

## برآورد پارامتر منظم‌سازی به‌روش متعادل‌سازی قید فعال در وارون‌سازی دو بعدی داده‌های گرانی‌سنجی

میثم مقدسی<sup>۱</sup>، علی نجاتی کلاته<sup>۲\*</sup> و محمد رضایی<sup>۳</sup>

۱. دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی معدن، نفت و ژئوفیزیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران

۲. دانشیار، دانشکده مهندسی معدن، نفت و ژئوفیزیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران

۳. استادیار، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه ملایر، ملایر، ایران

(دریافت: ۹۶/۱۲/۸، پذیرش نهایی: ۹۷/۷/۳)

### چکیده

مدل‌سازی وارون داده‌های گرانی، یکی از مؤثرترین ابزارهای عددی به‌منظور به‌دست‌آوردن تصاویر سه‌بعدی از ساختارهای زمین‌شناسی است. یکی از پارامترهای مؤثر برای تولید مدلی مناسب در مدل‌سازی معکوس داده‌های گرانی همانند اغلب روش‌های مدل‌سازی معکوس داده‌های ژئوفیزیکی پارامتر منظم‌سازی است. روش‌های مختلفی برای این پارامتر در وارون‌سازی داده‌های گرانی مورد استفاده بوده است. در این مقاله از روش متعادل‌سازی قید فعال (ACB) به‌عنوان روشی جدید برای تخمین مناسب این پارامتر در وارون‌سازی دوبعدی داده‌های گرانی‌سنجی پرداخته می‌شود. برای این منظور الگوریتم طراحی شده بر روی یک مدل مصنوعی و یک مجموعه داده‌های واقعی گرانی‌سنجی مربوط به ذخیره کرومیت در منطقه ماتانزاس در کشور کوبا مورد مطالعه قرار گرفته است. نتایج حاصل از وارون‌سازی دوبعدی در این منطقه با حفاری‌های موجود سازگاری دارند و نشان می‌دهد که الگوریتم پیشنهادی می‌تواند تخمین مناسبی از توزیع چگالی و ساختارهای زیرسطحی ماده معدنی ارائه کند.

واژه‌های کلیدی: وارون‌سازی، داده گرانی، پارامتر منظم‌سازی، روش (ACB).

### ۱. مقدمه

پارامتر منظم‌سازی حساسیت حل منظم پارامترهای مدل را نسبت به آشفتگی داده‌های مشاهده‌ای کنترل می‌کند. یکی از مشکلات اصلی در وارون‌سازی داده‌های گرانی‌سنجی، عدم یکتایی در جواب ناشی از وارون‌سازی داده‌های این روش ژئوفیزیکی است (لی و اولدنبرگ، ۱۹۹۸). یکی از روش‌های مورد استفاده برای انتخاب مدل مناسب، حداقل نمودن تابع هدف است که این تابع، عدم‌برازش داده‌ها را با یک شرط دیگر مثل شرط منظم‌سازی تیخونوف ترکیب می‌کند. روش‌های متعددی برای تخمین پارامترهای منظم‌سازی در مسائل وارون‌سازی خطی داده‌های ژئوفیزیکی وجود دارد که ممکن است تحت شرایط خاصی نتایج مناسبی ارائه نماید ولی تحت شرایط دیگر جواب خوبی نداشته باشد (هنسن، ۲۰۱۰). تعدادی از محققین روش اعتبارسنجی متقاطع تعمیم یافته (GCV) را به‌عنوان روشی مناسب برای تخمین پارامتر منظم‌سازی پیشنهاد کردند (مارکوات، ۱۹۷۰؛ واهابا، ۱۹۹۰؛

روش گرانی‌سنجی، به‌دلیل سادگی به‌صورت گسترده‌ای در ژئوفیزیک اکتشافی استفاده می‌شود و روش مناسبی برای بررسی ساختارهای درون زمین است (یوچیدا و باربوسا، ۲۰۱۲). روش‌های متعددی در تفسیر داده‌های گرانی ناشی از توده‌های زیرسطحی مورد استفاده قرار می‌گیرد که به‌تعیین پارامترهایی نظیر موقعیت، هندسه توده، عمق و تباین چگالی توده با محیط اطراف می‌پردازد (روی و همکاران، ۲۰۰۰؛ لی و همکاران، ۲۰۱۰؛ اولیوریا و همکاران، ۲۰۱۱). وارون‌سازی داده‌های گرانی یکی از مهمترین مراحل در تفسیر داده‌های حاصل از این روش می‌باشد. هدف در وارون‌سازی داده‌های گرانی، به‌منظور باز تولید داده‌های مشاهده‌ای بر سطح زمین به‌دنبال یافتن چگالی و تخمین پارامترهای مدل زیر سطحی زمین می‌باشد (وطن‌خواه و همکاران، ۲۰۱۵). در حل منظم مسائل معکوس، پارامتر منظم‌سازی دارای اهمیت اساسی برای رسیدن به یک حل پایدار و همگرایی مناسب است.

$$d = G\rho \quad (1)$$

در رابطه بالا  $d \in R^m$  بردار داده‌ها است که از داده‌های اندازه‌گیری شده تشکیل شده است.  $G$  ماتریس حساسیت (کرنل) و  $\rho \in R^n$  بردار پارامترهای مدل است. به دلیل وجود نوفه در هنگام برداشت داده‌ها  $e \in R^m$  می‌توان نوشت (لی و الدنبرگ، ۲۰۰۵).

$$d_{obs} = d + e \quad (2)$$

که در آن؛  $d_{obs} \in R^m$  بردار داده‌های مشاهده‌ای است. هدف از وارون‌سازی داده‌های گرانی به دست آوردن پارامترهای مدل ( $\rho$ ) با استفاده از داده‌های مشاهده‌ای است به گونه‌ای که توزیع چگالی سنگ‌ها و کانی‌ها را در زیر سطح زمین شرح دهد و این مدل از نظر واقعیت‌های زمین‌شناسی قابل قبول باشد.

