

مدل‌سازی میدان گرانش محلی با استفاده از توابع پایه هارمونیک و مشاهدات برداری شتاب گرانش هوایی، مطالعه موردی: مدل‌سازی میدان گرانش در شمال‌شرق کشور تانزانیا

محسن فیضی^۱ و مهدی روفیان نایینی^{۲*}

۱. دانشجوی دکتری، گروه ژئودزی، دانشکده مهندسی نقشه‌برداری، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران

۲. استادیار، گروه ژئودزی، دانشکده مهندسی نقشه‌برداری، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران

(دریافت: ۹۶/۱۰/۳، پذیرش نهایی: ۹۷/۳)

چکیده

در این مقاله با استفاده از مشاهدات گرانی‌سنجی هوایی برداری در منطقه‌ای از کشور تانزانیا، مدل‌سازی محلی میدان گرانش با استفاده از دو روش مختلف و بر مبنای بسط به توابع هارمونیک محلی صورت می‌گیرد. بدین‌منظور، در روش اول، جواب مسأله مقدار مرزی دیرخه برای معادله لاپلاس، با مقادیر مرزی تعریف‌شده در محدوده یک کلاهک کروی حل می‌شود. در این حالت جواب معادله لاپلاس بر مبنای ترکیب خطی توابع لژاندر وابسته از مرتبه صحیح و درجه غیرصحیح بیان می‌شود، که به توابع هارمونیک کلاه کروی معروف هستند. در روش دوم، معادله لاپلاس در سیستم مختصات کارتزین محلی حل می‌شود و مقادیر مرزی در این حالت در یک محدوده مسطح از سطح زمین در نظر گرفته می‌شوند. در این روش، جواب معادله لاپلاس، برحسب ترکیب توابع مثلثاتی به‌عنوان توابع پایه بیان می‌شود، که به آنها، هارمونیک‌های مستطیلی گفته می‌شود. به‌منظور بررسی کارایی هر یک از روش‌های ذکر شده، از مشاهدات گرانی‌سنجی هوایی برداری بر فراز منطقه‌ای در تانزانیا جهت برآورد پارامترهای هر مدل (ضرایب هارمونیک هر مدل) استفاده شده است. کمترین مقدار اختلافات بین مدل هارمونیک مستطیلی و نقاط کنترل برای درجه‌ی ۸۰ (به‌عنوان درجه‌ی بهینه‌ی بسط) در مناطق داخلی حدود ۲ تا ۳ میلی‌گال و برای مناطق لبه‌ای بین ۸ تا ۹ میلی‌گال حاصل شد. کمترین مقدار اختلافات بین مدل هارمونیک کلاه کروی و نقاط کنترل برای درجه ۱۰۰ (به‌عنوان درجه بهینه بسط) در مناطق داخلی کمتر از یک میلی‌گال و حدود ۳ میلی‌گال برای مناطق لبه‌ای به‌دست آمد.

واژه‌های کلیدی: آنالیز هارمونیک کلاه کروی، آنالیز هارمونیک مستطیلی، میدان گرانش محلی، گرانی‌سنجی هوایی، مدل ژئوپتانسیل.

۱. مقدمه

مدل‌سازی محلی میدان گرانش یک نیاز ضروری برای مطالعه میدان گرانش و انجام کاربردهای مهندسی در ژئوفیزیک، ژئودینامیک، زلزله‌شناسی، اکتشاف معدن و دیگر علوم زمین می‌باشد. تاکنون روش‌های مختلفی برای مدل‌سازی محلی میدان گرانش ارزیابی و استفاده شده است. با توجه به اینکه پتانسیل گرانش در خارج جرم در صورت حذف نیروی جزر و مد در معادله‌ی لاپلاس صدق می‌کند، بنابراین استفاده از توابع هارمونیک پرکاربردترین روش برای مدل‌سازی محلی میدان گرانش می‌باشد. در این راستا، استفاده از هارمونیک‌های کروی به‌عنوان توابع پایه شناخته‌شده جهت مدل‌سازی جهانی میدان گرانش، متداول است. متأسفانه مدل‌های جهانی قادر به بیان اثرات فرکانس بالای میدان گرانش زمین

نوده و رزولوشن آنها در کاربردهای محلی محدود می‌باشد. بدین‌منظور برای افزایش دقت در کاربردهای محلی، مدل‌سازی محلی میدان گرانش مدنظر قرار می‌گیرد. یکی از روش‌های شناخته‌شده در این زمینه استفاده از توابع پایه با محمل محلی (Local support) مانند توابع پایه شعاعی، یا توابع اسپیلاین است. در این روش، اساس کار انتخاب تابع پایه مناسب و تعیین پارامترهای آن است. از معایب این روش آن است که مدل ارائه‌شده فاقد مفهوم فیزیکی مربوط به میدان گرانش بوده و مدل‌سازی محلی به یک مسأله درونیایی تغییر پیدا می‌کند (دی سنتیس و همکاران، ۱۹۹۹).

روش دیگر برای حل این موضوع آن است که مسأله مقدار مرزی معادله لاپلاس به‌صورت محلی حل شود. در

مدل‌های جهانی، معادله لاپلاس با فرض در اختیار بودن مقادیر مرزی بر کل کره زمین حل می‌شود و جواب آن، بر طبق قضیه رنکه، قابل نمایش برحسب بسط به سری هارمونیک‌های کروی خواهد بود. در مدل‌سازی محلی، به‌جای آنکه اطلاعات در کل کره زمین در اختیار باشد، فرض می‌شود که اطلاعات گرانشی بر محدوده‌ای به شکل کلاهک کروی، یا برای مناطقی با وسعت کمتر، در محدوده‌ای مسطح در اختیار باشد. در این شرایط جواب معادله لاپلاس برحسب توابع پایه دیگری تحت عنوان هارمونیک‌های کلاه کروی یا مستطیلی بیان می‌شود. هینز (۱۹۸۵)، تئوری هارمونیک‌های کلاه کروی را برای مدل‌سازی میدان مغناطیس ارائه کرد. این تئوری امکان حل معادله لاپلاس را با در نظر گرفتن مقادیر مرزی بر روی محدوده‌ای به شکل کلاه کروی فراهم می‌کند. در این مدل، مرز مسأله کلاه کروی است که قطب آن روی مرکز منطقه مورد مطالعه قرار دارد (شکل ۱). بر مبنای این روش جواب معادله لاپلاس، با مقادیر مرزی تعریف‌شده بر روی ناحیه‌ای به شکل کلاه کروی، قابل نمایش به‌صورت بسط سری هارمونیک‌های کروی از درجه حقیقی و مرتبه صحیح می‌باشد. به‌عبارت‌دیگر برخلاف بسط سری هارمونیک‌های کروی، با مقادیر مرزی کره، که در آن هارمونیک‌های کروی تنها از درجه و مرتبه صحیح ظاهر می‌شوند، در اینجا درجه هارمونیک‌های کروی هر عددی می‌تواند باشد و لذا نمایش ریاضی آنها برحسب چندجمله‌ای‌های لژاندر وابسته نخواهد بود (دبالت و همکاران، ۲۰۰۴؛ دبالت و همکاران، ۲۰۰۶). مدل هارمونیک کلاه کروی در کاربردهای ژئودتیک هم مورد استفاده قرار گرفته است که از میان آنها می‌توان به چندین مورد اشاره کرد. دی سنتیس و همکاران (۱۹۹۷)، این روش را برای مدل‌سازی نوسان ژئوتید و تعیین مؤلفه‌های انحراف قائم به‌کار گرفت. لیو و همکاران (۲۰۱۱) مدل‌سازی و پیش‌بینی (TEC (Total Electron Content را با استفاده از توابع پایه هارمونیک کلاه کروی انجام دادند و مدل

