ن. فیزیک زمین و فضا، جلد ۳۰، شماره ۱، ۱۳۸۳، صفحه ۳۷- ۴۷

نمایش شارش‌های تاواری و امواج گرانی در الگوریتم‌های حل عددی معادلات بسیط فشارورد منطقه‌ای

علیرضا محب‌الحجه* و رباب مشایخی*

*موسسهٔ ژئوفیزیک دانشگاه تهران، صندوق پستی ۶۴۶۶-۱۴۱۵۵

(دریافت مقاله: ۸۳/۳/۴ ، پذیرش مقاله: ۸۳/۴/۱۶)

چکیده

برای بررسی کمی و کیفی جواب‌های الگوریتم‌های حل عددی معادلات بسیط فشارورد، مقایسه با رفتار جو واقعی نمی‌تواند ملاک اصلی یا حداقل تنها ملاک در تعیین دقت الگوریتم‌ها قرار گیرد. این حکم به‌ویژه در کاربست به منطقه محدود که شرایط مرزی بر پیچیدگی تعیین جواب مطلوب می‌افزایند صادق است. این پیچیدگی حاصل درآمیختگی خطای مدل بسیط فشارورد، خطای خود الگوریتم و خطای وارد در چگونگی خوراند داده‌ها است. بر این مبنا لازم است دانش دینامیکی از رفتار جواب‌های معادلات بسیط فشارورد یا معادلات آب کم‌عمق در تعیین دقت الگوریتم‌های عددی هر چه بیشتر به خدمت گرفته شود. یکی از رهیافت‌های مفید، مطالعه بخش‌های متوازن (تاواری) و نامتوازن (امواج گرانی) و برهم‌کنش‌های آنهاست. برغم محدودیت‌هایی که کار روی جو واقعی ایجاد می‌کند، اطلاعات مفیدی را می‌توان از چنین مطالعه‌ای به دست آورد. با توجه به این هدف، این مقاله به مطالعه رفتار زمانی - مکانی بخش‌های متوازن و نامتوازن سه الگوریتم عددی برای معادلات بسیط فشارود منطقه‌ای اختصاص دارد. این سه الگوریتم عبارت‌اند از الگوریتم اویلری دارای پایستاری آنتروفی پتانسیلی سادورنی (۱۹۷۵) و دو الگوریتم مشتق از آن بر مبنای تغییر متغیرهای پیشیافتی از مؤلفه‌های تکانه- ارتفاع ژئوپتانسیلی به (۱) تاوایی پتانسیلی راسبی، واگرایی و ارتفاع ژئوپتانسیلی و (۲) تاوایی پتانسیلی راسبی، واگرایی و تاوایی غیرزمین‌گرد. در دو الگوریتم اخیر حل تاوایی پتانسیلی با یک روش استاندارد نیمه لاگرانژی با استفاده از درون‌یابی دومکعبی قطعه‌ای انجام می‌شود و حل دو معادله پیشیافتی دیگر بر مبنای الگوریتم سادورنی برای مؤلفه‌های تکانه- ارتفاع ژئوپتانسیلی به دست می‌آید. نسبت به الگوریتم اویلری، الگوریتم‌های بر مبنای تاوایی پتانسیلی مهارت بیشتری را در نمایش درست هر دو بخش متوازن و نامتوازن نشان می‌دهند.

کلیدواژه‌ها: بسیط فشارورد، الگوریتم عددی، توازن، تاوایی پتانسیلی، بخش‌های متوازن و نامتوازن، امواج گرانی

۱ مقدمه

به دلیل ماهیت غیر خطی و در دسترس نبودن حل تحلیلی برای معادلات بسیط، تحلیل کیفیت جواب‌های حاصل از یک الگوریتم عددی امری بسیار دشوار است. ساده‌ترین رهیافت یعنی مقایسه با واقعیت خالی از اشکال نیست، چرا که خطای مدل و خطای وارد در خوراند داده‌ها (data assimilation) با خطای الگوریتم درآمیخته و جداسازی آن‌ها دشوار می‌شود. بهره‌گیری از دانش دینامیکی بر مبنای تجزیه شارش به بخش‌های متوازن تاواری (vortical) و نامتوازن رهیافت قدرتمندی را برای تحلیل کارکرد الگوریتم‌های عددی فراهم می‌کند. این تجزیه که به تجزیه موج - تاوه (wave - vortex decomposition) موسوم شده با استفاده از وارون‌سازی میدان تاوایی پتانسیلی راسبی- ارتل یا صورتی تقریبی به انجام می‌رسد. وارون‌سازی، خود مبتنی بر شرایط توازن مناسب است (هاسکینز و همکاران ۱۹۸۵، مک اینتایر و نورتن ۲۰۰۰، محب الحجه و دریچل ۲۰۰۰ و ۲۰۰۱، محب الحجه ۲۰۰۲). این مقاله اختصاص به بررسی کارکرد سه الگوریتم عددی برای معادلات بسیط فشارورد منطقه‌ای با مطالعهٔ رفتار زمانی- مکانی بخش‌های متوازن و نامتوازن در طی انتگرال‌گیری‌های ۴۸ ساعته با استفاده از داده‌های جهانی AVN دارد.

۲ فرمول‌بندی

مدل فیزیکی متناظر با معادلات بسیط فشارورد، مدل آب کم‌عمق چرخان است که تقریب خوبی برای حرکت‌های بزرگ‌مقیاس شاره‌های ژئوفیزیکی به‌دست می‌دهد. در

مدل‌سازی جو، این معادلات می‌توانند بیانگر میانگین قائم حرکت‌های افقی جو در مقیاس بزرگ باشند. چون تراز ۵۰۰ hPa از نظر جرمی در میانه جو است، مدل آب کم‌عمق با استفاده از ارتفاع ژئوپتانسیلی و میدان باد افقی این تراز ساخته می‌شود. صورت ناوردای معادلات بسیط فشارورد یا آب کم‌عمق بدون وارد کردن توپوگرافی چنین است (هالتینر - ویلیامز، ۱۹۸۰):

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -(\zeta + f)\hat{K} \times V - \nabla(\Phi + \frac{V \cdot V}{2}) \qquad (۱)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\nabla \cdot (\Phi V) \qquad (۲)$$

که در آن V سرعت، ζ تاوایی نسبی ، f تاوایی سیاره‌ای، Φ ژئو پتانسیل و $\hat{K}$ بردار یکانی در راستای قائم محلی است. معادلات تکانه (۱) و پیوستگی جرم (۲) را به صورت نرده‌ای در دستگاه مختصات دکارتی بنا شده بر هر نقشهٔ دارای تصویر همدیس (conformal projection) می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (f + \zeta)v - m\frac{\partial}{\partial x}\left[\Phi + \frac{1}{2}(u^2 + v^2)\right] \qquad (۳)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -(f + \zeta)u - m\frac{\partial}{\partial y}\left[\Phi + \frac{1}{2}(u^2 + v^2)\right] \qquad (۴)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -m^2\left[\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\Phi u}{m}) + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\Phi v}{m})\right] \qquad (۵)$$

که در آن u و v مؤلفه‌های بردار باد در امتداد محورهای x و y و m فاکتور نقشه است. با تغییر متغیر $U = u/m$ و $V = v/m$ می‌توان معادلات فوق را به شکلی مناسب‌تر نوشت به‌طوری‌که در آن m فقط به صورت مربعی ظاهر شود.

