

امواج سالیوتونی غبار-صوتی در پلاسماهای غباری فضایی با توزیع غیرتعادلی

احسان صابریان^{۱*} و رسول خوشه شاهی^۲

۱. استادیار، گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه نیشابور، نیشابور، ایران
۲. دانش‌مؤخته کارشناسی ارشد، گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه نیشابور، نیشابور، ایران

(دریافت: ۹۸/۱۰/۱۱، پذیرش نهایی: ۹۹/۳/۲۰)

چکیده

در این مقاله، با به‌کارگیری جدیدترین یافته‌ها در مدل توزیع کاپا برای پلاسماهای فضایی غیرتعادلی، امواج غبار-صوتی در یک پلاسمای غباری شامل ذرات سنگین غبار با بار منفی و توزیعی از الکترون‌ها و پوزیترون‌های فوق‌گرمایی مطالعه شده‌اند. توزیع سرعت‌ها در این مدل توسط یک شاخص طیفی ناوردا (κ_0) که مستقل از تعداد درجات‌آزادی سیستم است، و پارامتر d که معرف تعداد درجات‌آزادی سیستم است، برچسب زده می‌شود. در تحلیل خطی، رابطه پاشندگی امواج غبار-صوتی مطالعه شده است و در آنجا یک سرعت صوت تعمیم‌یافته وابسته به متغیرهای مسأله و دربرگیرنده حالت‌های تعادلی و غیرتعادلی محاسبه شده است. در تحلیل غیرخطی و با به‌کارگیری سرعت صوت به‌دست آمده، امواج غبار-صوتی سالیوتونی با استخراج یک معادله انتگرال انرژی و تحلیل آن مطالعه شده‌اند. شرایط تشکیل چاه پتانسیل برای انتشار امواج سالیوتونی غبار-صوتی، محدوده مجاز دقیق عدد ماخ و نقش پارامترهای سرعت سالیوتون، شاخص طیفی κ_0 و درجات‌آزادی وابسته به پتانسیل اختلالی (d_0) در انتشار امواج سالیوتونی غبار-صوتی به‌صورت پارامتری و عددی بررسی شده‌اند. نشان دادیم که آستانه عدد ماخ به شاخص آدیاباتیک ذرات با توزیع کاپا ارتباط دارد. به‌علاوه، وقوع سالیوتون‌های غبار-صوتی با پلاریته منفی امکان‌پذیر است. حالت‌های نزدیک و دور از تعادل گرمایی مطالعه شده‌اند و نتیجه شده است که در نواحی دور از تعادل گرمایی، امکان وقوع سالیوتون‌های زیرصوتی وجود دارد و در آن نواحی امواج غبار-صوتی سالیوتونی با دامنه و شیب پالس بیشتر منتشر می‌شوند.

واژه‌های کلیدی: موج غبار-صوتی، پلاسمای فضایی، شاخص کاپا، ناوردا، درجات‌آزادی اختلالی، سالیوتون.

۱. مقدمه

۱۹۸۱؛ نورتروپ، ۱۹۹۲) و در نتیجه بر میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی، و همچنین بر تعادل چگالی‌بار تأثیر می‌گذارند. فیزیک باردارشدن ذرات غبار متضمن مباحثی است که در آن برهم‌کنش دانه‌های غباری با یکدیگر و با پلاسمای پیرامونشان بررسی می‌شود، و خود یک حوزه تحقیقاتی بسیار جالب است که هم به‌صورت نظری و هم در پژوهش‌های تجربی مورد توجه قرار گرفته و هنوز مطالعات در این زمینه ادامه دارد. در محیط‌های آزمایشگاهی و در فرآیندهای صنعتی، دانه‌های غبار می‌توانند یون‌ها و الکترون‌ها را از زمینه پلاسما جمع کنند و معمولاً در نتیجه تحرک بالاتر الکترون‌ها به‌طور منفی باردار می‌شوند. از طرف دیگر مکانیسم باردارشدن ذرات غبار در پلاسماهای فضایی بسیار متنوع است و همان‌طور که اشاره شد برخی از مهم‌ترین آنها عبارت‌اند از: گسیل

همزیستی ذرات غبار و پلاسماهای، در یک گستره پهناور از محیط‌های کیهانی و آزمایشگاهی قابل تشخیص است (مندیس و روزنبرگ، ۱۹۹۴). در منظومه خورشیدی، پلاسمای غباری در حلقه‌های سیاراتی مانند زحل قابل‌رؤیت است؛ همچنین در حلقه‌های غباری به‌دور خورشید گردنده، و یا در ماده بین‌سیاره‌ای با پلاسماهای غباری مواجه هستیم. نمونه‌های زیبایی از پلاسماهای غباری را می‌توان در کوما و دنباله وابسته به ستاره‌های دنباله‌دار مشاهده کرد. علاوه بر این، پلاسماهای غباری در خارج از منظومه خورشیدی، نظیر ابرهای مولکولی بین‌ستاره‌ای، نیز پیدا می‌شوند. در چنین محیط‌هایی، دانه‌های غباری در نتیجه یک سری از فرآیندها، نظیر گسیل الکترونی ثانویه، گسیل فوتونی، برخورد‌های الکترونی و یونی، گسیل گرما یونی، و غیره، باردار می‌شوند (واپیل،

بار ذرات کیهانی منحصراً توسط یک وابستگی حساس به شارش ذرات از پلاسمای محیط، و یا توسط گسیل فوتونی یا گسیل گرما یونی مشخص نمی‌شود. بلکه باید توجه داشته باشیم که مکانیسم‌های باردار شدن فوق‌الذکر در حقیقت فرآیندهای آماری هستند. این بدین معنی است که افت و خیزهای آماری می‌توانند قطبیت بار ذرات را از مثبت به منفی، و یا بالعکس، تغییر دهند، بسته به این که علامت حامل بار (الکترون یا یون) که به ذرات غبار اصابت می‌کند چه باشد. به‌طور کلی مکانیسم باردار شدن ذرات غبار پلاسما یک موضوع بسیار پیچیده است که بررسی آن موضوع بحث پژوهش ما نبوده است و بسیاری از محققین نظری و تجربی به این مهم پرداخته‌اند.

ذرات باردار غبار در پلاسما می‌توانند در رفتار دینامیکی پلاسما به‌عنوان یک ذره مجزا شرکت کنند. ذرات غبار نسبت به یون‌های پلاسما دارای جرم خیلی بیشتری هستند و معمولاً بار الکتریکی بیشتری نیز دارند، اما نسبت بار به جرم آنها در مقایسه با یون‌ها خیلی کوچک‌تر است. پلاسماهای غباری یک طیف گسترده و متنوع از مدهای نوسانی جمعی، رفتارهای ناپایدار، و امواج خطی و غیرخطی را شامل می‌شوند. حضور میکروذرات باردار در پلاسما می‌تواند منجر به تعدیل قابل ملاحظه در پارامترهای توصیف کننده توده پلاسما نظیر توزیع بار و پتانسیل بشود. همچنین، وجود میکروذرات غباری در پلاسما می‌تواند ویژگی‌های امواج صوتی مرسوم در پلاسما را به‌نحو قابل ملاحظه‌ای تغییر دهد (مامون و شوکلا، ۲۰۰۲)، و مدهای صوتی جدیدی نظیر امواج غبار-صوتی و امواج غبار-یون-صوتی در پلاسما ظهور یابند (رائو و همکاران، ۱۹۹۰). علاوه بر این، حضور ذرات باردار سنگین منجر به ایجاد ساختارهای پتانسیلی جدیدی می‌شود که مکانیسم اتلاف انرژی پرتابه‌های باردار در پلاسماهای غباری را روشن می‌سازد (نسیم و همکاران، ۱۹۹۸).

