مجلهٔ فیزیک زمین و فضا، دوره ۳۹، شماره ۴، ۱۳۹۲، صفحهٔ ۲۰۹- ۲۲۱

توسعه هسته دینامیکی یک مدل گردش کلی جوّ بر مبنای تاوایی پتانسیلی با الگوریتم فرابرد پربندی نیمه‌لاگرانژی دررو

محمد جغتایی [۱] و علیرضا محب‌الحجه [۲*]

[۱] دانشجوی دکتری هواشناسی، گروه فیزیک فضا، موسسه ژئوفیزیک دانشگاه تهران، ایران
[۲] دانشیار، گروه فیزیک فضا، موسسه ژئوفیزیک دانشگاه تهران، ایران

(دریافت: ۹۲/۲/۱۴، پذیرش نهایی: ۹۲/۷/۱۶)

چکیده

توسعه هسته دینامیکی هیدروستاتیک برای مدل گردش کلی جوّ بر مبنای تاوایی پتانسیلی با الگوریتم فرابرد پربندی نیمه‌لاگرانژی دررو مورد بررسی قرار می‌گیرد. خطی‌سازی معادلات بسیط با مختصه قائم تعمیم‌یافته حول حالت پایه ساکن امکان استخراج مُدهای قائم و استفاده از آنها برای طراحی و پیاده‌سازی طرحواره گام‌برداری زمانی نیمه‌ضمنی را فراهم می‌کند. استفاده از متغیرهای پیش‌یابی تاوایی پتانسیلی، واگرایی سرعت و تقریبی از واگرایی شتاب در توسعه هسته دینامیکی، مستلزم حل معادله‌ای بیضوی از نوع هلمهولتز پیراسته در محاسبه ضخامت فشاری لایه‌های ایجاد شده میان ترازهای متوالی است. استفاده از تصویر به فضای مُدهای قائم حل این معادله بیضوی را هم تسهیل می‌کند. در حل عددی، طرحواره‌های طیفی در راستای مداری، مرتبه چهارم فشرده در راستای نصف‌النهاری و نیمه‌ضمنی با سه تراز زمانی به کار می‌رود.

در این پژوهش، مدل ساخته شده بر مبنای تاوایی پتانسیلی در مختصه قائم تعمیم‌یافته و استخراج مُدهای قائم در مدل با موفقیت از عهده آزمون ناپایداری کژفشار برمی‌آید. در آزمون صورت گرفته با دو لایه، حالت اولیه جت متوازنی است که ناپایداری آن با یک پریشیدگی کوچک به راه می‌افتد. نتایج حاکی از شکل‌گیری و توسعه امواج کژفشار در طی ۳۰ روز انتگرال‌گیری عددی برای شارش حدی با عدد فرود نزدیک یک است. آزمون موفق صورت گرفته، زمینه را برای آزمایش کامل مدل درحکم یک هسته دینامیکی در آرایشی نزدیک‌تر به واقعیت با تعداد زیادی لایه و برهم‌کُنش با سطح زیرین فراهم می‌کند.

واژه‌های کلیدی: مدل گردش کلی جوّ، مختصه قائم تعمیم‌یافته، مُدهای قائم، مدل برمبنای PV، هسته دینامیکی، جت ناپایدار

Development of a potential vorticity based dynamical core for general circulation models using the diabatic contour-advective semi-Lagrangian algorithm

Joghataei, M.[1] and Mohebalhoje, A. R.[2]

[1] *Ph.D. Student of Meteorology, Space Physics Department, Institute of Geophysics, University of Tehran, Iran*
[2] *Associate Professor, Space Physics Department, Institute of Geophysics, University of Tehran, Iran*

(Received: 04 May 2013, Accepted: 08 Oct 2013)

Summary

The development of the dynamical core of a potential-vorticity-based atmospheric general circulation model is explored. There are some advantages of using potential vorticity (PV) as a prognostic variable in that the resulting model can give more accurate simulation of the evolution of PV, as arguably the most fundamental dynamical quantity. Further, there is possibility of explicit representation of unbalanced part of the flow during time integration, though in an approximate manner, by making proper choice of the prognostic variables used alongside PV. In this way, the model is equipped with some built-in form

* نگارنده رابط: تلفن: ۰۲۱-۶۱۱۱۸۳۵۳ دورنگار: ۰۲۱-۸۸۶۳۰۴۷۹ E-mail: amoheb@ut.ac.ir

of the balance relation for PV inversion, which helps to maintain the underlying balance. A closed set of equations is constructed using the variables Q, a PV-like variable described below, δ and γ which are, respectively, the horizontal velocity divergence and an approximate form of horizontal acceleration divergence. For the primitive equations linearized around a rest state, it can be shown that there is a direct correspondence between the Rossby modes and the Q variable, on the one hand, and between the inertia-gravity modes and the δ and γ variables, on the other hand. Linearizing the primitive equations in the generalized vertical coordinate ξ around a resting basic state, the symmetric matrix $\mathbf{C}$ relating the column vector of the time tendency of modified pressure $\underline{P}$ to the column vector of horizontal divergence is found. Here, the modified pressure is defined by $P = \Phi' + c_p T' - \bar{\pi}\theta'$, with Φ', T' and θ', respectively, the perturbation geopotential, temperature and potential temperature, c_p specific heat capacity at constant pressure and $\bar{\pi}$ the basic state Exner function. The eigenvectors of $\mathbf{C}$ are used to define the vertical modes and the projection of any given column vector from the physical space to vertical mode space and vice versa. This facilitates to generalize the Boussinesq PV-based multi-layer primitive-equation models to the corresponding non-Boussinesq set of equations. A PV-like quantity is defined by $Q = \dfrac{f+\zeta}{1+\tilde{h}}$ in which f is the Coriolis parameter, ζ the relative vertical vorticity, and $\tilde{h} = \dfrac{\partial p'}{\partial \xi} / \dfrac{\partial \bar{p}}{\partial \xi}$ the normalized perturbation pressure thickness. Here p' and $\bar{p}$ are, respectively, the perturbation and the basic state pressure. The variable Q becomes the same as Rossby–Ertel PV whenever ξ coincides with θ. Further, with the definition of modified pressure given above, the variable γ becomes equal to $f\,\zeta - \nabla^2 P - \beta u$ with β the northward gradient of f. When ξ coincides with θ, γ becomes equal to acceleration divergence. To use the variables Q, δ and γ as the prognostic variables, one has to implement an inversion procedure to obtain the velocity field and the thermodynamic variables at each time step. Making use of the definition of Q and γ, and projecting onto the vertical-mode space results in a modified Helmholtz equation for $\tilde{h}$ which is solved by spectral transform in longitude and fourth-order compact in latitude following the procedure introduced by Mohebalhojeh and Dritschel in 2007. Solving for $\tilde{h}$, the modified pressure can then be obtained either directly through the matrix relation $\underline{P} = \mathbf{C}\underline{\tilde{h}}$ or through projection onto vertical-mode space. The task is then to find the thermodynamic variables using the information available for P at each column of fluid.

The PV as a determining variable for vortical flows is given the highest priority in terms of accuracy. For this purpose, the Contour-Advective Semi-Lagrangian (CASL) algorithm, previously implemented for various settings and models including the many-layer Boussinesq primitive equation models on the sphere, provides the natural choice. An extension of CASL called DCASL has already been applied to the thermally-forced shallow water equations (SWEs) on the sphere. In generalized vertical coordinate, the evolution equation of Q is similar to that of PV in the thermally-forced SWEs. Therefore, the available DCASL can be generalized for the non-Boussinesq equations with little effort.

