

کاربست چندجمله‌ای‌های هرمیت مکعبی در ساخت روش نیمه‌لاگرانژی یکنوا برای معادله فرارفت

علی محمدی^۱، علیرضا محب الحججه^{۲*} و مجید مزرعه فراهانی^۳

۱. دانشجوی دکتری، گروه فیزیک فضا، مؤسسه ژئوفیزیک، دانشگاه تهران، تهران، ایران

۲. استاد، گروه فیزیک فضا، مؤسسه ژئوفیزیک، دانشگاه تهران، تهران، ایران

۳. دانشیار، گروه فیزیک فضا، مؤسسه ژئوفیزیک، دانشگاه تهران، تهران، ایران

(دریافت: ۹۶/۱۲/۹، پذیرش نهایی: ۹۷/۱۰/۱۱)

چکیده

از آنجا که روش‌های نیمه‌لاگرانژی محدودیت پایداری به شرط کوران-فردریکس-لوی (CFL) ندارند، به‌صورت وسیعی در مدل‌های گردش کلی به‌کار برده می‌شوند. در غالب صورت‌های روش نیمه‌لاگرانژی، برای محاسبه کمیت حل‌شونده (مانند سرعت باد، رطوبت، دما و جرم) درون‌یابی در فاصله بین نقاط شبکه ای لازم است. از مشکلات مواجهه در کاربرد روش نیمه‌لاگرانژی تولید نوسان اضافی در مناطق با گرادیان شدید است. دو رویکرد برای حذف نوسان‌های اضافی در مناطق با گرادیان شدید به‌کار گرفته می‌شود: الف) ترکیب یک روش با مرتبه بالا با روش پادجریان‌سو، ب) استفاده از روش‌های درون‌یابی یکنوا. در این پژوهش از روش درون‌یابی گزینشی با چندجمله‌ای‌های هرمیت مکعبی نایکنوا و یکنوا با صافی مشتق برای درون‌یابی مقادیر کمیت حل‌شونده در فاصله بین نقاط شبکه‌ای استفاده شده است. نتایج نشان می‌دهد که حل معادله فرارفت با روش مذکور نوسان اضافی در مناطق با گرادیان شدید ایجاد نمی‌کند و میزان میرایی آن نیز ناچیز است. عدم تولید مقادیر منفی با استفاده از درون‌یاب یکنوای هرمیت در حل میدان‌های ذاتاً نامنفی مانند رطوبت و جرم از دیگر نتایج این پژوهش است.

واژه‌های کلیدی: فرارفت، نیمه‌لاگرانژی، یکنوا، چندجمله‌ای هرمیت، جرم، رطوبت.

۱. مقدمه

روش مثبت معین ارائه می‌دهد ولی ضعف عمده آن میرایی شدید است. به‌دنبال طرح روش‌های مرتبه بالا برای حل معادلات حاکم بر شارها برای اجتناب از ضعف اشاره شده، نوسان‌های حاصل از این روش‌های مرتبه بالا به عنوان یک عامل محدود کننده نیز به‌ناچار مورد توجه قرار گرفت. از ایده‌های مهم، کاربرت روش پادجریان‌سو برای محدود کردن شار روی سطح کنترلی در روش‌های مرتبه بالا است. ترکیب روش‌های مرتبه بالا با محدودکننده‌های شار منجر به طرحواره‌هایی موسوم به طرحواره‌های با تفکیک بالا می‌شود. محدود کننده شار تابعی است که نحوه ترکیب روش مرتبه بالا به روش پاد جریان را مشخص می‌کند. طرحواره‌های حاصل می‌توانند نتایج قابل قبولی را در نواحی داخلی منطقه مورد نظر که گرادیان متغیرها شدید است، ایجاد کنند بدون اینکه

این پژوهش بر دو جنبه مهم از حل عددی معادله‌های فرارفت و تراژد تمرکز دارد: الف) روش حل مثبت معین به‌معنای ایجاد یک حل مثبت از میدان مثبت یا عدم شکل‌گیری مقادیر منفی از یک میدان نرده‌ای، ذاتاً نامنفی و یکنوا به‌معنای حفظ شیب روند تغییرات کمیت نرده‌ای در طی حل عددی، ب) روش نیمه‌لاگرانژی. بر این مبنا، با استفاده از مفهوم یکنوایی، یک روش نیمه‌لاگرانژی مثبت معین و یکنوای جدید توسعه داده می‌شود. پیش از ارائه جزئیات، لازم است ابتدا روش‌های ذاتاً یکنوا و نیز روش‌های تولید مصنوعی یکنوایی، مطرح شود و سپس به‌کارگیری آنها در روش نیمه‌لاگرانژی مورد بحث قرار گیرد.

الف) روش‌های مثبت معین و یکنوا: در حل مسائل فرارفت و تراژد، طرحواره مرتبه اول پادجریان‌سو یک

نوسانات ناخواسته شکل بگیرد. حداقل دقت این روش‌ها مرتبه دوم است (واترسون و دکونینک، ۲۰۰۷).

در دهه گذشته چندین روش تفکیک بالا مانند تراپرد با تصحیح شار (Flux Corrected Transport) FCT، کاهنده وردش کل (Total Variation) TVD و (Diminishing NVD)، نمودار متغیر بهنجار شده (Normalised Variable Diagram) و اساساً نانوسانی (Essentially Non-Oscillatory) ENO توسعه یافته است (دز و واچم، ۲۰۱۵). در اینجا به دو روش FCT و TVD با تمرکز بیشتر پرداخته می‌شود.

روش FCT را اولین بار بوریس و بوک (۱۹۷۳) مطرح کردند و سپس زالساک (۱۹۷۹) آن را توسعه داد. این روش شامل دو مرحله است. در مرحله اول، کمیت تراپردیابنده با یک روش مرتبه پایین محاسبه و در مرحله دوم شار تصحیح شده از طریق ترکیب روش مرتبه بالا با روش پادجریان سو با تابعی از پیش تعیین شده، به کمیت عددی محاسبه شده در مرحله اول اضافه می‌شود. با توجه به میرایی زیاد روش پادجریان سو چنانچه محدود کردن شار با دقت به انجام نرسد نتیجه حل از دقت پایینی برخوردار خواهد بود و دگرشکلی ساختگی میدان کمیت حل شونده از نتایج نامطلوب آن است. بلوسی و دورن (۲۰۰۸) با معرفی طرحواره‌ای گزینشی، راه مؤثری را برای کاهش دقت روش FCT پیشنهاد کردند. روش پیشنهادی بلوسی و دورن (۲۰۰۸) مورد توجه محققان روش‌های نیمه لاگرانژی (هریس و همکاران، ۲۰۱۱) و حجم منتهای (گرماین و همکاران، ۲۰۱۳) قرار گرفته است. مدل پیش‌بینی منطقه محدود WRF از روش FCT برای مهار نوسان‌های اضافی در مناطق با گرادیان شدید استفاده می‌کند (اسکاماروک و همکاران، ۲۰۰۵).

روش TVD را اولین بار هارتن (۱۹۸۳) معرفی کرد و تقریباً اغلب طرحواره‌های با تفکیک بالا که مورد استقبال قرار گرفته‌اند از این روش برای محدود کردن شار و حذف نوسان استفاده می‌کنند. در این روش فرآیند حل بین دو طرحواره مرتبه بالا و پادجریان سو جابه‌جا می‌شود

تا از ایجاد نوسان‌های اضافی جلوگیری شود. این روش چند مزیت دارد که عبارتند از: الف) حفظ خاصیت یکنوایی و عدم تولید نوسان در مناطق دارای گرادیان شدید و ناپیوستگی، ب) سادگی و کارایی مناسب و ج) حداقل دقت مرتبه دوم در نواحی هموار (ونلیر، ۱۹۷۷؛ سوبی، ۱۹۸۴؛ هاندس دورف و ترومپر، ۱۹۹۴؛ کاداباجو و کومر، ۲۰۰۶؛ دوی، ۲۰۱۳). فرینگر و همکاران (۲۰۰۵) با فرمول‌بندی مناسبی روش پادجریان سو را با روش لکس و ندرروف (۱۹۶۰) ترکیب کرد که از مزایای آن سادگی برنامه‌نویسی است.

در حال حاضر مدل‌های هواشناسی عموماً از روش FCT (لی و همکاران، ۲۰۱۰) و مدل‌های دینامیک شاره‌ها عموماً از روش TVD برای مثبت معین کردن کمیت نرده‌ای مورد حل استفاده می‌کنند (زنگ و همکاران، ۲۰۱۵).

روش نیمه لاگرانژی: به‌طور کلی دو روش اویلری و لاگرانژی در حل معادلات حاکم بر شاره‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرند. در روش اویلری حرکت ذرات شاره از دید ناظر ساکن نسبت به آن ارزیابی می‌شود، در صورتی که در روش لاگرانژی مسیر حرکت ذره از دید ناظر همراه با ذرات شاره مسیریابی و حل می‌شوند. در روش لاگرانژی بعد از چند گام زمانی، ذرات در بعضی قسمت‌های حوزه تجمع کرده و در بعضی دیگر از قسمت‌های حوزه ذره‌ای وجود ندارد که این عامل موجب ازدست‌رفتن اطلاعات در نقاط دارای واگرایی می‌شود. به‌همین دلیل روش‌های نیمه لاگرانژی توسعه یافته‌اند که شبکه‌مبنا بوده و در آنها مسیریابی محدود به ذرات متصل به نقاط شبکه است. بدین ترتیب، روش نیمه لاگرانژی ترکیبی از روش‌های اویلری و لاگرانژی است که ذره فقط در طی یک گام زمانی به‌صورت لاگرانژی حل می‌شود.

روش‌های نیمه لاگرانژی (روبر، ۱۹۸۱؛ ۱۹۸۲) محدودیت ناشی از شرط پایداری کورانت-فردریکس-لوی موسوم به CFL (کورانت و همکاران، ۱۹۲۸) ندارند. پس با

(shape preserving) ایجاد شده‌اند (رَش و ویلیامسون، ۱۹۹۰). حفظ‌کننده شکل شامل روش‌هایی است که یکنوا (عدم تولید نوسان و مقادیر بیشینه و کمینه ساختگی) و مثبت معین (عدم تولید مقادیر منفی) هستند (داقرتی و همکاران، ۱۹۸۹). در برخی دیگر از روش‌های نیمه‌لاگرانژی، درون‌یابی هرمیت مکعبی قطعه‌ای به کار رفته است (مهرنبرگر و ویولارد، ۲۰۰۷). در درون‌یابی هرمیت از مقدار کمیت و مشتق مکانی اول آن در نقاط شبکه برای درون‌یابی استفاده می‌شود. اولین بار فریچ و کارلسون (۱۹۸۰) نشان دادند که می‌توان درون‌یابی یکنوا را با چندجمله‌ای‌های هرمیت مکعبی انجام داد. مانند روش‌های FCT و TVD ایده ترکیب طرحواره‌های مرتبه بالا با طرحواره‌های مرتبه پایین در روش نیمه‌لاگرانژی هم مطرح شد که نیمه‌لاگرانژی شبه‌یکنوا QMSL (Quasi-Monotone Semi-Lagrangian) نامیده می‌شوند (برمیو و استنیفورت، ۱۹۹۲؛ پرستلی، ۱۹۹۳). در روش نیمه‌لاگرانژی شبه‌یکنوا مقادیر بیشینه و کمینه گام زمانی بعدی تعیین می‌شود و چنانچه مقدار کمیت حل‌شونده از مقدار بیشینه آن بیشتر شود، مقدار بیشینه و همچنین اگر مقدار کمیت حل‌شونده کمتر از مقدار کمینه شود، مقدار کمینه منظور می‌شود.

یکی از مشکلات رایج در روش نیمه‌لاگرانژی عدم پایداری ناشی از میرایی ذاتی برای میدان مورد نظر در فرآیند محاسبات است. این میرایی ذاتی ناشی از درون‌یابی است، زیرا برای یافتن کمیت در نقطه درون‌یابی از نقاط شبکه‌ای مجاور استفاده می‌شود که در واقع نوعی میانگین‌گیری است. برای رفع این مشکل، روش‌های نیمه‌لاگرانژی پایستار توسعه داده شده و در مدل‌های اقلیمی (ویلیامسون و اولسون، ۱۹۹۸) و گردش کلی (روم و همکاران، ۲۰۰۷) به کار گرفته شده است. علاوه بر ناپایداری، مشکل دیگر در روش‌های نیمه‌لاگرانژی مسیریابی ذرات است. در دسترس نبودن مقادیر سرعت در بین گام‌های زمانی، مسیریابی دقیق ذرات را با چالش مواجه می‌کند. مسیریابی ذرات مخصوصاً در طرحواره‌های

استفاده از آنها در مدل‌های پیش‌بینی عددی می‌توان گام زمانی را تا حدی که دقت مورد نیاز اجازه می‌دهد، افزایش داد. این مزیت روش‌های نیمه‌لاگرانژی به‌ویژه در نزدیکی قطب در مسائل تمام‌کروی حائز اهمیت است و به‌همین دلیل در مدل‌های گردش کلی جو کاربرد وسیعی یافته‌اند. در مدل‌های گردش کلی معمولاً گام زمانی چند برابر بزرگ‌تر از حداکثر مقدار مجاز برای برآوردن شرط CFL در نظر گرفته می‌شود. چون دقت در این دسته از مدل‌ها مورد توجه است، پس روشی برای حل معادله تراژد در مدل‌های گردش کلی در نظر گرفته می‌شود که در گام‌های زمانی بزرگ خطای آن پذیرفتنی باشد؛ روش نیمه‌لاگرانژی دارای این خاصیت است. از این روش در طیف وسیعی از مقیاس‌های جوی از میان‌مقیاس (همرفت) گرفته تا مدل‌های گردش کلی جو استفاده شده است (کیان و همکاران، ۱۹۹۸). در حال حاضر تعدادی از مدل‌های عملیاتی از این روش برای هسته دینامیکی استفاده می‌کنند (تمپرتون و همکاران، ۲۰۰۱).