از جمله ی یکی از مدل‌های موفق برای توصیف پلاسماهای فضایی و کیهانی می‌توان به توزیع فوق‌گرمایی کاپا (κ) یا توزیع لورنتسی اشاره کرد که در واقع تعمیمی

الکترونی ثانویه، گسیل فوتونی، برخورد های الکترونی و یونی، گسیل گرما یونی، و غیره. به‌عنوان نمونه در برخی پلاسماهای فضایی در حضور تابش ماورای بنفش، هنگامی که انرژی گرمایی توده‌های غبار به‌اندازه تابع کار ماده می‌رسد، دانه‌های غبار می‌توانند در اثر یونش و کنده شدن الکترون ثانویه از ماده به‌طور مثبت باردار شوند (مکانیسم گسیل گرما یونی). یک مکانیسم مهم دیگر باردار شدن ذرات غبار در پلاسماهای فضایی بدین صورت است که دانه‌های غبار می‌توانند در اثر برخوردهای متقابل با پلاسما به‌طور مؤثری الکترون‌ها و یون‌ها را از زمینه پلاسما جمع کنند و باردار شوند (برخوردهای الکترونی و یونی). در واقع، در چنین محیط‌هایی بار الکتریکی ذرات غبار بسته به ذرات باردار سازنده پلاسما و شرایط محیطی هم می‌تواند مثبت و هم منفی باشد. به‌عنوان مثال اگر در پلاسما یون‌های مثبت وجود داشته باشد و مکانیسم جذب آن برای ذرات غبار فراهم باشد، دانه‌های غبار می‌توانند یون‌های مثبت را از زمینه پلاسما جمع کنند و دارای بار مثبت بشوند. همچنین، در برخی محیط‌های پلاسمایی (فضایی و آزمایشگاهی) نیز ممکن است دو گونه از یون‌ها با بار مثبت و بار منفی وجود داشته باشند و بسته به شرایط محیطی و چگونگی جذب یون‌ها بر روی ذرات غبار، امکان باردار شدن ذرات غبار به‌صورت منفی یا مثبت فراهم شود. نمونه‌هایی از پلاسماهای با دو نوع یون (*bi-ion plasmas*) و یا بیشتر در مطالعات آزمایشگاهی در مقالات (اوهارا و هاتاکیاما، ۲۰۰۳؛ اوهارا و همکاران، ۲۰۰۵؛ کیم و مرلینو، ۲۰۰۷) گزارش شده‌اند. همچنین نمونه‌هایی از گزارشات مربوط به پلاسماهای با چند نوع یون، در محیط‌های فضایی نظیر برخی نواحی یون سپهر (*ionosphere*) (میشرا و چابرا، ۱۹۹۶) و یا در مگنتوسفر مریخ (سویر و همکاران، ۱۹۹۸) گزارش شده‌اند. خاطر نشان می‌شود که تعیین بار ذرات غباری موضوعی است که برای توضیح جاذبه دانه‌های غبار و انتشار امواج در آزمایشگاه و پلاسماهای فضایی دارای اهمیت اساسی است. به‌عنوان نمونه، بر خلاف آنچه که عموماً تصور می‌شود،

دامنه کوتاه با استخراج معادله KdV و هم امواج سالیوتونی با دامنه دلخواه از روش شبه پتانسیل سقدی اف (Sagdeev's pseudopotential technique) مطالعه شده‌اند. همچنین امواج غیرخطی ضربه یون-صوتی در یک پلاسما شامل یون‌های آدیاباتیک نسبتی، و الکترون‌ها و پوزیترون‌های با توزیع کاپا مطالعه شده است (شاه و سعید، ۲۰۱۱). بالوکو و هلبرگ (۲۰۱۲) سالیوتون‌های یون-صوتی در یک پلاسما با الکترون‌های دو دمایی و با در نظر گرفتن توزیع کاپا را مطالعه کرده‌اند. به علاوه ادنان و همکاران (۲۰۱۴) سالیوتون‌های یون-صوتی دامنه کوتاه را در یک پلاسما مغناطیده ضعیف با الکترون‌های توزیع کاپا مطالعه کرده‌اند. در آنجا اثرات ناهمسانگردی فشار یون، توزیع الکترونی کاپا، و میدان مغناطیسی روی انتشار سالیوتون‌های یون-صوتی مطالعه شده است. علاوه بر این، مطالعاتی جهت بررسی تأثیر دمای یون در انتشار امواج سالیوتونی یون-صوتی در پلاسما با حضور الکترون‌های غیر گرمایی و یون‌های با دمای محدود صورت گرفته است (مامون، ۱۹۹۷؛ ورهیس و همکاران، ۲۰۰۷؛ صابریان و همکاران، ۲۰۱۳؛ میکائیل و همکاران، ۲۰۱۶). در این مطالعات، نتیجه در نظر گرفتن دمای یون عمده‌تاً به صورت تغییرات کوچکی در دامنه و پهنای پالس سالیوتون گزارش شده است. همچنین، امواج سالیوتونی الکترون-صوتی در یک پلاسما که در آن توزیع سرعت‌های الکترون‌ها توسط ترکیب دو توزیع کاپا مدل‌سازی شده است، با تأکید بر کاربردهای آن در مگنتوسفر زحل توسط بالوکو و همکاران (۲۰۱۱) مطالعه شده است.

یکی از اشکالات مرسوم در به کار بردن تابع توزیع کاپا (κ) در بسیاری از پژوهش‌ها عدم توجه به معنی فیزیکی شاخص کاپا است. از جمله این که شاخص κ یک کمیت ناوردا نیست و به تعداد درجات آزادی سیستم بستگی دارد. عدم توجه به این مسأله می‌تواند منجر به بروز ناسازگاری‌هایی در به کار بردن تابع توزیع در پلاسما بشود. لیوادیوتیس و مک کومز (۲۰۱۱) یک تابع توزیع

از تابع توزیع ماکسول-بولتزمن به فرم دنباله‌هایی توانی از سرعت است و برای اولین بار توسط وسیلیونس (۱۹۶۸) معرفی شد و هدف آن در ابتدا توصیف پلاسماهای دور از تعادل گرمایی نظیر پلاسماهای مگنتوسفر و بادهای خورشیدی بود. توزیع‌هایی از ذرات با دنباله‌های فوق گرمایی بارها توسط مشاهدات تجربی و ماهواره‌ای در سیستم‌های پلاسمایی فضایی و کیهانی گزارش شده‌اند (فیلدمن و همکاران، ۱۹۷۵؛ فیلیپ و همکاران، ۱۹۸۷؛ ماکسیمویچ و همکاران، ۱۹۹۷؛ زوگانلیس، ۲۰۰۸). همچنین مکانیسم‌های مختلفی برای توضیح منشأ باله‌های فوق گرمایی در بادهای خورشیدی، تاج خورشیدی و دیگر پلاسماهای فضایی پیشنهاد شده‌اند (پیرارد و لازار، ۲۰۱۰). تأثیر همزمان برهم‌کنش موج-ذره و نیروهای خارجی در چنین محیط‌هایی مهم‌ترین عامل برای انحراف توزیع ذرات نسبت حالت تعادل پلاسما است.