$$\frac{\partial U}{\partial t} = (f + \zeta)V - \frac{\partial}{\partial x}\left[\Phi + \frac{1}{2}m^2(U^2 + V^2)\right] \qquad (۶)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -(f + \zeta)U - \frac{\partial}{\partial y}\left[\Phi + \frac{1}{2}m^2(U^2 + V^2)\right] \qquad (۷)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -m^2\left[\frac{\partial}{\partial x}(\Phi U) + \frac{\partial}{\partial y}(\Phi V)\right] \qquad (۸)$$

تاوایی نسبی ζ و واگرایی D به‌صورت زیر مشخص می‌شوند:

$$\zeta = m^2(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}) \qquad (۹)$$

$$D = m^2(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}) \qquad (۱۰)$$

معادلات تاوایی و واگرایی به‌آسانی از روی معادلات (۶) و (۷) به‌دست می‌آید:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -m^2(U\frac{\partial}{\partial x} + V\frac{\partial}{\partial y})(f + \zeta) - (f + \zeta)D \qquad (۱۱)$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \gamma + m^2(V\frac{\partial}{\partial x} - U\frac{\partial}{\partial y})(f + \zeta) + \zeta^2 - m^2\nabla^2\left[\frac{1}{2}m^2(U^2 + V^2)\right] \qquad (۱۲)$$

که در این روابط $\gamma \equiv (f\zeta - m^2\nabla^2\Phi)$ و $\nabla^2 = (\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})$ است. نهایتاً با ترکیب معادلات تاوایی و پیوستگی می‌توان معادله پایستاری تاوایی پتانسیلی راسبی q به دنبال ذرات شاره را به دست آورد.

$$\frac{Dq}{Dt} = 0 \quad \text{و} \quad q \equiv \frac{f + \zeta}{Z} \qquad (۱۳)$$

که در آن:

$$\frac{D}{Dt} \equiv (\frac{\partial}{\partial t} + m^2U\frac{\partial}{\partial x} + m^2V\frac{\partial}{\partial y}) \qquad (۱۴)$$

و در تعریف تاوایی پتانسیلی مطابق مرسوم از ارتفاع ژئوپتانسیلی Z به جای $\Phi = gZ$ استفاده شده است.

۳ الگوریتم اویلری

الگوریتم اویلری مورد استفاده در این‌جا بر مبنای فرمول‌بندی تفاضل متناهی دارای پایستاری آنزتروفی

پتانسیلی سادورنی (۱۹۷۵) است. لازم به ذکر است که پایستاری آنتروفی پتانسیلی فقط در حالت پیوسته زمانی و وقتی سهم شارهای مرزی همدیگر را خنثی می‌کنند، برقرار است. گسسته سازی زمانی و شرایط مرزی می‌توانند خاصیت پایستاری را تا حدی بر هم زنند. در این‌جا الگوریتم اویلری و دیگر الگوریتم‌های معرفی شده روی شبکه‌ای دکارتی بر روی نقشه استریوگرافیک با صفحهٔ تصویر در $60^0 N$ پیاده می‌شوند. برای بررسی حساسیت نسبت به تفکیک فضایی، در همان حوزه روی نقشه از چند فاصلهٔ شبکه‌ای استفاده می‌کنیم. برای معرفی تفکیک فضایی، به فاصله شبکه‌ای روی صفحه تصویر اشاره می‌کنیم. متغیرهای الگوریتم عددی به صورت شبکه C آراکاوا چیده می‌شوند به طوری که روی مرزها Z و مؤلفهٔ مماسی میدان سرعت قرار گیرد. در مرزها مؤلفهٔ کمکی عمود بر مرز قرار داده می‌شوند. این مؤلفه‌ها دو منظور عمده را برآورد می‌کنند: یکی امکان حل معادلات u و v در نیم‌فاصله شبکه‌ای به درون و دیگری تنظیم شرایط مرزی بر مبنای "درون‌شارش" یا "برون‌شارش" بودن نقطه مرزی.

۳-۱ طرحواره فضایی

معادلات (۶)، (۷) و (۸) را به‌صورت زیر نیز می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = q\underline{V} - \frac{\partial}{\partial x}\left[gZ + \frac{1}{2}m^2(U^2+V^2)\right] \qquad (۱۵)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -q\underline{U} - \frac{\partial}{\partial y}\left[gZ + \frac{1}{2}m^2(U^2+V^2)\right] \qquad (۱۶)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = -m^2\left[\frac{\partial}{\partial x}(\underline{U}) + \frac{\partial}{\partial y}(\underline{V})\right] \qquad (۱۷)$$

که در آن Z ارتفاع ژئو پتانسیلی و $\underline{U}$ و $\underline{V}$ معرف به‌ترتیب شارهای جرم در دو راستای x و y یعنی $\underline{U} = U\overline{Z}^x$ و $\underline{V} = V\overline{Z}^y$ هستند. طرحواره تفاضل متناهی دارای پایستاری آنتروفی پتانسیلی سادورنی بر مبنای معادلات (۱۵)، (۱۶) و (۱۷) چنین نوشته می‌شود:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \overline{q}^y\,\overline{\underline{V}}^{xy} - \delta_x\left[\, gZ + \frac{1}{2}m_u^2 \times (\overline{U^2}^x + \overline{V^2}^y)\,\right] \qquad (۱۸)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -\overline{q}^x\,\overline{\underline{U}}^{xy} - \delta_y\left[\, gZ + \frac{1}{2}m_v^2 \times (\overline{U^2}^x + \overline{V^2}^y)\,\right] \qquad (۱۹)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = -m_z^2(\delta_x\underline{U} + \delta_y\underline{V}) \qquad (۲۰)$$

که در آن m_u، m_v و m_z به‌ترتیب مقادیر فاکتور نقشه در نقاط u، v و Z هستند. عملگرهای متوسط‌گیری و تفاضل‌گیری برای تابع کلی X در نقطه (x,y) به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\overline{X}^x(x,y) = \frac{X(x+\Delta x/2,y) + X(x-\Delta x/2,y)}{2}$$

$$\overline{X}^y(x,y) = \frac{X(x,y+\Delta y/2) + X(x,y-\Delta y/2)}{2}$$

$$\delta_x X(x,y) = \frac{X(x+\Delta x/2,y) - X(x-\Delta x/2,y)}{\Delta x}$$

$$\delta_y X(x,y) = \frac{X(x,y+\Delta y/2) - X(x,y-\Delta y/2)}{\Delta y}$$

۳-۲ طرحواره زمانی

برای تفاضل‌گیری معادلات (۱۸)، (۱۹) و (۲۰) از طرحواره لیپفراگ که طرحواره‌ای صریح و سه‌ترازی است، استفاده می‌کنیم. به علاوه برای مهار مد محاسباتی طرحوارهٔ لیپفراگ از صافی زمانی روبر- اسلین با ضریب ۰/۱ استفاده می‌کنیم.