The generalized vertical coordinate is set as $\xi = f(\sigma) + g(\sigma)\theta$ with σ defined in such a way as to increase monotonically with geometrical height from zero at the surface to one

at the top level. The functions f and g are determined in such a way that (i) ξ tends to σ and θ when pressure p tends to its value at the surface and the top of the model, respectively, and (ii) the condition $\frac{\partial\xi}{\partial\sigma}>0$ is satisfied to ensure monotonicity whenever $\frac{\partial\sigma}{\partial\theta}>(\frac{\partial\sigma}{\partial\theta})_{\min}$ and $\theta>\theta_{\min}$ where $\theta_{\min}$ and $(\frac{\partial\sigma}{\partial\theta})_{\min}$ are prescribed values of the lowest value of potential temperature and the vertical gradient of potential temperature with respect to sigma, respectively.

The time evolution of a two-layer baroclinically unstable midlatitude jet over a 30-day period is investigated as a test case to examine the performance of the algorithm developed. It should be mentioned that various experiments using different basic-state structures have been carried out. The experiment reported is however for the one with a uniform stratification obtained by setting a constant lapse rate of $8\,\mathrm{K(km)^{-1}}$ from $1000\,\mathrm{hPa}$ to $100\,\mathrm{hPa}$. This choice of the basic-state structure leads to a flow regime with order one Rossby and Froude numbers. Results show the formation and development of an intense baroclinic wave with zonal wave number 3. Further, embedded in the baroclinic wave there are inertia-gravity waves generated by vortical flow in a manner resembling what has previously observed for the Boussinesq primitive-equation model. The successful integration of model in extreme flows gives us confidence to further develop the algorithm to a dynamical code for atmospheric general circulation models.

Keywords: Atmospheric general circulation model, Generalized vertical coordinate, Vertical modes, PV-based model, Dynamical core, Unstable jet

۱ مقدمه

توسعه یک مدل گردش کلی جوّ بر مبنای تاوایی پتانسیلی، برای اختصار PV برگرفته از Potential Vorticity، از دیرباز مورد توجه دانشمندان بسیاری قرار گرفته است. این مهم بعد از کار برجسته هاسکینز و همکاران (۱۹۸۵) در کاربست فرایابی تاوایی پتانسیلی که منجر به دیدگاه جدیدی از رفتار شارش‌های جوّی شد، بارزتر شد (بیتس و همکاران، ۱۹۹۵؛ لی و همکاران، ۲۰۰۰؛ محب‌الحجه و دریچل، ۲۰۰۷). اهمیت اساسی چنین مدل‌هایی (که در آن PV به‌صورت صریح و به‌منزلهٔ یک متغیر پیش‌یابی به‌کار می‌رود) این است که تحول PV در صورت استفاده از الگوریتم‌های نیمه‌لاگرانژی مناسب، به‌صورت دقیق‌تری شبیه‌سازی می‌شود.

اولین قدم برای گسترش مدل‌هایی بر مبنای PV را چارنی (۱۹۶۲) برای معادلات آب‌کم‌عمق برداشت. چارنی معادله PV را همراه با شکل متوازن معادله واگرایی به‌کار برد و نتایج موفقی از انتگرال‌گیری به‌دست داد. کار توسعه مدل بر مبنای PV با استفاده از معادلات آب کم‌عمق را بیتس و همکاران (۱۹۹۵) و لی و بیتس (۱۹۹۶) ادامه دادند. لی و همکاران (۲۰۰۰) موفق به عرضه مدلی بر مبنای PV برای معادلات بسیط کژفشار با استفاده از مختصه قائم تعمیم‌یافته ξ (کاساهارا، ۱۹۷۴) و الگوریتم نیمه‌ضمنی- نیمه‌لاگرانژی شده است و نتایج موفقی از اجرای مدل برای ناپایداری کژفشار با ۱۸ تراز قائم σ به‌دست دادند.

یکی از ویژگی‌های بارز PV استفاده از روابط توازن و وارون‌سازی آن و استخراج سایر کمیت‌های دینامیکی و ایجاد میدان متوازن است (جغتایی و همکاران، ۱۳۹۱). با کم کردن میدانِ متوازن از نتایج حاصل از معادلات بسیط، میدان نامتوازن حاصل می‌شود. محب‌الحجه و دریچل

(۲۰۰۱) روابط توازن را تا بالاترین مرتبه‌دست یافتنی برای معادلات آب کم‌عمق روی صفحه f استخراج و میدان‌های متوازن و نامتوازن را با روابط توازن گوناگون جداکردند. کار روی مدل چندلایه‌ای آب کم‌عمق روی صفحه f بر مبنای PV با الگوریتم فرابرد پربندی نیمه‌لاگرانژی (Contour-Advective Semi-Lagrangian) موسوم به CASL) را محب‌الحجه و دریچل (۲۰۰۴) ادامه دادند. دو تمایز اصلی این مدل با سایر مدل‌ها در این است که اولاً جداسازی قسمت‌های متوازن و نامتوازن شارش با دقت زیاد امکان‌پذیر است و ثانیاً نماینده قسمت تاواری شارش یعنی PV با بیشترین دقت و مناسب‌ترین الگوریتم محاسبه می‌شود. لازم به ذکر است که در آن پژوهش، انتگرال‌گیری از معادلات بسیط با تقریب بوسینسک روی سطوح هم‌چگالی یا هم‌دمای پتانسیلی صورت گرفت.

کار روی مدل کروی بر مبنای تاوایی پتانسیلی با الگوریتم فرابرد پربندی نیمه‌لاگرانژی با طرحواره‌های تفاضل متناهی دارای درستی از مرتبه دوم، چهارم و ششم در راستای نصف‌النهاری را محب‌الحجه و دریچل (۲۰۰۷) ادامه دادند. نتایج حاکی از آن بود که در شارش‌های پیچیده دستیابی به دقتی بیشتر از مرتبه چهارم در تفاضل‌گیری نصف‌النهاری ممکن نیست. استفاده از متغیرهای پیش‌یابی واگرایی سرعت δ و واگرایی شتاب γ در کنار PV با ایجاد تناظر یک‌به‌یک بین خمینه گرانی و قسمت نامتوازن شارش، اهمیت زیادی دارد. محب‌الحجه و دریچل (۲۰۰۹) در ادامه نتایج موفقی از اجرای مدل بر مبنای PV با چشمه تاوایی پتانسیلی با الگوریتم پیشرفته‌تر فرابرد پربندی نیمه‌لاگرانژی دررو عرضه کردند.

استفاده از مختصه قائم ترکیبی (هیبرید) راهی برای حل مشکلات ناشی از مختصه قائم هم‌چگالی یا هم‌دمای‌پتانسیلی و رسیدن به مدلی واقعی‌تر فراهم می‌کند. تاریخچه استفاده از مختصه قائم ترکیبی به کار سیمونز و بریج (۱۹۸۱) برمی‌گردد. آنها توانستند معادلات با مختصه قائم دلخواه را به گونه‌ای گسسته‌سازی کنند که پایستاری انرژی و تکانه زاویه‌ای حفظ شود. البته راهکار گذار آرام از σ به θ در پژوهش کونور و آراکاوا (۱۹۹۷) نیز بررسی شده است. در آن کار با تعریف مختصه قائم تعمیم‌یافته به‌صورت $\xi = \mathrm{f}(\sigma) + g(\sigma)\theta$ و اِعمال شرایط مرزی و شرط یکنوایی روی آن، توانستند گذار آرام از σ به θ را معرفی کنند.

