

## تضعیف نوفه‌های لرزه‌ای آشفته با وزن‌دادن ماتریس هنکل رتبه کاهیده

مسلم هاشمی<sup>۱\*</sup>، حمیدرضا سیاه‌کوهی<sup>۲</sup> و علی غلامی<sup>۳</sup>

۱. فارغ‌التحصیل کارشناسی ارشد ژئوفیزیک، تحصیلات تکمیلی صنعتی و فناوری پیشرفته کرمان، ایران

۲. استاد، گروه فیزیک زمین، مؤسسه ژئوفیزیک دانشگاه تهران، ایران

۳. دانشیار، گروه فیزیک زمین، مؤسسه ژئوفیزیک دانشگاه تهران، ایران

(دریافت: ۹۳/۱۱/۱۵، پذیرش نهایی: ۹۴/۱۱/۱۱)

### چکیده

حضور نوفه تأثیر نامطلوبی بر داده‌های لرزه‌ای می‌گذارد. یکی از مراحل که در پردازش و تفسیر داده‌های لرزه‌ای اهمیت دارد، تضعیف مطلوب نوفه‌هاست. حضور نوفه و حذف نامطلوب آن‌ها مانع ایجاد تصویر صحیح از ساختارهای زمین‌شناسی منطقه جهت تفسیر داده‌های لرزه‌ای می‌شود. نوفه‌های تصادفی اغلب توزیع گوسی دارند، ولی در بعضی از گیرنده‌ها این نوفه‌ها مقادیر شایان ملاحظه‌ای دارند که از توزیع گوسی هم پیروی نمی‌کنند که در این مقاله به آن‌ها نوفه‌های آشفته (Erratic) گفته می‌شود. نوفه‌های آشفته می‌توانند بر اثر وزش باد، وارونگی قطبی ناصحیح، شرایط سطحی ضعیف، ماشین‌آلات و ... به وجود آیند. هر چند فیلترهای بر پایه حداقل مربعات برای حذف نوفه‌های تصادفی بهینه است، به دلیل غیرگوسی بودن نوفه‌های آشفته، نتایج مطلوبی نمی‌دهد. به منظور رفع این مشکل، فیلتر جدید بر پایه کاهش رتبه ماتریس هنکل را معرفی می‌کنیم. در این روش بعد از انتقال داده‌ها به حوزه فرکانس-مکان، برای تک تک برش‌های فرکانسی، ماتریس هنکل ساخته و رتبه آن را کاهش می‌دهیم. سپس با استفاده از الگوریتم تکراری و توابع وزنی، تا زمانی که همگرایی مطلوبی حاصل شود، ترکیب وزن‌داری از مقادیر ماتریس اولیه و ماتریس کاهش رتبه‌یافته را به دست می‌آوریم که با دادن وزن صفر به نوفه‌های آشفته آن‌ها را حذف می‌کنیم. این روش را می‌توان برای داده‌های لرزه‌ای دوبعدی و سه‌بعدی با شیب‌های متقاطع اعمال کرد. عملکرد این فیلتر روی داده‌های لرزه‌ای واقعی و مصنوعی، بررسی و ملاحظه شد که روش به‌خوبی نوفه‌های آشفته و تصادفی را تضعیف می‌کند.

واژه‌های کلیدی: تجزیه مقدار تکین، تضعیف نوفه‌های آشفته، تضعیف نوفه‌های تصادفی، فیلتر کادزو، کاهش رتبه ماتریس، ماتریس هنکل.

### ۱. مقدمه

آن‌ها معرفی شده است. ولی بخشی از نوفه‌های تصادفی این ویژگی را ندارند و به این نوع از نوفه‌ها، نوفه‌های آشفته می‌گویند. نوفه‌های آشفته بر اثر وزش باد، قطبیدگی ناصحیح، شرایط سطحی ضعیف، رفت‌وآمد افراد و ... به وجود می‌آیند (کلربوت و مویر، ۱۹۷۳).

دامنه نوفه‌های آشفته چندین برابر دامنه نوفه‌های تصادفی است و همین امر موجب می‌شود که بسیاری از روش‌های تضعیف نوفه که برای تضعیف نوفه‌های همدوس و تصادفی مفیدند، در برخورد با این نوفه‌ها کارایی خود را از دست بدهند. تضعیف نوفه‌های آشفته قبل از برابارش جهت به‌دست آوردن کیفیت مطلوب تغییرات دامنه با دورافت (Amplitude Variation with offset, AVO) و آزیموت (Amplitude variation)

برداشت داده‌های لرزه‌ای معمولاً به منظور مطالعه پوسته زمین، اکتشاف ذخایر هیدروکربن، تعیین عمق سطح ایستایی یا تعیین عمق پی‌سنگ صورت می‌گیرد. یکی از عواملی که بر کیفیت داده‌ها به‌شدت تأثیر می‌گذارد و در مواردی ممکن است به ارائه تصویری ناصحیح از ساختارهای زمین‌شناسی منطقه بیانجامد و مراحل بعدی پردازش و تفسیر را با مشکل روبه‌رو کند، وجود نوفه در داده‌های لرزه‌ای است. با توجه به رفتاری که این نوفه‌ها در داده‌ها از خود نشان می‌دهند، می‌توان آن‌ها را به دو گروه نوفه‌های همدوس و نوفه‌های غیرهمدوس (تصادفی) دسته‌بندی کرد. نوفه‌های تصادفی از توزیع گوسی پیروی می‌کنند و بر اساس همین توزیع نرمال روش‌های تضعیف متنوعی بر پایه کمترین مربعات برای

از جمله روش‌های توانا می‌توان به روش‌های تشخیصی (Diagnostic)، روش CMP مقاوم (robust) و روش برآورد اشاره کرد. در روش‌های تشخیصی ابتدا نوفه‌های آشفته در داده را شناسایی و سپس با روش میرایی (Damping) آن را حذف می‌کنند (شانو و رخ، ۱۹۸۶). برانبارش CMP مقاوم یک روش تخمینی مقاوم است که در برانبارش با رد لرزه‌های بد اعمال می‌شود (وات و بدنر، ۱۹۸۳). روش سوم که هدف این مطالعه است، بر اساس برآورد مقاوم عمل می‌کند. این روش از برآوردهایی استفاده می‌کند که به نوفه‌های آشفته موجود در داده حساس نیستند و عملکرد آماری خوبی از خود به نمایش می‌گذارند. در این مقاله ابتدا به معرفی روش تضعیف نوفه‌های تصادفی می‌پردازیم که بر اساس ماتریس رتبه کاهیده عمل می‌کند. سپس با بیان برآوردهای توانا، روش تضعیف نوفه‌ای را معرفی می‌کنیم که به مقادیر برون‌افتاده (Outliers) حساس نیست. روش تحلیل طیف تکین (Singular spectrum analysis, SSA) به‌طور گسترده در پردازش داده‌های لرزه‌ای استفاده می‌شود. کاربرد تحلیل طیف تکین یا روش کادزو برای حذف نوفه‌های تصادفی روی داده‌های لرزه‌ای از کارهای الریچ شروع شد (الریچ و همکاران، ۱۹۸۸). این روش بر اساس کاهش رتبه ماتریس روی برش‌های فرکانسی ثابت عمل می‌کند (تریکت، ۲۰۰۲ و ۲۰۰۸؛ ساشی، ۲۰۰۹). الگوریتم طراحی شده برای این فیلتر به‌صورت شکل ۱ قابل بیان است:

AVAZ, with azimuthal)، آشکارکردن سیگنال در نواحی نوفه‌ای، تضعیف چندگانه‌ها، تحلیل سرعت و تصحیح استاتیک بسیار مهم است (تریکت و بورگر، ۲۰۰۹). اما این گونه حذف نوفه به دلایلی از جمله پایین بودن نسبت سیگنال به نوفه، استاتیک باقیمانده، غیریکنواختی در فاصله رد لرزه‌ها و... مشکل ساز است. فیلتر کادزو بر اساس کاهش رتبه ماتریس برای حذف نوفه‌های تصادفی توسط جیمز کادزو (۱۹۸۸) معرفی شد. این فیلتر به‌صورت گسترده در پردازش داده‌های لرزه‌ای توسعه یافت. از ویژگی‌های این فیلتر تضعیف خوب نوفه و حفظ سیگنال اصلی است. ضمن اینکه این روش برای اعمال به داده‌های دوبعدی و سه‌بعدی مناسب است. این فیلتر بر اساس تخمین حداقل مربعات عمل می‌کند و در داده‌هایی که نوفه از توزیع گوسی پیروی می‌کند، عملکرد خوبی دارد. بنابراین در داده‌هایی با نوفه‌های آشفته این فیلترها کارایی مطلوب خود را از دست خواهند داد و به شدت کیفیت نتایج را کاهش می‌دهند. روش‌های متنوعی برای تضعیف نوفه‌های آشفته وجود دارد که ویرایش رد لرزه و برانبارش CMPها از آن جمله هستند، اما هر دو روش معایبی دارد. مثلاً روش ویرایش رد لرزه به دلیل ویرایش دستی رد لرزه‌ها، ناکارآمد است و روش برانبارش نقطه‌میان مشترک به دلیل حساسیت به نوفه‌های آشفته عملکرد خوبی ندارد. بنابراین در اینجا روش‌های پایداری را بررسی می‌کنیم که به نوفه‌های آشفته حساس نیستند و به‌خوبی کارایی فیلتر طراحی شده را حفظ می‌کنند.



شکل ۱. الگوریتم مربوط به روش ماتریس رتبه‌کاهیده

برآوردهای توانا قرار دارد. برآوردهای توانا در برخورد به داده‌های شامل نوفه‌های آشفته دچار انحراف نمی‌شوند. به این منظور روش‌های متنوع و مقاوم برای پایدارسازی از سال ۱۹۶۰ توسعه یافتند (مارونا و همکاران، ۲۰۰۶). هدف از پایدارسازی حفاظت در مقابل انحراف از فرضیات و حذف اثر نوفه‌های آشفته است (هوبر، ۱۹۸۱). تخمین‌های مقاوم در پایدارسازی آماری نیازمند این هستند که قسمت‌های اصلی از داده‌های تمیز را برازش دهند و تحت تأثیر نوفه آشفته قرار نگیرند. روش IRRR ترکیبی از روش حداقل مربعات وزن‌دار تکراری (اسکالز و گرزتنکورن، ۱۹۸۸) و کاهش رتبه وزن‌دار (سربو و جاکولا، ۲۰۰۳) است.

## ۲.۱. حداقل مربعات وزن‌دار تکراری

اگر نوفه در داده‌ها توزیع نرمال داشته باشد، روش حداقل مربعات به‌خوبی عمل می‌کند. ولی نوفه در داده‌های واقعی به‌ندرت از توزیع گوسی پیروی می‌کند و وجود نوفه‌های آشفته روش حداقل مربعات را دچار مشکل می‌سازد (هوبر، ۱۹۸۱). روشی که به مقادیر آشفته یا به بیان دیگر مقادیر برون‌افتاده حساس نیست، روش حداقل انحراف مطلق (Least-absolute deviation, LAD) یا همان نورم ۱ است. یکی از روش‌ها برای حل مسائل نورم ۱ بر اساس روش حداقل مربعات وزن‌دار تکراری است. فرض می‌کنیم  $A$  ماتریسی مستطیلی است ( $Ax=y$ ) که ستون‌های آن مرتبه کامل است. به‌وسیله مشتق گرفتن از تابع خطا ( $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ ):

$$\sum_i \partial_k \left| \sum_j A_{ij} x_j - y_i \right|^p \quad (4)$$

و با توجه به  $\text{sgn}(x) = \frac{x}{|x|}$  خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \sum_i \partial_k \left| \sum_j A_{ij} x_j - y_i \right|^p &= \\ \sum_i \partial_k |r_i|^p &= \sum_i \text{sgn}(r_i) p |r_i|^{p-1} A_{i,k} \\ &= \sum_i r_i p |r_i|^{p-1} A_{i,k} = [A^T R (Ax - y)]_k \end{aligned} \quad (5)$$

هرگاه  $A \in R^{m \times n}$  باشد که از مرتبه  $\Gamma$  است. با فرض  $m > n$  خواهیم داشت:

$$A = U \Sigma V^T \quad (1)$$

که در آن  $U$  و  $V$  ویژه‌بردارها و  $\Sigma$  ماتریس قطری حقیقی است که شامل ویژه‌مقدارهای ماتریس  $A$  است. ماتریس رتبه کاهیده را به‌صورت رابطه (۲) خواهیم داشت:

$$A_K = U_K \Sigma_K V_K^T \quad (2)$$

یکی از خاصیت‌های مهم SVD این است که نزدیک‌ترین تقریب مرتبه پایین بهینه را در نورم‌های فروبینوس و اقلیدوسی برای هر رتبه‌ای، البته نه بیشتر از رتبه  $\Gamma$ ، پیشنهاد می‌دهد. بنابراین برای هر عدد صحیح  $k$  بین ۱ و  $\Gamma$  خواهیم داشت:

$$\min_{\text{rank}(\hat{A}_K)=K} \|A - \hat{A}_K\|_{r,F} = \|A - A_K\|_{r,F} \quad (3)$$

که در آن  $\| \cdot \|_F$  بیانگر نورم فروبینوس است و برای  $E \in \mathbb{R}^{m \times n}$  نورم فروبینوس آن  $\|E\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |e_{ij}|^2}$  خواهد بود. اما یک ضعف روش SVD هم این است که در صورت وجود نوفه آشفته در داده‌ها، به علت اینکه بر اساس تخمین حداقل مربعات عمل می‌کند، کارایی خود را از دست می‌دهد. برآوردها در آمار کلاسیک برای کمیت‌هایی مانند تخمین میانگین، واریانس، کواریانس، همبستگی، برازش خطی با حداقل مربعات و تحلیل مؤلفه‌های اساسی به‌شدت تحت تأثیر نوفه‌های آشفته قرار می‌گیرند. در حالی که تخمین میانه نسبت به نوفه‌های آشفته مقاوم است. روش کاهش رتبه استفاده‌شده در این مقاله بر اساس تقریب وزن‌دهی تکراری مرتبه پایین (Iteratively Reweighted Rank Reduction, IRRR) عمل می‌کند. وزن دهی به‌کاررفته براساس تخمین میانه خواهد بود.