۳-۳ شرایط مرزی

شرایط مرزی در دستگاه معادلات هذلولی وضع پیچیده‌ای دارد. تحلیل جامعی از مسایل عمده مربوط به شرایط مرزی در مسایل دینامیک شاره‌ها و از جمله معادلات آب

کم‌عمق را می‌توان در اولیگر و ساندستروم (۱۹۷۸)، الویوس و ساندستروم (۱۹۷۳)، استریکوردا (۱۹۸۹)، آراکاوا (۱۹۸۴) و ساندستروم و الویوس (۱۹۷۹) یافت. چنانچه شرایط مرزی منجر به جواب یکتایی شود که به‌طور پیوسته به شرایط مرزی وابسته باشد، در اصطلاح گفته می‌شود که مسئله یعنی مجموع دستگاه معادلات و شرایط مرزی خوش وضع هستند. برای مسائل هذلولی، به‌طور کلی در صورت شناخت متغیرهای مشخصه، می‌توان در یک نقطهٔ مرزی مشخصه‌های منتشر شونده به درون را تصریح و مشخصه‌های برون‌رونده را با برونیابی مشخصه یا شرایط مرزی تابشی تعیین کرد. برای دستگاه معادلات غیر خطی در دست، چون متغیرهای مشخصه معلوم نیستند امکان استفاده درست از این فن وجود ندارد. به‌علاوه وجود طیفی از امواج راسبی و گرانی- لختی که با تندی‌های فاز متفاوتی در هر دو راستا منتشر می‌شوند، تحلیل مساله را دشوار می‌کند. گسسته‌سازی زمانی که معمولاً منجر به پیدایش "شرایط مرزی عددی" می‌شود، وضع را پیچیده‌تر می‌کند. مثلاً استریکوردا (۱۹۸۹) نشان می‌دهد که برونیابی خطی فضایی در زمان آینده یعنی گام n+1، برای معادلهٔ فرارفت خطی با سرعت ثابت در یک بعد

$$v_M^{n+1} = 2v_{M-1}^{n+1} - v_{M-2}^{n+1} \qquad (۲۱)$$

برای طرحوارهٔ لیپفراگ ناپایداری ایجاد می‌کند در حالی که با طرحواره کرنک- نیکلسون پایدار است. در معادله (۲۱) اندیس M نشانگر نقطه مرزی است. اولیگر و ساندستروم (۱۹۷۸) با تحلیل مساله دیفرانسیلی بر مبنای معادلات خطی شده وردش نسبت به یک حل مفروض و استفاده از روش انرژی، خانواده‌ای از شرایط مرزی خوش وضع برای معادلات آب کم‌عمق به ازای شرایط مرزی باز ارائه می‌دهند. از میان این خانواده، پس از آزمایش‌های عددی متعدد تصریح ارتفاع ژئوپتانسیلی در تمام نقاط مرزی، تصریح مؤلفه‌های سرعت در نقاط درون‌شارش و برون‌یابی مشخصه برای مؤلفه‌های سرعت در نقاط برون‌شارش به‌دلیل ایجاد کم‌ترین نوفه در حل عددی به‌مثابهٔ شرایط مرزی انتخاب شدند. در این‌جا منظور از تصریح یک متغیر، ثابت نگه‌داشتن آن است. چون در مورد معادله فرارفت خطی در یک‌بعد شرط مرزی عددی

$$v_M^{n+1} = v_{M-1}^{n} \qquad (۲۲)$$

برای طرحواره لیپفراگ پایدار است (استریکوردا، ۱۹۸۹)، برون‌یابی مشخصه در نقاط برون‌شارش بر مبنای این رابطه انجام گرفته است. برای ارجاع، این الگوریتم را $Eu_{V,Z}$ می‌نامیم.

۴ الگوریتم بر مبنای PV، واگرایی و ارتفاع ژئوپتانسیلی

متغیرهای پیش‌یافتی (prognostic) در این الگوریتم، تاوایی پتانسیلی (q)، واگرایی (D) و ارتفاع ژئوپتانسیلی (Z) هستند. معادله پایستاری q به دنبال ذرات، یعنی (۱۳) با روش نیمه لاگرانژی استاندارد بر مبنای محاسبهٔ نقطه میانی مسیرهای پس‌سو، درون‌یابی قطعه‌ای دو خطی برای میدان سرعت و درونیابی قطعه‌ای دومکعبی لاگرانژی حل می‌شود. برای واگرایی به جای گسسته‌سازی معادلهٔ (۱۲)، واگرایی معادلات گسسته برای مؤلفه‌های گرایش زمانی تکانه در الگوریتم اویلری یعنی معادلات (۱۸) و (۱۹) را محاسبه کرده و $\frac{\partial \delta}{\partial t}$ را تعیین می‌کنیم. به عبارت دقیق‌تر در شبکه C آراکاوا، D را در نقاط Z قرار می‌دهیم و گرایش آن را از روی

$$\frac{\partial D}{\partial t} = m^2\left[\delta_x\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right) + \delta_y\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)\right] \qquad (۲۳)$$

محاسبه می‌کنیم. ارتفاع ژئوپتانسیلی همانند الگوریتم اویلری حل می‌شود. به‌این‌ترتیب، این الگوریتم روش حل میدان‌های واگرایی و ارتفاع ژئوپتانسیلی را از الگوریتم اویلری می‌گیرد. میدان سرعت به صورت فرایافتی از روی

میدان‌های تاوایی و واگرایی به شرح زیر تعیین می‌شود. با در اختیار داشتن q، D و Z ابتدا تاوایی نسبی از روی $\zeta = \overline{Z}^{xy}q - f$ در نقاط ζ در شبکهٔ C آراکاوا محاسبه و با استفاده از درون‌یابی قطعه‌ای دومکعبی لاگرانژی به نقاط Z شبکه برده می‌شود. با در دست داشتن ζ و D در نقاط Z می‌توان معادلات پواسون زیر

$$m^2\nabla^2\psi = \zeta \tag{۲۴}$$

$$m^2\nabla^2\chi = D \tag{۲۵}$$

را برای یافتن تابع جریان ψ و پتانسیل سرعت χ در نقاط Z حل کرد. در حل معادلات (۲۴) و (۲۵) برای ψ و χ از شرایط مرزی دیریکله استفاده می‌شود. برای این منظور از مقادیر مرزی ψ و χ در ابتدای انتگرال‌گیری، پس از آغازگری استفاده می‌شود. به‌عبارت دقیق‌تر ψ و χ روی مرز مقادیر ثابت اولیه خود، ψ_0 و χ_0 را اختیار می‌کنند که با حل معادلات پواسون (۲۴) و (۲۵) با شرایط مرزی نویمان

$$U_0 = -\frac{\partial\psi_0}{\partial y} + \frac{\partial\chi_0}{\partial x} \tag{۲۶}$$

$$V_0 = \frac{\partial\psi_0}{\partial x} + \frac{\partial\chi_0}{\partial y} \tag{۲۷}$$

به‌دست می‌آیند. لازم به ذکر است که با در اختیار داشتن ψ_0 و χ_0 می‌توان در زمان‌های بعد در حل معادلات (۲۴) و (۲۵) از شرایط مرزی نویمان و مخلوط دیریکله-نویمان نیز استفاده کرد. برای مثال استفاده از شرایط مرزی مخلوط دیریکله- نویمان در حل معادله (۲۴) با کاربست $\alpha\psi + \beta\partial\psi/\partial n = \alpha\psi_0 + \beta\partial\psi_0/\partial n$ روی مرزها انجام می‌گیرد که در آن ∂n معرف مشتق‌گیری در راستای عمود بر مرز است و α و β ثابت‌هایی اختیاری‌اند. گر چه شرایط مرزی نویمان یا مخلوط دیریکله- نویمان منجر به افزایش حجم محاسباتی می‌شوند با توجه به حساسیت‌های مشاهده شده به شرایط مرزی در قسمت ۶، به نظر می‌رسد آزمایش ترکیب‌های مختلفی از شرایط مرزی ذکر شده به دستیابی به بهترین شرایط مرزی ممکن کمک کند.