در پژوهش حاضر کاربست مختصه قائم تعمیم‌یافته در مدل بر مبنای تاوایی پتانسیلی با الگوریتم فرابرد پربندی نیمه لاگرانژی دررو عرضه می‌شود. نحوه استخراج مُدهای قائم در دستگاه با مختصه قائم تعمیم‌یافته نخستین‌بار عرضه می‌شود. برای مدلی دولایه‌ای، نتایج مدل برای آزمون ناپایداری کژفشار در شارشی حدی با مقادیر از مرتبه یک عدد راسبی و فرود به‌دست می‌آید. قسمت دوم اختصاص به عرضهٔ فرمول‌بندی در دستگاه با مختصه قائم تعمیم‌یافته و روش استخراج مُدهای قائم دارد. قسمت سوم به مشخصه‌های آزمایش عددی و شرایط اولیه مدل می‌پردازد. نتایج اجرای مدل برای مدت ۳۰ روز در قسمت چهارم مطرح می‌شود و قسمت پنجم اختصاص به بحث و نتیجه‌گیری دارد.

۲ فرمول‌بندی

معادلات بسیط در مختصه قائم تعمیم‌یافته به‌صورت زیر است (لی و همکاران، ۲۰۰۰):

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{D}\mathbf{v}}{\mathrm{D}t} + f\,\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{v} = -\nabla m + \Pi \nabla \theta \\
&\frac{\partial m}{\partial \xi} = \Pi \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \\
&\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial p}{\partial \xi}\right) + \nabla \cdot \left(\mathbf{v}\frac{\partial p}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\dot{\xi}\frac{\partial p}{\partial \xi}\right) = 0 \\
&\frac{\mathrm{D}\theta}{\mathrm{D}t} = 0
\end{aligned} \qquad (۱)$$

که در آن، $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla + \dot{\xi}\frac{\partial}{\partial \xi}$، $\mathbf{v}$ بردار سرعت افقی، f پارامتر کوریولیس، m پریشیدگی پتانسیل مونتگمری،

$\Pi \equiv c_p (p/p_0)^{R/c_p}$ تابع اکسنر، ξ مختصه قائم تعمیم‌یافته و $\hat{\mathbf{k}}$ است. در تعریف تابع اکسنر، c_p ظرفیت گرمایی ویژه هوا در فشار ثابت، R ثابت ویژه گاز برای هوا و p_0 فشار مرجع برابر با $1000\,\mathrm{hPa}$ است. در این پژوهش، در مرحله اول ساخت هسته دینامیکی جوّ، هوای خشک در نظر گرفته شده است و اثر رطوبت وارد نمی‌شود. مختصه قائم به همان روال کونور و آراکاوا (۱۹۹۷) به‌صورت $\xi = \mathrm{f}(\sigma) + g(\sigma)\theta$ ساخته و σ طوری تعریف می‌شود که به‌طور یکنوا از مقدار صفر در سطح زمین تا مقدار یک در بالاترین تراز افزایش یابد. به‌علاوه، تابع‌های f و g طوری تعیین می‌شوند که (الف) با گراییدن p به مقدار آن در سطح زمین و بام مدل، ξ به‌ترتیب به σ و θ بگراید و (ب) درصورتی‌که $\frac{\partial\sigma}{\partial\theta} > (\frac{\partial\sigma}{\partial\theta})_{\min}$ و $\theta > \theta_{\min}$ باشد؛ برای تضمین یکنوایی شرط $\frac{\partial\xi}{\partial\sigma} > 0$ برآورده شود. در اینجا $\theta_{\min}$ و $(\frac{\partial\sigma}{\partial\theta})_{\min}$ مقدارهای از پیش تصریح شده کمینه به‌ترتیب دمای پتانسیلی و گرادیان قائم دمای پتانسیلی نسبت به سیگما هستند.

به‌طورکلی می‌توان معادلات بسیط را به‌صورت دو مجموعه جدا، یکی معادلات افقی آب کم‌عمق و دیگری معادلات ساختار قائم، تجزیه کرد. به‌راحتی می‌توان اثبات کرد که معادلات چندلایه‌ای که حول حالت پایه ساکن خطی شده‌اند، در فضای مُدهای بهنجار به‌طور کامل از یکدیگر مستقل‌اند. بنابراین با تصویر روی مُدهای قائم، فضای مُدهای بهنجار چندلایه‌ای شامل زیرفضاهای آب کم‌عمق خطی‌شده است. براین‌اساس، با تصویر معادلات چندلایه‌ای به مُدهای قائم، می‌توان معادلات را به حالت چینه‌بندی شده تعمیم داد.

تعمیم مجموعه بسته‌ای از معادلات پیش‌یابی برای (δ,γ) و PV هم باعث ایجاد تناظر یک‌به‌یک بین فضای مُدهای بهنجار دستگاه معادلات خطی‌شده حول حالت ساکن و فضای تابع‌های فیزیکی خواهد شد (محب‌الحجه و دریچل، ۲۰۰۴) و هم به ایجاد هسته مدلی بر مبنای PV منجر می‌شود که با کاربست روابط توازن از مرتبه‌های متفاوت به جداسازی بخش متوازن و نامتوازن شارش کمک می‌کند. معادلات آب کم‌عمق در دستگاه مختصه تعمیم‌یافته با گرفتن واگرایی و تاو از معادله تکانه (۱) و اِعمال معادله پیوستگی به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{\mathrm{D}Q}{\mathrm{D}t} = Q\left\{\begin{aligned} &\frac{1}{\frac{\partial p}{\partial\xi}}\frac{\partial}{\partial\xi}(\dot{\xi}\frac{\partial p}{\partial\xi}) - \frac{1}{f+\zeta}\hat{\mathbf{k}}\cdot\nabla \\ &\times(\dot{\xi}\frac{\partial u}{\partial\xi} - \frac{\Pi'}{\cos\phi}\frac{\partial\theta'}{\partial\lambda}, \dot{\xi}\frac{\partial v}{\partial\xi} - \Pi'\frac{\partial\theta'}{\partial\phi})\end{aligned}\right\} \tag{۲}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\delta}{\partial t} &= \gamma - 2\left[\frac{\partial u}{\partial\phi}(\frac{\partial u}{\partial\phi} - \zeta) + \frac{\partial v}{\partial\phi}(\frac{\partial v}{\partial\phi} - \delta)\right] \\ &-\nabla\cdot(\delta\,\mathbf{v}) - |\mathbf{v}|^2 + \nabla\cdot(\Pi'\nabla\theta' - \dot{\xi}\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\xi})\end{aligned} \tag{۳}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\gamma}{\partial t} &= c_m^2\nabla^2\delta - \nabla^2 N + 2\Omega_{\mathrm{E}}\frac{\partial B}{\partial\lambda} - \nabla\cdot(Z\,\mathbf{v}) - \\ &f\left[\hat{\mathbf{k}}\cdot\nabla\times(\dot{\xi}\frac{\partial u}{\partial\xi} - \frac{\Pi'}{\cos\phi}\frac{\partial\theta'}{\partial\lambda}, \dot{\xi}\frac{\partial v}{\partial\xi} - \Pi'\frac{\partial\theta'}{\partial\phi})\right] \\ &+\beta[\dot{\xi}\frac{\partial u}{\partial\xi} - \frac{\Pi'}{\cos\phi}\frac{\partial\theta'}{\partial\lambda}]\end{aligned} \tag{۴}$$

که در آن، Q شبه PV است که در اینجا به‌صورت $Q = \frac{f+\zeta}{1+\partial\tilde{p}/\partial\xi}$ به‌ازای $\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\xi} = \frac{\partial p'}{\partial\xi} / \frac{\partial\bar{p}}{\partial\xi}$ تعریف می‌شود، ζ تاوایی نسبی، Π' پریشیدگی تابع اکسنر، ϕ و λ به‌ترتیب عرض و طول جغرافیایی در مختصات کروی، θ' پریشیدگی دمای پتانسیلی، ξ مختصه قائم تعمیم‌یافته، δ و γ به‌ترتیب واگرایی سرعت و تقریبی از واگرایی شتاب، B فشار برنولی، $Z = f(f+\zeta)$، Ω_{E} آهنگ چرخش زاویه‌ای زمین و β گرادیان شمال‌سوی پارامتر کوریولیس است. لازم به ذکر است که معادله (۴) به فضای مُد قائم تصویر شده است. در معادله (۴) c_m تندی فاز مُد قائم گرانی‌لختی و N مجموع جملات غیرخطی در معادله گرایش زمانی فشار پیراسته $P \equiv \phi' + c_p T' - \bar{\Pi}\theta'$ به‌صورت زیر است:

$$\frac{\partial\underline{P}}{\partial t} = -\mathbf{C}\,\underline{\delta} + \underline{N} \tag{۵}$$