## ۲-۲. وارون‌سازی داده‌ها

مشکل اصلی در وارون‌سازی داده‌های میدان پتانسیل، عدم یکتایی در جواب ناشی از وارون‌سازی داده‌های این روش ژئوفیزیکی است و مسأله وارون در اصطلاح فروتخمین و ناجور و یا بدحالت است (لی و اولدنبرگ، ۱۹۹۸). پارامترهای مدل با کمینه نمودن تابع هدف تیخونوف که بدحالت بودن آن کمتر است، با استفاده از رابطه زیر به دست می‌آید (تیخونوف و آرسنین، ۱۹۷۷).

$$\rho_\lambda = \arg(\min_{\rho} \{\|d_{obs} - G\rho\|_2^2 + \lambda \|L\rho\|_2^2\}) \quad (3)$$

که در آن  $\rho_\lambda$  پارامترهای مدل تخمین زده شده است،  $\|d_{obs} - G\rho\|_2^2$  تابع عدم‌برازش بوده و  $\|L\rho\|_2^2$  تابع منظم‌ساز تیخونوف است.  $L$  عملگر ماتریس هموارساز در رابطه (۶) می‌باشد، که با اعمال این عملگر پارامترهای مدل به صورت هموار در فرآیند وارون‌سازی بازتولید می‌شود. پارامتر  $\lambda$  در رابطه (۳) پارامتر منظم‌سازی است که تعادل بین تابع عدم‌برازش و تابع منظم‌ساز تیخونوف را برقرار می‌کند ( $\lambda > 0$ ). در نهایت پارامترهای مدل از حل معادله زیر محاسبه می‌شود (استر و همکاران، ۲۰۱۳).

هنسن، ۱۹۹۷؛ هابر و همکاران، ۲۰۰۰؛ فرکوهارسون و اولدنبرگ، ۲۰۰۴؛ سانتوس و باسری، ۲۰۰۷؛ هنسن، ۲۰۰۷؛ وطن‌خواه و همکاران، ۲۰۱۴؛ رضایی و همکاران، ۲۰۱۷). الدنبرگ و لی (۲۰۰۵) از روش‌های منحنی  $L$ ، اصل اختلاف و اعتبارسنجی مقاطع تعمیم یافته برای تعیین پارامتر منظم‌سازی در وارون‌سازی داده‌های میدان پتانسیل استفاده کردند. روش اصل اختلاف، زمانی بکار گرفته می‌شود که مقدار نوفه در داده‌ها و مقادیر انحراف معیار در نوفه به‌طور کامل مشخص باشد هر چند منحنی  $L$  روش خوبی برای انتخاب پارامتر منظم‌سازی است، ولی ضمانتی برای اینکه همیشه پارامتر منظم‌سازی خوب به دست آید، وجود ندارد. ولی تابع مورد استفاده در روش (GCV) در بیشتر اوقات خوب عمل می‌کند (لی و الدنبرگ، ۲۰۰۵). بی و همکاران (۲۰۰۳) با استفاده از ضرایب لاگرانژ به معرفی روش متعادل‌سازی قید فعال (Active Constraint Balancing) پرداختند. لی و همکاران (۲۰۰۹) با استفاده از روش متعادل‌سازی قید فعال به وارون‌سازی هموار داده‌های مگنتوتلوریک پرداختند. قائدرحمتی و همکاران (۱۳۹۴) به بهبود و مقایسه انتخاب پارامتر منظم‌سازی با استفاده از روش‌های (ACB) و (GCV) پرداختند. در تحقیق پیش‌رو، به مدل‌سازی داده‌های میدان گرانی با استفاده از انتخاب پارامتر منظم‌سازی با روش متعادل‌سازی قید فعال و الگوریتم وارون‌سازی هموارساز پرداخته می‌شود.

## ۲. روش تحقیق

### ۲-۱. مدل‌سازی پیش‌رو

در وارون‌سازی خطی داده‌های میدان پتانسیل معمولاً زیر سطح زمین به بلوک‌های کوچک تقسیم می‌شود. سپس اختلاف چگالی هر یک از این بلوک‌های کوچک پارامترهای مدلی است که باید در طی فرآیند وارون‌سازی تخمین زده شوند (وطن‌خواه و همکاران، ۲۰۱۵). رابطه‌ی بین پارامترهای مدل و داده‌ها را به صورت زیر بیان می‌کنیم

مقدار بینابینی برای ضریب لاگرانژ به‌منظور دست‌یابی به تفکیک‌پذیری و پایداری لازم است. این رهیافت این حقیقت را نادیده می‌گیرد که همه پارامترها، تفکیک‌پذیری یکسانی ندارند. برای یک پارامتر غیرقابل تفکیک، در صورتی که ضریب لاگرانژ داده شده خیلی کوچک باشد، باعث تولید جواب‌های پایدار بر خطا خواهد شد. برای پارامترهای با تفکیک‌پذیری زیاد، تفکیک‌پذیری کاهش یافته و اطلاعات زمین قابل بازیابی نخواهد بود. بنابراین تغییر ضریب لاگرانژ در حین همگرایی معکوس‌سازی برای دست‌یابی به تفکیک‌پذیری بیشتر و پایداری ترجیح داده می‌شود (نمت و کین، ۱۹۹۷). لذا این روش در مقایسه با حالتی که یک مقدار ثابت برای ضریب لاگرانژ در وارون به کار می‌رود دقیق‌تر است. یک رهیافت به‌منظور استفاده از ضریب لاگرانژ متغیر با تکرار در فرآیند وارون، استفاده از ضریب لاگرانژ متغیر با مکان است (ساسکی، ۱۹۸۹). که این روش با آزمون و خطا قابل حصول است. برای مشخص کردن تفکیک‌پذیری از تابع توزیع باکوس-گیلبرت (منکه، ۱۹۸۹) که به‌منظور ارزیابی توزیع مکانی بردارهای سطری ماتریس کیفیت به کار می‌رود، استفاده می‌شود. یک مقدار بزرگ تابع توزیع برای یک پارامتر مشخص بیانگر از بین رفتن تفکیک‌پذیری آن پارامتر و یا برعکس است. این تابع توزیع برای اُ آمین پارامتر به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$SP_i = \sum_{j=1}^N (w_{ij}(1 - s_{ij})R_{ij})^2 \quad (5)$$