آنگاه تابع جریان در نقاط q با متوسط ψ روی چهار نقطهٔ Z اطراف تعیین می‌شود. سرانجام از روی ψ در نقاط q و χ در نقاط Z، میدان سرعت با تفاضل‌گیری متناهی

$$U = -\delta_y\psi + \delta_x\chi \tag{۲۸}$$

$$V = \delta_x\psi + \delta_y\chi \tag{۲۹}$$

تعیین می‌شود. در هر گام زمانی مقادیر U و V روی مرزها نیز با مشتق‌گیری‌های یک‌طرفه تغییر داده می‌شود. آزمایش‌های عددی نشان از اثر محسوس این تغییر مقادیر مرزی در بهبود جواب در سراسر حوزه و به‌ویژه در مجاورت مرزها دارد. برای ارجاع در قسمت‌های بعدی این الگوریتم را $SL_{D,Z}$ می‌نامیم. در این نام‌گذاری SL به روش نیمه لاگرانژی به کار رفته برای فرارفت تاوایی پتانسیلی و (D,Z) به متغیرهای پیشیافتی اشاره دارند.

۵ الگوریتم بر مبنای تاوایی پتانسیلی، واگرایی و تاوایی غیرزمین‌گرد

متغیرهای پیش‌یافتی در این الگوریتم، تاوایی پتانسیلی q، واگرایی D و تاوایی غیرزمین‌گرد ضربدر f، یعنی γ هستند. معادله حاکم بر γ چنین است :

$$\frac{\partial\gamma}{\partial t} = f\frac{\partial\zeta}{\partial t} - m^2\nabla^2\frac{\partial\Phi}{\partial t} \tag{۳۰}$$

$$= \mathrm{H}(D) + f\left[-m^2\left(U\frac{\partial}{\partial x} + V\frac{\partial}{\partial y}\right)\times(f+\zeta) - \zeta D\right] + m^2\nabla^2\left\{m^2\times\left[\frac{\partial}{\partial x}(\Phi' U) + \frac{\partial}{\partial y}(\Phi' V)\right]\right\} \tag{۳۱}$$

که در آن $H \equiv \overline{\Phi}m^2\nabla^2 - f^2$، عملگر هلمهولتز پیراسته است. در این‌جا ژئوپتانسیل را به صورت $\Phi = \overline{\Phi} + \Phi'$

تجزیه کرده‌ایم. دراین‌جا $\overline{\Phi}$ مقدار میانگین مستقل از زمان برای ژئوپتانسیل روی حوزه و Φ'، پریشیدگی ژئوپتانسیل نسبت به $\overline{\Phi}$ است. معادلهٔ (۳۱) دارای صورت مناسبی برای فرمول‌بندی یک حل نیمه‌ضمنی در ترکیب با معادله واگرایی (۱۲) است. در این‌جا برای سادگی و مقایسه بهتر با الگوریتم اویلری، ازمعادله (۳۰) بر مبنای طرح‌واره اویلری برای گرایش‌های زمانی تاوایی

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = m^2\left[\delta_x\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right) - \delta_y\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)\right] \qquad (۳۲)$$

و ژئوپتانسیل یعنی معادله (۲۰) استفاده کرده‌ایم. معادله فرایافتی برای میدان ژئوپتانسیل و در نتیجه ارتفاع ژئوپتانسیلی، با حذف ζ بین تعریف‌های q و γ به‌دست می‌آید:

$$(m^2 g\nabla^2 - fq)Z = -\gamma - f^2 \qquad (۳۳)$$

که با حل آن می‌توانیم Z را به دست آوریم. برای ارجاع، این الگوریتم را الگوریتم $SL_{D,\gamma}$ می‌نامیم.

۶ نتایج عددی

در این قسمت، پاره‌ای از نتایج عددی مربوط به انتگرال‌گیری‌های ۴۸ ساعته بر روی منطقه‌ای محدود شامل خاورمیانه، شمال افریقا و بخش وسیعی از اروپا ارائه می‌شود. حالت آغازین همه انتگرال‌گیری‌ها با استفاده از آغازگری مد بهنجار مرتبه اول (محب الحجه و مرادی، ۱۳۸۱ و ۱۳۸۲) میدان‌های حاصل از درون‌یابی داده‌های جهانی AVN با تفکیک $1^\circ \times 1^\circ$ به شبکه دکارتی منطقه‌ای به‌دست آمده است. حالت آغازین مربوط به ساعت ۰۰:۰۰ روز اول فوریه ۲۰۰۳ میلادی است. در ابتدا برای نمایش حساسیت حالت آغازین به تفکیک فضایی، در جدول ۱ بیشینه‌های عدد فرود $F_r = |V|/\sqrt{\Phi}$ و قدر مطلق عدد راسبی $Ro = \zeta/f$ بر روی حوزه را پیش ازآغازگری و پس ازآغازگری با وارون‌سازی q و تاوایی پتانسیلی خطی شده $q_\ell \equiv \zeta - f\dfrac{\Phi'}{\Phi}$ نشان می‌دهیم. درحالی‌که عدد فرود تقریباً مستقل از تفکیک فضایی است، عدد راسبی نسبت به تفکیک فضایی حساسیت نشان می‌دهد. این حساسیت پس از آغازگری بیش از میزان آن قبل از کاربست آغازگری است. از میان دو آغازگری، وارون‌سازی q حساسیت کمتری نسبت به تفکیک فضایی و همگرایی بهتری را با افزایش تفکیک نشان می‌دهد. متناظر با این حساسیت، نقشه‌های میدان تاوایی پتانسیلی (نشان داده نشده) افزایش محسوس بیشینه q را بر روی منطقه غرب دریای مدیترانه نشان می‌دهد.

جدول ۱. بیشینه‌های عدد فرود F_r و قدر مطلق عدد راسبی $|Ro|$ روی حوزه انتگرال‌گیری برای حالت آغازین ساعت ۰۰:۰۰ روز اول ماه فوریه ۲۰۰۳. مقادیر نشان داده شده در ستون‌های F_r و $|Ro|$ به ترتیب از چپ به راست مربوط به بازه‌های شبکه‌ای ۱۵۰، ۷۵، ۳۷/۵ کیلومتر هستند.