تاکنون پژوهش‌های متعددی در زمینه در نظر گرفتن اثر توزیع‌های فوق گرمایی بر دینامیک امواج در پلاسماها صورت پذیرفته است. ساینی و همکاران (۲۰۰۹) امواج یون-صوتی با دامنه دلخواه در یک پلاسما با یون‌های سرد و در حضور کسری از الکترون‌های فوق گرمایی را مطالعه کرده‌اند. آنها نشان دادند که همانند یک پلاسما با توزیع ماکسولی، تنها سالیوتون‌های با پتانسیل مثبت امکان انتشار خواهند داشت. همچنین، آنها نشان دادند که وجود الکترون‌های فوق گرمایی ناحیه مجاز عدد ماخ را کاهش می‌دهد، و همچنین باعث افزایش دامنه و شیب پالس سالیوتون‌های یون-صوتی می‌شود. سالتانا و همکاران (۲۰۱۰) تأثیر الکترون‌های فوق گرمایی با توزیع کاپا را بر روی ساختار امواج یون-صوتی با دامنه دلخواه در یک پلاسما مغناطیده بررسی کرده‌اند و انحراف آن‌را نسبت به یک پلاسما با توزیع ماکسولی نشان داده‌اند. امواج یون-صوتی غیرخطی در یک پلاسما شامل یون‌های گرم و الکترون‌ها و پوزیترون‌های پر انرژی که با توزیع کاپا توصیف می‌شوند توسط الاوادی و همکاران (۲۰۱۰) مطالعه شده است. در آنجا هم امواج سالیوتونی یون-صوتی

کاپای ناوردا معرفی کرده‌اند، به طوری که توسط یک شاخص طیفی ناوردا (κ_0) و تعداد درجات آزادی سیستم (d) به فرم ذیل تعیین می‌شود.

$$P(\bar{\tau}, \bar{u}; \kappa_0, T) \sim \left[1 + \frac{1}{\kappa_0} \cdot \frac{\varepsilon_K(\bar{u}) + \Phi(\bar{\tau})}{k_B T} \right]^{-\kappa_0 - \frac{d}{2}} \quad (1)$$

در اینجا $\varepsilon_K(\bar{u})$ انرژی جنبشی ذره، $\Phi(\bar{\tau})$ انرژی پتانسیل و k_B ثابت بولتزمن است. به علاوه، در این مدل تعداد درجات آزادی سیستم وابسته به انرژی‌های جنبشی و پتانسیل را توسط پارامترهای d_K و d_Φ نشان می‌دهیم، به طوری که طبق تعریف با روابط $\frac{1}{2}d_K = \langle \varepsilon_K(\bar{u}) \rangle / k_B T$ و $\frac{1}{2}d_\Phi = \langle |\Phi(\bar{\tau})| \rangle / k_B T$ داده می‌شوند و درجات آزادی کل سیستم را به فرم $d = d_K + d_\Phi$ به دست می‌دهند. در این مدل شاخص طیفی κ_0 میزان انحراف از حالت تعادل را در پلاسما را توصیف می‌کند به طوری که خود به تعداد درجات آزادی سیستم بستگی ندارد. طیف مجاز شاخص طیفی κ_0 در بازه $0 < \kappa_0 < \infty$ تعریف می‌شود که به دو ناحیه دور از تعادل $0 < \kappa_0 < 1$ و نزدیک به تعادل $1 < \kappa_0 < \infty$ تقسیم می‌شود. حد $\kappa_0 \rightarrow \infty$ ، حالت تعادل سیستم و حد $\kappa_0 \rightarrow 0$ حالت پاد-تعادل است که در آن تابع توزیع دچار فروپاشی می‌شود و سرعت گرمایی در آنجا تعریف نمی‌شود. همچنین حالت $\kappa_0 = 1$ موسوم به حالت گریز (Escape State) است که طیف κ_0 را به دو ناحیه نزدیک و دور از تعادل تفکیک می‌کند. نشان داده می‌شود که در حالت کلی شاخص κ به فرم $\kappa(d) = \kappa_0 + d/2$ به تعداد درجات آزادی کل d بستگی دارد و تابع همبستگی ذرات از طریق آن به فرم $\rho = \frac{1}{2}d/\kappa$ تعریف می‌شود (لیوادیوتیس و مک کومز، ۲۰۱۱). شاخص ناوردای κ_0 حالت‌های ایستای مختلف سیستم را به گونه‌ای مدل‌سازی می‌کند که مستقل از بُعد، تعداد درجات آزادی و تعداد ذرات باشد (لیوادیوتیس، ۲۰۱۷). اخیراً با استفاده از این مدل یک سرعت صوت تعمیم‌یافته برای پلاسماهای اخترفیزیکی و فضایی محاسبه شده است (صابریان، ۲۰۱۹a)، به طوری که به خوبی

پلاسماهای دور از تعادل ترمودینامیکی را توصیف می‌کند و در حد پلاسماهای تعادلی به نتایج قابل انتظار منجر می‌شود. همچنین این مدل برای مطالعه امواج یون-صوتی در پلاسماهای دور از تعادل باد خورشیدی به کار گرفته شده است (صابریان، ۲۰۱۹b)، به طوری که با استخراج یک معادله تحول KdV و سپس حل تحلیلی آن، جواب‌های سالیتمونی یون-صوتی مطالعه شده‌اند.