که در آن  $N$  تعداد پارامترها و  $w_{ij}$  ضریب وزنی قابل محاسبه از فاصله مکانی بین دو پارامتر  $i$  و  $j$  است. در اینجا  $s_{ij}$  ماتریس مورد استفاده برای هموارسازی در فرآیند وارون است (برای مثال تاثیر قیدهای هموارکننده ویا میرایی).  $R$  ماتریس حساسیت است که حاصل ضرب ماتریس کرنل ( $G$ ) در ماتریس شبه وارون کرنل ( $G^+$ ) می‌باشد

$$R = G^+G \quad (6)$$

$$(G^T G + \lambda L^T L)\rho_\lambda = G^T d_{obs} \quad (4)$$

در وارون‌سازی داده‌های میدان پتانسیل به‌دلیل حساس نبودن داده‌ها به پارامترهای مدل موجود در اعماق بیشتر باید تابع وزنی عمق را در فرآیند وارون‌سازی وارد نمود. به عبارت دیگر اثر واپاشی گرانشی با مجذور فاصله‌ی پارامترهای مدل از سطح رابطه‌ی معکوس دارد. در اینجا تابع وزنی به‌صورت  $w(z) = (z + z_0)^{\frac{\beta}{2}}$  تعریف می‌شود (لی و اولدنبرگ، ۱۹۹۸). اثر این تابع در فرآیند وارون‌سازی از پدیده‌ای به نام واپاشی کرنل جلوگیری می‌کند.  $Z_0$  پارامتر عمقی است که به اندازه سلول‌های پارامترهای مدل در سطح بستگی دارد.  $Z$  عمق هریک از پارامترهای مدل بوده و  $\beta$  در وارون‌سازی داده‌های گرانی به‌طور معمول برابر ۲ در نظر گرفته می‌شود. تابع وزنی عمق یک ماتریس قطری را تشکیل می‌دهد که در رابطه (۴) به جای ماتریس همانی ( $I_n$ ) قرار می‌گیرد. محاسبه‌ی رابطه (۷) به‌صورت مستقیم برای مسائل بزرگ‌مقیاس بسیار مشکل است، و به‌جای آن می‌توان از روش‌های تکرارپذیر استفاده کرد. دوقطری‌سازی لنگروس یک روش سریع و تکرارپذیر است که کاربرد فراوانی در وارون‌سازی داده‌های میدان پتانسیل دارد (عابدی و همکاران، ۲۰۱۳).

### ۲-۳. محاسبه پارامتر منظم‌سازی به‌روش متعادل‌ساز قید فعال (ABC)

تعیین مقدار بهینه پارامتر منظم‌سازی (ضرایب لاگرانژ)، در حالتی که تعادل بین تابع عدم‌برازش و تابع منظم‌ساز تیخونوف را حفظ کند، از اهمیت بالایی برخوردار است. در مدل‌سازی معکوس سعی می‌شود برآورد خوبی از ضرایب لاگرانژ داشته باشیم. اما پیدا کردن بهترین ضریب، کار ساده‌ای نیست. به‌لحاظ نظری، مقادیر بزرگ برای ضریب لاگرانژ، قیدهای بیشتری را به جواب اعمال می‌کند و تفکیک‌پذیری ضعیف‌تری از پارامترها را به‌دست می‌دهد. از سوی دیگر مقایر کم ضریب لاگرانژ بر پایداری وارون اثر منفی دارد. یک

تابع توزیع به دقت بررسی شود. تغییرات تابع توزیع می‌باید بین دو حد بیشینه و کمینه تعیین شده برای تابع توزیع باشد. برای مقادیر زیاد و کم ضریب لاگرانژ نیز دو مقدار کمینه و بیشینه در نظری می‌گیریم. به عبارت دیگر، در روش متعادل‌سازی قید فعال کاربر می‌تواند با انتخاب دو مقدار بیشینه و کمینه بازه تغییرات پارامتر منظم‌سازی را تعیین کند. براساس مقادیر تخصیص داده شده برای حدود بالا و پایین تابع توزیع و ضریب لاگرانژ می‌توان توزیع ضریب لاگرانژ را به صورت خودکار در فضای یک، دو و سه بعدی عملی ساخت رهیافت متعادل‌سازی فعال قادر است ویژگی‌های مدل و داده را در فرآیند وارون نشان دهد. این ویژگی‌ها به آسانی قابل درک هستند زیرا تابع توزیع از کرنلی بهره می‌گیرد که وابسته به ویژگی‌های پارامترهای مدل و داده است.

#### ۴-۲. روش دوقطری‌سازی لنکزوس

روش دوقطری‌سازی لنکزوس یک روش حل تکراری است که بردارهای پایه متعامد برای زیرفضای کرلیف  $K_R$  را ایجاد می‌کند. در این روش سیستم معادلات اصلی با یک سیستم معادلات با ابعاد کمتر جایگزین می‌شود در این روش سیستم معادلات اصلی با یک سیستم معادلات با ابعاد کمتر جایگزین می‌شود در نتیجه سرعت حل مسأله با دقت بالا افزایش می‌یابد (عابدی و همکاران، ۲۰۱۳). اگر سیستم معادلات به صورت رابطه (۴) باشد می‌توان بردار پارامترهای مدل را از رابطه زیر به دست آورد.

$$\rho = (G^T G + \lambda I)^{-1} G^T d^{obs} \quad (8)$$

در این روش با کوچک‌تر کردن ماتریس حساسیت به صورت یک ماتریس دوقطری، فضای ذخیره‌سازی در رایانه کاهش پیدا می‌کند. برای حل مسائل فرورآورد که در آنها تعداد پارامترهای مدل از تعداد داده‌ها بیشتر است ( $N \ll M$ ) روش دوقطری‌سازی لنکزوس روشی