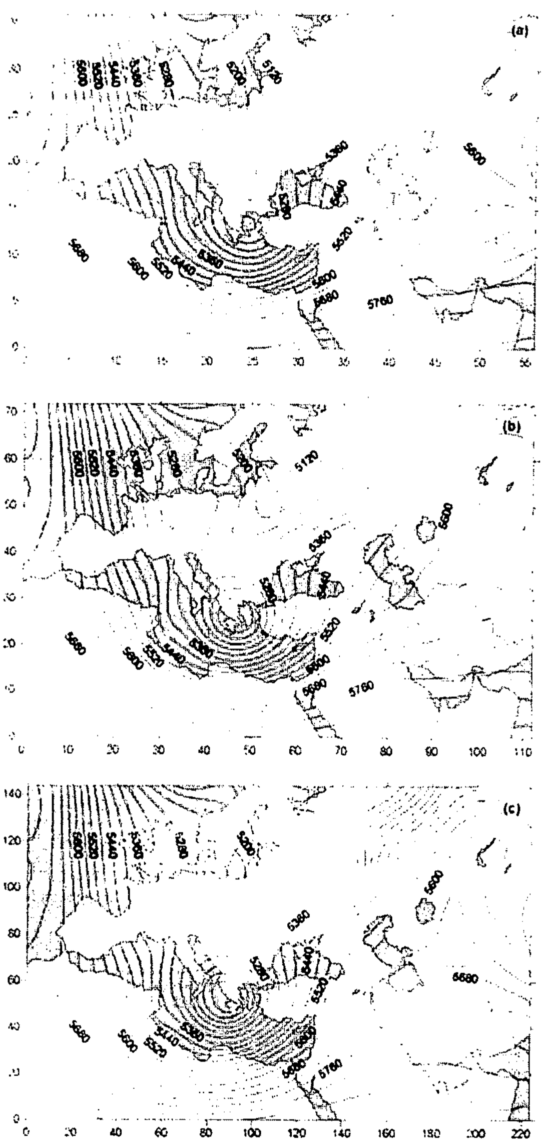
بازه شبکه‌ای (km)	$F_{r\,max}$ (۳۷/۵، ۷۵، ۱۵۰)	$\|Ro\|_{max}$ (۳۷/۵، ۷۵، ۱۵۰)
پیش از آغازگری	(۰/۲۴، ۰/۲۴، ۰/۲۴)	(۳/۶۸، ۳/۶۰، ۳/۱۸)
پس از آغازگری q_ℓ	(۰/۲۵، ۰/۲۴، ۰/۲۳)	(۳/۷۹، ۳/۴۴، ۲/۷۰)
پس از آغازگری q	(۰/۲۴، ۰/۲۴، ۰/۲۳)	(۳/۷۸، ۳/۵۰، ۲/۸۸)

شایان ذکر است که در مورد مطالعه شده در محب‌الحجه و مرادی (۱۳۸۲)، وارون‌سازی q_ℓ با همگرایی خوبی روی معیار عدد راسبی همراه است. این تفاوت را می‌توان به (الف) قوی‌تر بودن شارش و (ب) تفکیک بالاتر داده‌های اولیه مورد استفاده در درون‌یابی به شبکه دکارتی، در مورد فعلی نسبت داد.

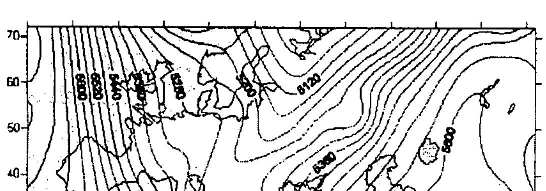
در شکل ۱، نتایج الگوریتم $SL_{D,Z}$ برای پیش‌بینی ۲۴ ساعته میدان ارتفاع ژئوپتانسیلی را با استفاده از تفکیک‌های ۱۵۰، ۷۵ و ۳۷/۵ کیلومتر ارائه می‌دهیم. چند سیمای شارش به وضوح نسبت به تفکیک فضایی حساسیت نشان می‌دهند. بارزترین حساسیت را می‌توان در عمق و نیز مکان مرکز کم‌ارتفاع واقع بر روی یونان و بالخاش مشاهده کرد. با افزایش تفکیک فضایی، این

مرکز عمیق‌تر و به سوی غرب جابه‌جا می‌شود. حساسیت مهم دیگر را می‌توان در شدت و موقعیت پشته میان دریاچه‌های آرال و بالخاش مشاهده کرد. با افزایش تفکیک فضایی، این پشته بلندتر و محور آن در قسمت‌های جنوبی‌تر به سمت غرب جابجا می‌شود. سرانجام باید به ناوه موج کوتاه شمال دریای خزر اشاره کرد که با افزایش تفکیک فضایی اندکی عمیق‌تر و جایگزیده‌تر می‌شود. برای بررسی بیشتر در مورد این مساله، میدان ارتفاع ژئوپتانسیلی متوازن را در هر سه تفکیک فضایی با استفاده از وارون‌سازی‌های q و q_e با شرایط توازن مد بهنجار مرتبه اول به دست آورده‌ایم. نکته جالب توجه آن است که در میدان‌های متوازن نیز همان حساسیت‌ها مشاهده می‌شود. در واقع، تفاوت میدان‌های متوازن و میدان‌های شکل ۱ نامحسوس است. برای نمونه در شکل ۲ میدان مربوط به تفکیک فضایی ۷۵ کیلومتر ارائه شده است. این نتایج بیانگر آن است که حساسیت‌های فوق، ریشه در افزایش تفکیک تاوایی پتانسیلی و میدان‌های وابسته به آن، یعنی بخش متوازن و یا همانا شارش تاواری، با افزایش تفکیک فضایی دارد. در واقع در تفکیک‌های بالاتر از میزان اتلاف ناشی از فرارفت نیمه لاگرانژی تاوایی پتانسیلی و عملگرهای متوسط‌گیری درگیر در سایر بخش‌های الگوریتم کاسته می‌شود. البته این که تا چه حد شرایط مرزی به کاربسته در میزان حساسیت مشاهده شده دخیل‌اند، را مشکل است بتوان در اینجا پاسخ داد. این ابهام را بیش از هر چیز، نتایج الگوریتم جهانی متناظر، یعنی الگوریتم تمام‌کره‌ای تعیین می‌کند.

الگوریتم‌های $SL_{D,Z}$ و $SL_{D,\gamma}$ در نگه‌داشت توازن، موفق‌تر از الگوریتم اویلری $Eu_{V,Z}$ هستند. برای بررسی توزیع ارتفاع ژئوپتانسیلی نامتوازن، در شکل ۳ نتایج مربوط به دو الگوریتم $Eu_{V,Z}$ و $SL_{D,Z}$ را پس از ۲۴ ساعت انتگرال‌گیری در دو تفکیک فضایی ۱۵۰ و ۷۵ کیلومتر ارائه می‌دهیم.