صرف‌نظر از الگوریتم نیمه‌لاگرانژی خاص طراحی شده در کار اسمولارکیویچ و پودیکویچ (۱۹۹۲) که درون‌یابی را با حل یک معادله فرارفت با سرعت ثابت جایگزین می‌کند، دقت دسته اصلی روش‌های نیمه‌لاگرانژی به‌دقت روش درون‌یابی بستگی دارد و عموماً بر اساس روش درون‌یابی نیز طبقه‌بندی و نام‌گذاری می‌شوند. در اینجا به‌تعدادی از روش‌های درون‌یابی پرکاربردتر اشاره می‌شود. در ساده‌ترین حالت می‌توان از روش درون‌یابی خطی استفاده کرد که دارای دقت مکانی مرتبه اول بوده و معادل با روش پادجریان سو است. استفاده از روش‌های مرتبه بالاتر کاملاً رایج است (آزادی، ۱۳۷۳؛ اصفهانیان و اشرفی، ۱۳۸۲؛ محب‌الحججه و مشایخی، ۱۳۸۳). از جمله این روش‌ها، درون‌یابی لاگرانژ مکعبی قطعه‌ای است که نمونه‌ای از آن کاربست آن را می‌توان در کار محب‌الحججه و دریچل (۲۰۰۹) یافت. تولید مقادیر منفی برای میدان‌های جرم و رطوبت از معایب عمده این درون‌یابی است. به‌همین دلیل روش‌های حفظ‌کننده شکل

مورد محاسبه قرار می‌گیرد. این روش می‌تواند در یک فرآیند تکرار قرار گیرد تا نتیجه بهتری حاصل شود (دیامانتاکیس، ۲۰۱۳).

هدف از تحقیق کنونی توسعه یک طرحواره نیمه‌لاگراژی مثبت معین و یکنوا بر مبنای درون‌یابی هرمیت برای حل معادله ترابرد رطوبت در روی کره است. عدم استفاده از روش‌های مثبت معین موجب ایجاد مقادیر منفی در حل معادله کمیت‌هایی مانند رطوبت می‌شود. در بخش بعدی مبانی نظری روش نیمه‌لاگراژی ارائه و سپس شیوه درون‌یابی هرمیت به همراه محدودکننده مشتق برای مثبت معین شدن و حفظ یکنوایی بیان می‌شود.

۲. مبانی نظری روش نیمه‌لاگراژی

معادله فرارفت یک کمیت فیزیکی یا چگالی آن $\phi(\mathbf{x}, t)$ با میدان سرعت $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ را می‌توان چنین نوشت:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \phi) = s, \quad (1)$$

که در آن s معرف جملات چشمه و چاه است. فرض می‌شود که شاره تراکم‌ناپذیر و جملات چشمه و چاه صفر باشد، یعنی:

$$\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad s = 0. \quad (2)$$

معادله (۱) را می‌توان به صورت

$$\frac{D\phi}{Dt} \equiv \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi = 0, \quad (3)$$

بازنویسی کرد. معادله (۱) در شکل پایستار و معادله (۳) در شکل فرارفتی است. روش‌های حل متفاوتی متناسب با این شکل‌ها توسعه یافته‌اند. برای مثال در روش حجم متناهی از شکل پایستار استفاده می‌شود، در صورتی که در روش تفاضل متناهی می‌توان از هر دو شکل پایستار و فرارفتی بهره برد ولی استفاده از شکل پایستار معمولاً دارای مزایای بیشتری نسبت به شکل فرارفتی است. برای وضوح، چنانچه معادله (۳) یک‌بار دیگر به شکل لاگراژی

نیمه‌لاگراژی پایستار (نیمه‌لاگراژی حجم متناهی) دارای اهمیت بیشتری است، زیرا دقت عملکرد طرحواره متناسب است با مساحت جاروب شده توسط سطح کنترلی در گام زمانی قبل. روش‌های دو مرحله‌ای با الگوریتم تکرار از روش‌های مرسوم در تعیین مسیر ذرات می‌باشند (بخش ۲)، ولی در آنها نیز شتاب یا تغییر سرعت با زمان لحاظ نمی‌شود. در واقع در طی دو مرحله فقط تا توان دوم در بسط تیلور نسبت به زمان در نظر گرفته می‌شود که فقط شامل سرعت در فاصله بین شبکه‌ای است. در نظر گرفتن توان سوم در بسط تیلور منجر به محاسبه شتاب در فاصله بین شبکه‌ای می‌شود؛ به دلیل هزینه محاسباتی زیاد از توان سوم در بسط تیلور معمولاً صرف‌نظر می‌شود. به همین دلیل روش‌هایی که حساسیت زیادی به مسیریابی دارند با خطای زیادی مواجه می‌شوند. در روش‌های دقیق‌تر مسیریابی، در بسط تیلور توان سوم و حتی بالاتر مکان مورد محاسبه قرار می‌گیرد (مکنهاور و همکاران، ۲۰۰۹). لازم به ذکر است که استفاده از روش‌های دقیق مسیریابی و پایستاری جرم منجر به پیچیدگی زیاد و افزایش حجم محاسبات در سه بعد می‌شود. به همین دلیل در مدل‌های معروف عملیاتی پیش‌بینی وضع هوا مانند مدل مرکز اروپایی پیش‌بینی میان‌مدت وضع هوا (ECMWF) همچنان از روش استاندارد نیمه‌لاگراژی به همراه تصحیح‌کننده‌ها (مانند پایستاری و مسیریابی) استفاده می‌شود (هورتال، ۲۰۰۴).

مشکل مهم‌تر روش‌های نیمه‌لاگراژی، یعنی ناپایستاری جرم در رفتار مدل‌های پیش‌بینی در کوتاه‌مدت و میان‌مدت تأثیر بزرگی ندارد و بیشتر در مدل‌های اقلیمی که برای مدت‌زمان زیادی پیش‌بینی انجام می‌شود، اثرگذار است. از روش‌های پایستار نگاه داشتن جرم می‌توان به تصحیح‌کننده‌های جهانی جرم اشاره کرد. در این روش‌ها مقدار جرم در گام زمانی قبل و بعد مورد محاسبه قرار گرفته و در صورت تغییر مقدار جرم طی یک گام زمانی مقادیر بسیار کمی جرم به یاخته‌ها (سلول‌های شبکه اضافه یا کم شده و سپس مقدار کل جرم روی کره

صرف نوشته شود:

$$\frac{D\phi}{Dt} = 0, \quad (۴)$$

برای حل آن نیاز به تعیین شرایط اولیه $\phi(\mathbf{x}, t) = \phi(\mathbf{x}(t_0), t_0)$ است. با انتگرال‌گیری از معادله (۴) به دست می‌آید:

$$\frac{\phi(\mathbf{x}, t + \delta t) - \phi(\tilde{\mathbf{x}}, t)}{\delta t} = 0, \quad (۵)$$

$$\phi(\mathbf{x}, t + \delta t) = \phi(\tilde{\mathbf{x}}, t),$$

$$\frac{\phi(\mathbf{x}^*, t + \delta t) - \phi(\mathbf{x}, t)}{\delta t} = 0, \quad (۶)$$

$$\phi(\mathbf{x}^*, t + \delta t) = \phi(\mathbf{x}, t),$$

که \mathbf{x}^* نقطه‌ای بین شبکه‌ای در زمان آینده معرف نقطه مقصد، $\tilde{\mathbf{x}}$ نقطه بین شبکه‌ای در زمان حال معرف نقطه مبدأ است. رابطه (۵) شکل پس‌رو در زمان (استنیفورس و کوتاه، ۱۹۹۱) و رابطه (۶) پیش‌رو در زمان (نیر و همکاران، ۲۰۰۳) است. در این پژوهش از شکل پس‌رو برای حل معادله فرارفت استفاده می‌شود. معادله (۵) نشان می‌دهد که مقدار کمیت عددی در زمان آینده در نقطه شبکه‌ای با مختصه \mathbf{x} معادل با مقدار کمیت در زمان حال در نقطه‌ای با مختصه $\tilde{\mathbf{x}}$ است. برای تعیین نقطه $\tilde{\mathbf{x}}$ لازم است معادله مسیر

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{u}, \quad (۷)$$

حل شود. معادله

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{u} \delta t, \quad (۸)$$

را می‌توان به صورت یک مرحله‌ای و یا دو مرحله‌ای (تمپرتن و استنیفورت، ۱۹۸۷)

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \delta t \mathbf{u}(\mathbf{x}_m, t_{n+1/2}), \quad (۹)$$

با قرار دادن $\mathbf{x}_m = (\mathbf{x} + \tilde{\mathbf{x}}) / 2$ برای مختصه نقطه میانی در گام زمانی $t_{n+1/2}$ حل کرد. معادله (۸) با دو تکرار حل می‌شود و دارای دقت مرتبه دوم در زمان است. برای حل معادله مسیر بر روی کره و غلبه بر مشکل قطب از

دستگاه مختصات متصل به مرکز کره که برای سادگی شعاع آن یک گرفته شده، استفاده شده است (ریچی، ۱۹۸۷، نیر و همکاران، ۲۰۰۳؛ محب‌الحجه و دریچل، ۲۰۰۹):

$$\begin{aligned} x_c &= \cos \theta \cos \lambda, \\ y_c &= \cos \theta \sin \lambda, \\ z_c &= \sin \theta. \end{aligned} \quad (۱۰)$$

برای حل معادله مسیر (۷) مقادیر سرعت در مختصات دکارتی متصل به مرکز کره:

$$\begin{aligned} u_c &= -u \sin \lambda - v \sin \theta \cos \lambda, \\ v_c &= u \cos \lambda - v \sin \theta \sin \lambda, \\ w_c &= v \cos \theta, \end{aligned} \quad (۱۱)$$

لازم است که در آن $u = \cos \theta d\lambda / dt$ و $v = d\theta / dt$ مقادیر سرعت در راستای به ترتیب طول و عرض جغرافیایی هستند و u_c ، v_c و w_c مقادیر سرعت در سه راستای دستگاه مختصات دکارتی متصل به مرکز کره است. برای به دست آوردن مقادیر سرعت در زمان $t_{n+1/2}$ از روش برون‌یابی خطی

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_{n+1/2}) = \frac{3}{2} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t^n) - \frac{1}{2} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t^{n-1}), \quad (۱۲)$$

استفاده شده است. البته سایر روش‌های برون‌یابی نیز برای میدان سرعت قابل استفاده است ولی روش فوق نتایج بهتری را به همراه دارد (تمپرتن و استنیفورس، ۱۹۸۷). با حل مقادیر \tilde{x}_c ، \tilde{y}_c و \tilde{w}_c از رابطه (۸) و روابط متناظر برای دو راستای دیگر مختصات، با استفاده از

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda} &= \text{tg}^{-1}(\tilde{y}_c / \tilde{x}_c), \\ \tilde{\theta} &= \sin^{-1}(\tilde{z}_c), \end{aligned} \quad (۱۳)$$

می‌توان مقادیر $\tilde{\lambda}$ و $\tilde{\theta}$ را محاسبه کرد. پس از محاسبه نقطه مبدأ در شبکه طول و عرض جغرافیایی لازم است مقادیر کمیت ترابردیابنده از طریق درون‌یابی به دست آید. برای درون‌یابی در اینجا از چندجمله‌ای‌های درون‌یاب هرمیت استفاده می‌شود. به علاوه، مشتق‌ها پس از محاسبه در مناطق با گرادیان شدید کمیت ترابردیابنده محدود

$$H_0(u) = 2u^3 - 3u^2 + 1, \quad H_1(u) = -2u^3 + 3u^2,$$

$$H_2(u) = u^3 - 2u^2 + u, \quad H_3(u) = u^3 - u^2.$$

روش مورد استفاده برای یکنواسازی چندجمله‌ای فوق بر اساس محدود کردن مقادیر α_i و β_i به ناحیه یکنوا (ناحیه خاکستری رنگ در شکل (۱) است (محمدی و همکاران، ۱۳۹۷). در صورت غیرصفر بودن واگرایی سرعت، شکل لاگرانژی معادله ترائرد به صورت

$$\frac{D\phi}{Dt} = -\phi \nabla \cdot \mathbf{u}, \quad (16)$$

درمی‌آید. با انتگرال‌گیری از رابطه (۱۶) در یک گام زمانی معادله

$$\phi(\mathbf{x}, t + \delta t) = \phi(\tilde{\mathbf{x}}, t) \frac{1 + 0.5 \delta t (\nabla \cdot \mathbf{u})^t}{1 + 0.5 \delta t (\nabla \cdot \mathbf{u})^{t + \delta t}}, \quad (17)$$

به‌دست می‌آید. رابطه (۱۷) نشان می‌دهد که اگر واگرایی در زمان آینده افزایش یابد، مخروط کسر بزرگ‌تر از صورت شده و بنابراین جرم کمیت نرده‌ای کاهش می‌یابد. طرحواره نیمه‌لاگرانژی بالا به صورت یک‌بعدی معرفی شده است که در مدل گردش کلی لازم است به صورت سه‌بعدی حل شود. برای این منظور می‌توان درون‌یابی یک‌بعدی را به دو و سه بعد تعمیم داد.