## ۲. تضعیف نوفه‌های آشفته

الگوریتم تکراری و وزن‌دار رتبه ماتریس نوعی تخمین کلاسیک است. در نقطه مقابل تخمین کلاسیک،

است، نورمی از باقیمانده‌های وزن‌دار را ایجاد می‌کنیم که به نوفه‌های آشفته حساس نیستند. اگر  $\hat{I}$  آمین عنصر قطری از  $W$  که  $W_{ii}$  می‌نامیم را به صورت تابعی از  $\hat{I}$  آمین مؤلفه بردار باقیمانده  $W_{ii} = |r_i|^{-1}$  انتخاب کنیم، نورم ۲ از باقیمانده‌های وزن‌دار با نورم ۱ از باقیمانده‌های ابتدایی برابر خواهد شد (جی، ۲۰۱۱):

$$\|r_w\|_2 = r^T W r = \sum_i |r_i| = \|r\|_1 \quad (7)$$

این نتایج برآوردی توانا (Robust stimation) ایجاد می‌کند که به نوفه‌های آشفته حساسیت کمتری دارد. در عمل، عملگر وزن‌دهی باید به گونه‌ای تعریف شود که از تقسیم شدن بر صفر دوری کند. بنابراین در نورم‌ها یک پارامتر آستانه کوچک را که ثابت تنظیم نیز می‌نامند، در نظر می‌گیرند. هولاند و ولسچ (۱۹۷۷) چندین نوع تابع وزن‌دهی را معرفی کردند که از آن جمله تابع هوبر و دووزنی توکی بود. روش‌های بهینه‌سازی بر پایه نورم ۱ به وسیله کاهش اثر درخور توجه نوفه‌های آشفته توانا می‌شوند ولی هیچگاه اثر آن‌ها را به کلی نادیده نمی‌گیرند (جی، ۲۰۱۱). تابع هوبر یکی از این توابع است. تابع دووزنی توکی از جمله توابع پایدارسازی است که به کلی اثر نوفه‌های آشفته را حذف می‌کند (بیتون و توکی، ۱۹۷۴). مقادیر باقیمانده تابع دووزنی توکی به صورت رابطه (۸) است:

$$\|r\|_{Biveight} = \sum_i \begin{cases} \frac{\tau_B}{\epsilon} & |r_i| > \tau_B \\ \frac{\tau_B}{\epsilon} \left\{ 1 - \left[ 1 - \left( \frac{r_i}{\tau_B} \right)^2 \right]^2 \right\} & |r_i| \leq \tau_B \end{cases} \quad (8)$$

و تابع وزن‌دهی تابع دووزنی توکی به صورت رابطه (۹) خواهد بود:

$$W_{Biveigh} = \begin{cases} 0 & |r_i| > \tau_B \\ \left[ 1 - \left( \frac{r_i}{\tau_B} \right)^2 \right]^2 & |r_i| \leq \tau_B \end{cases} \quad (9)$$

تابع دووزنی توکی طبق رابطه (۹) با دادن وزن‌های صفر به نوفه‌های آشفته و برآزش دادن حجمی از داده‌های تمیز (داده‌های بدون نوفه آشفته)، به کلی نوفه‌های آشفته را

که در آن، ماتریس  $R$  به صورت  $diag p |r_i|^{p-2}$  تعریف شده است. نتایج این محاسبات، ترکیب غیرخطی از معادلات نرمال  $A^T R A x = A^T R y$  است. اگر  $p = 2$  باشد، وزن‌ها واحد خواهند بود ولی اگر  $p \neq 2$  باشد، وزن‌ها غیرخطی خواهند بود (اسکالز و گرزتنکورن، ۱۹۸۸).

اگر در ماتریس  $A$  ستون‌ها مرتبه کامل داشته باشند، یک سیستم تکراری طبیعی برای حل معادلات نرمال به صورت رابطه (۶) خواهد بود (برای  $\hat{I}$  آمین تکرار):

$$(A^T R_{i-1} A) x_i = A^T R_{i-1} y \quad (6)$$

تکرار به وسیله انتخاب وزن‌ها با مقدار ۱ و محاسبه حداقل مربعات معمولی شروع می‌شود. در اینجا ممکن است باقیمانده‌های صفر را داشته باشیم که موجب ناپایداری الگوریتم تکراری از این نوع می‌شود. به منظور اجتناب از این مشکل مشاهداتی را که منجر به باقیمانده‌های خیلی کوچک می‌شوند، به سادگی می‌توان حذف کرد (شلوزماچر، ۱۹۷۳). در توجیه این نظریه باید گفت که علت حذف این باقیمانده‌ها این است که معمولاً باقیمانده‌های کوچک اثر کمی روی نتایج خواهد داشت. همچنین نشان خواهیم داد که راه‌های زیاد و متنوعی وجود دارد که ما را به حذف باقیمانده‌های کوچک از داده‌ها قادر می‌سازد. رابطه ۶ به الگوریتم حداقل مربعات وزن‌دار تکراری (Iteratively reweighted least squares, IRLS) اشاره دارد (اسکالز و گرزتنکورن، ۱۹۸۷).