در این پژوهش، علی‌رغم مطالعات پیشین در مورد روش متعادل‌سازی فعال، محاسبه ماتریس حساسیت از روش دوقطری‌سازی لنکزوس استفاده شده است. استفاده از این روش، کارایی و عملکرد الگوریتم ارائه شده را در مسائل بزرگ مقیاس بیشتر می‌کند. متعادل‌سازی فعال روشی برای مشخص کردن ضرایب لاگرانژ متغیر با مکان است. در متعادل‌سازی فعال، ابتدا تابع توزیع ماتریس تفکیک را از راه معادلات (۷) و (۸) با یک مقدار کوچک برای ضریب لاگرانژ (برای مثال ۰/۰۰۵) پیدا می‌کنیم. سپس تابع توزیع را به ضرایب لاگرانژ متغیر با مکان محدود شده با مقادیر از پیش تعیین شده تبدیل می‌کنیم. اگر تابع توزیع پارامتر بزرگ باشد (که نشان دهنده تفکیک پذیری کم است)، متعادل‌سازی فعال مقدار بزرگی را برای ضریب لاگرانژ به آن پارامتر اختصاص می‌دهد و برعکس. بر طبق توابع توزیع، ضرایب لاگرانژ به صورت خطی در فضای لگاریتمی بین محدوده از پیش انتخاب شده پایین و بالا اختصاص داده می‌شوند. فضای لگاریتمی از آن جهت انتخاب می‌شود که تابع توزیع به صورت لگاریتمی بنا به موقعیت پارامترهای مدل تغییر می‌کند و میزان تفکیک‌پذیری به صورت معکوس با نسبت لگاریتم تابع توزیع ارتباط دارد. تابع زیر ضریب لاگرانژ را براساس تابع توزیع تخصیص می‌دهد (بی و همکاران، ۲۰۰۳).

$$\log(\lambda_i) = \log(\lambda_{min}) + \frac{\log(\lambda_{max}) - \log(\lambda_{min})}{\log(SP_{max}) - \log(SP_{min})} \times \{\log(SP_i) - \log(SP_{min})\} \quad (9)$$

که در آن،  $\lambda_i$  ضریب لاگرانژ برای پارامتر  $i$  و  $SP_i$  تابع توزیع پارامتر  $i$  است.  $\lambda_{min}$  و  $\lambda_{max}$  به ترتیب مقادیر کم و زیاد برای ضریب لاگرانژ هستند  $SP_{min}$  و  $SP_{max}$  به ترتیب مقادیر کم و زیاد برای تابع توزیع هستند. باید دقت شود که تابع توزیع برای یک پارامتر خاص باید بین مقادیر  $SP_{min}$  و  $SP_{max}$  قرار گیرد. در انتخاب مقادیر زیاد و کم برای تابع توزیع و ضریب لاگرانژ، ضروری است که ضریب لاگرانژ و

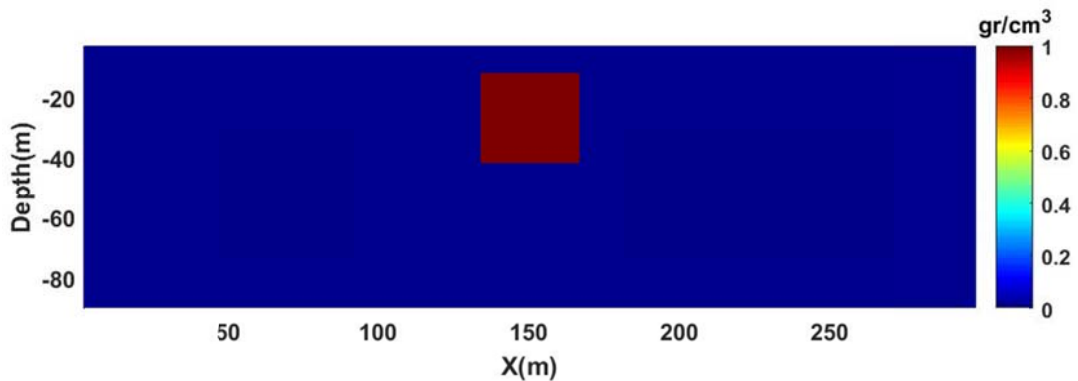
### ۳. مدل مصنوعی

مدل مصنوعی ارائه شده در اینجا یک بلوک با ابعاد  $3 \times 3$  است که سطح بالایی آن در عمق ۱۲ متری از سطح زمین قرار دارد. اختلاف چگالی این بلوک با محیط اطراف ( $gr/cm^3$ ) (شکل ۱) است. زیر سطح زمین به سلول‌هایی مربعی با ابعاد ۳ متر تقسیم شده است. تعداد این سلول‌ها  $3000 = 100 \times 30$  است. در ابتدا داده‌های حاصل از این مدل مصنوعی با استفاده از مدل‌سازی پیش‌رو تولید شده است. سپس ۵ درصد نوفه‌ی تصادفی با توزیع نرمال روی داده‌ها اعمال شد. در نهایت پارامتر منظم‌سازی با استفاده از روش متعادل‌سازی قید فعال (ACB) به‌صورت خودکار انتخاب شده است (شکل ۲). مراحل فوق با برنامه‌نویسی در محیط MATLAB نسخه 2017a انجام گرفته است.