که در آن، $\underline{P}$، $\underline{\delta}$ و $\underline{N}$ بردارهای ستونی در هر نقطه

افقی شاره برای به‌ترتیب فشار پیراسته، واگرایی افقی و متغیر N هستند و $\mathbf{C}$ ماتریسی است که با کمیت‌های حالت پایه تعریف می‌شود. در تعریف فشار پیراسته، ϕ'، T' و θ' مقدار پریشیدگی به‌ترتیب ژئوپتانسیل، دما و دمای پتانسیلی هستند، و $\bar{\Pi}$ تابع اکسنر حالت پایه است. استخراج معادله (۵) در قسمت بعد توضیح داده می‌شود.

۲-۱ ساختار قائم در دستگاه ترکیبی

اولین گام یافتن رابطه تغییر زمانی فشار پیراسته با واگرایی افقی است. این ایده از کار تمپرتون و ویلیامسون (۱۹۸۱) و تمپرتون (۱۹۸۴) آمده است. لازم به ذکر است که فشار پیراسته به‌صورت تعریف شده معادل قسمت خطی جمله فشار در معادله تکانه با مختصه قائم ارتفاع هندسی است و به همین علت فشار پیراسته نام‌گذاری شده است. حاصل رهیافتی که عرضه می‌شود، جداسازی ساختار قائم از ساختار افقی است. همچون دیگر صورت‌های شناخته شده معادلات بسیط، ساختار افقی به‌صورت معادلات آب کم‌عمق با عمق میانگین خاص برای هر مُد قائم به‌دست می‌آید.

با مشتق‌گیری زمانی محلی از فشار پیراسته، رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{\partial P}{\partial t}=\left[\kappa\frac{\Pi}{p}\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\right]\frac{\partial p'}{\partial t}-\frac{\partial\bar{\Pi}}{\partial\xi}\frac{\partial\theta'}{\partial t}+[\Pi-\bar{\Pi}]\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{\partial\theta'}{\partial t} \quad (۶)$$

بعد از خطی‌سازی معادله (۶) داریم:

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{\partial P}{\partial t}=\left[\kappa\frac{\bar{\Pi}}{\bar{p}}\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial\xi}\right]\frac{\partial p'}{\partial t} \quad (۷)$$

برای سهولت محاسبات با تعریف دو متغیر H و G به‌صورت:

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{\partial P}{\partial t}=H,\quad \frac{\partial P}{\partial t}=G \quad (۸)$$

و انتگرال‌گیری در راستای قائم می‌توان $\frac{\partial P}{\partial t}$ را به‌دست آورد. برای انتگرال‌گیری در راستای قائم ابتدا آن را در سطح زمین محاسبه و برای ترازهای بالاتر از آن استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\partial P}{\partial t}=\left.\frac{\partial P}{\partial t}\right|_{\xi_s}+\int_{\xi_s}^{\xi}H\,d\xi \quad (۹)$$

چون در سطح زمین ارتفاع ژئوپتانسیلی با زمان ثابت است پس داریم:

$$\frac{\partial P}{\partial t}=c_p\left.\frac{\partial T'}{\partial t}\right|_{\xi_s}-\bar{\Pi}\left.\frac{\partial\theta}{\partial t}\right|_{\xi_s} \quad (۱۰)$$

توجه کنید که در مدل ابتدا گرایش فشار پیراسته در سطح زمین از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$\left.\frac{\partial P}{\partial t}\right|_{\xi=\xi_s}=\frac{RT_s}{p_s}\frac{\partial p_s}{\partial t}-\Pi'\mathbf{V}_s\cdot\nabla\theta'_s-\frac{R\bar{T}_s}{\bar{p}_s}\frac{\partial p_s}{\partial t} \quad (۱۱)$$

که درنهایت بعد از اندکی جابه‌جایی می‌توان رابطه (۱۱) را به‌صورت خطی رابطه (۱۲) با ماتریس زیر:

$$\mathbf{C}=\left\{\frac{R\bar{T}_s}{\bar{p}_s}\mathbf{E}+\mathbf{U}\mathrm{diag}\left[(\Delta\xi)\alpha\right]\mathbf{L}\right\}\mathrm{diag}\left[(\Delta\bar{p})\right] \quad (۱۲)$$

درآورد که در آن:

$$\alpha=\frac{R\bar{T}}{\bar{p}}\frac{\partial\ln\bar{\theta}}{\partial\xi},$$

$$\mathbf{U}=\begin{pmatrix}1/2 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 1/2 & \cdots & \vdots\\ \vdots & 0 & \ddots & 1\\ 0 & \cdots & 0 & 1/2\end{pmatrix},\quad \mathbf{L}=\begin{pmatrix}1/2 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 1/2 & \cdots & \vdots\\ \vdots & 1 & \ddots & 0\\ 1 & \cdots & 1 & 1/2\end{pmatrix}$$

و $\mathbf{E}=\mathbf{L}+\mathbf{U}$ است. ماتریس $\mathbf{C}$ به‌دست آمده در اینجا در واقع تعمیم ماتریس تمپرتون (۱۹۸۴) برای مختصه $\sigma=p/p_s$ است و با همان استدلال عنوان شده در تمپرتون (۱۹۸۴) می‌توان نشان داد که متقارن است. از ویژه‌مقدارها و ویژه‌بردارهای ماتریس $\mathbf{C}$ برای ساخت فضای مُدهای قائم استفاده می‌شود. ماتریس $\mathbf{C}$ برای حالت پایه‌ای ساکن با چینه‌بندی یکنواخت و آهنگ اُفت دما با ارتفاع برابر با ۸K/km ساخته و با ویژه‌بردارهای آن مُدهای قائم استخراج می‌شود. لازم به ذکر است که

آزمایش‌هایی با مقدار کوچک‌تر آهنگ کاهش دما با ارتفاع، یعنی K/km(۵٫۵، ۶٫۰، ۶٫۵، ۷٫۰، ۷٫۵) هم صورت گرفته است. با افزایش این مقدار، درجه کژفشاری نیز افزایش می‌یابد. در اینجا به عرضهٔ نتایج این شارش حدی که دربردارنده نتایج شارش‌های ضعیف‌تر نیز هست، اکتفا می‌شود.