در این مقاله می‌خواهیم با استفاده از این مدل که متضمن حالات نزدیک و دور از تعادل گرمایی است، به مطالعه امواج غبار-صوتی در یک پلاسما اختر فیزیکی شامل یک زمینه از ذرات غباری باردار شده و الکترون‌ها و پوزیترون‌های فوق گرمایی پردازیم. وقوع پلاسما الکترون-پوزیترون در بسیاری از محیط‌های فضایی گزارش شده‌اند، از جمله در لحظات اولیه شکل‌گیری جهان (گیبونز و همکاران، ۱۹۸۳)، در هسته‌های کهکشانی فعال که معمولاً به اختصار AGN نامیده می‌شوند (میلر و ویتا، ۱۹۸۷)، در تپ‌اخترها (pulsar) و در جو ستاره‌های نوترونی (گلدریچ و جولیان، ۱۹۶۹؛ مکس و پرکینز، ۱۹۷۲)، در اتمسفر خورشید (تندبرگ-هانسن و امسلی، ۱۹۸۸)، در اختروش‌ها (quasar) و در پلاسما جت‌های سازنده آنها (واردل و همکاران، ۱۹۹۸)، در قرص‌های برافزایشی (Accretion disk) (اورسوز و همکاران، ۱۹۹۷)، و در سیاهچاله‌ها (دانیل و تاجیما، ۱۹۹۸). از طرفی، به علت وجود گسترده ذرات غبار در بسیاری از محیط‌های کیهانی مورد اشاره، وقوع پلاسما الکترون-پوزیترون-غبار در محیط‌های اختر فیزیکی از قبیل ابرنواخترها (supernovae) و تپ‌اخترها تأیید شده است (تاجیما و شیباتا، ۱۹۹۷). نشان داده شده است که در یک پلاسما الکترون-پوزیترون-غبار، نیروی بازگرداننده برای امواج غبار-صوتی توسط الکترون‌ها و پوزیترون‌های بدون اینرسی تأمین می‌شود و جرم ذرات غبار اینرسی لازم را تأمین می‌کند (شوکلا و مارکلوند، ۲۰۰۴). در این مسأله زمینه انتشار امواج غبار-صوتی را ذرات سنگین غبار برعهده دارند، و الکترون‌ها و پوزیترون‌ها با تابع توزیع

سالیوتون‌ها مطالعه می‌شوند. البته جواب‌های به‌دست آمده از این روش، با اعمال حد دامنه‌های کوتاه مجدد همان جواب‌های سالیوتونی از نظریه KdV را نیز به‌دست می‌دهد و متضمن آنها نیز می‌شود (دیویدسون، ۱۹۷۲؛ چن، ۲۰۱۶). از این‌رو، روش انتگرال انرژی جواب‌های کاملی را برای مطالعه جواب‌های غیرخطی مسئله (جواب‌های سالیوتونی) به‌دست می‌دهد.

ساختار این مقاله بدین ترتیب است: پس از این مقدمه و در بخش دوم، با حل معادله‌های مدل از طریق خطی‌سازی و استخراج یک رابطه پاشندگی، سرعت صوت امواج غبار-صوتی در مسئله به‌طور دقیق محاسبه می‌شود. در بخش سوم، یک تحلیل غیرخطی بر روی امواج غبار-صوتی انجام می‌شود و جواب‌های سالیوتونی مسئله با دامنه دلخواه از طریق استخراج معادله انتگرال انرژی به‌دست می‌آیند. شرایط تشکیل چاه پتانسیل و نواحی مجاز برای وقوع جواب‌های سالیوتونی در بخش چهارم مطالعه می‌شوند. در آنجا با توجه به بهنجارش صحیح متغیر سرعت، نواحی مجاز عدد ماخ (نسبت سرعت موج به سرعت صوت) به‌طور دقیق به‌دست می‌آیند. سپس در بخش پنجم، یک تحلیل عددی بر روی جواب‌های به‌دست آمده از طریق مطالعه چاه پتانسیل انجام خواهد شد و وابستگی متغیرهای مسئله بر روی جواب‌های سالیوتونی آزموده خواهد شد. در پایان، خلاصه نتایج به‌دست آمده در بخش ششم فهرست شده است.

۲. معادله‌های مدل و تحلیل خطی: استخراج سرعت

صوت امواج غباری

دینامیک امواج غبار-صوتی در یک پلاسما شامل یک زمینه ذرات سنگین غبار با دمای محدود و در حضور الکترون‌ها و پوزیترون‌های فوق‌گرمایی، توسط مجموعه معادله‌های سیالی زیر توصیف می‌شود:

$$\frac{\partial n_d}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(n_d v_d) = 0 \quad (۲)$$

$$\frac{\partial v_d}{\partial t} + v_d \frac{\partial v_d}{\partial x} = \frac{eZ_d}{m_d} \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{1}{n_d m_d} \frac{\partial p_d}{\partial x} \quad (۳)$$

کاپا در انتشار موج مشارکت می‌کنند. خاطر نشان می‌شود که سرعت فاز امواج غبار-صوتی در یک پلاسما الکترون-پوزیترون-غبار خیلی کوچک‌تر از سرعت گرمایی الکترون یا پوزیترون است.

مسائل غیرخطی در فیزیک پلاسما (خصوصاً پیدا کردن جواب‌های سالیوتونی برای امواج پلاسمایی)، معمولاً با دو رویکرد تحلیل می‌شوند: رویکرد اول روش اختلال کاهنده (Reductive perturbation method) است که تنها در محدوده غیرخطیت ضعیف کاربرد دارد و اعتبار آن محدود به دامنه‌های نسبتاً کوتاه می‌شود (انحرافات کوچک نسبت به نظریه خطی). آنالیز اختلالی در مرتبه اول اختلال به معادله پاشندگی خطی می‌انجامد و در مراتب بعدی اختلال در فرم استاندارد آن به یکی از دو معادله ذیل می‌انجامد: (الف) معادله تحول کورته و گ-دی وری (KdV) که در محدوده غیرخطیت ضعیف و برای امواج با طول‌موج بلند اعتبار دارد. این معادله تحول اختلالات دامنه کوتاه اما محدود در پلاسما را توصیف می‌کند که با سرعت‌هایی در محدوده عدد ماخ (Mach Number) در پلاسما منتشر می‌شوند. حل نوعی معادله KdV در پلاسما منجر به جواب‌های سالیوتونی می‌شود؛ (ب) معادله شرودینگر غیرخطی (NLS)، که توصیف کننده جواب‌های سالیوتونی پوش‌دار (Envelope solitons) است، که دامنه آنها ثابت است اما یک فاز وابسته به زمان دارد. هر دو معادله فوق شامل N کلاس از حل‌های سالیوتونی هستند که شامل ویژگی‌های برهم‌کنشی و پایداری قابل ملاحظه‌ای هستند. رویکرد دیگر برای حل مسائل غیرخطی در فیزیک پلاسما، آنالیز غیرخطی کامل (بدون تقریب) است، که برای مطالعه امواج غیرخطی با دامنه دلخواه به‌کار می‌رود. این کار به‌وسیله روشی موسوم به روش شبه‌پتانسیل سقادی اف (Sagdeev pseudopotential method)، انجام می‌شود که در واقع استخراج یک معادله انتگرال انرژی است، و از طریق آن جواب‌های سالیوتونی با دامنه دلخواه به‌وسیله مطالعه چاه پتانسیل و شرایط تشکیل آن برای وقوع

سرعت‌ها، و با جای‌گذاری $\Phi_e(r) = -e\varphi(r)$ (برای الکترون) و $\Phi_p(r) = +e\varphi(r)$ (برای پوزیترون) چگالی تعداد الکترون و پوزیترون با توزیع کاپا به‌فرم روابط ذیل می‌آیند (لیوادیوتیس، ۲۰۱۷):

$$n_e = n_{e0} \left(1 - \frac{1}{\kappa_0 + \frac{d_{\Phi_e}}{2}} \frac{e\varphi}{k_B T_{e0}} \right)^{-\kappa_0 - 1 - d_{\Phi_e}/2} \quad (۶)$$

$$n_p = n_{p0} \left(1 + \frac{1}{\kappa_0 + \frac{d_{\Phi_p}}{2}} \frac{e\varphi}{k_B T_{p0}} \right)^{-\kappa_0 - 1 - d_{\Phi_p}/2} \quad (۷)$$

که در آن n_{e0} و n_{p0} چگالی الکترون و پوزیترون در حالت تعادل است. همچنین $d_{\Phi_{e,p}}$ درجات آزادی وابسته به پتانسیل اختلالی φ را توصیف می‌کنند که برای یک پتانسیل اختلالی کوچک مقادیر کوچکی دارند، یعنی $d_{\Phi_{e,p}} \ll 1$ (لیوادیوتیس، ۲۰۱۷). در اینجا با توجه به دینامیک یکسان الکترون و پوزیترون از لحاظ جرم و اندازه بار، درجات آزادی اختلال برای هر دو گونه الکترون و پوزیترون یکسان در نظر گرفته می‌شود که در ادامه آن را با d_{Φ} نشان می‌دهیم.