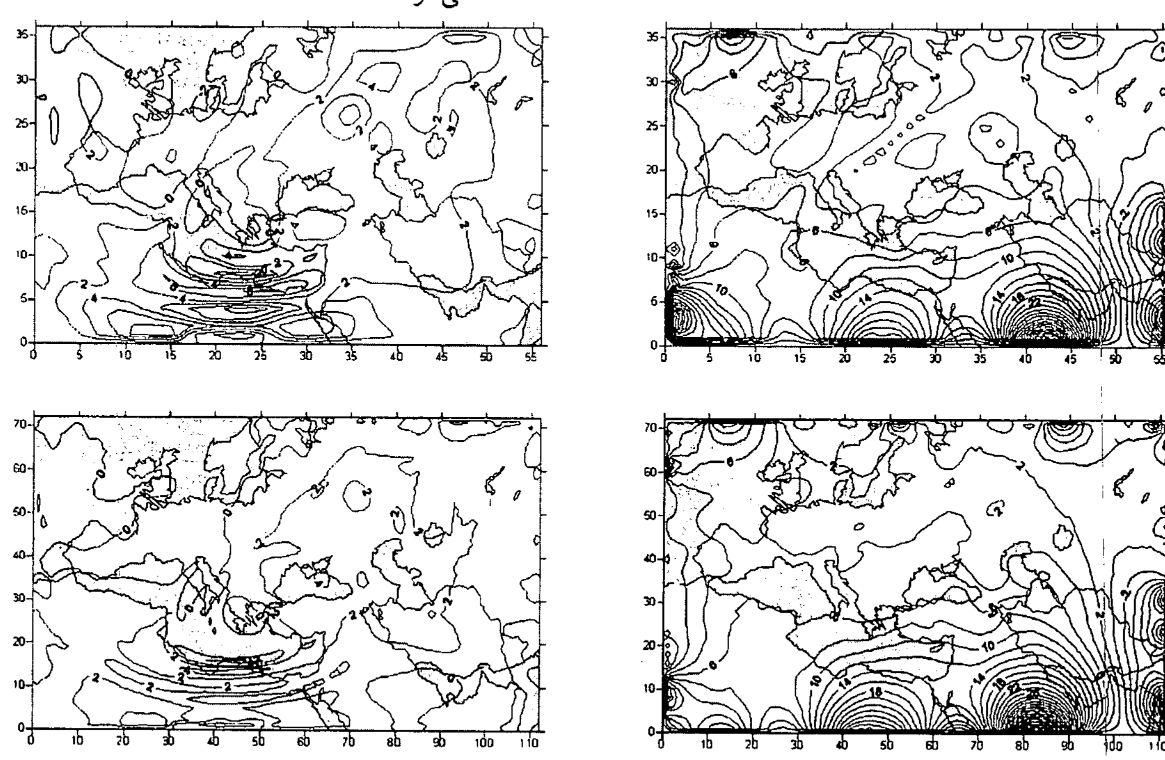
شکل ۱. پیش‌بینی ۲۴ ساعته با الگوریتم $SL_{D,Z}$ و تفکیک‌های فضایی به ترتیب از بالا به پایین ۱۵۰، ۷۵ و ۳۷/۵ کیلومتر.



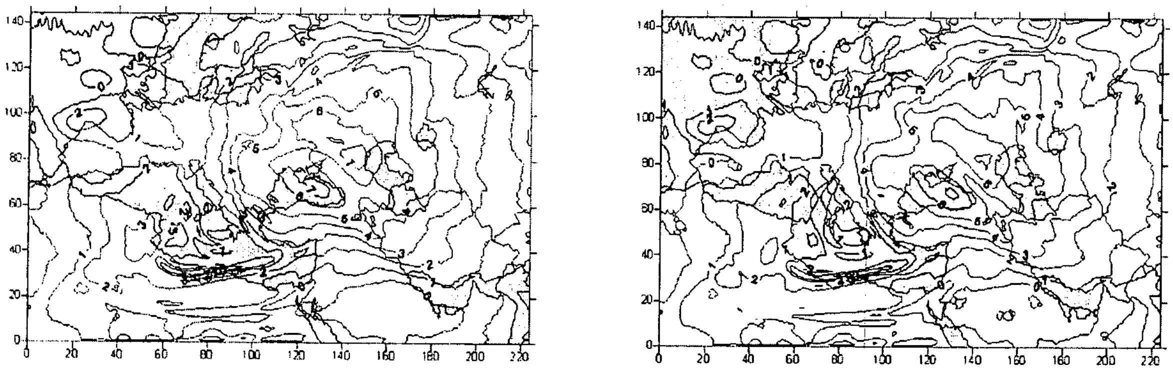
شکل ۲. میدان ارتفاع ژئوپتانسیلی متوازن حاصل از کاربست آغازگری مرتبه اول به میدان‌های پیش‌بینی ۲۴ ساعته با الگوریتم $SL_{D,Z}$ در تفکیک فضایی ۷۵ کیلومتر.

در این‌جا میدان‌های متوازن Z_b، با وارون‌سازی q_ℓ با کاربست شرایط توازن مد بهنجار مرتبه اول، به دست آمده و از میدان‌های الگوریتم بسیط متناظر Z کسر شده است، یعنی $Z_{imb} = Z - Z_b$. همان‌طور که در شکل ۳ مشاهده می‌شود، Z_{imb} در الگوریتم $SL_{D,Z}$ بسیار کوچک‌تر از مقدار آن در الگوریتم $Eu_{V,Z}$ است. چنان‌که پیداست در الگوریتم $Eu_{V,Z}$، Z_{imb} بر روی کناره مرزها، به‌ویژه مرز جنوبی متمرکز است که دامنه آن در تفکیک ۷۵ کیلومتر بیشتر است. این امر نشانگر تولید مصنوعی بی‌توازنی با شرایط مرزی به کاربسته شده است. چنین اثری در نتایج الگوریتم $SL_{D,Z}$ مشاهده نمی‌شود. در عوض در این الگوریتم، Z_{imb} خود را عمدتاً به صورت بسته موجی در جنوب مرکز کم‌ارتفاع روی یونان نشان می‌دهد که دامنه و مقیاس آن در تفکیک ۷۵ کیلومتر کوچک‌تر است. نکته مهم دیگر در نتایج هر دو الگوریتم، غالب بودن مقادیر مثبت است که نشانگر افزایش جرم نامتوازن در حوزه انتگرال‌گیری است. این مساله بی‌شک به فرمول‌بندی شرایط مرزی مربوط است و نیاز به بررسی جداگانه دارد.

در تفکیک ۳۷/۵ کیلومتر، الگوریتم اویلری $Eu_{V,Z}$ به دلیل رشد بسیار، بخش نامتوازن، ناپایدار می‌شود. الگوریتم $SL_{D,Z}$ نیز رشد محسوسی را در Z_{imb} نسبت به تفکیک ۷۵ کیلومتر نشان می‌دهد، اما همچنان از نظر محاسباتی پایدار است. شکل ۴ میدان Z_{imb} را برای دو الگوریتم $SL_{D,Z}$ و $SL_{D,\gamma}$ پس از ۲۴ ساعت انتگرال‌گیری در تفکیک ۳۷/۵ کیلومتر نشان می‌دهد. شایان ذکر است که در این تفکیک وارون‌سازی q همگرایی بهتری نسبت به وارون‌سازی q_ℓ نشان می‌داد. به‌علاوه، حتی در وارون‌سازی q هم‌آهنگ همگرایی کندتر از مقدار آن در تفکیک‌های کمتر بود. نتایج شکل ۴ بر مبنای وارون‌سازی q هستند. با توجه به این شکل می‌توان گفت که نبود توازن تقریباً در تمام حوزه توزیع شده و به غیر از بسته موج جایگزیده جنوب مرکز کم‌ارتفاع واقع روی یونان، ارتباطی بین Z_{imb} و Z_b مشاهده نمی‌شود.