۳ آزمایش عددی

آزمایش عددی برای مدل دولایه‌ای با مختصه قائم تعمیم‌یافته برای آزمایش ناپایداری کژفشار به‌کار می‌رود. محب‌الحجه و دریچل (۲۰۰۹) بر مبنای کار دریچل و آمبام (۲۰۰۶) چند نوع از الگوریتم‌های فرابرد پربندی نیمه‌لاگرانژی دررو (Diabatic CASL یا DCASL) را برای حل معادلات واداشته آب کم‌عمق که در آن چشمه PV می‌تواند دارای ساختار ریز و پیچیده باشد، معرفی کردند. در اینجا نوع اول این الگوریتم که با جداسازی میدان PV به دو بخش بی‌دررو (Q_a) و دررو (Q_d)، و استفاده از نمایش پربندی برای Q_a و نمایش شبکه مبنا برای Q_d ساخته می‌شود، به‌کار می‌رود. معادله‌های تحول زمانی تاوایی پتانسیلی دررو و بی دررو به‌صورت زیر است:

$$\frac{\mathrm{D}Q_\mathrm{a}}{\mathrm{D}t}=0 \quad , \quad \frac{\mathrm{D}Q_\mathrm{d}}{\mathrm{D}t}=S_Q \tag{۱۳}$$

که در آن، S_Q معرف چشمه تاوایی پتانسیلی است. متغیرهای دینامیکی مثل سرعت و عمق از متغیرهای پیش‌یابی (Q,δ,γ) به روش زیر استخراج می‌شود. با تجزیه هلمهولتز میدان سرعت یعنی $\mathbf{v}=\hat{\mathbf{k}}\times\nabla\psi+\nabla\chi$ به قسمت‌های چرخشی و واگرا، تابع جریان ψ و پتانسیل سرعت χ به‌ترتیب با حل معادله‌های پواسون $\nabla^2\psi=\zeta$ و $\nabla^2\chi=\delta$ به‌دست می‌آیند (محب‌الحجه و دریچل، ۲۰۰۷). با بازنویسی γ رابطه آن با فشار پیراسته به‌صورت $\nabla^2 P'=f\zeta-\beta u-\gamma$ است. با کم کردن $f^2\tilde{h}$ از دو طرف رابطه و تصویر آن روی فضای مُدهای قائم و تقسیم بر c_m^2، معادله هلمهولتز پیراسته زیر برای ضخامت فشاری بهنجار شده به‌دست می‌آید:

$$(\nabla^2-\frac{f^2}{c_m^2})\check{h}=\frac{1}{c_m^2}\,\overleftrightarrow{\check{f\,(\zeta-f\tilde{h})-\beta u-\gamma}} \tag{۱۴}$$

که در آن، h ضخامت فشاری و علامت کلاه وارونه مربوط به تصویر روی فضای مُدهای قائم است. این معادله با روش عرضه شده در محب‌الحجه و دریچل (۲۰۰۷)، یعنی روش طیفی در راستای مداری و مرتبه چهارم فشرده در راستای نصف‌النهاری حل می‌شود. نتایج حاصل از ضخامت فشاری منجر به جواب برای پریشیدگی فشار پیراسته با حل هریک از دو رابطه $P=\mathbf{C}h$ یا $\check{P}=c_m^2\,\check{h}$ می‌شود. پس از آن لازم است متغیرهای ترمودینامیکی با اطلاعات حاصل از P یافت شود. با جای‌گذاری رابطه $c_pT'=\Pi\theta-\bar{\Pi}\bar{\theta}$ در تعریف فشار پیراسته:

$$P'=\Phi'+\Pi'\theta \tag{۱۵}$$

و گسسته‌سازی رابطه هیدروستاتیک $\frac{\partial\Phi}{\partial\Pi}=-\theta$ مطابق کونور و آراکاوا (۱۹۹۷):

$$\begin{aligned}&\Phi_l=\Phi_{+1}+\theta_{l+1}(\Pi_{l+1/2}-\Pi_l)\\&+\theta_{l+1}(\Pi_{l+1}-\Pi_{l+1/2})\\&\Phi_L=\Phi_{L+1/2}+\theta_L(\Pi_{L+1/2}-\Pi_L)\end{aligned} \tag{۱۶}$$

با شرط مرزی زیرین $\Phi_{L+1/2}=\Phi_s$، روابط لازم برای استخراج متغیرهای ترمودینامیکی به‌دست می‌آید که حل آنها به روش تکرار امکان‌پذیر است.

برای مدلی دولایه‌ای شرایط اولیه به‌صورت زیر ساخته می‌شود. ابتدا جت مداری (با $v=0$) به‌صورت تابعی از عرض جغرافیایی ϕ در لایه زبرین ساخته می‌شود:

$$u_1(\phi,0)=\frac{u_{\max}}{e_n}\exp\left[\frac{1}{(\phi-\phi_0)(\phi-\phi_1)}\right] \tag{۱۷}$$

که در آن، $\phi_0<\phi<\phi_1$ و $u_{\max}$ مقدار بیشینه سرعت مداری ۴۰ m/s است، ϕ_1 عرض مرز شمالی جت، ϕ_0

عرض جغرافیایی مرز جنوبی جت و e_n ضریب بهنجارکننده‌ای است که سبب تساوی $u(\phi,0)$ با $u_{\max}$ در مرکز جت می‌شود. با تغییر ϕ_0 و $u_{\max}$، جت با پهنا و شدت متفاوت ساخته می‌شود. پریشیدگی پتانسیل مونتگمری همبسته با جت مداری از حل رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$m_1(\phi,0)=\mu-\int_{-\pi/2}^{\phi}\left\{\begin{array}{l}u_1(\phi',0)\left[fa+u_1(\phi',0)\,\mathrm{tg}\,\phi'\right]\\-\Pi'\dfrac{\mathrm{d}\theta'}{\mathrm{d}\phi'}\end{array}\right\}\mathrm{d}\phi' \qquad (۱۸)$$

که در آن، μ با شرط مقدار صفر برای میانگین m_1 تعیین می‌شود. با فرض آنکه در حالت اولیه لایه زیرین ساکن باشد، پریشیدگی پتانسیل مونتگمری در این لایه صفر می‌شود. ضخامت پریشیدگی اولیه دو لایه با تصویر $\mathbf{m}=(m_1,0)^{\dagger}$ روی فضای مُدهای قائم، ضرب تصویر همبسته با هر مُد قائم در $1/c_{\mathrm{mod}}^2$ مربوط به آن، و سرانجام تصویر مجدد نتایج روی فضای فیزیکی حاصل می‌شود. اطلاعات تکمیلی در مورد ساخت حالت اولیه را می‌توان در محب‌الحجه و دریچل (۲۰۰۷) و میرزایی و همکاران (۲۰۱۲) یافت. صرفا لازم است قید شود که در اینجا شرایط اولیه با روابط توازن $\delta=\gamma=0$ ساخته شده است که منجر به پیدایش مرحله تنظیم (adjustment) بارزی در شروع انتگرال‌گیری می‌شود. هرچند در مقاله فعلی این مرحله تنظیم موردنظر نیست، ولی به‌منزلهٔ بخشی از بررسی کارکرد مدل، دارای اهمیت است.