محلی ایجادشده را با مدل‌های جهانی مقایسه کردند. هاونگ و همکاران (۲۰۱۱) جهت تعیین عمق پوسته زمین از مدل محلی هارمونیک کلاه کروی استفاده کردند. آنها ابتدا نوسان ژئوتید و آناملوی جاذبه را در کره جنوبی مدل‌سازی نموده و سپس آناملوی حاصل از مدل محلی ایجادشده را در تعیین عمق پوسته زمین به‌کار بردند. یونس و همکاران (۲۰۱۳) با تشکیل گرید منظم حاصل از مدل ژئوتانسیل EGM2008 در منطقه مورد مطالعه و محلی کردن سیستم مختصات مشاهدات، ضرایب مدل محلی میدان گرانش را با بسط مشاهدات به سری هارمونیک کلاه کروی به‌دست آوردند. یونس و همکاران (۲۰۱۵) مطالعه دیگری در این رابطه انجام داد. در این مطالعه اخیر، او با تلفیق مشاهدات گرانشی زمینی و مشاهدات ارتفاع اورتومتريک، ارتفاع ژئوتید محلی را با استفاده از روش هارمونیک کلاه کروی به‌دست آورد. غفاری رزین و وثوقی (۲۰۱۶) با استفاده از توابع پایه هارمونیک کلاه کروی، مدل‌سازی چگالی الکترونی در یونسفر را انجام دادند. فیضی و رئوفیان نائینی (۲۰۱۷) با استفاده از مدل جهانی Eigen 06c4 مشاهدات گرانش هوایی برداری را در منطقه‌ی شمال غرب ایران شبیه‌سازی کردند. سپس با استفاده از روش مدل‌سازی هارمونیک کروی اصلاح‌شده، میدان گرانش محلی را در راستای شعاعی مدل‌سازی کردند و نهایتاً با استفاده از نقاط کنترل، صحت مدل‌سازی محلی را مورد بررسی قرار دادند. در کنار روش هارمونیک کلاه کروی روش دیگری به‌نام آنالیز هارمونیک مستطیلی (Rectangular harmonic analysis) جهت استفاده در مدل‌سازی محلی میدان گرانش وجود دارد. این روش اولین بار برای مدل‌سازی میدان مغناطیس توسط الردگ (۱۹۸۱) ارائه شد. او همچنین نشان داد که این روش توانایی ایجاد یک مدل طیفی بسیار مناسب و با رزولوشن بالا برای مناطق با ابعاد کوچک را دارد. همچنین به‌دلیل مثلثاتی بودن توابع، محاسبات آن در درجه و مرتبه بالاتر بسیار پایدارتر و همگرایی سریع‌تری را خواهد داشت (هینز، ۱۹۸۵؛

(هینز ۱۹۸۵):

$$V(r, \theta_0, \lambda) = f(r, \lambda) \quad (۱)$$

$$\frac{\partial V(r, \theta_0, \lambda)}{\partial \theta} = g(r, \lambda) \quad (۲)$$

توابع f و g در شرایط مرزی و رگولاریتی مربوط به V صدق می کنند (هینز، ۱۹۸۵). می توان نشان داد که برای برقراری شرایط فوق باید مقدار n به گونه ای تعیین شود که به ازای تمامی m ها دو شرط زیر برقرار شود (هینز، ۱۹۸۵):

$$\frac{\partial V_n^m(r, \theta_0, \lambda)}{\partial \theta} = 0 \quad (۳)$$

$$V_n^m(r, \theta_0, \lambda) = 0 \quad (۴)$$

از آنجا که تابع V و مشتق آن به طور هم زمان نمی تواند در $\theta = \theta_0$ صفر گردند، لذا برقراری شرط (۳) منجر به برقراری شرط مرزی (۱) و برقراری شرط (۴) منجر به برقراری شرط مرزی (۲) می گردد. شرایط (۳) و (۴) به ازای برخی مقادیر حقیقی n برقرار می گردند و از آنجا که این مقادیر در حالت کلی وابسته به m می باشند، آن ها را با $n_k(m)$ نمایش می دهیم. k یک عدد صحیح است که ریشه های مختلف n را به ازای هر m مرتب می کند. به علاوه می توان نشان داد (هینز، ۱۹۸۵):

$$V_{n_k(m)}^m(r, \theta_0, \lambda) = 0, \quad k - m = \text{odd} \quad (۵)$$

$$\frac{\partial V_{n_k(m)}^m(r, \theta_0, \lambda)}{\partial \theta} = 0, \quad k - m = \text{even} \quad (۶)$$

بر این اساس، جواب معادله لاپلاس برای مقادیر مرزی کلاهک کروی به صورت زیر بیان می شود (هینز، ۱۹۸۵):

$$V(r, \theta, \lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=m}^{\infty} R \left(\frac{R}{r} \right)^{n_k(m)+1} \cdot \left\{ g_k^m \cos(m \lambda) + h_k^m \sin(m \lambda) \right\} \cdot P_{n_k(m)}^m(\cos \theta) \quad (۷)$$

الردگ، (۱۹۸۱) یکی از مشکلات این روش، خطای لبه ای زیاد می باشد. این خطا به دلیل استفاده از توابع پایه دارای نوسانات زیاد بوده که به نوبه خود امکان وقوع پدیده گیس را افزایش می دهد. به همین جهت، مدل های اصلاح شده ای برای آن مطرح شد. مالین و همکاران (۱۹۹۶) با افزودن برخی ترم های تصحیحی، ترکیب خطی جدیدی را ایجاد نمودند و با استفاده از این تکنیک دقت روش هارمونیک مستطیلی را هم در داخل و هم در لبه ها افزایش دادند. ژیانگ (۲۰۱۴) از مشاهدات گرانش شبیه سازی شده جهت مدلسازی محلی میدان گرانش با استفاده از روش هارمونیک مستطیلی استفاده کرد. در این مقاله، مدلسازی محلی میدان گرانش در منطقه تانزانیا با استفاده از مشاهدات گرانی سنجی هوایی و با دو روش هارمونیک کلاه کروی و مستطیلی مدنظر قرار گرفته و نتایج دو روش با یکدیگر مقایسه شده اند.