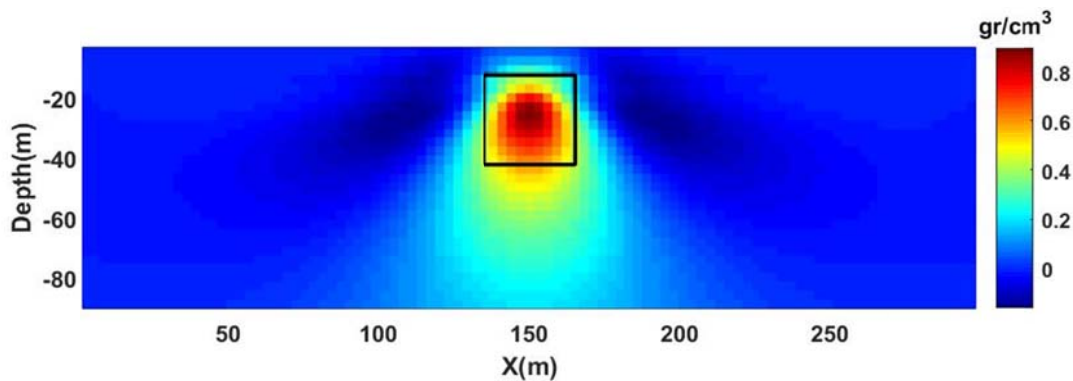
مناسب برای تخمین پارامترهای مدل است. رابطه (۱) را می‌توان با کمینه کردن نرم ۲ عبارت عدم‌برازش ( $\min \|G\rho - d\|_2^2$ ) حل نمود. در این صورت می‌توان نشان داد که جواب  $\rho$  بعد از  $k$  مرحله تکرار از الگوریتم وارون‌سازی به‌روش دو قطری‌سازی لنگزوس به‌دست می‌آید (پیازه و ساندرز، ۱۹۸۲). با استفاده از الگوریتم وارون‌سازی به‌روش دو قطری‌سازی لنگزوس مسأله حداقل مربعات رابطه (۳) را می‌توان به‌شکل زیر نوشت:

$$\min \left\| \begin{bmatrix} G \\ \sqrt{\lambda}L \end{bmatrix} \rho - \begin{bmatrix} d^{obs} \\ 0 \end{bmatrix} \right\|_2^2 \quad (9)$$

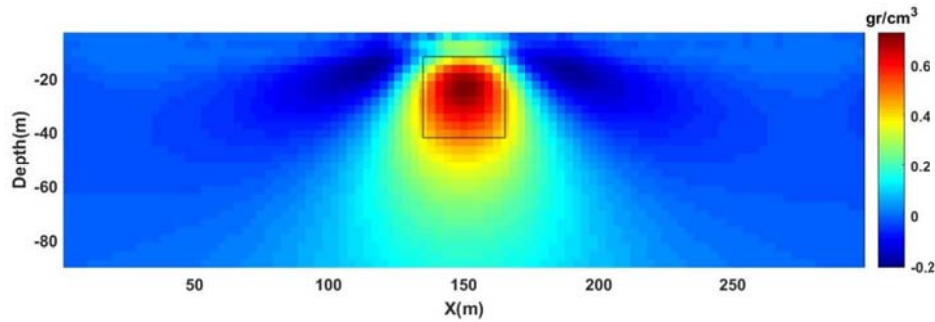
و جواب مسأله وارون را به‌دست آورد. در این مقاله از این روش برای حل مسأله وارون هموار استفاده می‌شود.



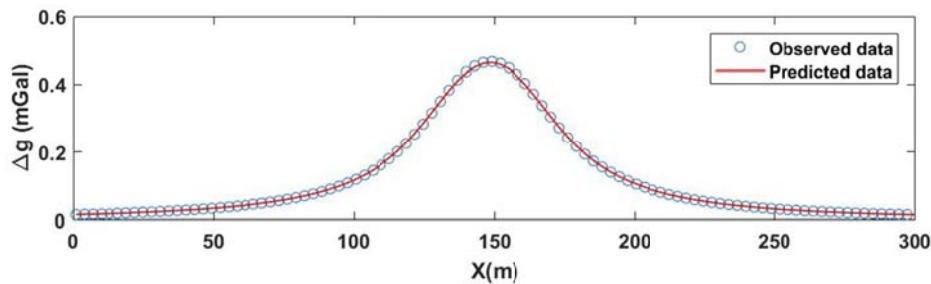
شکل ۱. تصویر دوبعدی از موقعیت و عمق مدل مصنوعی.



شکل ۲. مدل حاصل از وارون‌سازی مدل مصنوعی با استفاده از روش متعادل‌سازی قید فعال.



شکل ۳. مدل حاصل از وارون‌سازی مدل مصنوعی با استفاده از روش اصل اختلاف.



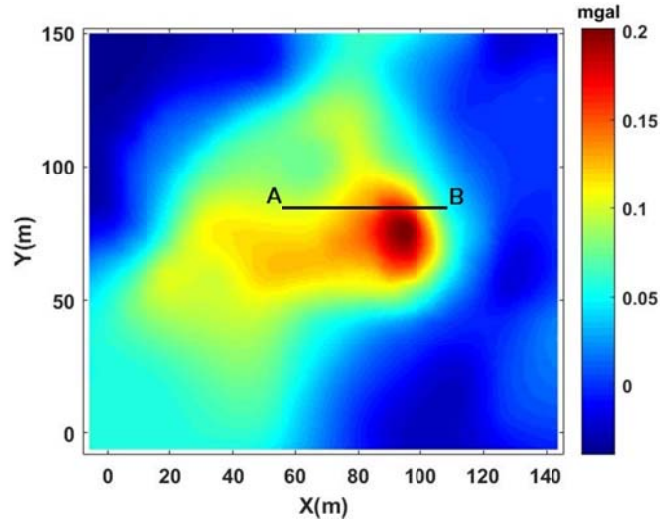
شکل ۴. برازش داده‌های مشاهده‌ای و محاسبه‌ای.

توده‌ی معدنی کرومیت در نزدیکی شهر ماتانزاس در کشور کوبا است. ذخایر کرومیت در کشور کوبا به‌صورت دونیت و پریدوتیت‌های سربانتینی شده در تماس با سنگ‌های فلدسپاتیک مانند گابرو و تروکتولیت و یا سنگ‌هایی با منشاء ولکانیکی می‌باشند (فلینت و همکاران، ۱۹۴۸). کاربرد موثر روش گرانی در اکتشاف ذخایر کرومیت در ماتانزاس وابسته به تباین چگالی بین کرومیت و سنگ‌های پیرامون آن دارد. اختلاف چگالی بین کرومیت و سنگ‌های در برگیرنده‌ی آن که دونیت و پریدوتیت‌های سربانتینی شده هستند، حدود ۱/۵ گرم بر سانتیمترمکعب می‌باشد (فلینت و همکاران، ۱۹۴۸). مقطع (A-B) به‌عنوان داده‌های واقعی از روی نقشه شکل ۴ انتخاب شده‌است. در شکل ۵ مشاهده می‌شود که روش متعادل‌سازی قید فعال برازش مناسبی بین داده‌های واقعی و داده‌های محاسبه‌ای ارائه کرده‌است. با مقایسه شکل (۷) و مشاهده می‌شود که روش متعادل‌سازی قید فعال تخمین مطلوب‌تری را نسبت به روش اصل اختلاف ارائه کرده‌است.