شده تا از ایجاد نوسان‌های ناخواسته جلوگیری شده و مقادیر منفی نیز تولید نشود.

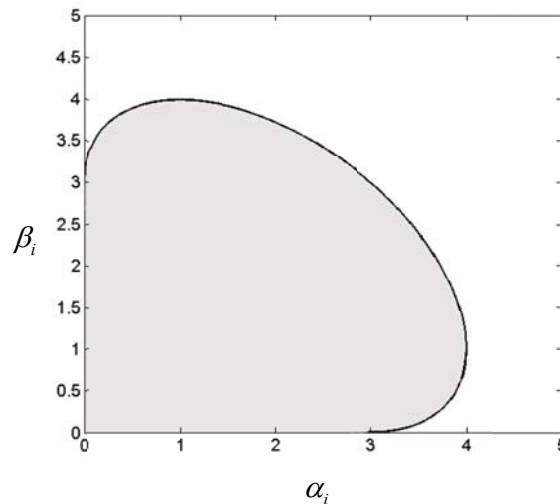
چندجمله‌ای درون‌یاب هرمیت درجه سوم به صورت زیر تعریف می‌شود (فریچ و کارلسون، ۱۹۸۰)

$$P(x) = \left[\frac{\Delta_i (\alpha_i + \beta_i - 2)}{h_i^2} \right] (x - x_i)^3 + \left[\frac{\Delta_i (-2\alpha_i - \beta_i + 3)}{h_i} \right] (x - x_i)^2 + \Delta_i \alpha_i (x - x_i) + f_i, \quad (14)$$

که $h_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta_i = (f_{i+1} - f_i) / h_i$ مقدار تابع f ، $\beta_i = d_{i+1} / \Delta_i$, $\alpha_i = d_i / \Delta_i$ مشتق آن در نقاط داده است. چندجمله‌ای (۱۴) را می‌توان بر اساس توابع پایه هرمیت مکعبی H_1 ، H_0 ، H_2 و H_3 به صورت زیر بازنویسی کرد (والبرگ و آلفی، ۲۰۰۲)

$$P(x) = H_0 \left(\frac{x - x_i}{h_i} \right) f_i + H_1 \left(\frac{x - x_i}{h_i} \right) f_{i+1} + h_i H_2 \left(\frac{x - x_i}{h_i} \right) d_i + h_i H_3 \left(\frac{x - x_i}{h_i} \right) d_{i+1}, \quad (15)$$

که توابع پایه به صورت زیر در بازه $0 \leq u \leq 1$ تعریف می‌شوند:



شکل ۱. ناحیه خاکستری، ناحیه یکنوایی مورد استفاده در پژوهش حاضر را برحسب مقادیر α_i و β_i نشان می‌دهد (محمدی و همکاران، ۱۳۹۷).

۳. نتایج و بحث

در بخش قبل مبانی نظری روش نیمه‌لاگرانژی مورد بحث قرار گرفت و محدود کردن مشتق در ناحیه یکنوا به عنوان ابزاری برای یکنواسازی فرآیند حل مطرح شد. در این قسمت ابتدا روش نیمه‌لاگرانژی با استفاده از درون‌یابی لاگرانژ و نوسان‌های حاصل از آن مورد بحث قرار می‌گیرد. هدف نشان‌دادن نوسان‌های ایجادشده به علت استفاده از چندجمله‌ای درون‌یاب مرتبه بالا است و اینکه افزایش مرتبه، راه حل مناسبی برای حذف نوسان‌های اضافی حاصل از گرادیان شدید کمیت نرده‌ای نیست. در چندجمله‌ای‌های لاگرانژ می‌توان مرتبه چندجمله‌ای را به سادگی تنظیم کرده و به مرتبه‌های بالا در حل دست یافت.

$$\phi_0 = \begin{cases} \frac{1}{6}(G(x, \beta, z - \delta)) + \\ G(x, \beta, z + \delta) + \\ 4G(x, \beta, z), & -0.8 \leq x \leq -0.6 \\ 1 & -0.4 \leq x \leq -0.2 \\ 1 - |10(x - 0.1)| & 0 \leq x \leq 0.2 \\ \frac{1}{6}(F(x, \beta, a - \delta)) + \\ F(x, \beta, z + a) + \\ 4F(x, \beta, a), & 0.4 \leq x \leq 0.6 \\ 0, & otherwise \end{cases} \quad (19)$$

به ازای

$$G(x, \beta, z) = \exp(-\beta(x - z)^2),$$

$$F(x, \alpha, a) = \sqrt{\max(1 - \alpha^2(x - a)^2)}, 0$$

$$a = 0.5, \quad z = -0.7,$$

$$\delta = 0.005, \quad \alpha = 10,$$

$$\beta = \log 2 / 36\delta^2$$

استفاده شده است که تابع در مدت ۵ ثانیه با سرعت $2\pi/5$ به مکان اولیه باز می‌شود. با توجه به ساده بودن آزمایش (عدم تغییر مکانی و زمانی سرعت) از روش نیمه‌لاگرانژی تک‌گامی در زمان استفاده شده است.

نتیجه کاربست روش نیمه‌لاگرانژی با درون‌یابی لاگرانژ در دو تفکیک مکانی (۳۶۰ نقطه و ۱۴۴۰ نقطه) و چهار درجه توانی مختلف برای چندجمله‌ای لاگرانژ درون‌یاب شامل درجه سه با تفکیک مکانی ۳۶۰ نقطه (شکل ۲-الف)، درجه پنج با تفکیک مکانی ۳۶۰ نقطه (شکل ۲-ب)، درجه هفت با تفکیک مکانی ۳۶۰ نقطه (شکل ۲-ج)، درجه ۳۱ با تفکیک مکانی ۱۴۴۰ نقطه (شکل ۲-د) در شکل ۲ ارائه شده است.

آزمایش چندجمله‌ای لاگرانژ با درجه ۳۱ و تفکیک مکانی ۱۴۴۰ نقطه به خوبی نشان می‌دهد که حتی با استفاده از چندجمله‌ای با درجه بسیار بالا و تفکیک مکانی کاملاً ریز هم نمی‌توان نوسان‌های اضافی کمیت نرده‌ای را در نواحی با گرادیان شدید حذف کرد. بنابراین از بین بردن

۳-۱. فرارفت یک‌بعدی با سرعت ثابت

برای شکل یک‌بعدی و خطی معادله (۴)، فرارفت کمیت عددی با سرعت ثابت) مورد حل قرار می‌گیرد. روش نیمه‌لاگرانژی به صورت پس‌رو (رابطه ۵) و به دلیل ثابت بودن سرعت، حل معادله مسیر یک‌مرحله‌ای انتخاب شده است (رابطه ۱۸) و برای درون‌یابی از چندجمله‌ای‌های لاگرانژ (کاهانر و همکاران، ۱۹۸۹) استفاده می‌شود:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i(x),$$

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \left[\frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right], \quad (18)$$

$$i = 0, 1, \dots, n$$

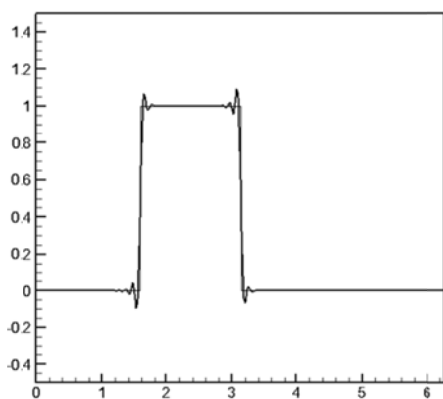
درجه این چندجمله‌ای‌ها متناسب با نوع مسئله انتخاب می‌شود ولی چندجمله‌ای لاگرانژ درجه سوم یا مکعبی که از چهار نقطه برای درون‌یابی استفاده می‌کند از محبوبیت بیشتری برخوردار است. به منظور نشان دادن عملکرد این روش از آزمایش ساده تابع سینوسی و تابع پله‌ای در بازه دوره‌ای صفر تا 2π و آزمایش جیانگ و شو (۱۹۹۶):

و نرم L_∞ یا نرم بی‌نهایت
 برای حل تابع $(L_\infty(\phi) = \max_{\text{all}} |\tilde{\phi}_i - \phi_i| / \max_{\text{all}} |\phi_i|)$
 ساده $y = \sin(x)$ با استفاده از روش درونیابی لاگرانژ
 به ترتیب با چندجمله‌ای‌های درجه ۳، ۵ و ۷ آورده شده
 است. ملاحظه می‌شود که با افزایش درجه چندجمله‌ای
 مرتبه دقت طرحواره نیز افزایش می‌یابد. در اینجا مرتبه
 دقت طرحواره بر اساس رابطه زیر تعیین می‌شود و برابر
 است با شیب خط نرم در دستگاه مختصات لگاریتمی
 به طوری که محور افقی تعداد نقاط مکانی یا تفکیک
 فضایی و محور قائم نرم خطا است.

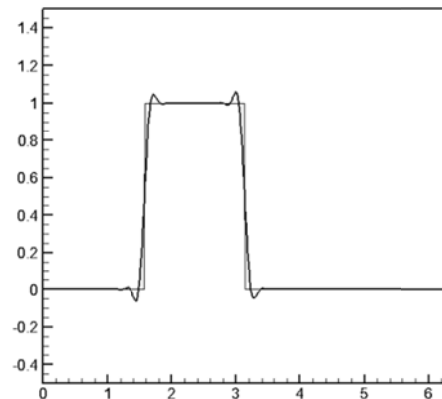
$$\text{order} = \frac{\log_{10}(i, \text{norm}) - \log_{10}(i-1, \text{norm})}{\log_{10}(i, \text{resolution}) - \log_{10}(i-1, \text{resolution})}$$

نوسان اضافی ارتباطی با دقت حل و تفکیک مکانی یا
 زمانی به کار رفته ندارد و برای حذف نوسان‌ها استفاده از
 سازوکار دیگری لازم است. لازم به ذکر است که وجود
 نوسان‌های اضافی در کمیت‌های دینامیکی عاملی برای
 ناپایداری محاسباتی و در کمیت‌های مربوط به رطوبت
 عاملی برای راه‌اندازی نادرست پارامترسازی همرفت
 است.

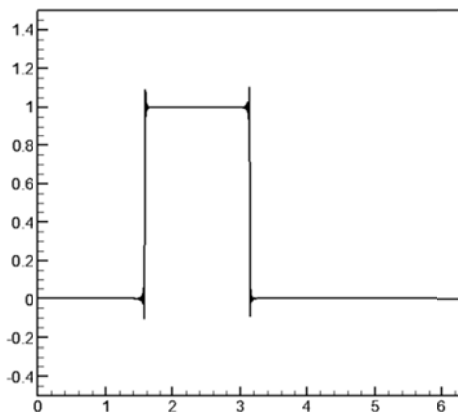
با افزایش درجه چندجمله‌ای مورد استفاده در درونیابی
 لاگرانژ، مرتبه دقت نتیجه هم افزایش می‌یابد. در جدول ۱
 نرم $L1$ یا نرم مطلق $(L_1(\phi) = \sum_{i=1}^n |\tilde{\phi}_i - \phi_i| / \sum_{i=1}^n |\phi_i|)$ ،
 نرم $L2$ یا نرم مربعی $(L_2(\phi) = \left(\sum_{i=1}^n (\tilde{\phi}_i - \phi_i)^2 / \sum_{i=1}^n (\phi_i)^2 \right)^{1/2})$



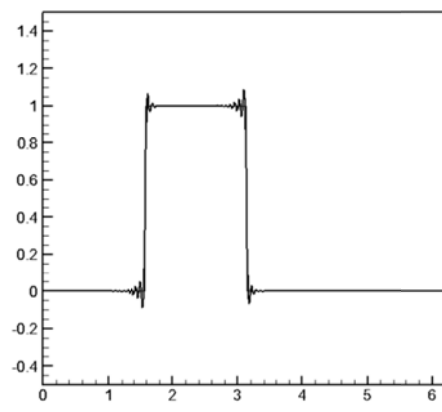
(ب)



(الف)



(د)



(ج)

شکل ۲. اجرای روش نیمه‌لاگرانژی با درونیابی لاگرانژ درجه سه (الف)، پنج (ب)، هفت (ج) با ۳۶۰ نقطه شبکه‌ای و درجه ۳۱ (د) بیا ۱۴۴۰ نقطه شبکه‌ای.