۲. حل معادله لاپلاس در سیستم مختصات کلاه کروی

در روش (SCHA) (Spherical Cap Harmonic Analysis)، تابع هارمونیک V ، به عنوان جواب معادله لاپلاس، باید در شرایط مرزی بر روی محدوده کلاه کروی صدق کند. این محدوده در شکل ۱ نمایش داده شده است. مطابق شکل، محور z سیستم مختصات زمین مرجع از مرکز کلاهک کروی می گذرد و لذا محدوده کلاهک کروی در سیستم مختصات کروی ناحیه $(\theta, \lambda) \in [0, \theta_0] \times [0, 2\pi]$ خواهد بود. زاویه θ_0 محدوده کلاه کروی و منحنی مرزی آن را نشان می دهد. در حالی که داده های مشاهداتی در محدوده ای به شکل کلاه کروی قرار داشته باشند، علاوه بر شرایط مرزی معمول به منظور حل معادله لاپلاس (رگولار بودن و کراندار بودن جواب)، دو شرط مرزی دیگر نیز در $\theta = \theta_0$ باید مدنظر قرار گیرد، این شرایط مرزی به صورت زیر بیان می شوند

استفاده از اعمال تبدیلاتی، تابع لژاندر مورد استفاده را به تابع لژاندر با درجه و مرتبه صحیح تبدیل کرد (دی سنتیس، ۱۹۹۲). او تبدیل مقیاسی را مطابق رابطه زیر در نظر گرفت:

$$\theta' = S\theta, \lambda' = \lambda, r' = r \quad (11)$$

که در آن k ضریب مقیاس و مقدار آن برابر با $\pi/2\theta_0$ می باشد. با این تبدیل، سیستم مختصات کلاه کروی به سیستم مختصات نیم کره (θ', λ', r') تبدیل می گردد (دی سنتیس، ۱۹۹۲). از طرفی، تابع لژاندر با درجه k حقیقی در روش SCHA به تابع لژاندر با درجه k صحیح تبدیل می گردد. لذا در سیستم مختصات جدید می توان رابطه (V) را به صورت زیر بازنویسی نمود (دی سنتیس، ۱۹۹۲).

$$V(r', \theta', \lambda') = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^n R \left(\frac{r'}{r}\right)^{n+1} \begin{Bmatrix} C'_{nl} \cos(n\lambda') \\ + S'_{nl} \sin(n\lambda') \end{Bmatrix} P_{nl}(\cos \theta') \quad (12)$$

که در آن

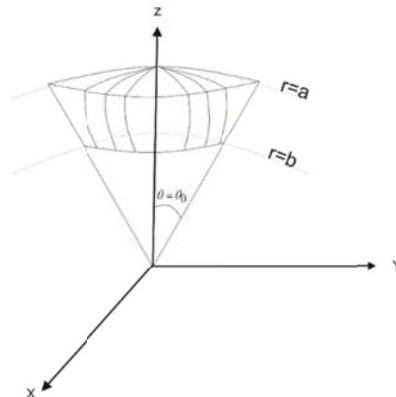
$$n(k) = \sqrt{S^2 k(k+1) + .25} - 0.5 \quad (13)$$

۳. حل معادله‌ی لاپلاس در سیستم مختصات کارتیزین

ایده روش آنالیز هارمونیک مستطیلی توسط الردگ در سال ۱۹۸۱ ارائه شد. این روش بر مبنای استفاده از سیستم مختصات کارتیزین محلی بوده و برای مناطق با ابعاد کوچک استفاده می شود (شکل ۱). با در نظر گرفتن مقادیر مرزی بر روی کلاهک کروی و تبدیل به سیستم مختصات کارتیزین محلی، معادله‌ی لاپلاس در سیستم مختصات کارتیزین به صورت زیر برقرار می شود:

$$\nabla^2 V(x, y, z) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad (14)$$

با حل معادله فوق در سیستم مختصات کارتیزین، سری هارمونیک مستطیلی به صورت زیر حاصل می شود (الردگ، ۱۹۸۱):



شکل ۱. محدوده کلاه کروی و سیستم مختصات مربوط به آن با استفاده از موقعیت قطب کلاه کروی و زاویه θ_0 (لیو و همکاران، ۲۰۱۱).

که ترم های زیر در رابطه ی فوق

$$P_{n_k(m)}^m(\cos \theta) \cos m \lambda, P_{n_k(m)}^m(\cos \theta) \sin m \lambda \quad (8)$$

هارمونیک های کلاه کروی نام دارند. این توابع، دو دسته توابع پایه متعامد به ازای $k - m = \text{even}$ و $k - m = \text{odd}$ بر روی سطح کلاه کروی تشکیل می دهند (دی سنتیس، ۱۹۹۲). شرط لازم و کافی برای برقراری روابط (۵) و (۶) آن است که

$$\frac{\partial P_{n_k(m)}^m(\cos \theta_0)}{\partial \theta} = 0, \quad k - m = \text{even} \quad (9)$$

$$P_{n_k(m)}^m(\cos \theta_0) = 0, \quad k - m = \text{odd} \quad (10)$$

تابع لژاندری که در شروط فوق صدق می کند تابع لژاندر با درجه حقیقی و مرتبه صحیح می باشد که در آن درجه حقیقی هارمونیک کلاه کروی $n_k(m)$ باید از حل معادلات (۹) و (۱۰) حاصل شود.

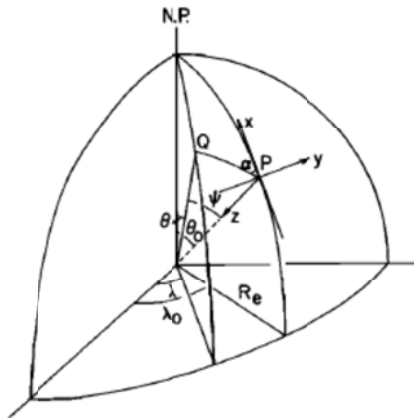
۲-۱. روش هارمونیک کلاه کروی اصلاح شده

(Adjusted spherical cap harmonic (ASHA))

در روش هارمونیک کلاه کروی، توابع لژاندر دارای درجه حقیقی $n_k(m)$ می باشند. به دلیل اینکه محاسبه $n_k(m)$ با استفاده از روابط (۹) و (۱۰)، به صورت بازگشتی و زمان بر می باشد، دی سنتیس در سال ۱۹۹۲ با

$$\begin{aligned}
 V(x, y, z) = & Ax + By + Cz + \sum_{q=1}^{K_{\max}-1} \sum_{i=1}^q \left\{ D_{ij} \cos\left(\frac{i2\pi x}{L_x}\right) \cos\left(\frac{j2\pi y}{L_y}\right) + \right. \\
 & E_{ij} \cos\left(\frac{i2\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{j2\pi y}{L_y}\right) + F_{ij} \sin\left(\frac{i2\pi x}{L_x}\right) \cos\left(\frac{j2\pi y}{L_y}\right) + \\
 & \left. G_{ij} \sin\left(\frac{i2\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{j2\pi y}{L_y}\right) \right\} e^{z \sqrt{\left(\frac{i2\pi x}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{j2\pi y}{L_y}\right)^2}}
 \end{aligned} \quad (15)$$

مختصات کلاه کروی با استفاده از موقعیت مرکز کلاه کروی و زاویه θ_0 تعریف می‌شود (شکل ۲). نصف‌النهار مبدأ در اینجا همان نصف‌النهار گذرنده از قطب شمال واقعی، قطب جدید و قطب جنوب می‌باشد. α آزیموت فاصله کروی از مرکز قطب تا نقطه موردنظر، ψ فاصله کروی از مرکز قطب تا نقطه P ، و نهایتاً، r فاصله شعاعی از مرکز زمین تا نقطه موردنظر است (شکل ۳).



