- Eicker, A., Mayer-Gürr, T. and Ilk, KH, 2004, Global gravity field solutions from GRACE SST data and regional refinements by GOCE SGG observations. In: Proceedings IAG international symposium gravity, geoid and space missions (GGSM2004), Porto, Portugal.
- Engl W. H. and Kugler, P., 2006, Nonlinear inverse problems in theoretical Aspects and some Industrial applications, Johann Radon Institute for Computational and Applied Mathematics, Austrian, Academy of Sciences.
- Featherstone, W. E. and Kirby, J. F., 1998, Estimates of the separation between the Geoid and the Quasi-Geoid over australia, Geomatic Research Australasia, **68**, 79-90.
- Freeden, W., Gervens, T. and Schreiner, M., 1998, Constructive approximation on the sphere (with applications to geo mathematics). Oxford Science Publication, Oxford University Press, New York.
- Freeden, W. and Reuter, R., 1983, Spherical harmonic splines: theoretical and computational aspects, Meth u Verf d Math

- Sünkel, H., 1981, Point mass models and the anomalous gravitational field, Report 328, Department of Geodetic Sciences, Ohio State University, Columbus.
- Tenzer, R. and Klees, R., 2008, The choice of the spherical radial basis functions in local gravity field modeling, *Stud. Geophys. Geod.*, **52**, 287-304.
- Tscherning, C. C., 1986, Functional methods for gravity field approximation, In: Sünkel H (ed) Mathematical and numerical techniques in physical geodesy, Lecture Notes in earth sciences, Springer, Berlin, **7**, 3-47.
- Vermeer, M., 1982, The use of mass point models for describing the Finnish gravity field, Proc. 9th meeting of the Nordic Geodetic Commission, Gävle, Sweden.
- Vermeer, M., 1983, A new SEASAT altimetric geoid for the Baltic, Finnish Geodetic Institute, Report, 83:4 Helsinki.
- Vermeer, M., 1984, Geoid studies on Finland and the Baltic, Finnish Geodetic Institute, Report 84:3, Helsinki.
- Vermeer, M., 1995, Mass point geo potential modeling using fast spectral techniques; historical overview, toolbox description, numerical experiment, *Manuscr Geod.*, **20**, 362-378.
- method. *GEOPHYSICS*, **72**(4), P. W1-W16
- Rapp, R. H., 1998, The development of degree 360 expansion of the dynamic ocean topography of the POCM_4B global circulation model, NASA/CR-1998-206877, Goddard space flight center, Greenbelt, MD.
- Sanso, F. and Tscherning, C. C. 2003, Fast spherical collocation: theory and examples, *J. Geod.*, **77**, 101-112.
- Schmidt, M., Fabert, O., Shum, C. K. and Han, S. C., 2004, Gravity field determination using multiresolution techniques, Proceedings 2nd international GOCE User workshop, ESA-ESRIN, Frascati.
- Schmidt, M., Kusche, J., Loon, J., Shum, C. K., Han, S. C. and Fabert, O., 2005, Multi-resolution representation of regional gravity data, In: Jekeli C, Bastos L, Fernandes J (eds) Gravity, geoid and space missions., Springer, Berlin, 167-172.
- Schmidt, M., Fengler, M., Mayer-Gürr, T., Eicker, A., Kusche, J., Sanchez, L. and Han, S. C., 2007, Regional gravity modeling in terms of spherical base functions, *J. Geod.*, **81**, 17-38.
- Stammer, D., Tokmakian, R., Semtner, A. and Wunsch, C., 1996, how well does a $1/4^\circ$ global circulation model simulate large-scale ocean observation?, *Geophys. Res.*, **101**, 25779-25812.