رخداد این حالت نمی‌تواند بهبود در حل مسأله تلقی شود، زیرا نوسان‌های با طول‌موج کوچک در کمیت‌های دینامیکی منجر به شکل‌گیری امواج گرانی-لختی ساختگی می‌شود.

چندجمله‌ای‌های لاگرانژ فقط از مقادیر کمیت نرده‌ای در نقاط شبکه برای فرآیند درون‌یابی استفاده می‌کنند در صورتی که چندجمله‌ای‌های هرمیت برای فرآیند درون‌یابی نیاز به مشتق کمیت در نقاط شبکه نیز دارند. پس با تغییر دادن یا محدود کردن مقادیر مشتق در هر نقطه می‌توان از نوسان جواب جلوگیری کرد. به همین دلیل برای مثبت معین کردن روش نیمه‌لاگرانژی، استفاده از چندجمله‌ای‌های درون‌یاب هرمیت راه کار مناسبی می‌باشد (فریچ و کارلسون، ۱۹۸۰).

همان‌طور که مشاهده می‌شود دقت طرحواره متناسب است با توان چندجمله‌ای استفاده شده در محاسبات (مقادیر ذکر شده در ستون آخر جدول ۱). با انتخاب درجه‌های سه، پنج و هفت برای چندجمله‌ای، به ترتیب مرتبه‌های دقت سوم، پنجم و هفتم حاصل می‌شود. لازم به ذکر است که در اینجا برای محاسبه دقت طرحواره از نُرم قدر مطلق استفاده شده است.

همان‌طور که مشاهده شد، درجه چندجمله‌ای درون‌یاب اثر مستقیم بر مرتبه دقت روش نیمه‌لاگرانژی دارد. هر چند با افزایش مرتبه درون‌یابی بر دقت روش افزوده می‌شود، ولی نوسان‌های اضافی در مناطق باگرادیان شدید را نمی‌توان برطرف کرد بلکه تنها طول‌موج نوسان‌های اضافی کوچک‌تر می‌شود.

جدول ۱. نُرم‌های قدر مطلق، مربعی و بی‌نهایت خطا برای روش نیمه‌لاگرانژی بر روی تابع $y = \sin(x)$ و عدد کورانت $1/8$ با درون‌یابی لاگرانژ درجه سه، پنج، هفت.

تعداد نقاط شبکه	نرم قدر مطلق	نرم مربعی	نرم بی‌نهایت	مرتبه دقت نُرم قدر مطلق	درجه چند جمله‌ای
90	1.71e-05	1.71e-05	1.71e-05	0	3
180	2.14e-06	2.14e-06	2.14e-06	3.000	3
270	6.33e-07	6.33e-07	6.33e-07	2.998	3
360	2.67e-07	2.67e-07	2.67e-07	3.001	3
450	1.37e-07	1.37e-07	1.37e-07	3.015	3
540	7.92e-08	7.92e-08	7.92e-08	2.980	3
90	1.71e-08	1.71e-08	1.71e-08	0	5
180	5.35e-10	5.35e-10	5.35e-10	5.00	5
270	7.04e-11	7.04e-11	7.04e-11	5.00	5
360	1.67e-11	1.67e-11	1.67e-11	5.00	5
450	5.51e-12	5.51e-12	5.51e-12	4.98	5
540	2.21e-12	2.21e-12	2.21e-12	5.00	5
90	1.66e-10	1.66e-10	1.66e-10	0	7
180	1.26e-12	1.26e-12	1.26e-12	7.04	7
270	6.99e-13	7.18e-13	7.08e-13	7.13	7
360	2.08e-13	2.08e-13	2.81e-13	-	7
450	1.25e-13	2.02e-13	2.02e-13	-	7
540	0.26e-13	0.26e-13	0.26e-13	-	7

بر روی نقاط شبکه در ناحیه یکنوا قرار داشته باشد. پس با توجه به مطالب فوق دو راه کار برای روش نیمه لاگراتژی می توان به کار برد.

۱- در راه کار یکم برای درون یابی چهار نقطه در اطراف هر نقطه مورد نظر انتخاب و سپس فقط با دو نقطه درونی، درون یابی هرمیتی نایکنوا انجام و تابع

$$\mu = \frac{y_{\text{int}}(i) - y(j)}{y(j+1) - y(j)}, \quad (20)$$

محاسبه شود. در رابطه (۲۰)، i معرف نقطه مورد درون یابی، j معرف نقاط شبکه اصلی، یعنی همان نقاط دو طرف بازه مورد درون یابی، y_{int} مقدار درون یابی شده در نقطه i ام، y مقدار کمیت در نقاط شبکه اصلی است. اگر μ در بازه $[0,1]$ قرار گیرد، درون یابی یکنوا و در غیر این صورت درون یابی نایکنوا است (اگر $y(j) > y_{\text{int}}(i) > y(j+1)$ ، μ در بازه $[0,1]$ قرار می گیرد، ولی اگر $y(j+1) > y_{\text{int}}(i) > y(j)$ ، μ بزرگ تر از یک و اگر $y(j) < y_{\text{int}}(i) < y(j+1)$ ، μ منفی خواهد شد). در این صورت عمل درون یابی نایکنوا رها شده و با استفاده از $y'(j-1), y'(j), y'(j+1)$ مشتق در نقطه $j-1$ و با استفاده از $y'(j), y'(j+1)$ مشتق در نقطه j در ناحیه یکنوا قرار می گیرند. این عمل موجب می شود که از محاسبه اضافی همه مقادیر مشتق بر روی شبکه در ناحیه یکنوا خودداری شده و حجم محاسبات کاهش یابد. سپس درون یابی هرمیت مرتبه سوم با استفاده از مشتق محدود شده انجام می گیرد. در این روش چنانچه در هیچ یک از بازه های شبکه تابع مد نظر، دارای گرادیان شدید (افت و خیز تابع یا شباهت تابع به حالت تابع پله ای) نباشد، مشتق تغییر نکرده و دقت روش در روند حل کاهش نمی یابد.

۲- در راه کار دوم ابتدا در مرحله اول مشتق با استفاده از روابط تفاضل متناهی محاسبه شده و سپس بر روی تمامی نقاط، مشتق محدود شده برای یکنوایی محاسبه می شود. در مرحله دوم درون یابی ابتدا با مقادیر اولیه مشتق و فقط در صورت یکنوا نشدن با مشتق محدود شده انجام می شود.

ساده ترین سازوکاری که برای یکنواسازی می توان اتخاذ کرد به این صورت است که در هر بازه شبکه ای، مشتق ها در دو طرف بازه $\psi(i)$ و $\psi(i+1)$ بر مقدار شیب تابع بین این دو نقطه تقسیم شده و مقادیر α_i و β_i مورد محاسبه قرار گیرد (رابطه (۱۵)). محدوده مقادیرهای α_i و β_i لازم برای یکنوا شدن تابع درون یاب (ناحیه یکنوایی) در شکل ۱ با رنگ خاکستری رسم شده است. اگر α_i و β_i در ناحیه یکنوایی قرار گرفته باشند، نشان دهنده یکنوا بودن تابع در این بازه است ولی چنانچه این مقادیر در خارج از ناحیه یکنوایی قرار گیرند مقادیر جدید α_i و β_i از تقاطع خط واصل بین α_i و β_i قبلی و مبدأ مختصات با مرز ناحیه یکنوا به دست می آید. سپس با این مقادیر جدید α_i و β_i ، مقادیر مشتق دوباره محاسبه می شوند (محمدی و همکاران، ۱۳۹۷).

هر چند روش گفته شده یک درون یابی یکنوا ایجاد می کند، ولی برای حل نیمه لاگراتژی مناسب نیست زیرا دو مقدار مشتق در دو طرف بازه با هم تغییر می کنند که این امر منجر به تغییر دوباره مشتق در بازه مجاور می شود. بنابراین ممکن است مشتق در یک نقطه، دو یا حتی چند بار دستخوش تغییر شود که حاصل آن از دست رفتن دقت مورد انتظار در روش نیمه لاگراتژی است. برای اجتناب از چنین خطایی، درون یابی گزینشی به کار گرفته شده است به طوری که تغییر مشتق تنها در جایی که نایکنوایی وجود دارد، اتفاق می افتد. به کارگیری درون یابی گزینشی که در ادامه به تفصیل بیان می شود مستلزم تغییر مشتق در دو طرف بازه مورد درون یابی است. ولی چنانچه این عمل در دو بازه متوالی انجام گیرد ناپیوستگی مشتق را به همراه خواهد داشت. پس لازم است برای درون یابی در هر بازه، به جای فقط دو نقطه ابتدا و انتهای بازه، دو نقطه قبل و بعد نیز برای درون یابی انتخاب شده و روند محدود کردن مشتق به ناحیه یکنوا انجام گیرد. یعنی با استفاده از چهار نقطه حول نقطه مورد درون یابی، مقادیر جدید مشتق محاسبه می شود تا مشتق در نقاط اصلی ناپیوسته نشود. البته این امکان هم وجود دارد که از همان ابتدا کلیه مقادیر مشتق

این عمل از محاسبه اضافی مشتق محدود شده در نواحی ذاتاً یکنوا، جلوگیری می‌کند.

در این مقاله از راه کار یکم برای درون‌یابی یکنوا استفاده شده است. برای ارزیابی عملکرد چندجمله‌ای درون‌یاب هرمیت در روش نیمه‌لاگرنژی، آزمون عددی موج ترکیبی جیانگ و شو (۱۹۹۶) به کار برده شده است. در این آزمون عدد کورانت برابر با $1/8$ در نظر گرفته شده است تا توانایی طرحواره نیمه‌لاگرنژی در اعداد کورانت بالاتر از یک مورد آزمون قرار گیرد. باید توجه داشت که در اینجا تنها هدف نشان‌دادن تولید نوسان‌های اضافی و حذف آن می‌باشد و به کارگیری این روش در یک مدل گردش کلی مستلزم حل معادله مسیر بر روی کره (رابطه (۸)) با روش دو مرحله‌ای در زمان (رابطه (۹)) و درون‌یابی در سه بعد است که می‌تواند از لحاظ ساختاری تفاوت‌های زیادی با مثال حاضر داشته باشد. هدف در این قسمت فقط آزمایش طرحواره در شرایط نزدیک‌تر به شرایط واقعی است. لازم به ذکر است نتایج حاصل از آزمون یک بُعدی تعمیم‌پذیر به سه بعد و در نهایت مدل گردش کلی است.

چنانچه در شکل ۳-الف دیده می‌شود استفاده از چندجمله‌ای هرمیت معمولی از مرتبه سوم (رابطه (۱۵)) برای درون‌یابی منجر به نوسان‌های اضافی در نواحی با گرادیان شدید می‌شود. برای حذف نوسان‌های اضافی، جمله‌های مشتق رابطه (۱۵) با روش ارائه شده در محمدی و همکاران (۱۳۹۷) در ناحیه یکنوا (شکل ۱) قرار داده شده است (شکل ۳-ب). دیده می‌شود که محدود کردن مشتق‌ها به ناحیه یکنوا با استفاده از راه کار یکم (درون‌یابی گزینشی) موجب از بین رفتن نوسان‌های اضافی می‌شود.

نرم‌های خطا برای درون‌یابی تابع ساده سینوس با چندجمله‌ای هرمیت درجه سوم در جدول ۲ آورده شده است. بنابر جدول ۲، متناسب با مرتبه چندجمله‌ای، دقت از مرتبه سوم است. با مقایسه با درون‌یابی لاگرنژ

درجه سه (جدول ۱) دیده می‌شود که خطای درون‌یابی هرمیت یک مرتبه از درون‌یابی لاگرنژ کمتر است. در آزمایش عددی با موج ترکیبی، مشاهده می‌شود که نرم‌های خطای عددی افزایش یافته و مرتبه دقت به یک کاهش پیدا کرده است (جدول ۳). این امر به‌وضوح نشان می‌دهد که مرتبه دقت نظری بر مبنای درجه چندجمله‌ای درون‌یاب فقط برای میدان‌های هموار مانند موج سینوسی برقرار است و با تغییر به میدان‌های پیچیده مرتبه دقت کاهش می‌یابد و به‌طور کلی همواره بین مرتبه دقت واقعی یا مؤثر یک طرحواره و دقت نظری یا صوری (formal) آن اختلاف وجود دارد (محب‌الحجه و دریچل، ۲۰۰۷).