با خطی‌سازی معادله‌های ۲ و ۴ و اعمال تبدیلات فوریه-لاپلاس رابطه پاشندگی خطی برای امواج غبار-صوتی با توزیع K_0 به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$1 = -\frac{1}{k^2 \lambda_{D,eff}^2} \left[\frac{\kappa_0 + 1 + \frac{d_{\Phi}}{2}}{\kappa_0 + \frac{d_{\Phi}}{2}} \right] + \frac{\omega p_d^2}{\omega^2 - \gamma_d v_{th}^2 k^2} \quad (۸)$$

که در آن $\omega p_d = \left(\frac{4\pi n_{d0} Z_d^2 e^2}{m_d} \right)^{\frac{1}{2}}$ فرکانس نوسانات ذرات غبار، $v_{th} = \left(\frac{k_B T_d}{m_d} \right)^{\frac{1}{2}}$ سرعت گرمایی غبار، و $\lambda_{D,eff}$ طول دبای مؤثر است که با رابطه $\gamma_d = \frac{1}{\lambda_{D,eff}^2} = \frac{4\pi e^2}{k_B} \left(\frac{n_{e0}}{T_{e0}} + \frac{n_{p0}}{T_{p0}} \right)$ داده می‌شود. در اینجا شاخص آدیاباتیک برای غبار است. به‌علاوه درجات آزادی اختلال برای هر دو گونه الکترون و پوزیترون با $d_{\Phi} = d_{\Phi_e} \equiv d_{\Phi_p}$ نشان داده شده‌اند.

در شکل ۱، رابطه پاشندگی ۸ را به‌صورت عددی و به‌ازای برخی مقادیر نوعی پارامترها ترسیم کرده‌ایم. در اینجا $\sigma_{dp} = T_d/T_{p0}$ و $\sigma_{de} = T_d/T_{e0}$ به‌ترتیب، نسبت‌های دمای محدود ذرات غبار به دمای تعادلی

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 4\pi e (n_e + Z_d n_d - n_p) \quad (۴)$$

که در آن n_d چگالی غبار، v_d سرعت سیال غبار، p_d فشار ناشی از غبار، φ پتانسیل الکتروستاتیکی، Z_d تعداد الکترون جذب شده در ذرات غبار، و $n_{d,e,p}$ چگالی‌های تعداد ذرات (غبار، الکترون و پوزیترون) هستند. گرادیان فشار ناشی از دمای ذرات غبار با استفاده از رابطه ترمودینامیکی $\vec{p}_d = \gamma_d k_B T_d \vec{\nabla} n_d$ داده می‌شود که در آن γ_d شاخص آدیاباتیک ذرات غباری و T_d دمای محدود برای آنها است. خاطر نشان می‌شود که در مدل به‌کار گرفته شده در این مسأله، زمینه پلاسما را شامل ذرات سنگین غبار به‌همراه الکترون‌ها و پوزیترون‌های پراثری (با مدل توزیع کاپا) در نظر گرفته‌ایم. با صرف‌نظر از امکان وقوع گسیل گرمایونی برای ذرات غبار به‌واسطه هر عامل محرکی که انرژی گرمایی لازم برای غلبه بر تابع کار ماده را فراهم کند، محتمل‌ترین مکانیسم باردار شدن ذرات غبار به‌واسطه برخوردها است. با توجه به منفی بودن امکان جذب یون مثبت توسط ذرات غبار در پلاسما شامل الکترون-پوزیترون، وقوع بار مثبت برای ذرات غبار ممکن نیست. از طرفی، به‌علت ناپایدار بودن پوزیترون در مقایسه با الکترون و مدت بقاء کمتر آنها، امکان باردار شدن ذرات غبار به‌واسطه جذب الکترون و در نتیجه باردار شدن ذرات غبار با قطبیت منفی در برهم‌کنش غبار با پلاسما الکترون-پوزیترون یکی از محتمل‌ترین گزینه‌ها است. لذا در این مسأله، ذرات غبار را با بار منفی در نظر گرفته‌ایم.

در حالت کلی برای ذرات با توزیع کاپا، نشان داده شده است که دمای هرگونه از ذرات (T) به دمای آن ذره در حالت تعادل (T_0) از طریق رابطه زیر وابستگی دارد (لیوادیوتیس، ۲۰۱۹).

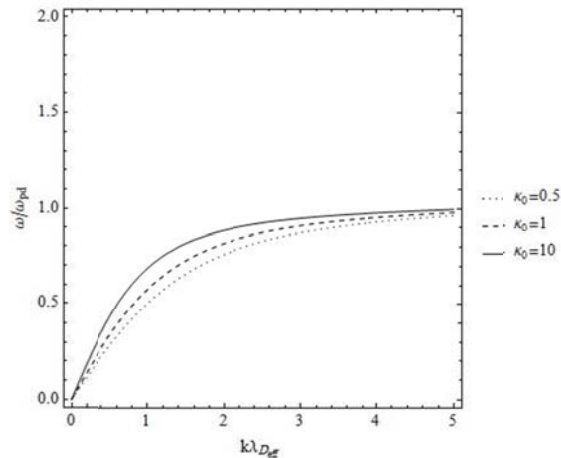
$$T_0 = T \frac{\kappa_0}{\kappa_0 + \frac{d_{\Phi}}{2}} \quad (۵)$$

در اینجا توجه به این نکته لازم است که در مسأله ما رابطه ۵ فقط برای الکترون‌ها و پوزیترون‌های با توزیع کاپا برقرار است. لذا، با انتگرال‌گیری از رابطه ۱ روی

الکترون و پوزیترون هستند. همچنین $\beta_{ed} = n_{e0}/n_{p0}$ نسبت چگالی الکترون به ذرات غبار در حالت تعادل است. ملاحظه می‌شود که در حد طول‌موج‌های بلند ($k\lambda_{D,eff} < 1$) رابطه پاشندگی به صورت خطی رفتار می‌کند و در حد طول‌موج‌های کوتاه ($k\lambda_{D,eff} \gg 1$) فرکانس نوسانات ذرات غبار به مقدار ω_{pd} میل می‌کند که قابل انتظار است. شایان ذکر است که حد طول‌موج‌های بلند برای انتشار امواج غبار-صوتی در پلاسما دارای اهمیت اساسی است. به علاوه شکل ۱ نشان می‌دهد که سرعت فاز موج با افزایش شاخص K_0 زیاد می‌شود، و در نتیجه با نزدیک شدن به نواحی دور از تعادل گرمایی که با مقادیر کوچک‌تر K_0 تعیین می‌شوند، سرعت فاز