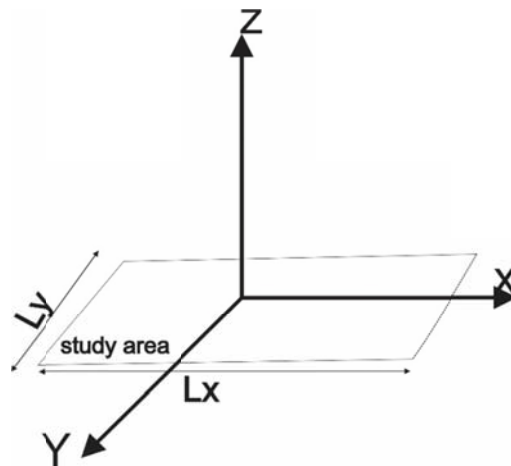
شکل ۳. ارتباط بین سیستم مختصات جغرافیایی و سیستم مختصات spherical cap (لیو و همکاران، ۲۰۱۱).

جهت دوران قطب و تبدیل از سیستم مختصات کروی به سیستم مختصات کلاه کروی از روابط زیر استفاده می‌شود (غفاری و وثوقی، ۲۰۱۶):

$$\cos(\psi) = \cos(\theta_p) \cos(\theta) + \sin(\theta_p) \sin(\theta) \cos(\lambda - \lambda_p) \quad (16)$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\theta) \sin(\lambda - \lambda_p)}{\sin(\lambda_p) \cos(\theta) - \cos(\theta_p) \sin(\theta) \cos(\lambda - \lambda_p)} \quad (17)$$

که در آن $j = q - i + 1$ است (الردگ، ۱۹۸۱). در معادله بالا $A, B, C, D_{i,j}, E_{ij}, F_{ij}, G_{ij}$ ضرایب هارمونیک مستطیلی می‌باشد. پارامترهای L_x و L_y نیز بیانگر طول منطقه مورد محاسبه در جهت شرقی غربی (Y) و شمالی جنوبی (X) می‌باشند (شکل ۲).



شکل ۲. پارامترهای سیستم مختصات کارتیزین محلی.

۴. سیستم مختصات کلاهک کروی و مستطیلی

سیستم مختصات مورد استفاده در دو روش فوق بر مبنای سیستم مختصات کلاه کروی می‌باشد، با این تفاوت که در روش هارمونیک مستطیلی می‌بایست فرم کارتیزین این سیستم مختصات مورد استفاده قرار گیرد. سیستم

در روابط فوق (θ, λ) عرض و طول جغرافیایی داده‌ها در سیستم مختصات کروی و (θ_p, λ_p) مختصات عرض و طول جغرافیایی مرکز کلاه کروی (قطب جدید) می‌باشند. به علاوه (ψ, α) مختصات نقاط نسبت به سیستم SCH است. همچنین ارتباط بین سیستم مختصات کارترین محلی و سیستم مختصات کلاه کروی به صورت زیر بیان می‌شود (غفاری و وثوقی، ۲۰۱۶):

$$\begin{aligned} x &= R_e \sin \psi \cos \alpha \\ y &= -R_e \sin \psi \sin \alpha \\ z &= R_e (1 - \cos \psi) \end{aligned} \quad (18)$$

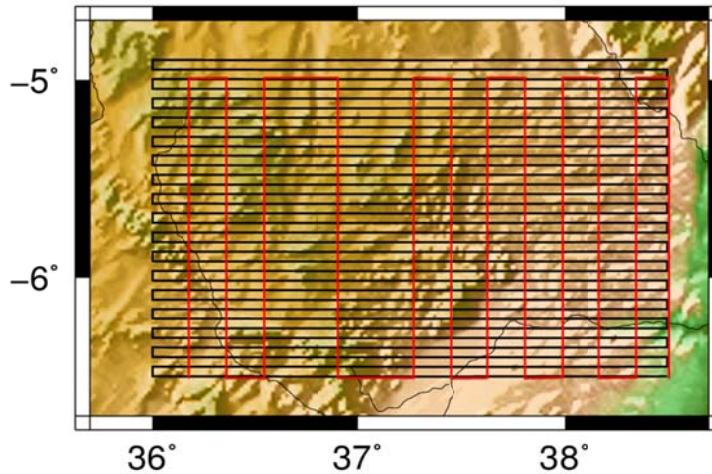
در رابطه‌ی فوق R_e شعاع متوسط کره‌ی زمین می‌باشد.

۵- مطالعه‌ی عددی

۵-۱. مدل‌سازی محلی

در این مطالعه، داده‌های گرانی‌سنجی هوایی برداری در منطقه کوهستانی واقع در کشور تانزانیا با محدوده عرض جغرافیایی $-6.6 < \phi < -4.9$ و طول جغرافیایی $35.9 < \lambda < 38.6$ استفاده می‌شود. این اطلاعات توسط شرکت (Sander Geophysics) و به درخواست وزارت معادن و انرژی کشور تانزانیا و به منظور انجام مأموریت جهت اکتشاف معادن زیرزمینی در سال ۲۰۱۳، تهیه شده است. به جهت مزیت مشاهدات برداری نسبت به مشاهدات اسکالر در روش گرانی‌سنجی هوایی، مخصوصاً در تعیین عمق توده‌ی جرمی، از مشاهدات گرانش هوایی برداری استفاده شده است (شوارز و همکاران، ۲۰۰۱). این مشاهدات از تلفیق شتاب حاصل GPS/INS در سیستم مختصات ناوبری به دست می‌آید.

وسعت منطقه مورد مطالعه در سیستم مختصات کارترین محلی در جهت X برابر با ۲۲۳ کیلومتر و در جهت Y برابر با ۲۶۷ کیلومتر می‌باشد. علاوه بر اینکه منطقه دارای عوارض کوهستانی می‌باشد، در کنار آن مناطق پست و هموار نیز قرار دارد به طوری که می‌توان اختلاف ارتفاع ۲۰۰۰ متوسط متری را شاهد بود. بنابراین تغییرات شتاب گرانش در این منطقه نیز بسیار محسوس خواهد بود. بر طبق محاسبات انجام گرفته، اختلاف کمینه و بیشینه شتاب گرانش در منطقه مورد مطالعه، چیزی در حدود ۲۵۰ میلی‌گال می‌باشد. مأموریت‌های پروازی صورت گرفته شامل ۶۸ خط پروازی و با متوسط ارتفاع ۱۱۷۰ متر از بیضوی رفرنس WGS84 می‌باشند (شکل ۴). به علاوه به جهت کنترل، چندین خط پرواز نیز عمود بر خطوط پروازی اصلی صورت گرفته تا صحت مشاهدات تأیید شود. مجموعاً ۳۷۹۵۱ مشاهده برداری شتاب گرانش هوایی جمع‌آوری شده است و تقریباً همه آنها در مطالعه مورد نظر، استفاده شده است. در این مطالعه ۱۰۰ عدد از مشاهدات به عنوان نقطه کنترل در نظر گرفته شده است. توزیع این نقاط به گونه‌ای است که بخشی از آنها در داخل پراکنده شده و برخی دیگر در لبه‌های منطقه مورد مطالعه توزیع شده است. دلیل این امر بررسی خطای لبه‌ای (edge-effect) و مقایسه آن با دقت مدل‌سازی در داخل منطقه مورد مطالعه می‌باشد. این خطا رابطه مستقیمی با نحوه توزیع داده دارد و در مناطقی که در تمام جهت داده‌های مشاهداتی وجود دارد، مدل مورد استفاده مقید شده و به خوبی می‌تواند عمل مدل‌سازی را انجام دهد اما برای مناطقی که در اطراف یا بخشی از محدوده اطراف آن اطلاعات و مشاهدات وجود ندارد، مدل دارای آزادی بیشتری می‌شود و به خوبی نمی‌تواند بر مشاهدات در آن منطقه برازش را انجام دهد.