به‌طور کلی توجه به تفاوت میان مرتبه دقت صوری و مرتبه دقت مؤثر یک طرحواره لازم است. صرف‌نظر از اینکه مسأله خطی باشد یا غیرخطی، در نمایش گسسته یک میدان ناهموار مانند تابع جیانگ و شو مرتبه دقت مؤثر به شدت نسبت به مرتبه دقت صوری کاهش می‌یابد (برای تحلیل رجوع شود به صفحات ۲۹۲-۲۹۳ دورن، ۲۰۱۰). در جدول ۴ نرم‌های قدر مطلق، مربعی و بی‌نهایت خطا در کاربست روش نیمه‌لاگرنژی بر تابع جیانگ و شو (۱۹۹۶) به ترتیب در عدد کورانت $1/8$ و $1/18$ با درون‌یابی هرمیت مکعبی یکنوا گزینشی آورده شده است. مشاهده می‌شود که مرتبه دقت برای هر دو عدد کورانت تقریباً یکسان بوده و مرتبه دقت برای درون‌یابی هرمیت مکعبی گزینشی همواره بیشتر و نزدیک به یک است، در صورتی که برای درون‌یابی هرمیت مکعبی (جدول ۳) دقت طرحواره در بعضی موارد به کمتر از یک نیز رسیده است. نرم خطا و دقت طرحواره برای درون‌یابی هرمیت کاملاً یکنوا نسبت به حل با درون‌یابی هرمیت مکعبی گزینشی به ترتیب تقریباً دو برابر و نصف شده است. این نتیجه حاکی از عملکرد ضعیف طرحواره نیمه‌لاگرنژی با درون‌یابی هرمیت مکعبی کاملاً یکنوا است (جدول ۵).

این عمل از محاسبه اضافی مشتق محدود شده در نواحی ذاتاً یکنوا، جلوگیری می‌کند.

در این مقاله از راه کار یکم برای درون‌یابی یکنوا استفاده شده است. برای ارزیابی عملکرد چندجمله‌ای درون‌یاب هرمیت در روش نیمه‌لاگرنژی، آزمون عددی موج ترکیبی جیانگ و شو (۱۹۹۶) به کار برده شده است. در این آزمون عدد کورانت برابر با $1/8$ در نظر گرفته شده است تا توانایی طرحواره نیمه‌لاگرنژی در اعداد کورانت بالاتر از یک مورد آزمون قرار گیرد. باید توجه داشت که در اینجا تنها هدف نشان‌دادن تولید نوسان‌های اضافی و حذف آن می‌باشد و به کارگیری این روش در یک مدل گردش کلی مستلزم حل معادله مسیر بر روی کره (رابطه (۸)) با روش دو مرحله‌ای در زمان (رابطه (۹)) و درون‌یابی در سه بعد است که می‌تواند از لحاظ ساختاری تفاوت‌های زیادی با مثال حاضر داشته باشد. هدف در این قسمت فقط آزمایش طرحواره در شرایط نزدیک‌تر به شرایط واقعی است. لازم به ذکر است نتایج حاصل از آزمون یک بُعدی تعمیم‌پذیر به سه بعد و در نهایت مدل گردش کلی است.

چنانچه در شکل ۳-الف دیده می‌شود استفاده از چندجمله‌ای هرمیت معمولی از مرتبه سوم (رابطه (۱۵)) برای درون‌یابی منجر به نوسان‌های اضافی در نواحی با گرادیان شدید می‌شود. برای حذف نوسان‌های اضافی، جمله‌های مشتق رابطه (۱۵) با روش ارائه شده در محمدی و همکاران (۱۳۹۷) در ناحیه یکنوا (شکل ۱) قرار داده شده است (شکل ۳-ب). دیده می‌شود که محدود کردن مشتق‌ها به ناحیه یکنوا با استفاده از راه کار یکم (درون‌یابی گزینشی) موجب از بین رفتن نوسان‌های اضافی می‌شود.

نرم‌های خطا برای درون‌یابی تابع ساده سینوس با چندجمله‌ای هرمیت درجه سوم در جدول ۲ آورده شده است. بنابر جدول ۲، متناسب با مرتبه چندجمله‌ای، دقت از مرتبه سوم است. با مقایسه با درون‌یابی لاگرنژ

جدول ۲. نُرم‌های قدر مطلق، مربعی و بی‌نهایت خطا برای روش نیمه‌لاگرانژی بر روی تابع $y = \sin(x)$ و عدد کورانت ۱/۸ با درونیابی هرمیت مکعبی.

تعداد نقاط شبکه	نُرم قدر مطلق	نُرم مربعی	نُرم بی‌نهایت	مرتبۀ دقت برای نُرم قدر مطلق
90	1.27e-06	1.27e-06	1.27e-06	0.00
180	1.58e-07	1.58e-07	1.58e-07	3.00
270	4.69e-08	4.69e-08	4.69e-08	2.99
360	1.98e-08	1.98e-08	1.98e-08	2.99
450	1.01e-08	1.01e-08	1.01e-08	3.01
540	5.87e-09	5.87e-09	5.87e-09	2.97

جدول ۳. نُرم‌های قدر مطلق، مربعی و بی‌نهایت خطا برای کاربست روش نیمه‌لاگرانژی بر تابع جیانگ و شو (۱۹۹۶) و عدد کورانت ۱/۸ با درونیابی هرمیت مکعبی.

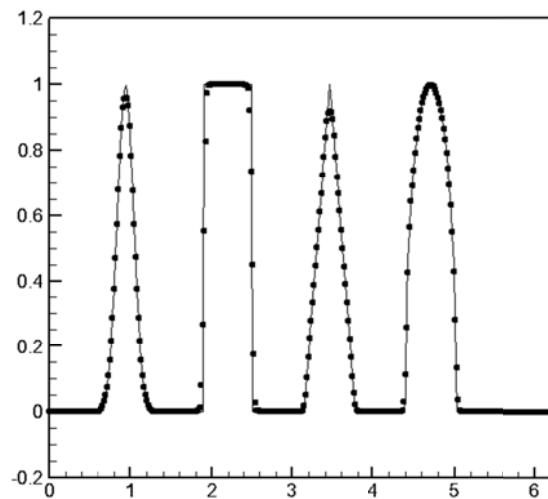
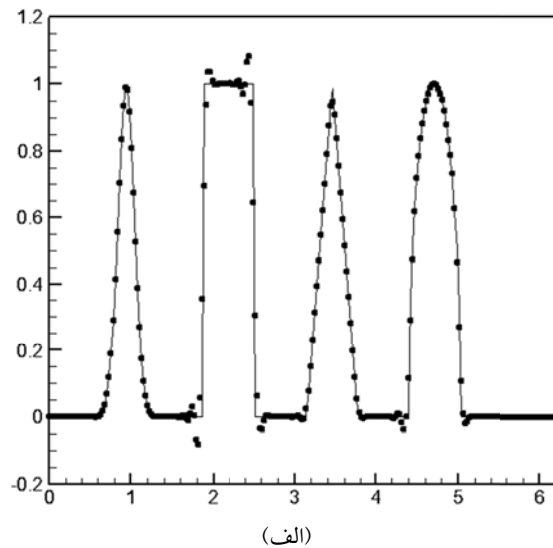
تعداد نقاط شبکه	نُرم قدر مطلق	نُرم مربعی	نُرم بی‌نهایت	مرتبۀ دقت برای نُرم قدر مطلق
90	1.35e-01	1.48e-01	3.06e-01	0
180	5.95e-02	1.04e-01	3.29e-01	1.18
270	3.92e-02	8.71e-02	3.45e-01	1.02
360	2.97e-02	7.72e-02	3.56e-01	0.96
450	2.44e-02	7.08e-02	3.64e-01	0.88
540	2.02e-02	6.55e-02	3.7e-01	1.03

جدول ۴. نُرم‌های قدر مطلق، مربعی و بی‌نهایت خطا برای کاربست روش نیمه‌لاگرانژی بر تابع جیانگ و شو (۱۹۹۶) با درونیابی هرمیت مکعبی یکنوای گزینشی.

تعداد نقاط شبکه	نُرم قدر مطلق	نُرم مربعی	نُرم بی‌نهایت	مرتبۀ دقت برای نُرم قدر مطلق	عدد کورانت
90	3.12e-0	3.05e-01	4.9e-01	-	0.18
180	1.25e-01	1.76e-01	4.84e-01	1.35	0.18
270	7.44e-02	1.36e-01	4.9e-01	1.28	0.18
360	5.34e-02	1.17e-01	4.91e-01	1.17	0.18
450	4.20e-02	1.06e-01	4.94e-01	1.08	0.18
540	3.45e-02	9.74e-02	4.97e-01	1.11	0.18
90	1.48e-01	1.83e-01	6.76e-01	-	1.8
180	6.23e-02	1.23e-01	8.51e-01	1.18	1.8
270	3.96e-02	1.01e-01	9.41e-01	1.14	1.8
360	2.92e-02	8.94e-02	9.72e-01	1.05	1.8
450	2.38e-02	8.15e-02	9.8e-01	1.002	1.8
540	1.95e-02	7.52e-02	9.81e-01	1.093	1.8

جدول ۵. نُرم‌های قدر مطلق، مربعی و بی‌نهایت خطا برای کاربست روش نیمه‌لاگرانژی بر تابع جیانگ و شو (۱۹۹۶) و عدد کورانت ۱/۸ با درون‌یابی هرمیت مکعبی یکنوا.

عدد کورانت	مرتبۀ دقت برای نُرم قدر مطلق	نُرم بی‌نهایت	نُرم مربعی	نُرم قدر مطلق
0	3.06e-01	2.72e-01	6.50e-01	90
0.80	3.29e-01	2.36e-01	8.61e-01	180
0.64	3.45e-01	2.24e-02	9.54e-01	270
0.50	3.56e-01	2.22e-02	9.79e-02	360
0.45	3.64e-01	2.20e-02	9.82e-02	450
0.46	3.7e-01	2.16e-02	9.83e-02	540



شکل ۳. حل مسأله فرارفت در آزمون عددی جیانگ و شو (۱۹۹۶) با چندجمله‌ای‌های (الف) هرمیت و (ب) هرمیت یکنوا در عدد کورانت ۱/۸. میدان اولیه (خط پُر)، میدان حل بعد از طی مسافت محیط دایره با شعاع واحد (دایره‌های سیاه). برای توضیح بیشتر به متن رجوع شود.

بر اساس آزمایش یک‌بعدی و محاسبه نرم‌های خطا و دقت طرحواره مشاهده می‌شود که طرحواره نیمه‌لاگراثری با درون‌یابی هرمیت مکعبی یکنوای گزینشی نتیجه بهتری را نسبت به هر دو حالت هرمیت مکعبی و هرمیت مکعبی کاملاً یکنوا نشان می‌دهد.

۳-۲. فرارفت دوبعدی روی کره

پس از آزمون یک‌بعدی طرحواره معرفی شده، آزمون‌های روی کره انجام و طرحواره مورد ارزیابی قرار گرفته است. آزمون‌های ۱ و ۴ نیز و همکاران (۲۰۱۰)، که از این پس به نام نیر خوانده می‌شوند، برای ارزیابی طرحواره بر روی کره انتخاب شده است. به‌منظور ایجاد شرایط پیچیده‌تر برای آزمون طرحواره، ساختار عرضی دو لکه (blob) تراژدیابنده در آزمون به‌صورت تابع پله دوبعدی تغییر داده شده است. واگرایی سرعت در آزمون‌های ۱ و ۲، صفر و در آزمون سوم غیرصفر است به‌طوری‌که برای تراژد صحت لکه‌ها لازم است تغییر جرم داخل یاخته‌ها به‌علت واگرایی سرعت منظور شود (رابطه (۱۷)). لکه در آزمون ۱ به‌صورت

$$h_i(\lambda, \theta) = \frac{h_{\max}}{2} [1 + \cos(\pi r_i / t)] \quad r_i < r \quad (21)$$

تعریف می‌شود که $h_{\max} = 1$, $r = 1/2$ به‌ترتیب شعاع حباب و مقدار بیشینه هستند، فاصله بر روی دایره عظیمه بین هر نقطه (λ, θ) و مرکز حباب (λ_i, θ_i) با رابطه

$$r_i(\lambda, \theta) = \arccos \left[\frac{\sin \theta_i \sin \theta + \cos \theta_i \cos \theta \cos(\lambda - \lambda_i)}{\cos \theta_i \cos \theta \cos(\lambda - \lambda_i)} \right] \quad (22)$$

است. میدان اولیه دارای مقدار زمینه‌ای است که تمامی نواحی کره به‌جز لکه‌ها را دربرمی‌گیرد. طول و عرض مرکز لکه‌ها $(\lambda_1, \theta_1) = (0, \pi/3)$ و $(\lambda_2, \theta_2) = (0, -\pi/3)$ است. شرایط اولیه چنین

تعریف می‌شود:

$$\phi(\lambda, \theta) = \begin{cases} b + c h_1(\lambda, \theta) & r_1 < r \\ b + c h_2(\lambda, \theta) & r_2 < r \\ b & \text{otherwise} \end{cases} \quad (23)$$

در رابطه فوق $b = 0.1$ و $c = 0.9$ است. در این آزمایش مقدار زمینه غیرصفر در نظر گرفته شده تا برای حل معادله فرارفت چالش بیشتری دربرداشته باشد. میدان باد ناوگرا نیز به‌صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$u(\lambda, \theta, t) = k \sin^2(\lambda/2) \sin(2\theta) \cos(\pi t/T), \quad (24)$$

$$v(\lambda, \theta, t) = \frac{k}{2} \sin(\lambda/2) \cos^2(\theta) \cos(\pi t/T). \quad (25)$$

درون‌یابی دوبعدی مشابه روش ورما و همکاران (۲۰۱۴) اما با شش درون‌یابی یک‌بعدی در راستای مداری انجام می‌شود (شکل ۴).