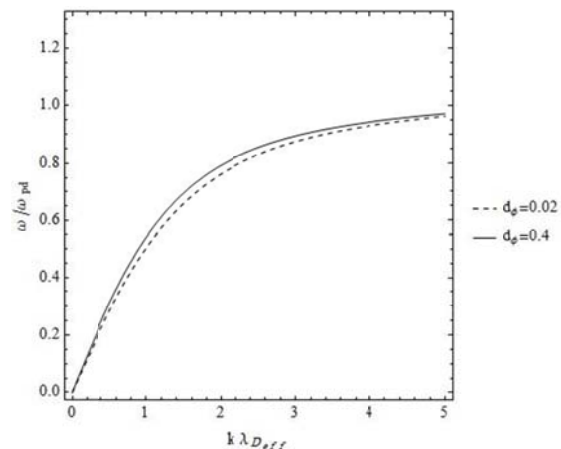
موج کاهش می‌یابد.

همچنین در شکل ۲، نقش درجات آزادی اختلالی (d_Φ) بر رابطه پاشندگی خطی به‌ازای دو مقدار نوعی $d_\Phi = 0.02$ و $d_\Phi = 0.4$ ترسیم شده است. ملاحظه می‌شود که با افزایش درجات آزادی اختلالی، سرعت فاز موج به‌ازای یک طول‌موج معین افزایش مختصری دارد. یا آوری می‌شود که برای یک پتانسیل اختلالی کوچک در پلاسما، ($\varphi \ll 1$)، d_Φ مقادیر کوچکی می‌تواند داشته باشد، زیرا $d_\Phi = \frac{e\langle\varphi\rangle}{k_B T_e} \ll 1$ که در اینجا $\langle\varphi\rangle$ میانگین آنسامبلی را نشان می‌دهد. (لیوادیتیس، ۲۰۱۷). به همین علت ما در محاسبات عددی به این نکته دقت کرده‌ایم و مقادیر نوعی کوچکی برای آن در نظر گرفته‌ایم.



شکل ۱. حل عددی رابطه پاشندگی خطی به‌ازای سه مقدار شاخص طیفی K_0 و مقادیر عددی $\beta_{ed} = 10000$ ، $z_d = 500$

$$\sigma_{de} = 0.01, \sigma_{dp} = 0.01, d_\Phi = 0.04, \gamma_d = 5/3$$



شکل ۲. حل عددی رابطه پاشندگی خطی به‌ازای دو مقدار نوعی درجات آزادی اختلالی d_Φ و مقادیر عددی $\beta_{ed} = 10000$ ، $z_d = 500$

$$\sigma_{de} = 0.01, \sigma_{dp} = 0.01, \kappa_0 = 0.5, \gamma_d = 5/3$$

$$C_{DA,\infty} = \left(\frac{k_B T_{e0} Z_d^2}{m_d (\beta_{ed} + \sigma_{ep} \beta_{pd})} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (10)$$

که در آن $\sigma_{ep} = T_{e0}/T_{p0}$ نسبت دماهای حالت تعادل الکترون به پوزیترون، و $\beta_{ed} = n_{e0}/n_{d0}$ و $\beta_{pd} = n_{p0}/n_{d0}$ به ترتیب نسبت چگالی‌های الکترون و پوزیترون به چگالی ذرات غبار در حالت تعادل تعریف شده است.

ذکر این نکته حائز اهمیت است که ما در این مسأله با دو شاخص آدیاباتیک سروکار داریم؛ یکی γ_d است که شاخص آدیاباتیک ذرات غبار در تحول ترمودینامیکی آنها در انتشار موج غبار-صوتی است که در رابطه تحول ترمودینامیکی $\vec{v} p_d = \gamma_d k_B T_d \vec{v} n_d$ صدق می‌کند؛ و دیگری γ است که شاخص آدیاباتیک برای ذرات با توزیع کاپا است (یعنی برای الکترون‌ها و پوزیترون‌هایی که آنها را با توزیع غیرتعادلی کاپا فرمول‌بندی کرده‌ایم).

دقت به این نکته در این مسأله بسیار مهم است که γ_d به هیچ عنوان نمی‌تواند برابر با یک بشود و ذرات غبار را ایزوترمال در نظر گرفت، زیرا آنها به عنوان ذرات زمینه برای انتشار موج غبار-صوتی با فرکانس نوسانات پایین مشارکت دارند و حتی بدون از دست رفتن کلیت موضوع برای انتشار امواج غبار-صوتی می‌توان دمای آنها صفر در نظر گرفت (stationary dusts). در واقع طیف ممکن شاخص آدیاباتیک ذرات غبار در اینجا حتماً به صورت $\gamma_d > 1$ است و بسته به چگونگی تحول ترمودینامیکی ذرات غبار میتوان آن را تعیین کرد. مثلاً در انتشار موج با سه درجه آزادی می‌توان تحول ذرات غبار را کاملاً آدیاباتیک و با $\gamma_d = 5/3$ در نظر گرفت. یادآوری می‌شود که شاخص آدیاباتیک (polytropic index or adiabatic index) در حالت کلی طبق رابطه $\gamma_d = \frac{c_p}{c_v}$ و از طریق ظرفیت‌های گرمایی ویژه تعریف می‌شود، و به اختصار می‌توان آن را از رابطه $\gamma_d = \frac{f+2}{f}$ نیز تخمین زد که در آن f تعداد درجات آزادی در تحول ترمودینامیکی است. به عنوان چند مثال، در برخی محیط‌های اختر فیزیکی مشاهده شده است که شاخص

به منظور بهنجارش صحیح سرعت‌ها در قسمت بعد، می‌توان سرعت صوت برای امواج غبار-صوتی را با استفاده از رابطه $C_{DA} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\partial \omega}{\partial k}$ و با در نظر گرفتن $T_d = 0$ (صرف نظر از دمای ذرات غبار سنگین) به صورت زیر به دست آورد:

$$C_{DA}(\kappa_0) = \left(\frac{\kappa_0 + \frac{d_\Phi}{2}}{\kappa_0 + 1 + \frac{d_\Phi}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \lambda_{D,eff} \omega_{pd} \quad (9)$$