شکل ۴. مسیر پرواز صورت گرفته بروی کشور تانزانیا (رنگ مشکی)، مسیر پرواز صورت گرفته به‌عنوان کنترل (رنگ قرمز).

$$g_y = -B + \sum_{q=1}^{K_{max}-1} \sum_{i=1}^q iW[D_{ij} \cos(ivx) \sin(jwy) - E_{ij} \sin(ivx) \sin(jwy) - F_{ij} \cos(ivx) \cos(iwy) - G_{ij} \sin(ivx) \cos(jwy)]H \quad (21)$$

$$g_z = -C + \sum_{q=1}^{K_{max}-1} \sum_{i=1}^q u[D_{ij} \cos(ivx) \cos(jwy) + E_{ij} \sin(ivx) \sin(jwy) + F_{ij} \sin(ivx) \cos(iwy) - G_{ij} \sin(ivx) \sin(jwy)]H \quad (22)$$

که در روابط فوق $v = 2\pi/L_x$ ، $j = q - i + 1$

$$u = [(iv)^2 + (iw)^2]^{1/2} \quad , \quad w = 2\pi/L_y$$

می‌باشند. با در نظر گرفتن رابطه‌ی (۱۹)، برای روش هارمونیک کلاه کروی اصلاح‌شده، و روابط (۲۰)، (۲۱) و (۲۲) برای روش هارمونیک مستطیلی دستگاه معادلات نرمال بصورت رابطه‌ی (۲۳) تشکیل می‌شود.

$$b + v = Ax \quad (23)$$

در عبارت فوق b بردار مشاهدات، x بردار مجهولات (ضرایب بسط)، A ماتریس طراحی و v بردار خطاهای اتفاقی مشاهدات می‌باشد. به جهت بدو وضعی ماتریس ضرایب، می‌بایست از روش‌های پایدارسازی جهت حل مسأله بد وضع و تخمین ضرایب مدل استفاده شود. در اینجا از روش پایدارسازی تیخونوف استفاده شده است. در

۲-۵. محاسبه و تخمین ضرایب

با توجه به اینکه میدان جاذبه یک میدان شعاعی می‌باشد و شتاب جاذبه در راستای شعاعی دارای مقدار بسیار بزرگی تری نسبت به دو مؤلفه دیگر در سیستم مختصات کروی است و همچنین به دلیل ناچیز بودن مقدار شتاب جاذبه در جهات عرض جغرافیایی و طول جغرافیایی، برای مدل‌سازی تنها از مؤلفه شتاب گرانش در راستای شعاعی در سیستم مختصات کلاه کروی استفاده شده است. جهت این کار با مشتق‌گیری در راستای شعاعی از رابطه (۱۲)، شتاب گرانش در راستای شعاعی به صورت زیر حاصل می‌شود.

$$g_r = -\frac{\partial V(r, \theta, \lambda)}{\partial r} = \sum_{m=0}^{K_{max}} \sum_{k=0}^m (n_k(m) + 1) \left(\frac{a}{r}\right)^{n_k(m)+2} P_m^m(\cos \theta) \{g_k^m \cos(m \lambda) + h_k^m \sin(m \lambda)\} \quad (19)$$

همچنین بردار شتاب گرانش در سیستم مختصات کارتزین محلی با استفاده از روش هارمونیک مستطیلی به صورت زیر بیان می‌شود.

$$g_x = -A + \sum_{q=1}^{K_{max}-1} \sum_{i=1}^q iv[D_{ij} \sin(ivx) \cos(jwy) + E_{ij} \sin(ivx) \sin(jwy) - F_{ij} \cos(ivx) \cos(iwy) - G_{ij} \cos(ivx) \sin(jwy)]H \quad (20)$$

پارامتر پایداری بهینه، نقطه‌ای از منحنی $\Phi(x)$ با هم کمینه می‌شوند. در واقع، هدف مینیم کردن $\Phi(x)$ در رابطه‌ی شماره (۲۴) می‌باشد. در این رابطه λ پارامتر پایداری است که با استفاده از روش منحنی ال به دست می‌آید (هنسن، ۲۰۰۵). تابع هدف در این حالت به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\Phi(x) = \|Ax - b\|_2^2 + \lambda^2 \|x\|_2^2 \quad (24)$$

جهت تعیین پارامتر پایداری با استفاده از روش منحنی ال (L-Curve) ابتدا مقادیر $\|x\|_2^2$ در مقابل مقادیر $\|Ax - b\|_2^2$ به صورت لگاریتمی رسم می‌شود. نمودار حاصل دارای گوشه‌ای به شکل L می‌باشد که بیانگر این ویژگی است که هم نرم باقیمانده‌ها و هم نرم جواب به طور بهینه‌ای مینیم می‌گردد، و با استفاده از آن می‌توان پارامتر پایداری بهینه را تعیین کرد (شکل ۵).

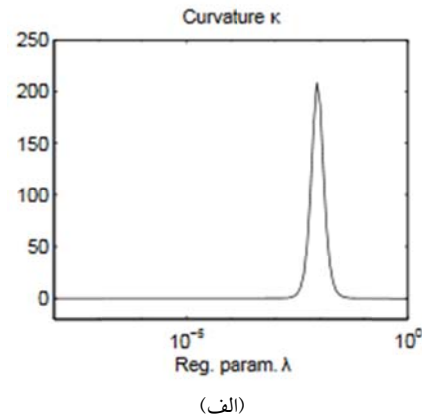
ک

که مشتقات اول و دوم توابع $\rho(\lambda)$ و $\eta(\lambda)$ به صورت زیر می‌باشد.

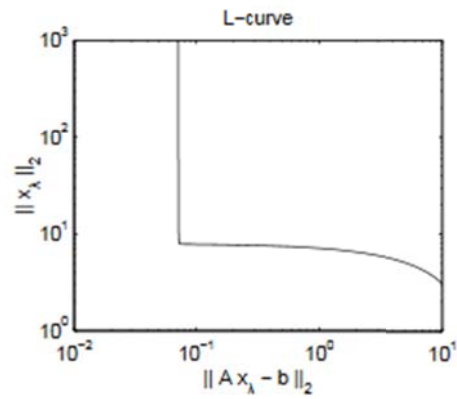
$$\begin{aligned} \rho' &= \frac{1}{\|Ax_\lambda - b\|_2} \left(\frac{d\|Ax_\lambda - b\|_2}{d\lambda} \right), \\ \rho'' &= \frac{1}{\|Ax_\lambda - b\|_2^2} \left(\frac{d^2\|Ax_\lambda - b\|_2}{d\lambda^2} \|Ax_\lambda - b\|_2 - \left(\frac{d\|Ax_\lambda - b\|_2}{d\lambda} \right)^2 \right) \\ \eta' &= \frac{1}{\|x_\lambda\|_2} \left(\frac{d\|x_\lambda\|_2}{d\lambda} \right), \\ \eta'' &= \frac{1}{\|x_\lambda\|_2^2} \left(\frac{d^2\|x_\lambda\|_2}{d\lambda^2} \|x_\lambda\|_2 - \left(\frac{d\|x_\lambda\|_2}{d\lambda} \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (26)$$