## ۲.۲. روش وزن‌دهی

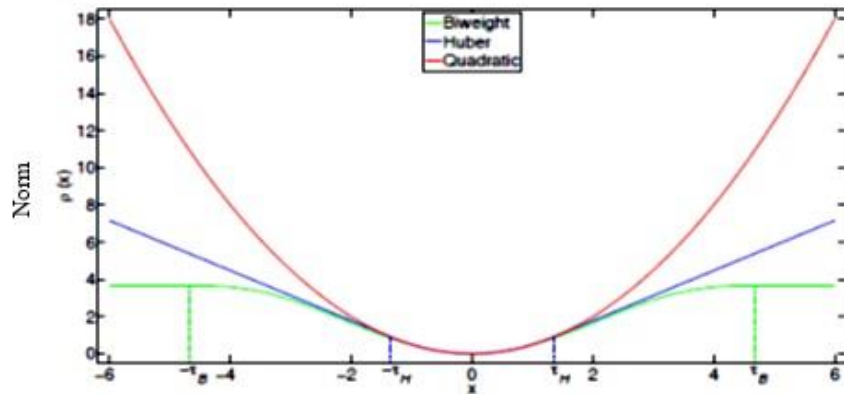
همان‌طور که در بخش‌های قبل بیان شد، روش LAD جهت بهینه‌سازی مسائل، پاسخ بهتری از روش حداقل مربعات کلاسیک می‌دهد و علت آن است که پایدارسازی از طریق مقادیر میانه، به مقادیر آشفته حساس نیست و حل حداقل خطای نورم ۱ متناظر با حل مینیمم خطای میانه است. در روش‌های وزن‌دهی، با انتخاب مناسب تابع وزن‌ها که شرط اصلی برای همگرایی روش

پارامتر منظم‌سازی  $\tau_B(\tau_H)$ ، کارآمدی آماری و تواناسازی برآورد (در توزیع گوسی) را کنترل می‌کند. برای مثال، نمونه میانگین در توزیع‌های گوسی ۱۰۰ درصد کارایی دارد ولی نمونه میانه ۶۳/۶۹ درصد کارایی دارد. بنابراین اگر مقدار  $\tau_B(\tau_H)$  را کوچک در نظر بگیریم، بیشتر داده‌ها با مقادیر بزرگ، مقادیر برون‌افتاده در نظر گرفته می‌شوند و فرایند با توانایی (Robustness) بیشتری صورت می‌گیرد. ولی مقدار  $\tau_B(\tau_H)$  کوچک، کارایی آماری از تخمین را کاهش می‌دهد. در اینجا توازن بین مقاوم‌سازی و کارایی وجود دارد. هولاند و ولسچ (۱۹۷۷) ثابت‌های منظم‌سازی از چندین تابع تخمین متفاوت را برای ۹۵ درصد کارایی مجانب در توزیع گوسی پیشنهاد کردند. آن‌ها ثابت تنظیم  $\tau_B = 4.685$  را برای تابع دووزنی جهت به‌دست‌آوردن ۹۵ درصد کارایی مجانب در توزیع گوسی پیشنهاد کردند.

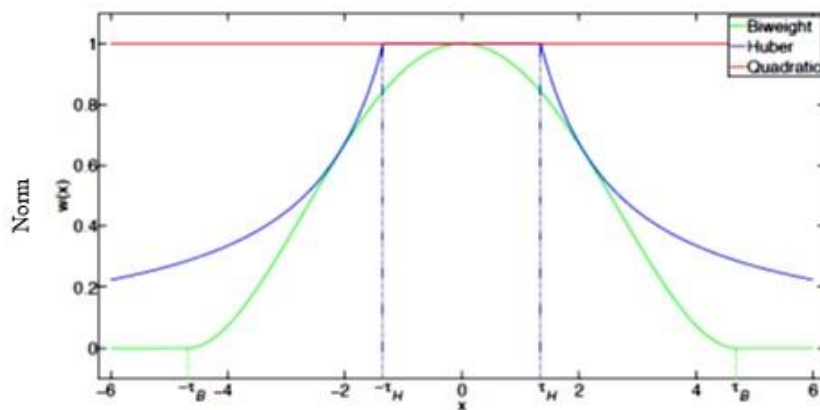
حذف می‌کند. تابع وزن‌دهی برای تخمین حداقل مربعات دارای مقدار واحد است و به همه مقادیر باقیمانده‌های بزرگ و کوچک، وزن‌های یکسان می‌دهد. سه تابع وزن مختلف در شکل ۲ ترسیم شده است.

تابع درجه دوم افزایش سریعی میان سه تابع دارد، تابع هوبر در مکان دوم این مقایسه قرار می‌گیرد و تابع دووزنی افزایش ملایم‌تری را در وزن‌دادن به مقادیر باقیمانده نشان می‌دهد. توابع هوبر و درجه دوم، توابع محدب هستند. در حالی که تابع دووزنی توکی غیرمحدب است.

شکل ۳ توابع وزن‌دهی را برای تخمین‌های مربعات، هوبر و دووزنی نشان می‌دهد. تابع مربعات وزن‌های مساوی را به مقادیر بزرگ و کوچک موجود در داده می‌دهد، تابع هوبر وزن‌های کمتری را به مقادیر بزرگ می‌دهد و تابع دووزنی وزن‌های صفر را به این مقادیر بزرگ می‌دهد.



شکل ۲. تابع نورم برای سه تابع هوبر، مربعات و دووزنی.  $\tau_B$  ثابت میزان‌سازی تابع دووزنی و  $\tau_H$  ثابت میزان‌سازی تابع هوبر است (چن، ۲۰۱۳).



شکل ۳. توابع وزن‌دهی متناظر با تابع هوبر، تابع مربعات و تابع دووزنی.  $\tau_B$  ثابت میزان‌سازی تابع دووزنی و  $\tau_H$  ثابت میزان‌سازی تابع هوبر است (چن، ۲۰۱۳).

۳.۲. تقریب ماتریس رتبه پایین وزن دار

ماتریس مقادیر مختلط  $A \in C^{n \times d}$  با مرتبه  $r$  و ماتریس وزن با مقادیر حقیقی غیرمنفی  $W \in R^{n \times d}$  را در نظر می‌گیریم. هدف ما پیدا کردن ماتریس رتبه پایین  $X \in C^{n \times d}$  است که برای یک  $k$  ثابت که  $1 \leq k \leq r$ ، فاصله فروبینوس وزن دار تابع  $J$  را مینیمم کند (سربو، ۲۰۰۳):

$$X = \sum_{i=1}^k \sigma_i u_i v_i^H \quad (10)$$

$$j(X) = \|W \circ (A - X)\|_F = \sum_{i,a} W_{i,a} (X_{i,a} - A_{i,a})^2 \quad (11)$$

عبارت  $J(X)$  تابع درجه دومی از عناصر ماتریس  $W$  است و  $W \circ Y$  بیانگر ضرب عنصر به عنصر  $W$  و  $Y$  است. حال به بررسی روش حل این معادله می‌پردازیم. با تغییر متغیر  $U = u \sigma^{1/2}$  و  $V = v \sigma^{1/2}$  ماتریس رتبه کاهیده  $X$  را