رابطه فوق را می‌توان بر حسب شاخص آدیاباتیک ذرات با توزیع کاپا که با رابطه $\gamma = (\kappa_0 + \frac{d_\Phi}{2}) / (\kappa_0 + 1 + \frac{d_\Phi}{2})$ داده می‌شود (لیوادیوتیس، ۲۰۱۹)، به فرم $C_{DA}(\gamma) = \sqrt{\gamma} \lambda_{D,eff} \omega_{pd}$ خلاصه کرد، که در واقع یک سرعت صوت تعمیم یافته برای امواج غبار-صوتی با توزیع کاپا است و با نتایج پژوهش اخیر (صابریان، ۲۰۱۹a) در مورد سرعت صوت در پلاسماهای اختر فیزیکی سازگار است. خاطر نشان می‌شود که گستره تعریف شاخص آدیاباتیک γ برای ذرات با توزیع کاپا در بازه $0 < \gamma < 1$ قرار دارد (لیوادیوتیس، ۲۰۱۹). این سرعت صوت تعمیم یافته هم برای پلاسماهای دور از تعادل گرمایی ($0 < \kappa_0 < 1$) و هم برای پلاسماهای نزدیک به تعادل گرمایی ($\kappa_0 > 1$) اعتبار دارد. در واقع با نزدیک شدن به حد تعادل گرمایی ($\gamma \rightarrow 1$ یا $\kappa_0 \rightarrow \infty$)، سرعت صوت به بیشینه مقدار خود در پلاسما می‌رسد و با نزدیک شدن به نواحی دور از تعادل گرمایی، سرعت صوت در پلاسما کاهش می‌یابد. لازم به ذکر است که در این مسأله، به علت دینامیک یکسان الکترون‌ها و پوزیترون‌ها، شاخص کاپا (κ_0) درجات آزادی اختلال (d_Φ) و در نتیجه شاخص آدیاباتیک γ برای آنها یکسان در نظر گرفته شده است. در حد $\kappa_0 \rightarrow \infty$ (توزیع ماکسولی سرعت‌ها)، و با جای گذاری روابط معرفی شده ذیل رابطه ۸ برای طول دمای مؤثر $\lambda_{D,eff}$ و فرکانس نوسانات ذرات غبار ω_{pd} ، سرعت صوت استاندارد برای امواج غبار-صوتی در یک پلاسما در تعادل گرمایی به فرم ذیل به دست می‌آید.

آدیاباتیکی در این تابع توزیع در طیف $0 < \gamma < 1$ قرار دارد. به دیگر بیان، در توزیع کاپا ما با یک تابع توزیع زیر-ایزوترمال (sub-isothermal) سروکار داریم که فقط در حد تعادل گرمایی ($\kappa_0 \rightarrow \infty$)، شاخص آدیاباتیکی برای ذرات توزیع یافته به مقدار حدی ایزوترمال برای آنها میل می کند، جایی که $\gamma \rightarrow 1$. این حد، حد تعادلی سیستم (equilibrium state) است. نقطه حدی دیگر در این تابع توزیع، حد $\kappa_0 \rightarrow 0$ است که به آن حد پاد-تعادل (anti-equilibrium state) می گویند که در آنجا تابع توزیع دچار فروپاشی می شود و همچنین شاخص آدیاباتیکی به کمینه مقدار $\gamma \rightarrow 0$ میل می کند.

۳. تحلیل غیرخطی امواج غبار-صوتی: استخراج معادله انتگرال انرژی

ابتدا، یک سری متغیر بدون بعد (بهنجار) به فرم ذیل تعریف می کنیم و از طریق آنها معادله های اساسی را به یک فرم بهنجار بازنویسی می کنیم.

$$\begin{aligned} x/\lambda_{D,eff} &\rightarrow x, \\ t/\omega_{pd} &\rightarrow t, \\ v_d/c_{DA,\infty} &\rightarrow v_d, \\ n_d/n_{d0} &\rightarrow n_d, \\ \varphi/\varphi_0 &\rightarrow \varphi, \quad \varphi_0 = k_B T_{e0} Z_d / e(\beta_{ed} + \sigma_{ep} \beta_{pd}) \end{aligned} \quad (11)$$

درخصوص فرآیند بهنجارش در این مسأله ذکر نکاتی لازم است. با توجه به این که هردو گونه الکترون ها و پوزیترون ها در عمل حفاظ دمای شرکت دارند و آنرا طبق رابطه $\frac{1}{\lambda_{D,eff}^2} = \frac{4\pi e^2}{k_B} \left(\frac{n_{e0}}{T_{e0}} + \frac{n_{p0}}{T_{p0}} \right)$ در تعریف طول دمای لحاظ کرده ایم، لذا این انتظار وجود دارد که علاوه بر طول دمای، سرعت صوت و سایر مشخصه های پلاسما نیز به چگالی و دمای الکترون و پوزیترون بستگی داشته باشند. در محاسبه سرعت صوت موج غبار-صوتی، نتیجه را در حالت تعادل به فرم رابطه ۱۰ به دست آورده ایم، به طوری که طبق رابطه $C_{DA,\infty} = \lambda_{D,eff} \omega_{pd}$ پارامترهای طول دمای مؤثر و فرکانس نوسانات غبار

آدیاباتیکی برای یون ها به مقدار دقیق فرآیندهای آدیاباتیکی یعنی $\gamma_i = 5/3$ نزدیک است، مثلاً در پلاسماهای باد خورشیدی (نیکولائو و همکاران، ۲۰۱۴)؛ در شراره های خورشیدی (Solar flares) (وانگ و همکاران، ۲۰۱۵)؛ در امواج ضربه کمانی (bow shocks) (ویترهالتر و همکاران، ۱۹۸۴). در برخی محیط های اختریفی یون ها در طیف زیر-آدیاباتیکی (sub-adiabatic) و با مقادیر شاخص $1 < \gamma_i < 5/3$ یا در طیف فوق-آدیاباتیکی (super-adiabatic) و با مقادیر شاخص $\gamma_i > 5/3$ نیز مشاهده شده اند، نظیر پلاسماهای تاج خورشیدی (coronal plasma) (پراساد و همکاران، ۲۰۱۸)؛ در مگنتوسفر سیارات (دایالیناس و همکاران، ۲۰۱۸)؛ یا در برخی خوشه های کهکشانی (galaxy clusters) (گرنندی و مولندی، ۲۰۰۲). مثال های بیشتری از مقادیر مشاهده شده برای شاخص آدیاباتیکی در پلاسماهای اختریفی در مقالات (لیوادیوتیس، ۲۰۱۹) و (صابریان، ۲۰۱۹a) آورده شده است.