در پژوهش حاضر برای حصول به‌دقت مرتبه سوم برای میدان‌های هموار، در استفاده از چندجمله‌ای‌های هرمیت مکعبی لازم است مشتق از مرتبه چهارم باشد. برای این کار، در راستای نصف‌النهاری از سه نقطه شبکه‌ای قبل تا سه نقطه شبکه‌ای بعد از نقطه مورد نظر در درون‌یابی استفاده می‌شود.

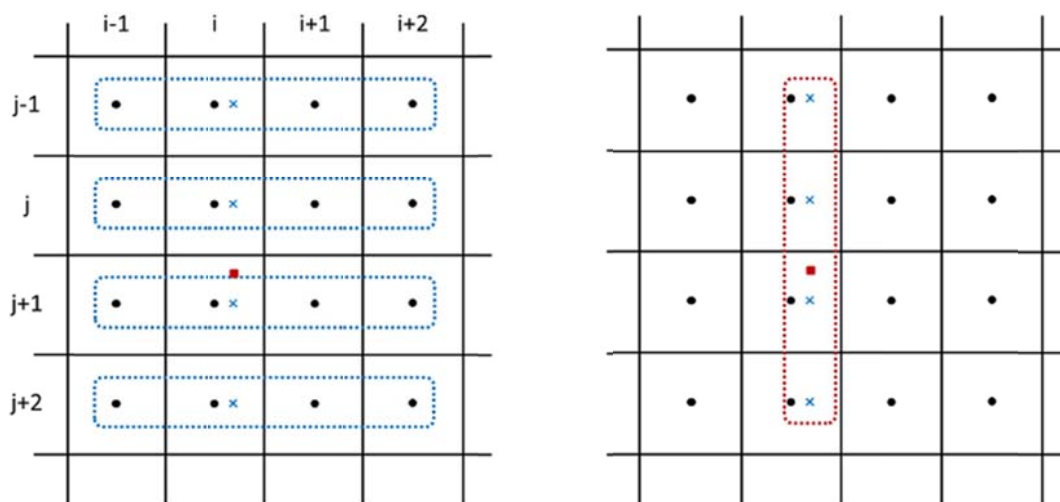
در آزمون‌های دوبعدی از دو دستگاه مختصات برای حل استفاده شده است: مختصات دکارتی متصل به مرکز کره برای حل معادله مسیر (روابط ۱۰ و ۱۱) و مختصات طول و عرض جغرافیایی برای درون‌یابی. در آزمون دوبعدی ۱ نیر و همکاران (۲۰۱۰) یک لکه تحت یک جریان متغیر با زمان به‌مدت ۲/۵ ثانیه قرار می‌گیرد و سپس در ۲/۵ ثانیه بعدی مجدداً به‌جای اولش بازمی‌شود (شکل ۵). با مقایسه نتیجه لکه حل‌شده پس از ۵ ثانیه با شرایط اولیه می‌توان مقدار خطا را محاسبه کرد. برای این آزمون ابتدا از درون‌یابی لاگراثر مکعبی (شکل‌های الف، ب و ج) و

(شکل ۶). نُرم‌های خطا در این آزمون نیز مانند آزمون قبلی است فقط نُرم مربعی درون‌یابی هرمیت یکنوا کمتر از درون‌یابی لاگرانژ است.

این دو آزمون حالت هموار داشتند و میزان بیشینه کمیت نرده‌ای در مرکز و کمینه آن در محیط حباب قرار گرفته بود. برای ایجاد آزمون پیچیده‌تر در تولید نوسان ناخواسته در گرادین‌های شدید، ساختار عرضی لکه در آزمون ۲ نیز به تابع پله تبدیل و آزمایش عددی تکرار شد. لازم به‌ذکر است در آزمون‌های ۲ و ۴ توزیع مکانی باد یکسان است و تنها در آزمون ۴ به میدان باد مداری یک جمله وابسته به زمان اضافه شده است که باعث می‌شود لکه به‌اندازه یک‌دور کامل، به‌دور کره بچرخد (شکل ۸).

سپس از درون‌یابی هرمیت یکنوا استفاده شده‌است. از لحاظ بصری نمی‌توان تفاوت زیادی بین این دو نتیجه قائل شد ولی براساس نُرم خطا (جدول ۶) می‌توان دریافت که عملکرد درون‌یابی هرمیت یکنوا تا حدودی بهتر است. نُرم‌های دوبعدی خطا براساس پیوست مقاله نیر و همکاران (۲۰۱۰) محاسبه شده است.

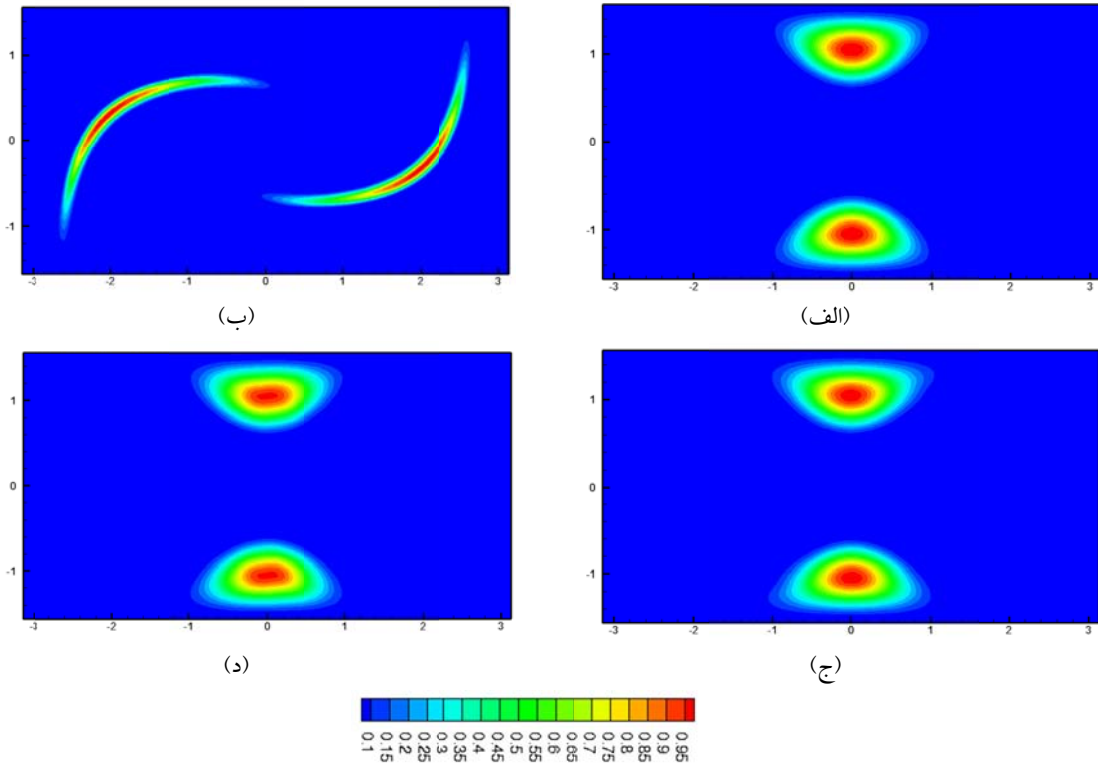
برای مثال نُرم قدر مطلق خطا از 8.19×10^{-3} در درون‌یابی لاگرانژ به 5.15×10^{-3} در درون‌یابی هرمیت یکنوا رسیده است، نُرم مربعی تقریباً یکسان ولی نُرم بی‌نهایت دو برابر شده است. در آزمون ۴ نیز لکه علاوه بر تغییر شکل در راستای نصف‌النهاری در راستای مداری نیز جابه‌جا می‌شود و در مدت ۵ ثانیه یک‌دور به‌دور کره می‌چرخد



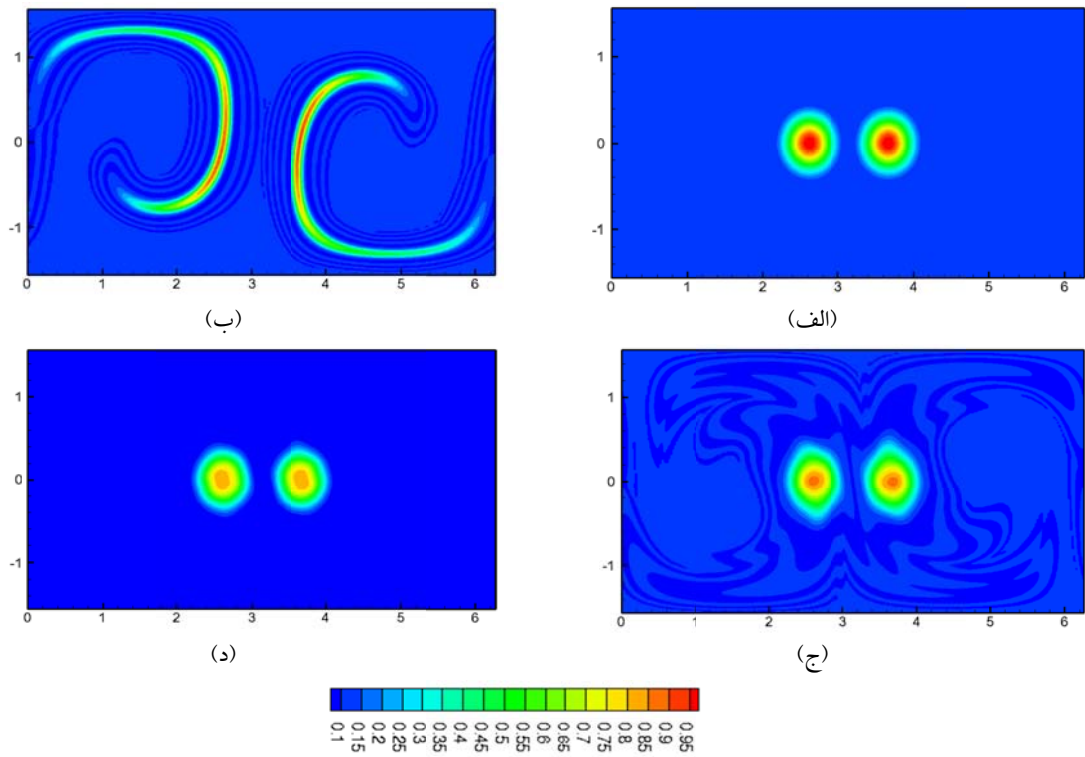
شکل ۴. درون‌یابی دوبعدی برای یافتن مقدار کمیت در نقطه قرمز واقع در درون شبکه منظم. ابتدا چهار درون‌یابی یک‌بعدی در راستای محاوره‌ای (نقطه‌چین آبی-رنگ) برای یافتن نقاط با طول یکسان (نقاط با ضربدر آبی) و پس از آن یک درون‌یابی در راستای محور قائم (نقطه‌چین قرمز) اجرا می‌شود (ورما و همکاران، ۲۰۱۴).

جدول ۶. نُرم‌های خطا در آزمون دوبعدی.