به صورت  $X = UV^T$  نشان می‌دهیم که  $U \in C^{n \times k}$  و

$V \in C^{d \times k}$  ویژه بردارهای ماتریس  $X$  هستند. چون هر ماتریس مرتبه  $k$  می‌تواند به این شکل تجزیه شود و هر زوجی از این ماتریس‌ها، ماتریس مرتبه  $k$  را می‌دهد، مسئله مینیمم کردن را می‌توانیم روی ویژه بردارهای آن بررسی کنیم:

$$J(U, V) = \sum_{i,a} W_{i,a} (A_{i,a} - (UV^T)_{i,a})^2 = \quad (12)$$

$$\sum_{i,a} W_{i,a} (A_{i,a} - \sum_{\alpha} U_{i,\alpha} V_{\alpha,a})^2$$

مشتق جزئی از توابع وزن دار به صورت رابطه (۱۳) خواهد بود:

$$\frac{\partial J}{\partial U} = 2(W \circ (UV^T - A))V^T, \quad (13)$$

$$\frac{\partial J}{\partial V} = 2(W \circ (VU^T - A^T))U$$

معادله  $\frac{\partial J}{\partial U} = 0$  در  $U$  هنوز یک سیستم خطی است. با فرض

ثابت بودن  $V$  می‌توانیم بنویسیم  $U_v^* = \arg \min_U J(U, V)$

(چون  $J(U, V)$  در  $U$  تعقر رو به پایین دارد). این حل

نمی‌تواند با استفاده از شبه وارون  $V(V^T V)^{-1}$  نوشته شود. در

عوض شبه وارون منفردی برای هر ردیف  $(U_v^*)_i$  از  $(U_v^*)_i$

نیازمند است:

$$(U_v^*)_i = (V^T W_i V)^{-1} V^T W_i A_i = \quad (14)$$

$$pinv(\sqrt{W_i} V) (\sqrt{W_i} A_i)$$

به طوری که  $W_i \in R^{k \times k}$  ماتریس قطری با وزن‌هایی از  $i$  امین ردیف از  $W$  روی قطر و  $A_i$ ،  $i$  امین ردیف از ماتریس هدف است. به منظور پیروی از موارد وزن دار، باید  $V$  را به گونه‌ای انتخاب کنیم که  $V^T W_i V = I$ . این می‌تواند برای یک  $i$  تنها انجام گیرد، اما نیاز به قطری سازی همه  $V^T W_i V$  به صورت یکجا داریم. هنگامی که  $W$  از مرتبه ۱ باشد، چنین قطری سازی امکان‌پذیر است؛ هر چند برای مرتبه بالای  $W$ ، نمی‌توانیم برای همه ردیف‌ها به دست آوریم. به عبارت دیگر وزن‌های یکنواخت، تنها یک کمینه سراسری دارند ولی در صورت وجود ماتریس وزن دار، یک کمینه سراسری نخواهیم داشت (سربو و جاکولا، ۲۰۰۳).

۴.۲. الگوریتم تکراری

بهای وزندهی ماتریس رتبه کاهیده هم‌ارز با بیشترین متغیرهای مشاهده شده است. این عمل فرایندی تکراری را می‌طلبد که در هر مرحله پارامتر جدید ماتریس ماکزیمیم با بیشترین لگاریتم را نیاز داریم (سربو و جاکولا، ۲۰۰۳). این ماکزیمیم احتمال پارامتر ماتریس، تقریب مرتبه پایینی از میانگین ماتریس جایگزین  $A$  است که  $A$ ، ماتریس شامل نوفه‌های آشفته جایگزین شده با ماتریس  $X$  است. فرایند تکراری به صورت رابطه (۱۵) قابل بیان است:

$$X^{(t+1)} = LRA_k(W \otimes A + (1-W) \otimes X^{(t)}) \quad (15)$$

که در آن  $LRA_k(X)$  تقریب مرتبه  $k$  بی‌وزن از  $X$  است که با استفاده از SVD محاسبه می‌شود. برای هر ماتریس وزن دار (که وزن‌هایی بین ۰ و ۱ دارد) فرایند معادله بالا می‌تواند فرایند پیش‌بینی بیشینه‌ساز تلقی شود. مقداردهی اولیه  $X$  نقش حیاتی در ارتقای همگرایی به مینیمم نهایی دارد. دو روش مقداردهی اولیه وجود دارد؛ یکی مقدار دادن به  $X$  با  $A$  و دیگری مقداردهی  $X$  با صفر. اگر وزن‌ها به دور از صفر باشند یا مقادیر هدف در ماتریس  $A$  واریانس نسبتاً کوچکی داشته باشند، مقداردهی اولیه  $X$  با  $A$  خوب کار می‌کند؛ هر چند زمانی که وزن‌ها صفر یا

خیلی به صفر نزدیک هستند، مقادیر هدف، بی‌معنا و از محاسبات خارج می‌شوند. دادن مقدار اولیه با صفر این مشکل را برطرف می‌سازد، به گونه‌ای که مقادیر هدف با وزن صفر کاملاً نادیده گرفته می‌شوند (همانطور که انتظار می‌رود) و به‌خوبی زمانی کار می‌کنند که وزن‌ها تقریباً متراکم هستند. روش دیگر برای مقداردهی اولیه که بسیار مفید است، دادن مقدار اولیه صفر به  $X$  است ولی به جای جستجوی فوری تقریب مرتبه  $k$ ، ما محاسبات را با ماتریس مرتبه کامل شروع می‌کنیم و به تدریج مرتبه تقریب‌هایمان را کاهش می‌دهیم. بنابراین اولین تکرارهای  $d-k$  به شکل زیر خواهد بود:

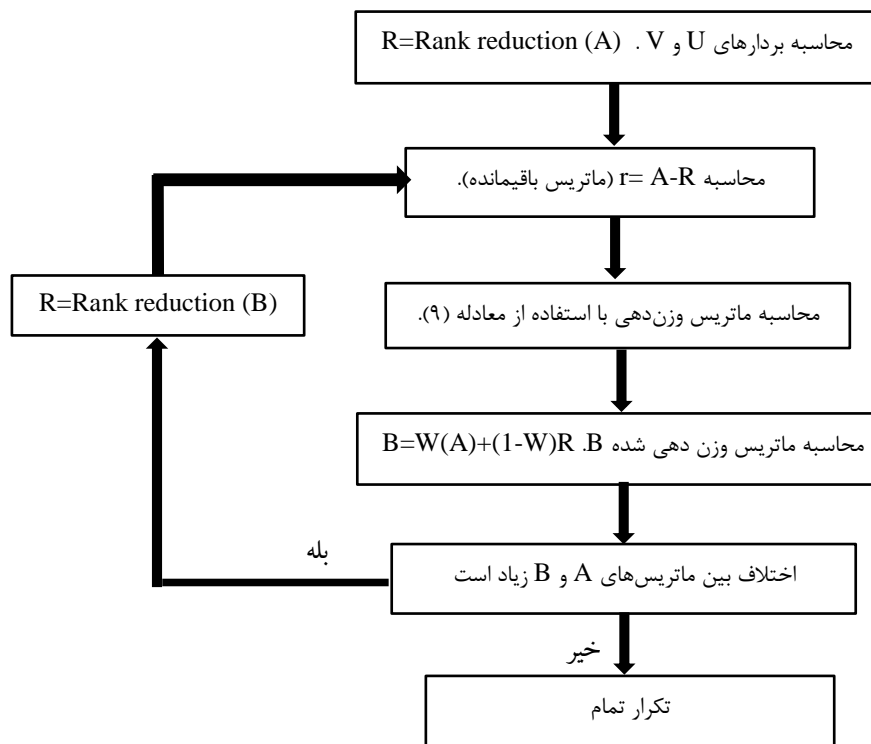
3. انتخاب پارامتر آستانه  
پارامتر آستانه  $\tau_B = 4.685 \times MAD / 0.6745$  حدود ۹۵ درصد کارایی نویزهای گوسی است (هولند و ولسج، ۱۹۷۷). این پارامتر یعنی:

$$\tau_B = 4.685 \times \text{med} |r - \text{med} |r|| / 0.6745 \quad (17)$$

بعد از جستجوی مرتبه  $k$  به عقب برمی‌گردیم و رابطه (۱۶) را تا زمانی که همگرایی صورت پذیرد، ادامه می‌دهیم. ملاحظه می‌کنیم که با تکرار شکل  $X^{(t+1)} = W \otimes A + (1-W) \otimes X^{(t)}$  بدون کاهش رتبه،

$$X^{(t+1)} = LRA_{d-t}(W \otimes A + (1-W) \otimes X^{(t)}) \quad (16)$$

می‌کنیم. ملاحظه می‌کنیم که با تکرار شکل  $X^{(t+1)} = W \otimes A + (1-W) \otimes X^{(t)}$  بدون کاهش رتبه،

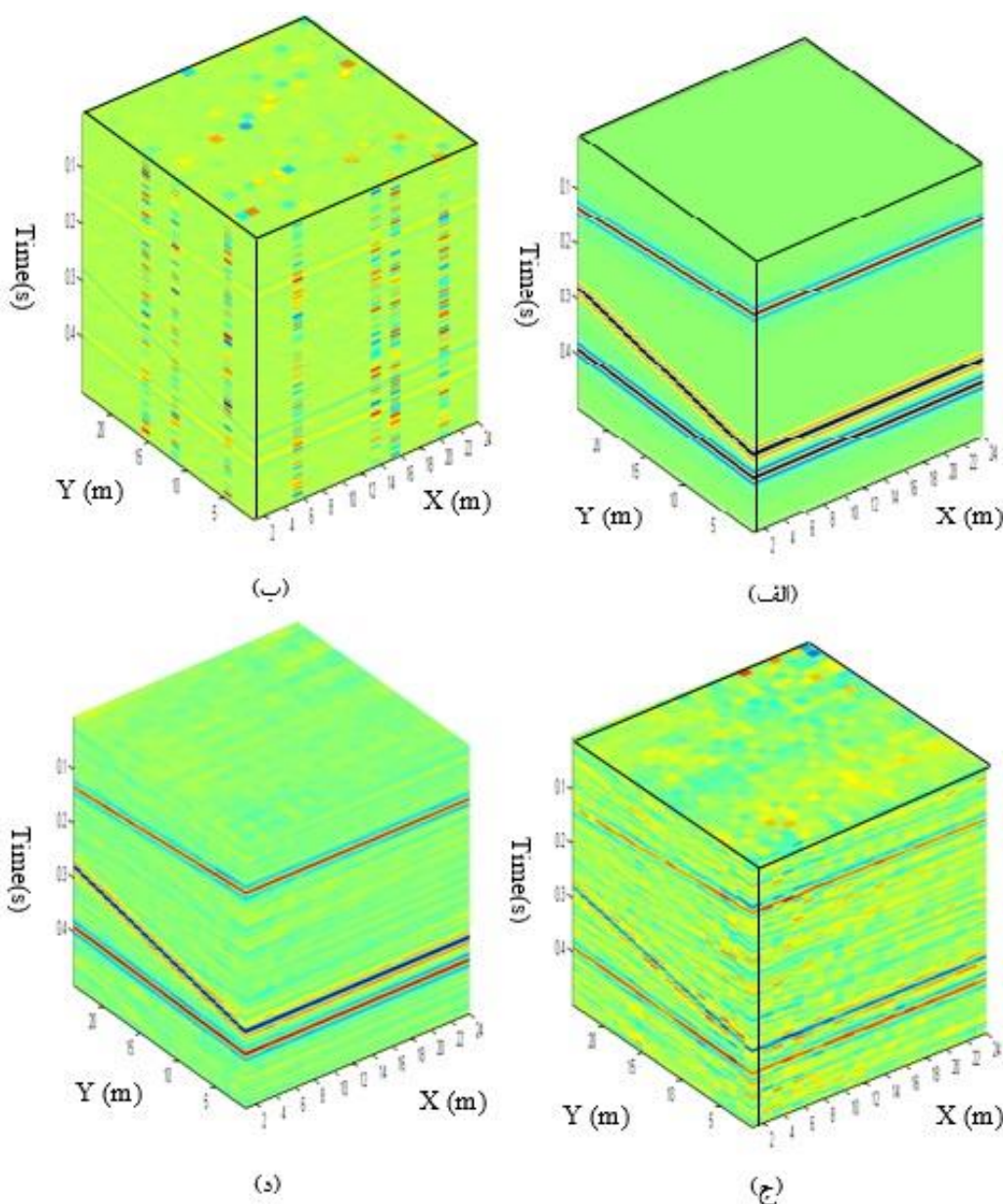


شکل ۴. الگوریتم مربوط به تکرار وزن‌دهی تقریب مرتبه پایین

## ۴. اعمال روش روی داده مصنوعی

به منظور بررسی کارایی فیلتر IRRR، مثال‌هایی از داده‌های مصنوعی و واقعی را که به نوفه‌های آشفته آلوده شده‌اند، به کار می‌بریم. شکل ۵ مکعب لرزه‌ای مصنوعی را با سه رویداد شبیه نشان می‌دهد که دامنه و شیب متفاوتی دارند. این مکعب از ۲۴ رد لرزه در راستای بخظ (X-line) و ۲۴ رد لرزه در راستای عمود بخظ (In-line) تشکیل شده است. موجک استفاده‌شده در اینجا، موجک ریگر با فرکانس مرکزی ۴۰ هرتز است و فاصله