در محاسبه ضرایب بسط، یکی از پارامترهای مؤثر در دقت مدل محلی، بیشترین درجه‌ی بسط یا بالاترین درجه سری (K_{\max}) می‌باشد. جهت تعیین مقدار مناسب K_{\max} از روش تکرار و با توجه به دقت مدل در نقاط کنترل استفاده می‌کنیم. به عبارت دیگر با در نظر گرفتن مقادیر مختلف برای K_{\max} مدل‌سازی محلی را انجام داده و دقت مدل را در نقاط کنترل محاسبه می‌کنیم. آن K_{\max} ای که بهترین دقت را در نقاط کنترل داشته است، به عنوان مقدار بهینه انتخاب می‌شود. به علاوه در تعیین K_{\max} وزن بیشتری را برای نقاط کنترل لبه‌ای در نظر گرفته‌ایم.

با استفاده از مسئله مقدار مرزی دیربخله و بسط به سری هارمونیک کلاه کروی و مستطیلی، مدل‌سازی محلی میدان گرانش در جهات و درجات مختلف صورت گرفت و ضرایب هر کدام از روش‌های محلی سازی تعیین شد. سپس توسط نقاط کنترلی که در داخل و لبه‌های منطقه مورد مطالعه قرار داشتند، دقت مدل بررسی



(الف)



(ب)

شکل ۵. الف) انحنای متناظر منحنی L، ب) نمودار منحنی L (هنسن، ۲۰۰۵).

روش هارمونیک مستطیلی برای تمام جهت‌ها و درجه ۱۰۰ برای مدل‌سازی با روش کلاه کروی برای جهت شعاعی به‌عنوان درجه‌ی بهینه تعیین شد. با استفاده از روش‌های مدل‌سازی محلی ذکرشده و درجه‌های بهینه تعیین شده، مدل‌سازی محلی میدان گرانش با درجه K_{max} صحیح صورت گرفت. شکل ۶ تا ۸ نشان‌دهنده نوسان جاذبه به‌ترتیب برای جهت‌های X ، Y و Z حاصل از مدل هارمونیک مستطیلی و شکل ۹ بیانگر نوسان جاذبه حاصل از مدل هارمونیک کلاه کروی در راستای شعاعی می‌باشد.

و تست شد. همان‌طور که در جداول ۱ و ۲ ملاحظه می‌شود، نتایج RMSE (Root Mean Square Error) مدل‌سازی هر دو روش RHA و ASHA برای درجات ۶۰ تا ۱۰۰ صورت گرفته است تا دقت برازش مدل بروی نقاط کنترل داخلی و لبه‌ای مشخص گردد (جدول ۱ و ۲).

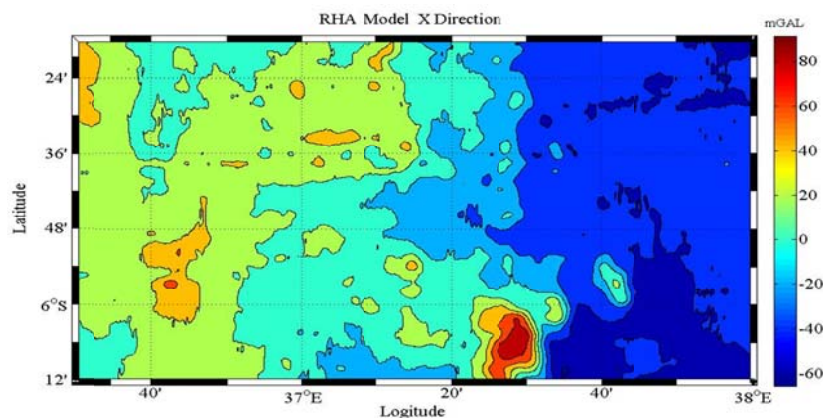
جهت انتخاب K_{max} مناسب برای هر کدام از روش‌های مدل‌سازی، می‌بایست دقت برازش هم بروی مناطق داخلی و هم لبه‌های منطقه‌ی مورد مطالعه، ارزیابی شود. با استفاده از این معیار، درجه‌ی ۸۰ برای مدل‌سازی با استفاده از

جدول ۱. RMSE بین مدل RHA و نقاط کنترل (دقت برحسب میلی‌گال می‌باشد).

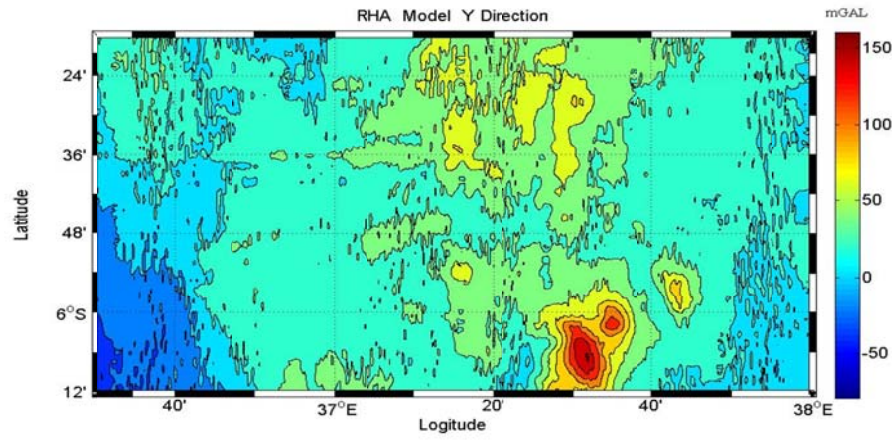
		۱۰۰		۹۰		۸۰		۷۰		۶۰		K_{max} جهت
۵۰۵۸۳	داخلی	۳۰۳۰۴۲	داخلی	۳۰۱۷۳۸	داخلی	۲۰۶۸۸	داخلی	۷۰۱۸۳۶	داخلی	۷۰۱۸۳۶	داخلی	X
	لبه‌ای		لبه‌ای		لبه‌ای		لبه‌ای		لبه‌ای		لبه‌ای	
۳۰۳۵۹۴	داخلی	۳۰۰۷۴۴	داخلی	۱۰۳۵۹۷	داخلی	۴۰۸۶۸۹	داخلی	۱۱۰۳۱۸	داخلی	۱۱۰۳۱۸	داخلی	Y
	لبه‌ای		لبه‌ای		لبه‌ای		لبه‌ای		لبه‌ای		لبه‌ای	
۲۹۰۳۰۴	داخلی	۴۰۰۴	داخلی	۲۰۵۲۱۳	داخلی	۳۰۲۳۰۱	داخلی	۱۲۰۸۳۹	داخلی	۱۲۰۸۳۹	داخلی	Z
	لبه‌ای		لبه‌ای		لبه‌ای		لبه‌ای		لبه‌ای		لبه‌ای	
۴۱۰۸۰۵	داخلی	۳۳۰۰۴۲	داخلی	۸۰۵۹۱۹	داخلی	۱۰۰۲۴۹	داخلی	۱۶۰۷۳۱	داخلی	۱۶۰۷۳۱	داخلی	
	لبه‌ای		لبه‌ای		لبه‌ای		لبه‌ای		لبه‌ای		لبه‌ای	

جدول ۲. RMSE بین مدل ASHA و نقاط کنترل.