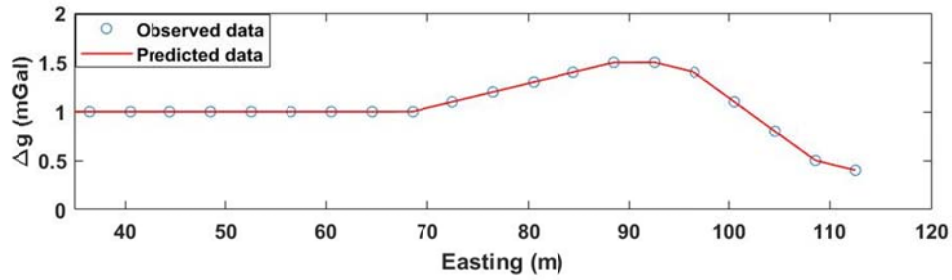
نتایج نشان می‌دهد که ابعاد بلوک با نسبت بسیارخوبی تعیین شده و مدل به‌دست آمده شباهت مناسبی با مدل مصنوعی دارد (شکل ۲). نتایج حاصل از وارون‌سازی داده‌های مصنوعی به‌روش ACB در مقایسه با روش اصل اختلاف، نشان می‌دهد که روش متعادل‌سازی قید فعال برآورد مطلوبی از مدل مصنوعی از نظر هندسه و چگالی داشته‌است (شکل ۳). در نهایت وارون‌سازی داده‌ها با استفاده از الگوریتم دوقطری‌سازی لنگروس انجام گرفت. لی و الدنبرگ (۲۰۰۵) پیشنهاد نمودند که در صورت موفق نبودن نتیجه روش GCV در انتخاب پارامتر منظم‌سازی بهینه، پارامتر منظم‌سازی بهینه دوباره با استفاده از روش اصل اختلاف تعیین شده و وارون‌سازی انجام شود که این کار باعث افزایش زمان حل مسئله وارون خواهد شد (اولدنبرگ و لی، ۲۰۰۵). یکی از معایب روش اصل اختلاف، ناتوانی این روش در تخمین عمق زیرین مدل می‌باشد.

#### ۴. وارون‌سازی داده‌های واقعی

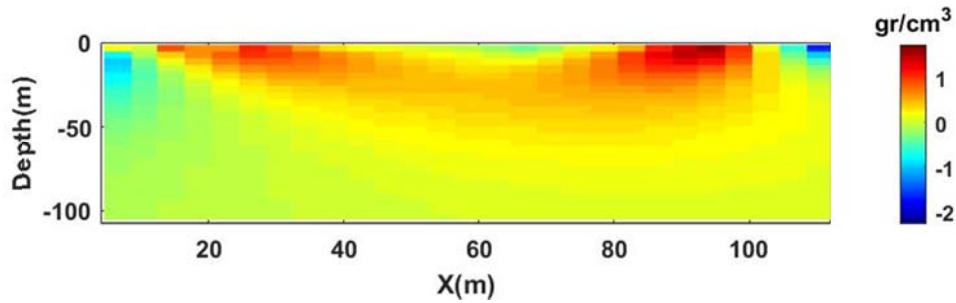
داده‌های واقعی مورد استفاده در این تحقیق مربوط به



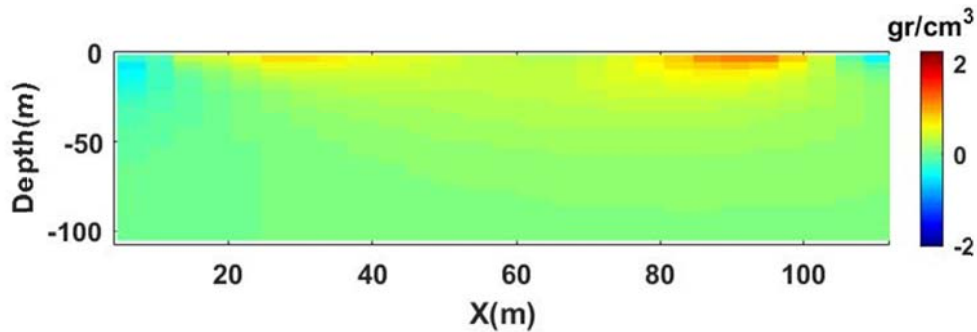
شکل ۴. نقشه کلی ناهنجاری بوگه داده‌های گرانی‌سنجی. پروفیل (A-B) مقطع برش‌زده شده از روی داده‌های گرانی‌سنجی.



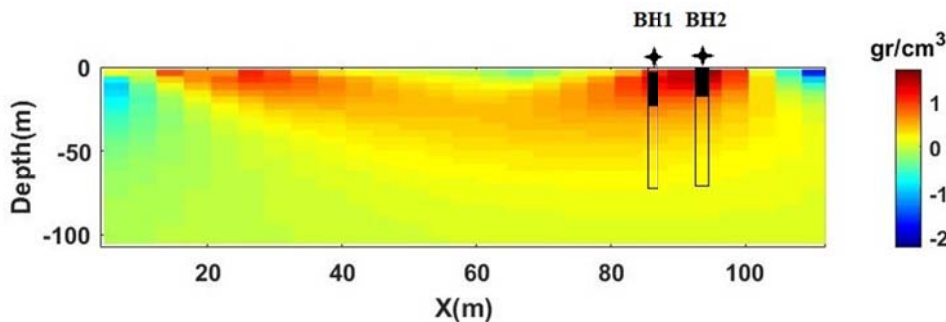
شکل ۵. برازش داده‌های واقعی و داده‌های حاصل از وارون‌سازی در مدل واقعی.