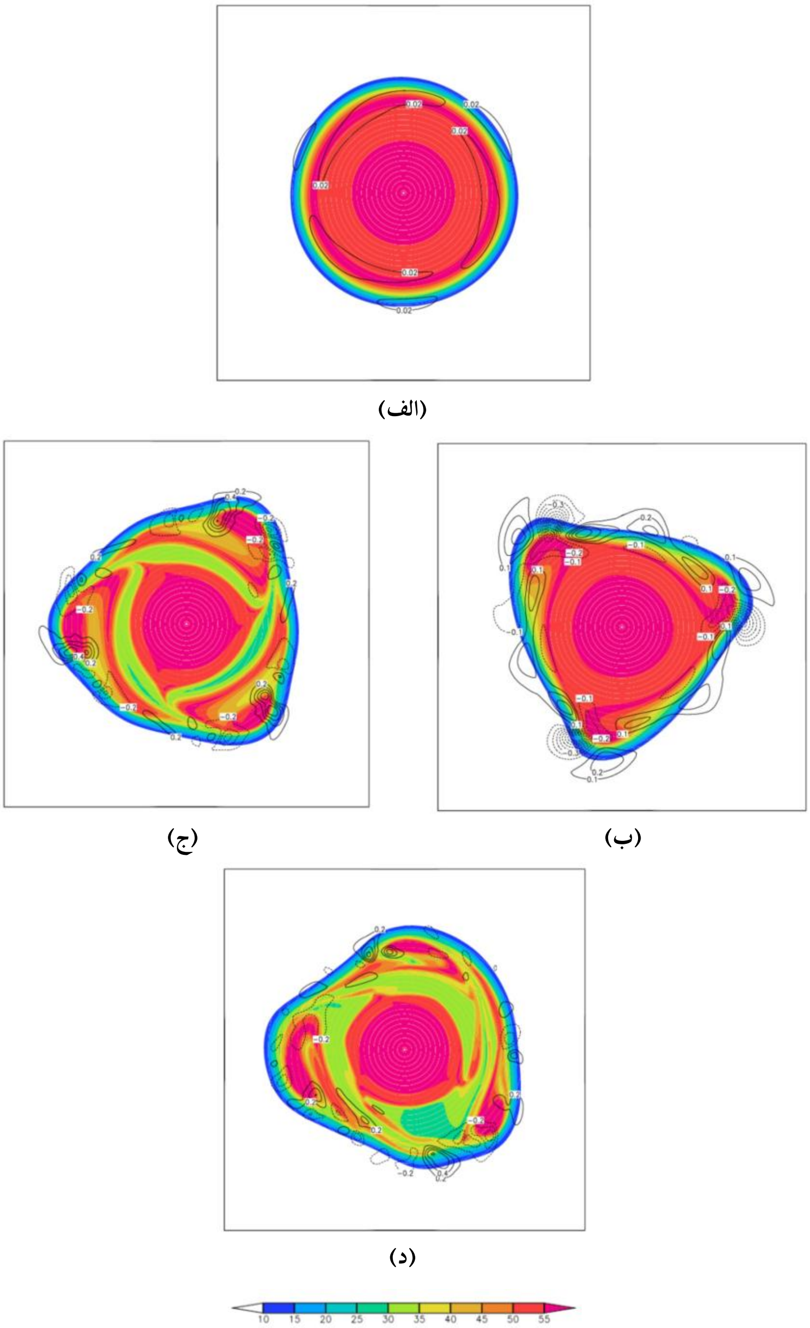
۴ نتایج حل عددی

آزمایش عددی به مدت ۳۰ روز برای ناپایداری کژفشار طراحی و اجرا شده است. همان‌طور که گفته شد برای ایجاد شارشی حدی، حالت پایه بر مبنای آهنگ افت دما با ارتفاع به میزان ۸K/km از $1000\,\mathrm{hPa}$ تا $100\,\mathrm{hPa}$ساخته می‌شود. لازم به ذکر است که آزمون‌های متعددی با مقدارهای کوچک‌تر آهنگ کاهش دما با ارتفاع در حالت پایه برای بررسی کارکرد الگوریتم صورت گرفته است و در اینجا فقط به عرضهٔ نتایج برای شارشی پیچیده با اعداد راسبی و فرود از مرتبه یک اکتفا می‌شود. شکل‌های ۱ و ۲ به‌ترتیب مربوط به تحول زمانی لایه ۱ (لایه زبرین) و لایه دو (لایه زیرین) است. در روز دهم هنوز شارش بیشتر حالت مداری دارد ولی سه مرکز بسته از پربند واگرایی دیده می‌شود (شکل ۱ و ۲–الف). به مرور زمان تا روز پانزدهم شارش با عدد موج مداری سه گسترش یافته و به شکل‌گیری سه موج راسبی می‌انجامد (شکل ۱–ب). به تدریج تا روز بیستم در پایین‌سوی جریان میدان همگرایی تقویت و به شکل‌گیری بسته‌موج‌ها می‌انجامد (شکل ۱–ج). سپس تا روز بیست‌وپنجم همراه با شکست موج راسبی، میدان واگرایی کوچک‌تر می‌شود و این حالت همراه با انتشار بسته‌موج‌ها است (شکل ۱–د).

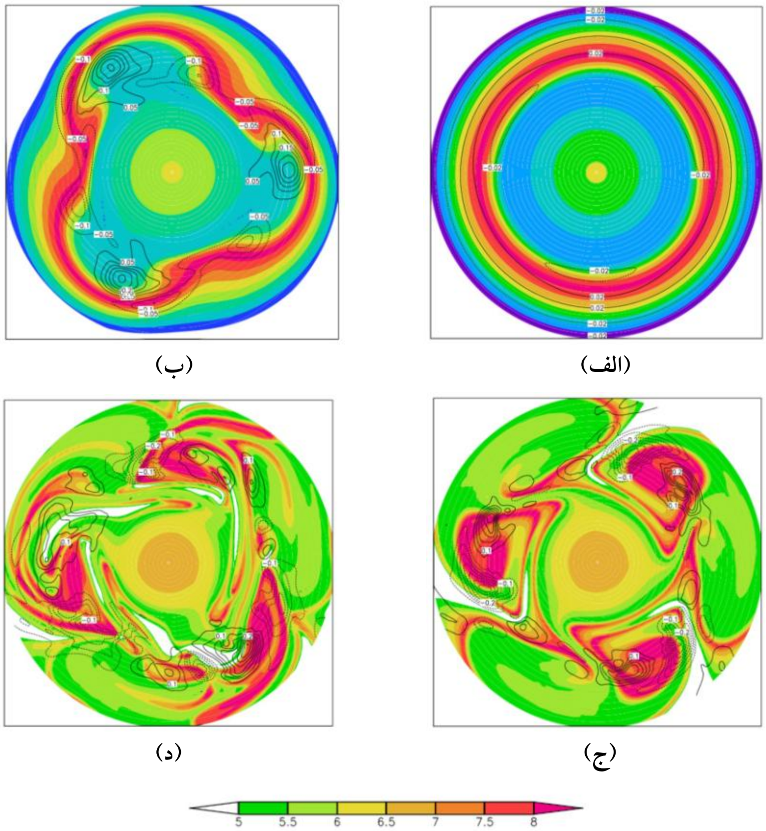
برای روز دهم در لایه زیرین (۲–الف) شاهد شکل‌گیری سه پربند بسته روی میدان واگرایی هستیم که در روز پانزدهم به‌طور کامل اثر آن روی میدان تاوایی پتانسیلی بارز می‌شود. از روز پانزدهم به بعد روند تحول و شکست موج راسبی تا روز آخر انتگرال‌گیری دیده می‌شود. در لایه زیرین همان‌طور که انتظار می‌رود شدت ناپایداری کژفشار کمتر است ولی روند شکل‌گیری این امواج کژفشار و عدد موج آنها مشابه است.

ازآنجاکه بیشینه آهنگ انرژی جنبشی پیچکی در روز ۱۷ام شارش اتفاق می‌افتد (شکل ۳) برای نگاه دقیق‌تر به تحول ناپایداری کژفشار ۱۲ ساعت قبل و بعد از اوج رشد این ناپایداری داده شده است. این تحول با پربندهای واگرایی لایه زبرین به روشنی قابل رویت است. در بالاسوی جریان میدان واگرایی در روز ۱۷ به بیشینه مقدار منفی می‌رسد (شکل ۳–ردیف