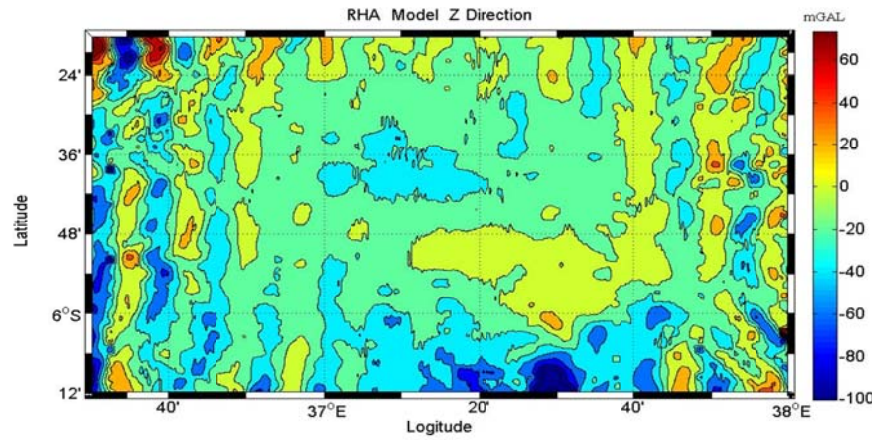
		۱۰۰		۹۰		۸۰		۷۰		۶۰		K_{max} جهت
۰۰۷۳۳۶	داخلی	۰۰۹۷۷	داخلی	۲۰۵۷۱۸	داخلی	۴۰۴۰۱۴	داخلی	۷۰۱۸۳۶	داخلی	۷۰۱۸۳۶	داخلی	R
	لبه‌ای		لبه‌ای		لبه‌ای		لبه‌ای		لبه‌ای		لبه‌ای	
۳۰۲۵۰۷	داخلی	۳۰۱۵۲	داخلی	۳۰۳۸۰۱	داخلی	۳۰۵۷۲۷	داخلی	۱۲۰۹۶۵	داخلی	۱۲۰۹۶۵	داخلی	
	لبه‌ای		لبه‌ای		لبه‌ای		لبه‌ای		لبه‌ای		لبه‌ای	



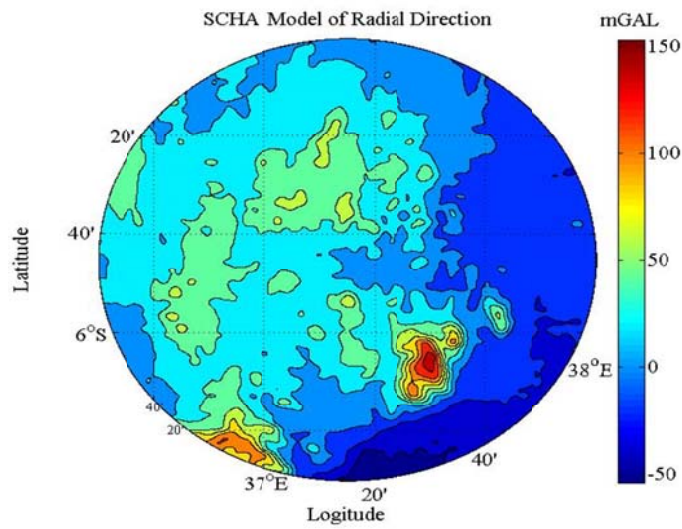
شکل ۶. مدل‌سازی نوسان شتاب گرانش در جهت X با استفاده از روش RHA.



شکل ۷. مدل‌سازی نوسان شتاب گرانش در جهت Y با استفاده از روش RHA.



شکل ۸. مدل‌سازی نوسان شتاب گرانش در جهت Z با استفاده از روش RHA.



شکل ۹. مدل‌سازی نوسان شتاب گرانش در جهت R با استفاده از روش ASHA.

جدول ۳. نتایج حاصل‌شده از مدل‌سازی محلی با K_{max} بهینه با استفاده از روش‌های ASHA و RHA (دقت بر حسب میلی‌گال).

RHA-X		RHA-Y		RHA-Z		ASHA-R		جهت K_{max}
داخلي	لبه‌ای	داخلي	لبه‌ای	داخلي	لبه‌ای	داخلي	لبه‌ای	
۳۰۱۷۳۸	۵۰۹۶۲۱	۱۰۳۵۹۷	۹۰۸۳۷۴	۲۰۵۲۱۳	۸۰۵۹۱۹	۲۰۵۷۱۸	۸۰۵۹۱۹	۸۰
۵۰۳۲۲۶	۳۰۳۵۹۴	۱۲۰۱۴۴	۲۹۰۳۰۴	۳۰۴۲۷۱	۴۱۰۸۰۵	۰۰۷۳۳۶	۳۰۲۵۰۷	۱۰۰

با مرز مسطح حل می‌شود. توابع پایه در روش ASHA هارمونیک‌های کلاه کروی بوده که بر حسب توابع پایه ژاندر با درجه حقیقی و مرتبه صحیح بیان می‌شوند حال آنکه در روش RHA توابع پایه، ماهیت توابع مثلثاتی دارند با این وجود هر دو دسته توابع، تشکیل پایه‌های متعامد محلی می‌دهند.

درجات مختلف جهت‌یافتن درجه‌ی بهینه در مدل‌سازی محلی میدان گرانش برای هر دو روش بررسی شد که درجه‌ی ۸۰ برای روش RHA و درجه‌ی ۱۰۰ برای روش ASHA انتخاب شد، سپس روش‌های مدل‌سازی محلی با استفاده از این K_{max} بهینه با یکدیگر مقایسه شدند. طبق نتایج حاصل‌شده، روش RHA سریع‌تر از روش ASHA همگرا می‌شود ولی به دلیل خطای لبه‌ای بسیار زیاد (مخصوصاً در راستای Z) نتایج مدل‌سازی مطلوب نیست و مقادیر خطای جذر میانگین مربعات بسیار زیاد است. اما، روش ASHA نتایج RMSE مناسب‌تری دارد به طوری که هم مقادیر RMSE حاصل‌شده از نقاط کنترل لبه‌ای و هم مقادیر RMSE حاصل از نقاط کنترل پخش‌شده در منطقه مورد مطالعه بسیار کمتر از روش RHA می‌باشد.

مراجع

- Allredge, L., 1981, Rectangular harmonic analysis applied to the geomagnetic field, *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 86, 3021-3026.
- De Santis, A., 1992, Conventional spherical harmonic analysis for regional modelling of the geomagnetic field, *Geophysical research letters*, 19, 1065-1067.
- De Santis, A. and Torta, J., 1997, Spherical cap harmonic analysis: a comment on its proper use for local gravity field representation, *Journal of Geodesy*, 71, 526-532.