شکل ۳. میدان ارتفاع ژئوپتانسیلی نامتوازن پس از ۲٤ ساعت انتگرال‌گیری با الگوریتم‌های $Eu_{V,Z}$ (راست) و $SL_{D,Z}$ (چپ)، و در تفکیک‌های فضایی ۱۵۰ km (بالا) و ۷۵ km (پایین). بازه پربندی ۲ متر است.



شکل ٤. میدان ارتفاع ژئوپتانسیلی نامتوازن پس از ٢٤ ساعت انتگرال‌گیری با الگوریتم‌های $SL_{D,\gamma}$ (راست) و $SL_{D,Z}$ (چپ)، در تفکیک فضایی ۳۷/۵ کیلومتر، بازه پربندی ۱ متر است.

توفیق $SL_{D,Z}$ در جلوگیری از رشد بی‌توازنی اندک است. این نبود توفیق نیز می‌تواند ناشی از فرمول‌بندی شرایط مرزی باشد که اثر آن را بر افزایش جرم نامتوازن نیز می‌توان در شکل دید. ضمن آن‌که می‌توان به تکیه الگوریتم $SL_{D,\gamma}$ به الگوریتم اویلری در حل معادلات D و γ به مثابهٔ عاملی مؤثر در این نبود توفیق اشاره کرد. هر دو مورد فوق نیازمند بررسی بیشتر است

برای بررسی تغییر زمانی نبود توازن در انتگرال‌گیری‌ها، همچون محب‌الحجه و مرادی (۱۳۸۱ و ۱۳۸۲) از نرم مربعی زیر استفاده می‌کنیم:

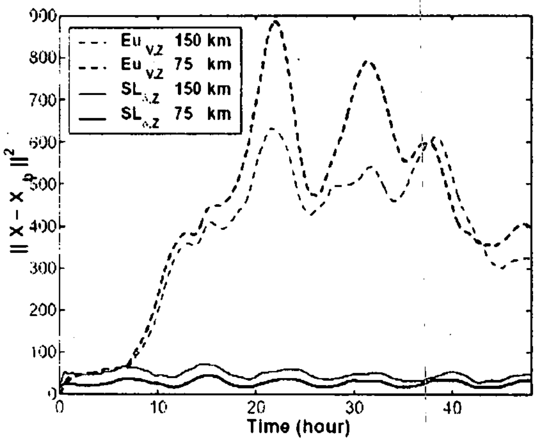
$$\|X\| = \left(\iint dxdy (\overline{Z}|V|^2 + gZ'^2) \right)^{1/2} \qquad (۳۴)$$

که در این رابطه X معرف بردار حالت در نمایش (u,v,Z')، $\overline{Z}$ میانگین ارتفاع ژئوپتانسیلی روی حوزه و Z' پریشیدگی ارتفاع ژئوپتانسیلی نسبت به $\overline{Z}$ است. شکل ۵ تغییرات زمانی $\|X - X_b\|^2$ را برای دو الگوریتم $Eu_{V,Z}$ و $SL_{D,Z}$ در دو تفکیک ۱۵۰ و ۷۵ کیلومتر نشان می‌دهد. در واقع $\|X - X_b\|^2$ به نوعی مجموع بی‌توازنی‌های موجود در مؤلفه‌های باد و میدان ژئوپتانسیلی را اندازه می‌گیرد. همان‌طورکه پیداست در الگوریتم $SL_{D,Z}$ نبود توازن در سطح بسیار پایین‌تری از الگوریتم $Eu_{V,Z}$، تقریباً ثابت می‌ماند. به علاوه می‌توان واگرایی نبود توازن را با افزایش تفکیک در الگوریتم $Eu_{V,Z}$ دید. این در حالی است که در الگوریتم $SL_{D,Z}$ با افزایش تفکیک نبود توازن اندکی کاهش می‌یابد. این نتایج آنچه را از شکل ۳ به دست می‌آید تایید می‌کند.

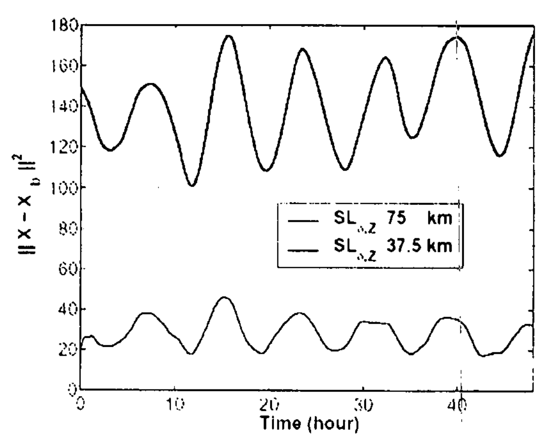
در تفکیک ۳۷/۵ کیلومتر همانطور که پیش‌تر گفته شد، با رشد بی‌توازنی مواجه می‌شویم. برای نشان دادن این امر، در شکل ۶ تغییرات زمانی کمیت $\|X - X_b\|^2$ برای الگوریتم $SL_{D,Z}$ با استفاده از دو تفکیک ۷۵ و ۵/ ۳۷ کیلومتر نشان داده شده است. در این‌جا میدان متوازن X_b با وارون‌سازی q با شرایط توازن مد بهنجار مرتبه اول به‌دست آمده است. همان‌طورکه پیداست، افزایش محسوسی در نبود توازن با رفتن به تفکیک ۳۷/۵ کیلومتر صورت می‌گیرد که البته به جز در ابتدای انتگرال‌گیری همچنان نبود توازن به مراتب کوچکتر از مقدار آن در نتایج الگوریتم $Eu_{V,Z}$ (شکل ۵) است.

۷ ملاحظات پایانی

الگوریتم بر مبنای تاوایی پتانسیلی $SL_{D,Z}$، در مهار رشد مصنوعی بخش نامتوازن موفقیت چشمگیری را نسبت به الگوریتم اویلری نشان می‌دهد. در بالاترین تفکیک فضایی آزموده شده، رشد بخش نامتوازن با زمان در الگوریتم $SL_{D,Z}$ نیز ظاهر می‌شود که نمی‌توان آن را صرفاً به قوی‌تر شدن شارش تاواری در تفکیک بالاتر (جدول ۱ و شکل ۱) توضیح داد. تغییر متغیرهای پیشیافتی از (q,D,γ) به (q,D,Z) حداقل به صورت به کاربسته



شکل ۵. مربع فاصله بردار حالت سیستم از بردار حالت متوازن $\|X - X_b\|^2$ برای الگوریتم $Eu_{V,Z}$ در بازه‌های شبکه‌ای ۱۵۰ کیلومتر (خط چین نازک) و ۷۵ کیلومتر (خط چین درشت) و برای الگوریتم $SL_{D,Z}$ در بازه‌های شبکه‌ای ۱۵۰ کیلومتر (خط پر نازک) و ۷۵ کیلومتر (خط پر درشت)، در طی انتگرال گیری‌های ۴۸ ساعته. حالت آغازین و حالت متوازن در طی انتگرال گیری به وسیله وارونسازی تاوایی پتانسیلی خطی شده q_l با شرایط توازن مد بهنجار مرتبه اول به دست آمده است.