آزمون	نُرم قدر مطلق	نُرم مربعی	نُرم بی‌نهایت
۱ نیر با درون‌یابی لاگرانژ	8.19×10^{-3}	1.90×10^{-2}	2.86×10^{-2}
۲ نیر با درون‌یابی هرمیت گزینشی	5.15×10^{-3}	2.01×10^{-2}	4.46×10^{-2}
۴ نیر با درون‌یابی لاگرانژ	3.63×10^{-2}	8.89×10^{-2}	0.135
۴ نیر با درون‌یابی هرمیت گزینشی	2.07×10^{-2}	7.06×10^{-2}	0.170
۲ نیر به‌صورت تابع پله با درون‌یابی لاگرانژ	0.204	0.232	0.573
۲ نیر به‌صورت تابع پله با درون‌یابی هرمیت گزینشی	0.146	0.206	0.634



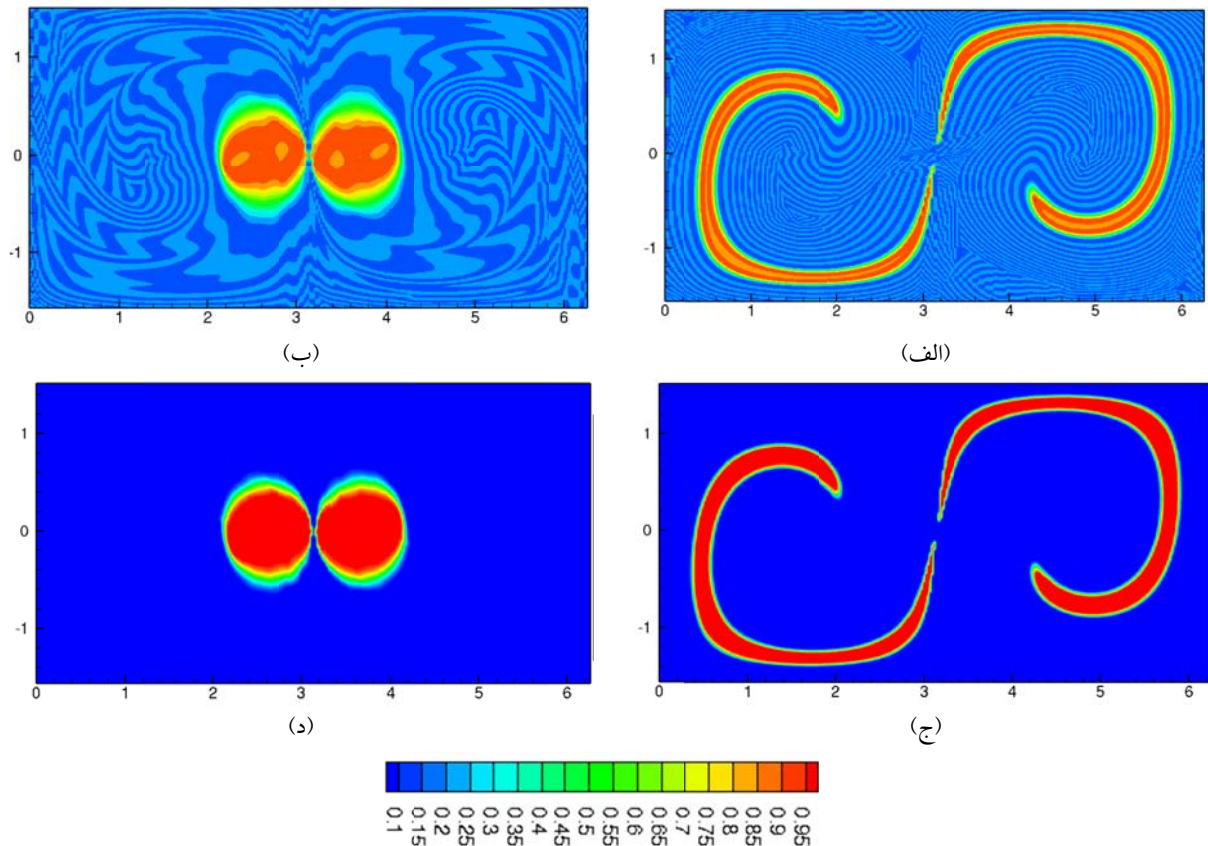
شکل ۵. آزمون ۱ نیر و همکاران (۲۰۱۰) با روش درون‌یابی لاگرانژ در شبکه با ۲۵۶ در ۲۵۶ نقطه در دو راستای مداری و نصف‌النهاری (الف تا ج)، درون‌یابی هرمیت یکنوی گزینشی (د). حالت اولیه (الف)، جواب در ۲/۵ ثانیه (ب) و ۵ ثانیه (ج و د).



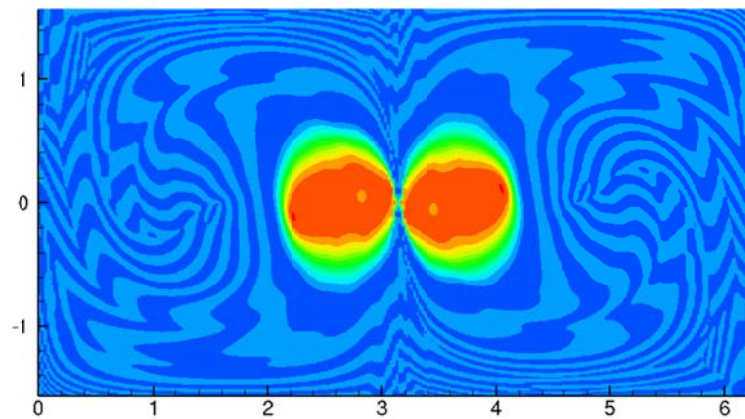
شکل ۶. آزمون ۴ نیر و همکاران (۲۰۱۰) با روش درون‌یابی چندجمله‌ای لاگرانژ در شبکه با ۲۵۶ در ۲۵۶ نقطه در دو راستای مداری و نصف‌النهاری (الف تا ج)، درون‌یابی هرمیت یکنوا (د). حالت اولیه (الف)، جواب در ۲/۵ ثانیه (ب) و ۵ ثانیه (ج و د).

افزایش یابد، به همان نسبت میزان خطا نیز افزایش می‌یابد. برای مطالعه عملکرد طرحواره درون‌یابی گزینشی، گام زمانی روش نیمه‌لاگرانژی از 0.025 ثانیه به 0.005 ثانیه کاهش و در نتیجه تعداد درون‌یابی در مدت ۵ ثانیه انتگرال‌گیری عددی از ۲۰۰ بار به ۱۰۰۰ بار افزایش داده شد. نتیجه در شکل ۸ نشان داده شده است. درون‌یابی لاگرانژ منجر به ایجاد نوسان‌های ناخواسته‌ای است که تمامی ناحیه حل را دربر گرفته‌اند (شکل ۸-الف). با درون‌یابی یکنوا در تمام نقاط شبکه شاهد تغییر شکل کمیت فرارفتی هستیم (شکل ۸-ب) و روشن است که تنها انتخاب مناسب برای حل، همان طرحواره درون‌یابی گزینشی است (شکل ۸-ج).

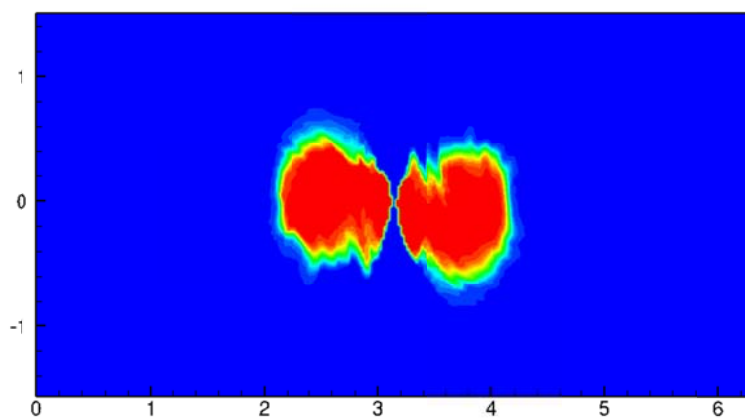
در این آزمون مقادیر بیشینه و کمینه کمیت نرده‌ای با درون‌یابی هرمیت به همان صورت بیشینه و کمینه میدان اولیه باقی مانده و تغییری نکرده است ولی با درون‌یابی لاگرانژ حدود ۱۵ درصد کاهش در کمینه و افزایش در بیشینه مشاهده می‌شود. درحالی‌که الگوی میدان تراژدیابنده با درون‌یابی هرمیت کماکان شبیه به میدان اولیه است، با درون‌یابی لاگرانژ الگوی فضایی کمیت عددی و میدان درون لکه تغییر می‌کند و نوفه‌های اضافی در سراسر ناحیه حل ایجاد می‌شود. نکته حائز اهمیت بعدی تعداد دفعات درون‌یابی است. چنانچه تعداد اجرای درون‌یابی برای مسأله نیمه‌لاگرانژی



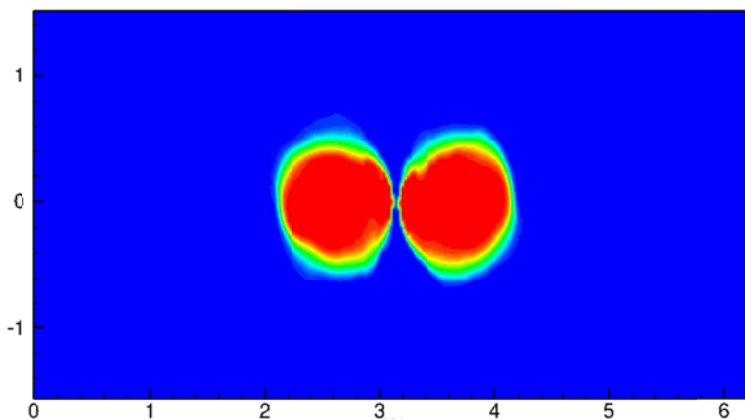
شکل ۷. آزمون ۲ نیر که ساختار عرضی آن به تابع پله تغییر داده شده است. جواب با درون‌یابی لاگرانژ (الف و ب) و هرمیت یکنوا (ج و د).



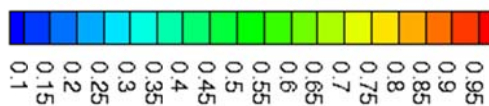
(الف)



(ب)



(ج)



شکل ۸. حل نیمه‌لاگرانژی برای آزمون ۲ نیز با گام زمانی ۰/۰۰۵ ثانیه با درون‌یابی مکعبی (الف) لاگرانژ، (ب) هرمیت کاملاً یکنوا، (ج) هرمیت گزینشی.

۴. نتیجه‌گیری

روش‌های نیمه‌لاگرانژی به دلیل نداشتن محدودیت شرط پایداری کورانت-فردریکس-لوی (CFL)، در مدل‌های گردش کلی جو کاربرد وسیعی دارند. دو نکته اساسی در روش‌های نیمه‌لاگرانژی مسیریابی ذرات و درون‌یابی در نقاط درون‌شبه‌کای است و چنانچه از طرحواره‌های دقیق برای حل این دو قسمت استفاده شود می‌توان انتظار عملکرد خوبی را از طرحواره نیمه‌لاگرانژی در حل معادلات جو داشت.

بالا بردن درجه چندجمله‌ای درون‌یاب هرچند موجب حصول مرتبه دقت بالاتر می‌شود ولی تولید نوسان ناخواسته در مناطق با گرادیان شدید کمیت تئردیابنده از معایب آن است. از بین بردن نوسان‌های اضافی از طریق روش‌های متنوعی انجام می‌گیرد که عموماً موجب افزایش هزینه محاسباتی و کاهش دقت طرحواره می‌شوند.

در این پژوهش روش نیمه‌لاگرانژی با دو روش درون‌یابی لاگرانژ نایکنوا و هرمیت یکنوا به کار برده شده است. چندجمله‌ای‌های لاگرانژ به دلیل عملکرد بالا در افزایش سرعت برنامه مورد توجه محققان قرار گرفته است، ولی نایکنوایی و تولید نوسان در گرادیان‌های شدید کمیت عددی حل‌شونده از معایب این روش است. در این تحقیق در ابتدا نشان داده می‌شود که حل نیمه‌لاگرانژی با چندجمله‌ای‌های لاگرانژ منجر به تولید نوسان اضافی در نواحی با گرادیان شدید متغیر حل‌شونده می‌شود. همچنین نوسان‌های اضافی ایجاد شده طی فرآیند حل معادلات با افزایش درجه چندجمله‌ای‌های درون‌یاب برطرف‌شدنی نیست بلکه تنها طول‌موج نوسان‌های ایجاد شده کاهش می‌یابد. نتایج حاصل از آزمایش افزایش درجه چندجمله‌ای‌های درون‌یاب نشان می‌دهد که حذف نوسان‌های اضافی نیازمند استفاده از چندجمله‌ای درون‌یاب یکنوا است. نکته حائز اهمیت آن است که چندجمله‌ای‌های درون‌یاب هرمیت نیز به‌طور

ذاتی یکنوا نیستند بلکه با تغییر مشتق در نقاط شبکه و قرار دادن مشتق در ناحیه یکنوا، درون‌یابی یکنوا حاصل می‌شود. تغییر مقدار مشتق در درون‌یابی یکنوا طی فرآیند حل به روش نیمه‌لاگرانژی ممکن است خطای بزرگی بر جواب‌های مسأله تحمیل کند. هرچند درون‌یابی فقط برای یک‌بار توسط روش‌های یکنوا منجر به نتیجه رضایت‌بخش است ولی استفاده متوالی از چندجمله‌ای‌های درون‌یاب یکنوا در روش نیمه‌لاگرانژی، خطاهای محاسباتی قابل‌ملاحظه ایجاد می‌کند.

برای به دست آوردن بالاترین دقت در جواب و عدم تولید نوسان اضافی طی محاسبات، از فن درون‌یابی گزینشی استفاده می‌شود. در این فن ابتدا درون‌یابی نایکنوا، که در اینجا همان درون‌یابی هرمیت است، انجام و سپس تابع شیب محاسبه می‌شود. در صورت منفی شدن تابع شیب (نشان‌دهنده عدم سازگاری شیب درون‌یابی با شیب کمیت در نقاط شبکه اصلی) درون‌یابی نایکنوا رها شده و درون‌یابی یکنوا با محدود کردن مشتق به ناحیه یکنوا انجام می‌گیرد. با این فن می‌توان خطای ناشی از تغییر مشتق را به حداقل رساند.