شکل ۶. مدل حاصل از وارون‌سازی داده‌های واقعی با استفاده از روش ACB.



شکل ۷. مدل حاصل از وارون‌سازی داده‌های واقعی با استفاده از روش اصل اختلاف.



شکل ۸. مطابقت نقاط حفاری موجود در منطقه با مدل حاصل از الگوریتم پیشنهادی.

جدول ۱. عمق ماده معدنی حاصل از مدل‌سازی و نتایج حفاری.

عمق ماده معدنی در گمانه (m)		عمق ماده معدنی حاصل از وارون‌سازی (m)		گمانه
تا	از	تا	از	
۳۰	۶	۲۲	۶	BH1
۲۶	۰	۱۹	۰	BH2

داده‌ها گرانی است. نتایج وارون‌سازی هموار داده‌های گرانی حاصل از مدل‌های مصنوعی و داده‌های واقعی با الگوریتم ارائه شده نشان می‌دهد که با این روش می‌توان وضعیت توده‌های آنومال را با سرعت و دقت خوبی نسبت روش اصل اختلاف تعیین نمود. مقایسه نتایج حفاری‌های انجام شده و تطابق خوب آنها با نتایج حاصل از وارون‌سازی دوبعدی داده‌های گرانی در منطقه ماتانزاس در کشور کوبا نشان از عملکرد خوب الگوریتم توسعه داده شده در جهت مدل‌سازی وارون دوبعدی داده‌ها گرانی دارد.

#### مراجع

قائدرحمتی، ر.، مرادزاده، ع.، فتحیان‌پور، ن. و لی، س.، ۱۳۹۴، بهبود وارون‌سازی دوبعدی داده‌های مگنتوتلوریک با استفاده از روش‌های خودکار انتخاب پارامتر منظم‌سازی، مجله ژئوفیزیک ایران، ۹ (۱)، ۳۰-۴۵.

Abedi, M., Gholami, A., Norouzi, G.-H. and Fathianpour, N., 2013, Fast inversion of magnetic data using Lanczos bidiagonalization method. Journal of Applied

با توجه به نتایج به دست آمده از اعمال داده‌های واقعی روی الگوریتم پیشنهادی توانسته است برآورد مناسبی از مدل حاصل از وارون‌سازی با روند تغییرات داده‌ها شکل ۶ و اطلاعات موجود از حفاری‌ها ارائه دهد (شکل ۸).

با توجه به نتایج حفاری عمق بالای ماده معدنی به خوبی تخمین زده شده است (جدول ۱)، اما در محاسبه عمق زیرین برخلاف روش‌های GCV و اصل اختلاف که برآورد مطلوبی ارائه نمی‌کردند، در روش ACB توانسته است مقادیر عمق زیرین با تخمین بهتری نسبت به اطلاعات حفاری ارائه کند.

#### ۵. نتیجه‌گیری

در مطالعه حاضر روش متعادل‌سازی قید فعال برای وارون‌سازی دوبعدی هموارساز داده‌های گرانی توسعه داده شده است. نتیجه بررسی‌ها نشان می‌دهد که روش متعادل‌سازی قید فعال روش مناسبی برای تعیین خودکار مقدار بهینه پارامتر منظم‌سازی در وارون‌سازی دوبعدی

Geophysics, 90, 126-137.

Aster, R. C., Borchers, B. and Thurber, C. H., 2013, Parameter Estimation and Inverse Problems 2, nd edition, Elsevier.



- Farquharson, C. G. and Oldenburg, D. W., 2004, A comparison of automatic techniques for estimating the regularization parameter in non-linear inverse problems. *Geophys. J. Int.*, 156, 411–425.
- Flint, D. E., Francisco de Albear, J. and Guild, P. W., 1948, Geology and chromite deposits of the Camaguey district, Camaguey Province, Cuba: U. S., Geol. Survey Bull. 954-B, 61-62.
- Haber, E. and Oldenburg, D. W., 2000, A GCV based method for nonlinear ill-posed problems, *Comput. Geosci.*, 4, 41–63.
- Hansen, P. C., 1997, Rank-deficient and discrete ill-posed problems. SIAM, Philadelphia, 14-44.
- Hansen, P. C., 2007, Regularization Tools: A Matlab Package for Analysis and Solution of Discrete Ill-Posed Problems Version 4:1 for Matlab 7:3 , Numerical Algorithms, 46, 189-194.
- Hansen, P. C., 2010, Discrete inverse problems: insight and algorithms 7, SIAM.
- Lee, S. K., Kim, H. J., Song, Y., Lee, C., 2009, MT2DInvMatlab- A program in MATLAB and FORTRAN for two dimensional magnetotelluric inversion, *Computers and Geosciences*, 35, 1722-1735.
- Li, Y. and Oldenburg, D. W., 1998, 3-D inversion of gravity data, *Geophysics*, 63(1), 109-119.
- Li, H., Xu, S., Yu, H., Wei, W. and Fang, J., 2010, Transformations between aeromagnetic gradients in frequency domain. *Journal of Earth Science*, 21(1), 114-122.
- Marquardt, D. W., 1970, Generalized inverses, ridge regression, biased linear estimation, and nonlinear estimation, *Technometrics*, 12 (3), 591-612.
- Menke, W., 1984, *Geophysical Data Analysis: Discrete Inverse Theory*. Academic Press, Inc.
- Nemeth, T., Normark, E. and Qin, F., 1997, Dynamic smoothing in crosswell travelttime tomography, *Geophysics*, 62, 168–176.
- Oldenburg, D. W. and Li, Y., 2005, Inversion for applied geophysics: A tutorial. *Investigations in geophysics*, 13, 89-150.
- Oliveira Jr, V. C., Barbosa, V. C. and Silva, J. B., 2011, Source geometry estimation using the mass excess criterion to constrain 3-D radial inversion of gravity data. *Geophysical Journal International*, 187(2), 754-772.
- Paige, C. C. and Saunders, M. A., 1982, LSQR: An algorithm for sparse linear equations and sparse least squares”, *ACM Trans. Math. Soft. (TOMS)*, 8, 1, pp.43.
- Rezaie, M., Moradzadeh, A. and Kalateh, A. N., 2017, Fast 3D inversion of gravity data using solution space priorconditioned lanczos bidiagonalization. *Journal of Applied Geophysics*, 136, 42-50.
- Roy, L., Agarwal, B. N. P. and Shaw, R. K., 2000, A new concept in Euler deconvolution of isolated gravity anomalies. *Geophys. Prospect.* 48, 559–575.
- Santos, E. T. F. and Bassrei, A., 2007, Application of GCV in geophysical diffraction tomography. In: 69th EAGE Conference and Exhibition, London.
- Sasaki, Y., 1994, 3D resistivity inversion using the finite element method. *Geophysics* 59, 1839-1848
- Tikhonov, A. N. and Arsenin, V. Y., 1977, *Solution of Ill-Posed Problems*: V. H. Winston and Sons.
- Uieda, L. and Barbosa, V. C., 2012, Robust 3D gravity gradient inversion by planting anomalous densities, *Geophysics*, 77(4), G55-G66.
- Vatankhah, S., Ardestani, V. E., and Renaut, R. A., 2014, Automatic estimation of the regularization parameter in 2D focusing gravity inversion: application of the method to the Safo manganese mine in the northwest of Iran. *Journal of Geophysics and Engineering*, 11(4), 045001.
- Vatankhah, S., Ardestani, V. E. and Renaut, R. A., 2015, Application of the  $\chi^2$  principle and unbiased predictive risk estimator for determining the regularization parameter in 3-D focusing gravity inversion, *Geophysical Journal International*, 200(1), 265-277.
- Wahba, G., 1990, *Spline Models for Observational Data*, vol. 59. SIAM, Philadelphia.
- Yi, M.-J., Kim, J.-H. and Chung, S.-H., 2003, Enhancing the resolving power of least-squares inversion with active constraint balancing. *Geophysics* 68, 931–941.