همان‌طور که در جدول ۳ مشخص است، خطای لبه‌ای در مدل هارمونیک مستطیلی در تمام جهات مخصوصاً در جهت Z، بیشتر از روش هارمونیک کلاه کروی در جهت شعاعی می‌باشد. همچنین طبق نتایج به دست آمده، روش هارمونیک کلاه کروی بازهم دارای نتایج بهتری نسبت به روش هارمونیک مستطیلی در مناطق داخلی می‌باشد. البته دلیل این امر را می‌توان نوسانی بودن توابع پایه هارمونیک مستطیلی برخلاف هارمونیک کلاه کروی ذکر کرد که این ویژگی با ذات میدان جاذبه تناسب ندارد اما همین ویژگی برای میدان مغناطیس بسیار مطلوب بوده و نتایج خوبی به همراه داشته است (الردگ، ۱۹۸۱).

۶. نتیجه‌گیری

در این تحقیق، قابلیت دو روش ASHA و RHA برای مدل‌سازی محلی میدان گرانش با یکدیگر مقایسه شده است. به منظور بررسی دقت دو روش، از داده‌های گرانش هوایی برداری بر روی کشور تانزانیا استفاده شده است. در هر دو روش، توابع پایه مناسب با موضعی‌سازی محلی، از حل معادله لاپلاس حاصل می‌شوند. در روش ASHA معادله لاپلاس با در نظر گرفتن مسأله مقدار مرزی با مرز به شکل کلاه کروی، و در روش RHA، معادله لاپلاس

- De Santis, A., Torta, J. and Lowes, F., 1999, Spherical cap harmonics revisited and their relationship to ordinary spherical harmonics, *Physics and Chemistry of the Earth, Part A: Solid Earth and Geodesy*, 24, 935-941.
- Hansen, P. C., 1999, The L-curve and its use in the numerical treatment of inverse problems.
- Haines, G., 1985, Spherical cap harmonic analysis, *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 90, 2583-2591.
- Hwang, J. S., Han, H.C., Han, S. C., Kim, K. O., Kim, J. H., Kang, M. H. and Kim, C. H.,

- 2012, Gravity and geoid model in South Korea and its vicinity by spherical cap harmonic analysis, *Journal of Geodynamics*, 53, 27-33.
- Jiang, T., Li, J., Dang, Y., Zhang, C., Wang, Z. and Ke, B., 2014, Regional gravity field modeling based on rectangular harmonic analysis, *Science China. Earth Sciences*, 57, 1637.
- Liu, J., Chen, R., Wang, Z. and Zhang, H., 2011, Spherical cap harmonic model for mapping and predicting regional TEC, *GPS solutions*, 15, 109-119.
- Malin, S., Düzgit, Z. and Baydemir, N., 1996, Rectangular harmonic analysis revisited, *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 101, 28205-28209.
- Razin, M. R. G. and Voosoghi, B., 2017, Regional ionosphere modeling using spherical cap harmonics and empirical orthogonal functions over Iran, *Acta Geodaetica et Geophysica*, 52, 19-33.
- Schwarz, K., Kern, M. and Nassar, S., 2002., Estimating the gravity disturbance vector from airborne gravimetry Vistas for Geodesy in the New Millennium: Springer, 199-204.
- Thébault, E., Schott, J., Manda, M. and Hoffbeck, J., 2004, A new proposal for spherical cap harmonic modelling, *Geophysical Journal International*, 159, 83-103.
- Thébault, E., Schott, J. and Manda, M., 2006, Revised spherical cap harmonic analysis (R-SCHA): Validation and properties, *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 111.
- Younis, G., 2013, Regional gravity field modeling with adjusted spherical cap harmonics in an integrated approach: TU Darmstadt.
- Younis, G. K., Jäger, R. and Becker, M., 2013, Transformation of global spherical harmonic models of the gravity field to a local adjusted spherical cap harmonic model. *Arabian Journal of Geosciences*, 6, 375-381.
- Younis, G., 2015, Local earth gravity/potential modeling using ASCH, *Arabian Journal of Geosciences*, 8, 8681-8685.

Local gravity field modeling using basis functions of harmonic nature and vector airborne Gravimetry, Case Study: Gravity field modeling over north-east of Tanzania region

Feizi, M.¹ and Raoofian Naeeni, M.^{2*}

1. Ph.D. Student, Department of Geodesy, Faculty of Surveying and Geomatic Engineering, K. N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran

2. Assistant Professor, Department of Geodesy, Faculty of Surveying and Geomatic Engineering, K. N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran

(Received: 24 Dec 2017, Accepted: 25 Sep 2018)

Summary

Many different methods for gravity field modelling have been investigated, among which, the harmonic expansion has been widely used due to harmonic nature of gravity potential field that satisfies Laplace equation in an empty space. This method, however, cannot reach to a high resolution in a gravity field, and suffers from omitting the high frequency gravity signals and therefore it is not appropriate for local gravity field modelling. To overcome this drawback and recover high frequency features of gravity field, appropriate basis functions with local support should be used. One of the methods for local gravity field modeling based on local harmonic function is spherical cap harmonic analysis. In this method, the Dirichlet boundary value problem for Laplace equation is solved for boundary conditions on the surface of a spherical cap which results in Eigen expansion of the solution in terms of the associated Legendre function of non-integer degree and integer order. Another method that can be used for local gravity field modeling is rectangular harmonic analysis. In this method, Laplace equation is solved in a local Cartesian coordinate system and boundary conditions are applied on a plane area which. In this approach, trigonometric functions are used as basis functions.

In this study, the problem of local gravity field modeling based on both spherical cap, and rectangular harmonic expansion is investigated. Also, a numerical study is conducted to show the performance of each method for local gravity field modeling. To do so the observations of vector airborne gravimetry in the northwest of Tanzania in Highland region are used to derive the coefficients of each model. The low-frequency part of observed gravity field is removed from the data using EGM2008 geo-potential model, and the resulting residual gravity field is considered for local modelling. Since the governing equations for determination of the coefficients suffer from an ill-conditioning problem, it is necessary to apply some regularization schemes to find the optimum solution. Here, the Tikhonov regularization method is utilized to obtain the regular solution. In this study, the edge effect for each model is also analyzed. To show this effect, the results of models are compared with the observations of gravity at some control points distributed both within the study area and its margin. It should be noted that the maximum degree of expansion in harmonic series, plays an important role in appropriate fitting of local gravity field models to the gravity data and it has significant effects on the computational task of determining the coefficients of each model. For this purpose, local gravity field modelling is calculated with different value of maximum degree of expansion and then regarding to the result (accuracy of local gravity model by comparing with control points), appropriate value of maximum degree of expansion for each model is determined.

Finally the results of two models are compared to each other to show the performance of each models in local gravity field modeling. The results of this study reveal that ASHA has the ability to model local gravity with accuracy of about 1 mGal, and RHA method in the best situation can just achieve to a 3 mGal accuracy, although the convergence rate in RHA model is faster than ASHA model. Also by comparing the edge effect on each models, it is seen that the edge effect in two models and in all directions occurred but in a Z direction of RHA model that are more significant than the other directions in two models and one may conclude that the edge effect of RHA are much larger than that of ASHA. Finally, the result obtained shows that ASHA model can have better results for local gravity modelling.

Keywords: Local gravity field modeling, Adjusted spherical cap harmonic, rectangular harmonic analysis, airborne gravimetry.

* Corresponding author:

mraoofian@kntu.ac.ir