مراجع

آزادی، م.، ۱۳۷۳، مدل‌سازی معادلات هواشناختی به روش‌های نیمه‌لاگرانژی، کاربست به معادله تاوایی فشارورد. پایان‌نامه کارشناسی ارشد هواشناسی، موسسه ژئوفیزیک دانشگاه تهران.

اصفهانیان، و. و اشرفی، خ.، ۱۳۸۲، اعمال روش نیمه لاگرانژی-نیمه ضمنی برای حل معادلات آب کم‌عمق. نشریه دانشکده فنی، ۳۷، (۳).

محب‌الحجه، ع. ر. و مشایخی، ر.، ۱۳۸۳، نمایش شارش‌های تاواری و امواج گرانی در الگوریتم‌های حل عددی معادلات بسط فشارورد منطقه‌ای، مجله فیزیک زمین و فضا، ۳۰(۱)، ۳۷-۴۷.

محمدی، ع.، محب‌الحجه، ع. ر. و مزرعه‌فراهانی، م.،

پیش‌بینی عددی وضع هوا، مجله انجمن ژئوفیزیک ایران، ۱۲ (۳)، ۲۱-۳۸.

۱۳۹۷، چندجمله‌ای درون‌یاب هرمیت درجه سوم یکنوا و کاربرد آن در تبدیل مختصات برای مدل‌های

- Bermejo, R. and Staniforth, A., 1992, The conversion of semi-Lagrangian advection schemes to quasi-monotone schemes. *Monthly Weather Review*, 120(11), 2622–2632.
- Blossey, P. N. and Durran, D. R., 2008, Selective monotonicity preservation in scalar advection. *Journal of Computational Physics*, 227(10), 5160–5183.
- Boris, J. P. and Book, D. L., 1973, Flux-corrected transport. I. SHASTA, a fluid transport algorithm that works. *Journal of Computational Physics*, 11(1), 38–69.
- Courant, R., Friedrichs, K. and Lewy, H., 1928, Über die partiellen Differenzgleichungen der mathematischen Physik. *Mathematische Annalen*, 100(1), 32–74.
- Denner, F. and van Wachem, B. G. M., 2015, TVD differencing on three-dimensional unstructured meshes with monotonicity-preserving correction of mesh skewness. *Journal of Computational Physics*, 298, 466–479.
- Diamantakis, M., 2013, The semi-Lagrangian technique in atmospheric modelling: current status and future challenges. *ECMWF Seminar in numerical methods for atmosphere and ocean modelling*, pp. 183–200.
- Dougherty, R. L., Edelman, A. S. and Hyman, J. M., 1989, Nonnegativity-, monotonicity-, or convexity-preserving cubic and quintic Hermite interpolation. *Mathematics of Computation*, 52(186), 471–494.
- Dubey, R. K., 2013, Flux limited schemes: Their classification and accuracy based on total variation stability regions. *Applied Mathematics and Computation*, 224, 325–336.
- Durran, D. R., 2010, *Numerical Methods for Fluid Dynamics with Applications to Geophysics*. Second Edition, Springer, 516 pp.
- Fringer, O., Armfield, S. and Street, R., 2005, Reducing numerical diffusion in interfacial gravity wave simulations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 49(3), 301–329.
- Fritsch, F. N. and Carlson, R. E., 1980, Monotone piecewise cubic interpolation. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 17(2), 238–246.
- Germaine, E., Mydlarski, L. and Cortelezzi, L., 2013, 3DFLUX: A high-order fully three-dimensional flux integral solver for the scalar transport equation. *Journal of Computational Physics*, 240: 121–144.
- Harris, L. M., Lauritzen, P. H. and Mittal, R., 2011, A flux-form version of the conservative semi-Lagrangian multi-tracer transport scheme (CSLAM) on the cubed sphere grid. *Journal of Computational Physics*, 230(4), 1215–1237.
- Harten, A., 1983, High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. *Journal of Computational Physics*, 49(3), 357–393.
- Hortal, M., 2004, Overview of the numerics of the ECMWF atmospheric forecast model. Published in the *Proceedings of the ECMWF Seminar on “Recent developments in numerical methods for atmospheric and ocean modelling”*, pp. 6–10.
- Hundsdoerfer, W. and Trompert, R., 1994, Method of lines and direct discretization: a comparison for linear advection. *Applied Numerical Mathematics*, 13(6), 469–490.
- Jiang, G. S. and Shu, C. W., 1996, Efficient implementation of weighted ENO schemes. *Journal of Computational Physics*, 126(1), 202–228.
- Kadalbajoo, M. K. and Kumar, R., 2006, A high resolution total variation diminishing scheme for hyperbolic conservation law and related problems. *Applied Mathematics and Computation*, 175(2), 1556–1573.
- Kahaner, D., Moler, C. and Nash, S., 1989, *Numerical Methods and Software*. Prentice-Hall, Inc., 495 pp.
- Lax, P. and Wendroff, B., 1960, Systems of conservation laws. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 13(2), 217–237.
- Lee, J. L., Bleck, R. and MacDonald, A. E., 2010, A multistep flux-corrected transport scheme. *Journal of Computational Physics*, 229(24), 9284–9298.
- Machenhauer, B., Kaas, E. and Lauritzen, P. H., 2009, Finite-volume methods in meteorology. *Handbook of Numerical Analysis*, 14, 3–120.
- Mehrenberger, M. and Violard, E., 2007, A Hermite type adaptive semi-Lagrangian scheme. *Applied Mathematics and Computer Science*, 17, 329–334.
- Mohebalhojeh, A. R. and Dritschel, D. G., 2007, Assessing the numerical accuracy of complex spherical shallow-water flows. *Monthly Weather Review*, 135(11), 3876–3894.
- Mohebalhojeh, A. R. and Dritschel, D. G., 2009, The diabatic contour-advective semi-Lagrangian algorithms for the spherical shallow water equations. *Monthly Weather Review*, 137(9), 2979–2994.
- Nair, R. D., Scroggs, J. S. and Semazzi, F. H., 2003, A forward-trajectory global semi-Lagrangian transport scheme. *Journal of Computational Physics*, 190(1), 275–294.

- Nair, R. D. and Lauritzen, P. H., 2010, A class of deformational flow test cases for linear transport problems on the sphere. *Journal of Computational Physics*, 229(23), 8868–8887.
- Priestley, A., 1993, A quasi-conservative version of the semi-Lagrangian advection scheme. *Monthly Weather Review*, 121(2), 621–629.
- Qian, J. H., Semazzi, F. H. and Scroggs, J. S., 1998, A global nonhydrostatic semi-Lagrangian atmospheric model with orography. *Monthly Weather Review*, 126(3), 747–771.
- Rasch, P. J. and Williamson, D. L., 1990, On shape-preserving interpolation and semi-Lagrangian transport. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 11(4), 656–687.
- Ritchie, H., 1987, Semi-Lagrangian advection on a Gaussian grid. *Monthly Weather Review*, 115(2), 608–619.
- Robert, A., 1981, A stable numerical integration scheme for the primitive meteorological equations. *Atmosphere–Ocean*, 19(1), 35–46.
- Robert, A., 1982, A semi-Lagrangian and semi-implicit numerical integration scheme for the primitive meteorological equations. *J. Meteor. Soc. Japan*, 60(1), 319–325.
- Rõöm, R., Männik, A. and Luhamaa, A., 2007, Non-hydrostatic semi-elastic hybrid-coordinate SISL extension of HIRLAM. Part I: numerical scheme. *Tellus A*, 59(5), 650–660.
- Skamarock, W. C., Kelp, J. B., Dudhia, J., Gill, D. O., Barker, D. M., Wang, W. and Powers, J. G., 2005, A description of the advanced research WRF version 2, DTIC Document, NCAR Technical Note NCAR/TN-468+STR.
- Smolarkiewicz, P. K. and Pudykiewicz, J. A., 1992, A class of semi-Lagrangian approximation for fluids. *J. Atmos. Sci.*, 49, 2082–2096.
- Staniforth, A. and Côté, J., 1991, Semi-Lagrangian integration schemes for atmospheric models—A review. *Monthly Weather Review*, 119(9), 2206–2223.
- Sweby, P. K., 1984, High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 21(5), 995–1011.
- Temperton, C. and Staniforth, A., 1987, An efficient two-time-level semi-Lagrangian semi-implicit integration scheme. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 113(477), 1025–1039.
- Temperton, C., Hortal, M. and Simmons, A., 2001, A two-time-level semi-Lagrangian global spectral model. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 127(571), 111–127.
- Verma, S., Xuan, Y. and Blanquart, G., 2014, An improved bounded semi-Lagrangian scheme for the turbulent transport of passive scalars. *Journal of Computational Physics*, 272, 1–22.
- Waterson, N. P. and Deconinck, H., 2007, Design principles for bounded higher-order convection schemes—A unified approach. *Journal of Computational Physics*, 224(1), 182–207.
- Williamson, D. L., and Olson, J. G., 1998, A comparison of semi-Lagrangian and Eulerian polar climate simulations. *Monthly weather review*, 126(4), 991–1000.
- Wolberg, G. and Alfy, I., 2002, An energy-minimization framework for monotonic cubic spline interpolation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 143, 145–188.
- Zalesak, S. T., 1979, Fully multidimensional flux-corrected transport algorithms for fluids. *Journal of Computational Physics*, 31(3), 335–362.
- Zhang, D., Jiang, C., Liang, D. and Cheng, L., 2015, A review on TVD schemes and a refined flux-limiter for steady-state calculations. *Journal of Computational Physics*, 302, 114–154.

Using cubic Hermite polynomials in constructing monotone semi-Lagrangian methods for advection equation

Mohammadi, A.¹, Mohebalhojeh, A. R.^{2*} and Mazraeh Farahani, M.³

1. Ph.D. Student, Department of Space Physics, Institute of Geophysics, University of Tehran, Tehran, Iran

2. Professor, Department of Space Physics, Institute of Geophysics, University of Tehran, Tehran, Iran

3. Associate Professor, Department of Space Physics, Institute of Geophysics, University of Tehran, Tehran, Iran

(Received: 28 Feb 2018, Accepted: 1 Jan 2019)

Summary

Semi-Lagrangian methods have been widely applied in general circulation models of the atmosphere as they do not suffer from a Courant–Fredericks–Levy (CFL) constraint for computational stability. Ease of application, high accuracy and speed of execution in general circulation models are other reasons for the popularity of semi-Lagrangian methods. Two fundamental issues in semi-Lagrangian methods are related to the trajectory computation and interpolation from the regular grid to departure points. If sufficiently accurate schemes are used to solve for trajectories with interpolations, one can expect good performance from the semi-Lagrangian scheme in solving the equations of motion of the atmosphere. Two general methods of solving the trajectory equation are the forward and backward methods. Most semi-Lagrangian methods use backward-trajectory schemes for estimating positions of the air parcels that arrive at the grid points in the future time step. Solving the trajectory equation is carried out by iteration. In the research reported, two iterations are used for trajectory computation. The fundamental difference between the forward and backward trajectory scheme rests in the calculation of advective quantity at the departure and destination points. While in the backward solution procedure, it is necessary to make interpolation from the regular grid to departure points; in the forward scheme, it is necessary to make interpolation from the irregular grid of destination points to the regular grid.

The usually used interpolation methods in the semi-Lagrangian method include piecewise cubic Lagrange and Hermite, cascades, and monotone Hermite. Increasing the degree of polynomial interpolation leads to a higher degree of formal accuracy, but it leads to the generation of unwanted oscillation in regions with severe gradients of the transported quantities. Eliminating the unwanted oscillations is done through a variety of methods which generally increase the computational cost and reduce the accuracy of the scheme. To address the issue, in this research, a new selective monotone semi-Lagrangian method is developed and tested along with two standard methods based on the Lagrange and Hermite interpolations.

The Lagrange polynomials have been considered by researchers for the high speed of computation in operational models. The fictitious oscillations produced at the edges of sharp gradients of the advected quantities are the main shortcoming of this method. The fictitious oscillations cannot be eliminated by increasing the degree of interpolation polynomials, which can only lead to a reduction in the wavelength of the oscillations. The results presented on increasing the degree of interpolation polynomials clearly show that the removal of the fictitious oscillations requires the use of monotone polynomials for interpolation. It is important to note that the Hermite interpolation polynomials are not inherently monotone. To make them monotone, one needs to manipulate the derivatives at the grid points appropriately. This process, however, may lead to a substantial deterioration of accuracy. For this reason, in this paper, a selective interpolation method is designed to obtain the best accuracy in solution of the advection equation, while preserving monotonicity and removing the issue with the fictitious oscillations.

In the selective method, first the interpolation is done by the non-monotonic cubic Hermite and then a properly designed slope function is calculated at each grid interval. If the slope function takes values outside the range $[0,1]$, it indicates that a fictitious oscillation has occurred in the interpolation. To remove the oscillation, the non-monotone interpolation is abandoned and the monotone interpolation is performed by limiting the derivative to the monotone region. This technique can minimize the error caused by the changes in the derivatives. Results are shown to demonstrate the working and superiority of the selective monotone scheme.

Keywords: Advection, Semi-Lagrangian, Monotone, Hermite polynomial, Mass, Humidity.

* Corresponding author:

amoheb@ut.ac.ir