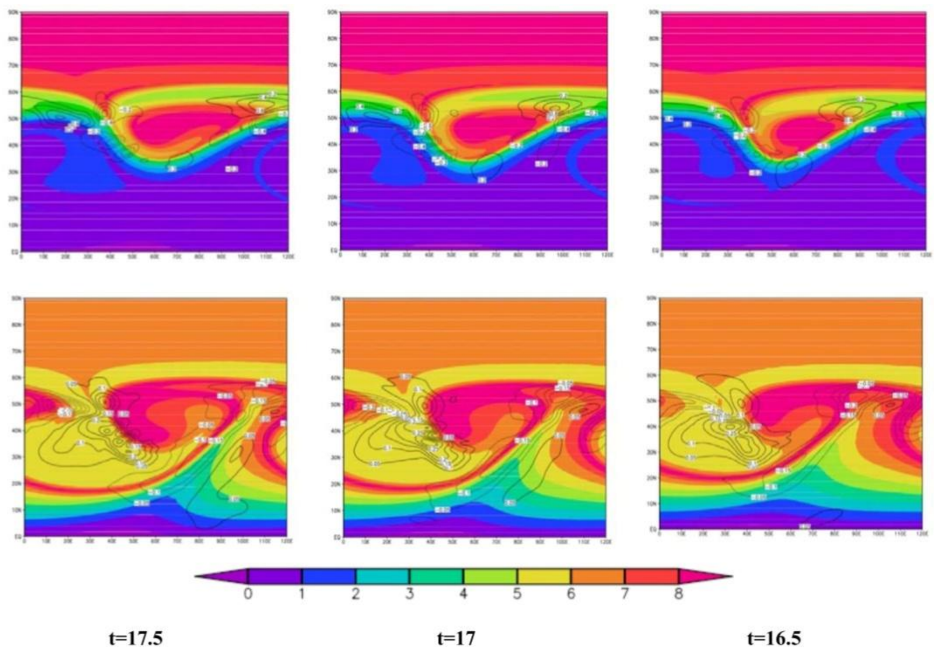
بالا در قسمت میانی) و هم‌زمان در لایه زیرین به بیشینه مقدار مثبت می‌رسد (شکل ۳- ردیف پایین در قسمت میانی). ملاحظه می‌شود که در لایه زبرین در پایین‌دست جریان مقدارهای مثبت و منفی واگرایی به‌طور متوالی وجود دارد در حالی‌که در بالادست جریان فقط میدان منفی واگرایی (همگرایی) دیده می‌شود.



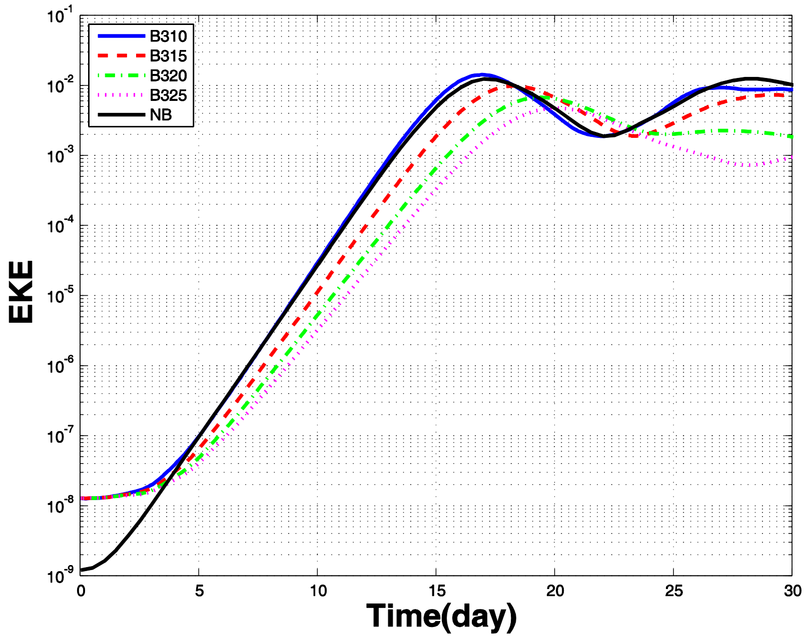
شکل ۱. نمایی از شارش در نیمکره شمالی (سایه برای شبهPV و پربند برای واگرایی) در روزهای (الف) دهم، (ب) پانزدهم، (ج) بیستم و (د) بیست‌وپنجم شارش برای لایه زبرین. برای وضوح مناطق با شبهPV کمتر از ده رسم نشده است.



شکل ۲. مانند شکل ۱ ولی برای لایه زیرین. برای وضوح مناطق با شبهPV کمتر از ۵ رسم نشده است.



شکل ۳. روند تحول ناپایداری کژفشار (شبهPV با سایه و واگرایی با پربند) در روزهای اوج ناپایداری کژفشار به‌ترتیب از راست به چپ ستون اول روز ۱۶,۵، ستون دوم روز ۱۷ (بیشینه انرژی تلاطمی پیچکی) و ستون سوم روز ۱۷,۵ و ردیف بالا مربوط به لایه زبرین و ردیف پایین مربوط به لایه زیرین است.



شکل ٤. روند تحول انرژی جنبشی پیچکی شارش برای ۳۰ روز انتگرال‌گیری مدل نابوسینسک (NB). برای مقایسه، نتایج مدل بوسینسک (B) نیز به‌ازای چهار مقدار دمای پتانسیلی در تراز زبرین متناظر با آزمایش‌های اول تا چهارم میرزایی و همکاران (۱۳۹۰) آورده شده است.

برای مقایسه کمّی شارش با نتایج موجود برای مدل بوسینسک (میرزایی و همکاران، ۱۳۹۰)، در شکل ۴ تغییر زمانی انرژی جنبشی پیچکی (EKE) برای آزمایش حاضر با مدل نابوسینسک در کنار چهار آزمایش عرضه شده در کار میرزایی و همکاران (۱۳۹۰) به‌ازای چهار مقدار دمای پتانسیلی در تراز زبرین آورده شده است. انرژی جنبشی پیچکی به‌صورت انتگرال انرژی جنبشی پریشیدگی روی کره، یعنی $K' = \frac{1}{2}\iint d\lambda d\phi \left[(u')^2 + (v')^2\right](1+\tilde{h})\cos\phi$، تعریف می‌شود که در اینجا u' و v' به‌ترتیب پریشیدگی‌های سرعت مداری و سرعت نصف‌النهاری نسبت به میانگین مداری هستند. همان‌طور که دیده می‌شود، تحول زمانی EKE از روز ۵ به بعد بسیار نزدیک به آزمایش اول مدل بوسینسک با مقدار ۳۱۰ برای دمای پتانسیلی تراز زبرین است. تفاوت EKE بین دو مدل در ۵ روز اول به علت تفاوت آغازگری به کار رفته، توازن $\delta = \gamma = 0$ در اینجا و توازن بولین–چارنی در کار میرزایی و همکاران، است. این نکته به وضوح با توجه به تفاوت اندک آهنگ رشد موج کژفشار σ (که نباید با مختصه قائم اشتباه شود) میان آزمایش حاضر با مقدار $\sigma \simeq$ ۰.۹۷۷ $(\text{day})^{-1}$ و مدل بوسینسک با مقدار $\sigma \simeq$ ۰.۹۹۷ $(\text{day})^{-1}$ به‌ازای $\theta = 310\,\text{K}$ در تراز زبرین مشخص می‌شود. در اینجا آهنگ رشد با رابطه $\sigma = \log(K'_{max} / K'_t)/(t_{max} - t)$ (بجر و هاسکینز، ۲۰۰۱) به‌ازای K'_{max} و K'_t به‌ترتیب مقدار EKE در زمان قله ناپایداری و زمانی مناسب در پیش از رسیدن به قله، تعیین شده است. برای این کار، با توجه به همگرایی نمودارهای EKE برای آزمایش حاضر و مدل بوسینسک با $\theta = 310\,\text{K}$ در تراز زبرین در زمان $t = 5$ روز، این مقدار برای t در رابطه آهنگ رشد به کار رفته است.