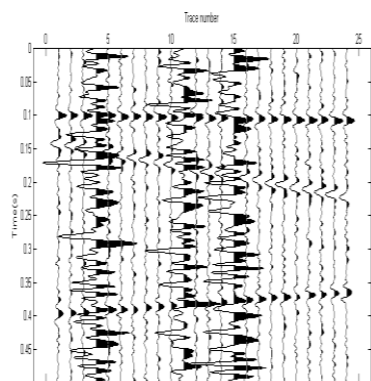
نمونه‌برداری،  $0/001$  ثانیه انتخاب شده است. به این مقطع نوفه تصادفی و آشفته را با نسبت سیگنال به نوفه  $0/09$  دسی‌بل اضافه کرده‌ایم. دو فیلتر MSSA-FXY و IRRR-FXY را به این مقطع اعمال می‌کنیم. فیلتر MSSA-FXY به خوبی این نوفه‌ها را تضعیف نمی‌کند (شکل ۵-ج). فیلتر IRRR-FXY علاوه بر تضعیف نوفه‌های تصادفی و آشفته، سیگنال اصلی را به خوبی بازیابی و پیوستگی خوبی ایجاد می‌کند (شکل ۵-د).



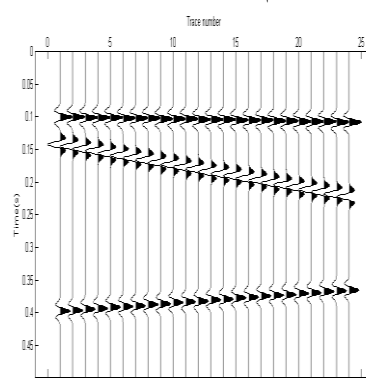
شکل ۵. تضعیف نوفه‌های تصادفی و آشفته از مقطع لرزه‌ای سه‌بعدی مصنوعی؛ (الف) داده ورودی بدون نوفه، (ب) داده ورودی به همراه نوفه تصادفی و آشفته، (ج) خروجی بعد از اعمال فیلتر MSSA و (د) بعد از اعمال فیلتر پیشنهادی (IRRR)



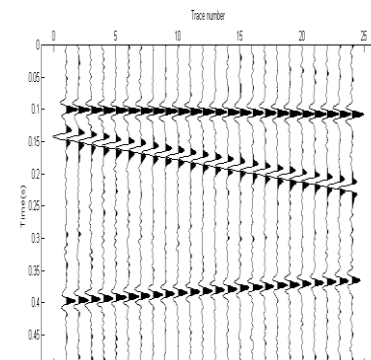
و تصادفی است. به منظور در نظر گرفتن شیب‌های ثابت جهت افزایش عملکرد فیلتر IRRR پنجره کوچکی از این رکورد را در نظر می‌گیریم (مستطیل مشکی رنگ). تعداد رد لرزه‌های انتخاب شده ۳۲ رد لرزه است که از شماره ۲۵۵ تا ۲۸۶ را در نظر گرفته‌ایم و در جهت محور زمان از ۱/۵ تا ۱/۹ ثانیه انتخاب شده است. با انتخاب این پنجره رویدادها تقریباً خطی هستند و می‌توانیم فیلتر طراحی شده را به آن اعمال کنیم. به منظور مقایسه عملکرد دو فیلتر SSA و IRRR، این دو فیلتر را به این مقطع واقعی اعمال می‌کنیم. همانطور که در شکل ۷-ب دیده می‌شود، نوفه‌های آشفته با دامنه بسیار بزرگ در داده ظاهر شده و کیفیت رکورد را به شدت کاهش می‌دهند. در شکل ۷-ج تضعیف نوفه به شکل نامطلوبی صورت گرفته است که نشان‌دهنده عملکرد نامناسب فیلتر SSA-FX در تضعیف نوفه‌های آشفته است. در شکل ۷-د که به‌ازای شش تکرار به دست آمده است، نوفه‌های تصادفی و آشفته به شکل مطلوبی حذف شده‌اند.



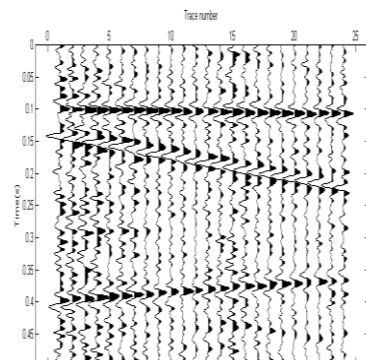
(ب)



(الف)



(د)



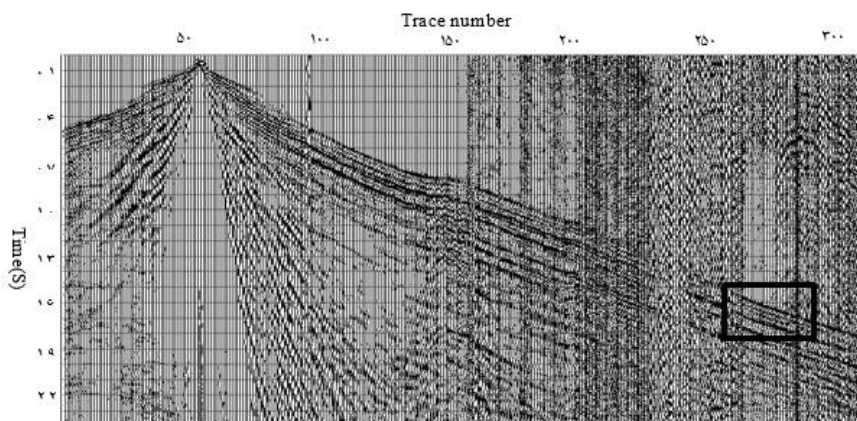
(ج)

در شکل ۵ ماتریس هنکل تشکیل شده از هر برش فرکانسی را به رتبه ۳ کاهش داده‌ایم. شکل ۵-د طی چهار مرتبه تکرار وزن‌دهی به دست آمده است. در مقطع سه‌بعدی به علت پیوستگی بین رویدادها، تکرار وزن‌دهی کمتری جهت به دست آمدن کیفیت مطلوب در مقایسه با مقطع دوبعدی مورد نیاز است. به منظور مقایسه بهتر نتایج، برشی از این مکعب‌ها را به ازای  $X=1$  جدا کرده و در شکل ۶ نشان داده‌ایم.