## Estimation of regularization parameter by active constraint balancing for 2D inversion of gravity data

Moghadasi, M.<sup>1</sup>, Nejati Kalateh, A.<sup>2\*</sup> and Rezaie, M.<sup>3</sup>

1. M.Sc. Student, Department of Petroleum and Geophysics, Faculty of Mining, Petroleum and Geophysics Engineering, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran

2. Associate Professor, Department of Petroleum and Geophysics, Faculty of Mining, Petroleum and Geophysics Engineering, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran

3. Assistant Professor, Faculty of Civil Engineering, Malayer University, Malayer, Iran

(Received: 27 Feb 2018, Accepted: 25 Sep 2018)

### Summary

Inversion method is very common in the interpretation of practical gravity data. The goal of 3D inversion is to estimate density distribution of an unknown subsurface model from a set of known gravity observations measured on the surface. The regularization parameter is one of the effective parameters for obtaining optimal model in inversion of the gravity data for similar inversion of other geophysical data. For estimation of the optimum regularization parameter the statistical criterion of Akaike's Bayesian Information Criterion (ABIC) usually used. This parameter is experimentally estimated in most inversion methods. The choice of the regularization parameter, which balances the minimization of the data misfit and model roughness, may be a critical procedure to achieve both resolution and stability. In this paper the Active Constraint Balancing (ACB) as a new method is used for estimating the regularization parameter in two-dimensional (2-D) inversion of gravity data. This technique is supported by smoothness-constrained least-squares inversion. We call this procedure "active constraint balancing" (ACB). Introducing the Lagrangian multiplier as a spatially-dependent variable in the regularization term, we can balance the regularizations used in the inversion. Spatially varying Lagrangian multipliers (regularization parameters) are obtained by a parameter resolution matrix and Backus-Gilbert spread function analysis. For estimation of regularization parameter by ACB method use must computed the resolution matrix R. The parameter resolution matrix R can be obtained in the inversion process with pseudo-inverse  $G^+$  multiplied by the kernel G.

$$R = G^+G \quad (1)$$

The spread function, which accounts for the inherent degree of how much the *i*th model parameter is not resolvable, defined as:

$$SP_i = \sum_{j=1}^M (w_{ij}(1 - s_{ij})R_{ij})^2 \quad (2)$$

where M is the total number of inversion parameters,  $w_{ij}$  is a weighting factor defined by the spatial distance between the *i*th and *j*th model parameters, and  $s_{ij}$  is a factor which accounts for whether the constraint or regularization is imposed on the *i*th parameter and its neighboring parameters. In other words, the spread function defined here is the sum of the squared spatially weighted spread of the *i*th model parameter with respect to all of the model parameters excluding ones upon which a smoothness constraint is imposed. In this approach, the regularization parameter  $\lambda(x,z)$  is set by a value from log-linear interpolation.

$$\log(\lambda_i) = \log(\lambda_{min}) + \frac{\log(\lambda_{max}) - \log(\lambda_{min})}{\log(SP_{max}) - \log(SP_{min})} \times \{\log(SP_i) - \log(SP_{min})\} \quad (3)$$

where  $SP_{min}$  and  $SP_{max}$  are the minimum and maximum values of spread function  $SP_i$ , respectively, and the  $\lambda_{min}$  and  $\lambda_{max}$  are minimum and maximum values of the regularization parameter  $\lambda(x,z)$ , which must be provided by the user. With this method, we can automatically set a smaller value  $\lambda(x,z)$  of the regularization parameter to the highly resolvable model parameter, which corresponds to a smaller value of the spread function  $SP_i$  in the inversion process and vice versa. Users can choose these minimum and maximum regularization parameters by setting variables LambdaMin and LambdaMax. For getting the target an algorithm is developed that estimates this parameter. The validity of the proposed algorithm has been evaluated by gravity data acquired from a synthetic model. Then the algorithm used for inversion of real gravity data from Matanzas Cr deposit. The result obtained from 2D inversion of gravity data from this mine shows that this algorithm can provide good estimates of density anomalous structures within the subsurface.

**Keywords:** Inversion, Gravity data, Regularization parameter, ACB method.

\* Corresponding author:

nejati\_ali@yahoo.com