۵ نتیجه‌گیری

مراحل اساسی توسعه مدل موجود برای معادلات هیدروستاتیک بوسینسک بر مبنای متغیرهای پیش‌یابی تاوایی پتانسیلی، واگرایی سرعت و واگرایی شتاب به

معادلات نابوسینسک عرضه شد. نتایج اولیه از اجرای مدل به‌صورت دولایه‌ای در آزمون ناپایداری جت کژفشار به‌صورت حدی با مقدارهای از مرتبه یک عددهای راسبی و فرود نشان از توانایی مدل در نمایش موفقیت‌آمیز هر دو بخش تاواری و گرانی‌لختی شارش‌های پیچیده دارد. در نتایج آزمون عددی داده شده، گسترش و توسعه امواج راسبی همراه با شکل‌گیری بسته موج‌هایی در جریان‌سو و پادجریان‌سوی ناوه است که شباهت‌ها و تفاوت‌هایی کلی با نتایج مدل بوسینسک (میرزایی و همکاران، ۱۳۹۰، ۱۳۹۱ و ۲۰۱۲) را نشان می‌دهد، هر چند که به علت تفاوت در مختصه قائم و نیز مُدهای قائم، مقایسه دقیق با نتایج موجود مدل بوسینسک امکان‌پذیر نیست. درحالی‌که در پژوهش میرزایی و همکاران میدان واگرایی نامتوازن به‌طور متقارن حول منطقه با گرادیان افقی تاوایی پتانسیلی شکل می‌گیرد (برای نمونه به شکل‌های ۶ و ۸ میرزایی و همکاران ۱۳۹۰ مراجعه شود)، در مدل نابوسینسک حاضر میدان واگرایی به‌صورت پربندهای مثبت و منفی به‌طور پشت سر هم در راستای طول جغرافیایی در امتداد منطقه با گرادیان تاوایی پتانسیلی شکل می‌گیرد (شکل‌های ۱ و ۳).

به تشابه با مدل بوسینسک، نتایج حاصل از میدان واگرایی حاکی از شکل‌گیری و انتشار دو بسته‌موج در پادجریان‌سو و جریان‌سوی ناوه است. موقعیت بسته‌موج جریان‌سو مشابه بسته موج ژنگ (۲۰۰۴) و همچنین آزمایش اول عرضه شده در میرزایی و همکاران (۱۳۹۰) است. بسته موج پادجریان‌سو نیز مشابه بسته‌موج پلوگونون و اسنایدر (۲۰۰۷) و همچنین مجدداً آزمایش اول میرزایی و همکاران (۱۳۹۰) است. ازاین‌رو آزمون اجرا شده با هسته دینامیکی نابوسینسک، مشابه مدل بوسینسک با درجه کژفشاری زیاد رفتار می‌کند.

به دنبال این پژوهش، در نظر است با مدل آزمون‌هایی در شرایطی واقعی‌تر با تعداد زیادی تراز صورت گیرد. یابلونوسکی و ویلیامسون (۲۰۰۶) آزمونی برای این امر طراحی کرده‌اند که اجرای موفق آن به معنای تکمیل هسته دینامیکی برمبنای تاوایی پتانسیلی خواهد بود. برای این منظور پارامترسازی اثرات ناپایستار به‌صورت ساده مالش ریلی در ترازهای زیرین نزدیک سطح زمین و سرمایش نیوتنی در ترازهای بالاتر به مدل افزوده خواهد شد. انتظار می‌رود که این کار به پایداری محاسباتی مدل در هنگامی که ضخامت لایه‌ها کوچک می‌شود کمک کند.

تشکر و قدردانی

از آقای دکتر محمد میرزایی برای یاری در تولید شکل‌ها و کارهای پس پردازش صمیمانه قدردانی می‌شود.

مراجع

جغتایی، م.، محب‌الحجه، ع. ر. و بیدختی، ع. ع.، ۱۳۹۱، توازن و امواج گرانی‌لختی در یک مدل کژفشار دولایه‌ای، م. فیزیک زمین و فضا، **۳۸**(۳)، ۱۸۹–۲۰۱.

میرزایی، م.، محب‌الحجه، ع. ر. و احمدی‌گیوی، ف.، ۱۳۹۰، حساسیت تولید امواج گرانی–لختی به درجه کژفشاری در مدل دولایه‌ای روی کره، م. ژئوفیزیک ایران، **۵**(۱)، ۱۰۹–۱۲۳.

میرزایی، م.، محب‌الحجه، ع. ر. و احمدی‌گیوی، ف.، ۱۳۹۱، شکست توازن و تولید امواج گرانی‌لختی در مدل دولایه‌ای روی کره، م. فیزیک زمین و فضا، **۳۸**(۱)، ۲۴۱–۲۵۷.

Badger, J. and Hoskins, B. J., 2001, Simple initial value problems and mechanisms for baroclinic growth,. J. Atmos. Sci., **58**, 38-49.

Bates, J. R., Li, Y., Brandt, A., McCormick, S. F. and J. Ruge, 1995, A global shallow-water numerical model based on the semi-Lagrangian advection of potential vorticity, Q. J. R. Meteorol. Soc., **121**, 1981-2005.

Charney, J. G., 1962, Integration of the primitive and balance equations. in: proceedings of the international symposium on numerical weather prediction. Tokyo, Nov. 1960, plane shallow-water equations, J. Atmos. Sci., **58**, 2411-2426.

Mohebalhojeh, A. R. and Dritschel, D. G., 2004, Contour-advective semi-Lagrangian algorithms for many-layer primitive-equation models, Q. J. R. Meteor. Soc., **130**, 347-364.

Mohebalhojeh, A. R. and Dritschel, D. G., 2007, Assessing the numerical accuracy of complex spherical shallow water flows, Mon. Wea. Rev., **135,** 3876-3894.

Mohebalhojeh, A. R. and Dritschel, D. G., 2009, The diabatic contour advective semi-Lagrangian algorithms for the spherical shallow water equations, Mon. Wea. Rev., **137,** 2979-2994**.**

Plougonven, R. and Snyder, C., 2007, Inertia gravity waves spontaneously generated by jets and fronts, part I: different baroclinic life cycles, J. Atmos. Sci., **64**, 2502-2520.

Simmons, A. J. and Burridge, D. M., 1981, Energy and angular-momentum conserving vertical finite-difference scheme and hybrid vertical coordinates, Mon. Wea. Rev., **109**, 758-766.

Temperton, C. and Williamson, D. L., 1981, Normal mode initialization for a multilevel grid-point model, part I: linear aspects, Mon. Wea. Rev., **109**, 729-743.

Temperton, C., 1984, Orthogonal vertical modes for a multilevel model, Mon. Wea. Rev., **112**, 503-509.

Zhang, F., 2004, Generation of mesoscale gravity waves in the upper-tropospheric jet front systems, J. Atmos.Sci., 61, 440–457.

Meteorological Society of Japan.

Dritschel, D. G. and Ambaum, M. H. P., 2006, The diabatic contour advective semi-Lagrangian model, Mon. Wea. Rev., **134**, 2503-2514.

Hoskins, B. J., McIntyre, M. E. and Robertson, A. W., 1985, On the use and significance of isentropic potential vorticity maps, Q. J. R. Meteorol. Soc., **111**, 877-946.

Jablonowski, C. and Williamson, D. L., 2006, A baroclinic instability test case for atmospheric model dynamical cores, Q. J. R. Meteorol. Soc., **132**, 2943-2975.

Kasahara, A., 1974, Various vertical coordinate systems used for numerical weather prediction, Mon. Wea. Rev., **102**, 509-522.

Konor, C. S. and Arakawa, A., 1997, Design of an atmospheric model based on a generalized vertical coordinate, Mon. Wea. Rev., **125**, 1649-1673.

Li, Y. and Bates, J. R., 1996, A study of the behaviour of semi-Lagrangian models in the presence of orography, Quart. J. R. Met. Soc. **122**, 1675-1700.

Li, Y., Ruge, J., Bates, J. R. and Brandt, A., 2000, A proposed adiabatic formulation of 3-dimensional global atmospheric models based on potential vorticity, Tellus, **52**, 129-139.

Mirzaei, M., Mohebalhojeh, A. R. and Ahmadi-Givi, F., 2012, On imbalance generated by vertical flows in a two-layer spherical Boussinesq primitive equation model, J. Atmos. Sci., **69**, 2819-2834.

Mohebalhojeh, A. R. and Dritschel, D. G., 2001, Hierarchies of balance conditions for the f-