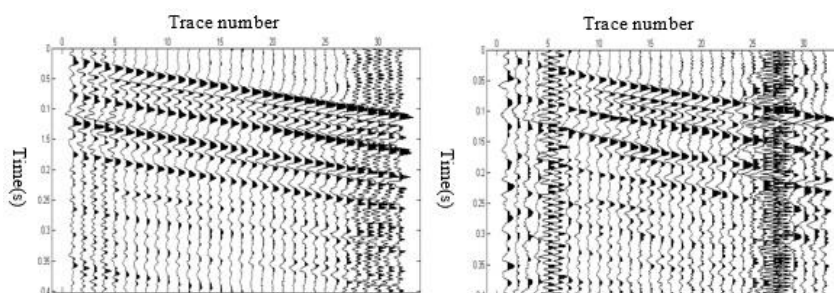
### ۵. اعمال روش روی داده واقعی

به منظور بررسی توانایی فیلتر IRRR در تضعیف نوفه‌های آشفته در رکوردهای لرزه‌ای بازتابی واقعی، این فیلتر را به یک رکورد لرزه‌ای چشمه مشترک اعمال کرده و نتایج آن را بررسی کرده‌ایم. در داده‌های واقعی نیز نوفه‌های متفاوتی ممکن است وجود داشته باشد. در شکل ۷-الف یک رکورد لرزه‌ای دوبعدی چشمه مشترک قبل از برنبارش را در نظر می‌گیریم که شامل نوفه‌های آشفته

شکل ۶. برشی از مکعب برنبارش شده شکل ۵ در  $X=1$ : (الف) بدون نوفه تصادفی و آشفته، (ب) داده ترکیب شده با نوفه‌های آشفته و تصادفی، (ج) خروجی بدست آمده از اعمال فیلتر MSSA و (د) خروجی بعد از اعمال فیلتر پیشنهادی (IRRR)

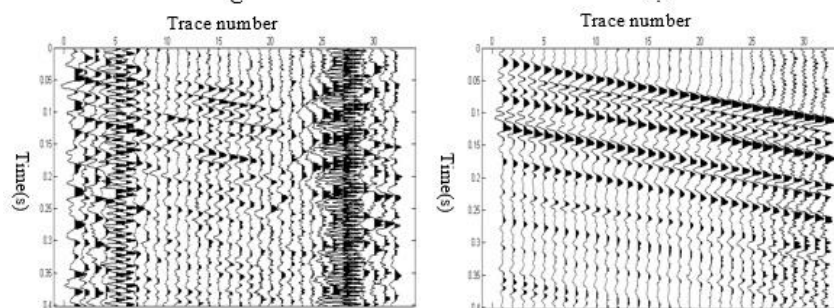


(الف)



(ج)

(ب)



(ه)

(د)

شکل ۷. (الف) داده واقعی دوبعدی به همراه نوفه‌های تصادفی و آشفته، (ب) نمایش قسمتی از داده اصلی که با مستطیل مشکی مشخص شده است، (ج) خروجی اعمال فیلتر SSA-FX، (د) خروجی اعمال فیلتر IRRR-FX و (ه) اختلاف بین (ب) و (د)

## ۶. بحث و نتیجه‌گیری

در این مطالعه روشی را برای حذف نوفه‌های آشفته از داده‌های لرزه‌ای در مقایسه با روش‌های مرسوم که بر اساس کاهش رتبه ماتریس عمل می‌کنند، معرفی کردیم. نشان دادیم که اگر در داده‌های لرزه‌ای تمامی نوفه‌ها از توزیع گوسی پیروی کنند و مقادیر آشفته‌ای نداشته باشند، فیلترهای بر پایه کاهش رتبه که بر اساس SVD عمل می‌کنند، به خوبی این نوفه‌ها را تضعیف می‌کنند. همچنین نشان دادیم که در حضور نوفه‌های آشفته که از توزیع گوسی پیروی نمی‌کنند، عملاً کارایی این فیلترها کاهش می‌یابد که به دلیل ضعف SVD است. در تضعیف

این نوفه‌ها از روش تکرار وزن دهی مرتبه پایین استفاده کردیم که به نوفه‌های آشفته حساس نیست. به این منظور تابع دووزنی توکی را جهت وزن‌دادن به داده‌ها انتخاب و تا رسیدن به همگرایی مطلوب این فرایند را تکرار کردیم. با این روش به نوفه‌های آشفته وزن‌های صفر دادیم و آن‌ها را از داده حذف کردیم. همچنین با استفاده از خاصیت MAD پارامتر آستانه‌ای را تعریف کردیم که نقش حیاتی در کارایی و پایداری روش دارد. کارایی روش با اعمال آن روی داده‌های لرزه‌ای مصنوعی و واقعی حاوی نوفه آشفته ارزیابی و نتایج رضایت‌بخش به دست آمده ارائه شد.

## مراجع

- Beaton, A. E. and Tukey, J. W., 1974, The fitting of power series, meaning polynomials, illustrated on band-spectroscopic data, *Technometrics*, 16(2), 147-185.
- Cadzow, J. A., 1988, Signal enhancement-a composite property mapping algorithm, *Acoustics, Speech and Signal Processing, IEEE Transactions on*, 36(1), 49-62.
- Chen, K., 2013, Robust matrix ranks reduction methods for seismic data processing, Master of Science in Geophysics, University of Alberta.
- Claerbout, J. F. and Muir, F., 1973, Robust modeling with erratic data, *Geophysics*, 38(5), 826-844.
- Holland, P. W. and Welsch, R. E., 1977, Robust regression using iteratively reweighted least-squares, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 6(9), 813-827.
- Huber, P. J., 1981, *Robust statistics*, Wiley, New York.
- Ji, J., 2011, Robust inversion using biweight norm, in 2011 SEG Annual Meeting, Society of Exploration Geophysicists.
- Maronna, R. A., Martin, R. D. and Yohai, V. J., 2006, *Robust statistics*, Wiley Chichester.
- Sacchi, M. D., 2009, FX singular spectrum analysis, in CSPG CSEG CWLS Convention.
- Scales, J. A. and Gersztenkorn, A., 1988, Robust methods in inverse theory, *Inverse problems*, 4(4), 1071.
- Schlossmacher, E., 1973, An iterative technique for absolute deviations curve fitting, *Journal of the American Statistical Association*, 68(344), 857-859.
- Srebro, N. and Jaakkola, T., 2003, Weighted low-rank approximations, in ICML.
- Trickett, S., 2002, F-x eigenimage noise suppression, in 2002 SEG Annual Meeting, Society of Exploration Geophysicists.
- Trickett, S., 2008, F-xy Cadzow noise suppression, in 78<sup>th</sup> Annual International Meeting, SEG, Expanded Abstracts.
- Trickett, S. and Burroughs, L., 2009, Prestack rank-reduction based noise suppression, *Canadian Society of Exploration Geophysicists*, 924-931.
- Ulrych, T. J., Freire, S. and Siston, P., 1988, Eigenimage processing of seismic sections, 58<sup>th</sup> Annual Internat, Mtg., Soc. Expl. Geophys., Expanded Abstracts, Session: S22.4.
- Watt, T. and Bednar, J., 1983, Role of the alpha-trimmed mean in combining and analyzing seismic common-depth-point gathers, in 1983 SEG Annual Meeting, Society of Exploration Geophysicists.