شکل ٦. مربع فاصله بردار حالت سیستم از بردار حالت متوازن $\|X - X_b\|^2$ برای الگوریتم $SL_{D,Z}$ در بازه‌های شبکه‌ای ۷۵ کیلومتر (خط پر نازک) و ۳۷/۵ کیلومتر (خط پر درشت) در طی انتگرال گیری‌های ۴۸ ساعته. حالت آغازین و حالت متوازن در طی انتگرال گیری به وسیله وارونسازی تاوایی پتانسیلی q با شرایط توازن مد بهنجار مرتبه اول به دست آمده است

شده در مطالعه فعلی، در مهار این رشد چندان با موفقیت همراه نبود. این امر و رشد جرم نامتوازن روی حوزه انتگرال گیری (شکل‌های ۳ و ۴) حکایت از غلبه اثرات مرزی بر دینامیک درونی الگوریتم‌ها در تولید مصنوعی بی‌توازنی دارد. مطالعهٔ بیشتر روی شرایط مرزی و ساخت و کاربست الگوریتم‌های جهانی یعنی تمام کره‌ای متناظر در رفع ابهامات و حل مشکلات مذکور کمک می‌کند.

دلیل دقت بیشتر الگوریتم‌های بر مبنای تاوایی پتانسیلی q نسبت به الگوریتم اویلری دارای پایستاری آنزتروفی پتانسیلی سادورنی را باید در هر دو اثر دینامیک درونی و شرایط مرزی جست. از یک طرف با در نظر گرفتن دینامیک درونی، یعنی فارغ از اثر شرایط مرزی الگوریتم‌های بر مبنای تاوایی پتانسیلی، امکان پایستاری q به دنبال ذرات شاره را با دقت بیشتری فراهم می‌کنند. انتخاب روش‌های نیمه لاگرانژی یا حتی کاملاً لاگرانژی نظیر فرارفت پربند (دریچل و همکاران، ۱۹۹۹) درست در همین ارتباط برای دستیابی به دقت بیشتر بر روی نمایش q است که خود منجر به بهبود نمایش بخش متوازن می‌شود. حل دقیق q به صورت فرارفتی و معادله پیوستگی تضمین می‌کند که آنزتروفی پتانسیلی با دقت کافی صرفنظر از اثرات مرزی پایسته باشد. اما عکس این مطلب برای الگوریتم سادورنی برقرار نیست. پایستاری آنزتروفی پتانسیلی در حکم کمیتی انتگرالی روی حوزه حل دقیق فرارفتی تاوایی پتانسیلی را تضمین نمی‌کند. از طرف دیگر چون تاوایی پتانسیلی همچون یک متغیر مشخصه رفتار می‌کند، استفاده از آن به مثابهٔ متغیر پیش‌یافتی امکان بهبود فرمول‌بندی شرایط مرزی را نسبت به الگوریتم‌های بر مبنای متغیرهای پیش‌یافتی تکانه-ارتفاع ژئوپتانسیلی نظیر الگوریتم سادورنی فراهم می‌کند. بهره‌برداری کامل از ویژگی مشخصه یا فرارفتی q تنها با الگوریتم‌های لاگرانژی یا نیمه لاگرانژی میسر است. در مجموع، برای مدل‌سازی منطقه‌ای، مزیت الگوریتم‌های بر مبنای تاوایی پتانسیلی ناشی از هر دو عامل متغیرهای پیشیافتی مناسب و فرارفت (نیمه) لاگرانژی q است.

قدردانی

این پژوهش در قالب طرح پژوهشی " مدل بسیط فشارورد منطقه‌ای بر مبنای تاوایی پتانسیلی" دانشگاه تهران به شماره ۶۵۱/۲/۹۹۹ به انجام رسیده است. بدین‌وسیله از اولیای

محترم دانشگاه تهران و موسسهٔ ژئوفیزیک برای تامین اعتبار، امکانات رایانه‌ای و حمایت‌های لازم تشکر می‌شود.

مراجع

محب الحجه، ع. ر.، پارسایی، م.، و قائمی، هـ.، ۱۳۷۴، پیش‌بینی عددی وضع هوا با مدل بسیط فشارورد، گزارش طرح پژوهشی شماره ۶۵۲/۱/۱۹۶ دانشگاه تهران

محب الحجه، ع. ر.، و مرادی، م.، ۱۳۸۱، تجربیاتی با مدل بسیط فشارورد و آغازگری آن، گزارش طرح پژوهشی شماره ۲۰۸۸۱۳۵۰۳ سازمان هواشناسی کشور.

محب الحجه، ع. ر.، و مرادی، م.، ۱۳۸۲، آغازگری مدل بسیط فشارورد منطقه‌ای به‌روش مد بهنجار: ن فیزیک زمین و فضا، جلد **۲۹**، شماره ۱، ۶۹-۸۱.

Arakawa, A., 1984, Boundary conditions in limited-area models, workshop on limited-area numerical weather prediction models for computers of limited power (Erice, Italy, 1-14 October 1984), WMO/TDNO. **19**.

Dritschel, D. G., Polvani L. M., and A. R. Mohebalhojeh, 1999, The contour-advective semi-Lagrangian algorithm for the shallow water equations: Mon. Wea. Rev., **127**, 1551-1565.

Dritschel, D. G., and Mohebalhojeh, A. R., 2000, The contour-advective semi-Lagrangian algorithm: keeping the balance., Proceedings of ECMWF workshop on developments in numerical methods for very high resolution global models. Reading, UK, 5-7 June 2000, 119-136.

Durran, D. R., 1998, Numerical methods for wave equations in geophysical fluid dynamics., Springer, 465 pp.

Elvius, T., and Sundström, A., 1973, Computationally efficient schemes and boundary conditions for a fine-mesh barotropic model based on the shallow water equations: Tellus, **25**, 132-156.

Haltiner, G. J., and Williams, R. T., 1980, Numerical prediction and dynamic meteorology. 2nd Ed. John Wiley & Sons. 477 pp.

Hoskins, B. J., McIntyre, M. E., and Robertson, A. W., 1985, On the use and significance of isentropic potential vorticity maps: Q. J. R. Meteorol. Soc., **111**, 877-946.

McIntyre, M. E., and Norton, W. A., 2000, Potential vorticity inversion on a hemisphere: J. Atmos. Sci., **57**, 1214-1235.

Mohebalhojeh, A. R., 2002, On shallow water potential vorticity inversion by Rossby-number expansions: Q. J. Roy. Meteorol. Soc., **128**, 679-694.

Mohebalhojeh, A. R., and Dritschel, D. G., 2000, On the representation of gravity waves in numerical models of the shallow-water equations: Q. J. Roy. Meteorol. Soc., **126**, 669-688.

Mohebalhojeh, A. R., and Dritschel, D. G., 2001, Hierarchies of balance conditions for the f-plane shallow-water equations: J. Atmos. Sci. **58**, 2411-2426.

Oliger, J., and Sundström, A., 1978, Theoretical and practical aspects of some initial boundary value problems in fluid dynamics: SIAM J. Appl. Math., **35**, 419-446.

Sadourny, R., 1975, The dynamics of finite-difference models of the shallow-water equations: J. Atmos. Sci., **32**, 680-689.

Strikwerda. J. C., 1989, Finite difference schemes and partial differential equations. Wadsworth & Brooks/Cole, 386 pp.

Sundström, A., and Elvius, T., 1979, Computational problems related to limited-area modeling., GARP Publication Series. No. **17**, Vol. **11**, 499 pp.