از طرف دیگر γ شاخص آدیاباتیکی برای الکترون ها و پوزیترون های با توزیع کاپا است. اگر توزیع الکترون ها را یک توزیع ماکسول-بولتزمن (توزیع تعادلی) در نظر بگیریم، یعنی این که دقیقاً توزیع آنها را با یک تحول تک دما (ایزوترمال) بیان کرده ایم و γ را برابر با یک در نظر گرفته ایم ($\gamma = 1$). در این مسأله ما یک توزیع غیرتعادلی و با توزیع کاپا برای الکترون ها و پوزیترون هایی که در انتشار موج غبار-صوتی مشارکت دارند، در نظر گرفته ایم. با توجه به محاسباتی که در فیزیک آماری این تابع توزیع انجام شده است و اخیراً در مقاله (لیوادیوتیس، ۲۰۱۹) به تفصیل به آن پرداخته شده است، نشان داده شده است که در توزیع کاپا بین پارامتر فشار و چگالی ذرات یک معادله تحول ترمودینامیکی به فرم $P \propto n^\gamma$ برقرار است به طوری که γ شاخص آدیاباتیکی برای ذرات با چنین تابع توزیعی است و توسط رابطه $\gamma = (\kappa_0 + \frac{d\Phi}{2}) / (\kappa_0 + 1 + \frac{d\Phi}{2})$ بر حسب پارامترهای κ_0 و $d\Phi$ بیان می شود، به علاوه شاخص

کند (چن، ۲۰۱۶). اما در اینجا با توجه به توضیحات داده شده و مشارکت هردو گونه الکترون‌ها و پوزیترون‌ها در حفاظ دبی، پارامتر φ_0 در لبه‌های کره دبی به یک فرم تعدیل شده به صورت $\varphi_0 = \frac{k_B T_{e0}}{e} \times \frac{Z_d}{(\beta_{ed} + \sigma_{ep} \beta_{pd})}$ تعریف شده است، تا با بهنجارش سایر پارامترها (طول، زمان، سرعت) در این مسأله سازگار باشد و با اعمال بدون بعدسازی بر روی معادله‌های اساسی روند محاسبات سراسر باشد. لذا پارامترهای مناسب بهنجارش (بی‌بعد کردن) در این مسأله آن‌گونه که در رابطه ۱۱ داده شده‌اند، مناسب تحلیل این مسأله می‌باشند. نمونه دیگری، از این دست محاسبات در مقاله (صابریان و همکاران، ۲۰۱۷) نیز به کار گرفته شده است.

به منظور حل غیرخطی کامل مجموعه معادله‌های ۴-۲، جواب‌های ایستایی در چارچوب مرجع موج در نظر می‌گیریم که با به کارگیری تبدیل مختصات گالیله‌ای به فرم $\xi = x - Mt$ ، تنها به متغیر ξ بستگی داشته باشند. در اینجا M عدد ماخ است و همان‌گونه که ذکر شد عبارت است از نسبت سرعت موج به سرعت صوت امواج غباری. با بازنویسی معادله‌های بهنجار شده در چارچوب مرجع موج، انتگرال‌گیری از معادله‌های تبدیل یافته و اعمال شرایط مرزی در حالت تعادل (بدین ترتیب که در $|\xi| \rightarrow \infty$ داشته باشیم: $n_d \rightarrow 1$ ، $v_d \rightarrow 0$ و $\varphi \rightarrow 0$)، حل همزمان معادله‌های ۴-۲ و در نظر گرفتن روابط ۶ و ۷ به معادله زیر می‌انجامد:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2\varphi}{M^2}}} + \frac{\beta_{ed}}{Z_d} \left(1 - \frac{1}{\kappa_0 + \frac{d\Phi}{2}} \frac{Z_d \varphi}{(\beta_{ed} + \sigma_{ep} \beta_{pd})} \right)^{-\kappa_0 - 1 - \frac{d\Phi}{2}} - \frac{\beta_{pd}}{Z_d} \left(1 + \frac{1}{\kappa_0 + \frac{d\Phi}{2}} \frac{Z_d \sigma_{ep} \varphi}{(\beta_{ed} + \sigma_{ep} \beta_{pd})} \right)^{-\kappa_0 - 1 - \frac{d\Phi}{2}} \quad (12)$$

در تحلیل غیرخطی و بدون از دست رفتن کلیت موضوع، ما از دمای محدود ذرات غبار به علت اینرسی بالای آنها صرف نظر کرده‌ایم. با ضرب کردن طرفین معادله ۱۲ در

بستگی دارد. اگر این محاسبات را انجام نمی‌دادیم، تصور اشتباه اولیه این بود که سرعت صوت امواج غباری مثلاً به فرم $C_s = \left(\frac{Z_d k_B T_{e0}}{m_d} \right)^{\frac{1}{2}}$ باشد (یک فرمول‌بندی خام مشابه آنچه است که از سرعت صوت یون در یک پلاسما معمولی می‌دانیم). اما محاسبات دقیق یک ضریب تعدیل بدون بعد به فرم $\frac{Z_d}{(\beta_{ed} + \sigma_{ep} \beta_{pd})}$ در نتیجه به دست آمده نشان می‌دهد، که به رابطه ۱۰ منجر شده است. وجود این وابستگی به علت این است که هردو گونه الکترون و پوزیترون در انتشار موج مشارکت دارند و لذا چگالی و دمای آنها باید خود را در طول دبی، سرعت صوت و ... نشان دهد. از طرف دیگر، این بخش از محاسبات مقاله و محاسبه دقیق سرعت صوت موج غبار-صوتی، به این منظور انجام شده است که به هنگام بهنجارش پارامترهای مربوط به سرعت و خصوصاً تعریف عدد ماخ (Mach number) که عبارت است از نسبت سرعت موج به سرعت صوت، نتیجه به صورت صحیح به دست آید و صرفاً با انتخاب یک پارامتر بهنجارش دلخواه این کار را انجام ندهیم. بدین منظور در بهنجارش سرعت‌ها از سرعت صحیح صوت برای امواج غبار-صوتی که در رابطه ۱۰ استخراج شده است استفاده کرده‌ایم. این موضوع به خصوص برای تحلیل مقادیر مجاز عدد ماخ برای انتشار امواج سالیوتونی بسیار مهم است. در غیر این صورت و با تعاریف دلخواه برای بهنجارش سرعت‌ها، نتایج محاسبات دچار اشکال خواهد شد. این اشتباه در بسیاری از کارهای گذشته دیده می‌شود و تحلیل زیبایی بر ضرورت انجام این کار در مقاله (دوبینو، ۲۰۰۹) بحث شده است. پارامتر دیگری که به بهنجارش آن نیاز داریم پتانسیل الکتروستاتیکی φ است. در یک پلاسما معمولی، معمولاً آن‌را به "حداقل پتانسیل الکتروستاتیکی مورد نیاز در حضور یک الکترون نوعی برای فرار از لبه‌های یک کره دبی" نرمالیزه می‌کنند که برابر است با $\varphi_0 = \frac{k_B T_{e0}}{e}$. به صورت دقیقتر، بهتر است بگوییم اگر انرژی یک الکترون نوعی ($k_B T_{e0}$) در لبه‌های کره دبی در حدود $e\varphi_0$ باشد می‌تواند از سد پتانسیل آنجا عبور

شرط $\left(\frac{d^2\psi}{d\varphi^2}\right)_{\varphi=0} < 0$ که متناظر با کمینه مقدار یا آستانه عدد ماخ برای انتشار امواج سالیوتونی است، به نتیجه زیر منجر می‌شود:

$$M \geq M_{min} \quad , \quad M_{min} = \sqrt{\frac{\kappa_0 + \frac{d\Phi}{2}}{\kappa_0 + 1 + \frac{d\Phi}{2}}} \equiv \sqrt{\gamma} \quad (16)$$

رابطه ۱۶ نشان می‌دهد آستانه عدد ماخ به شاخص آدیاباتیک ذرات با توزیع کاپا ارتباط دارد. در حد $\kappa_0 \rightarrow \infty$ که متناظر با یک پلاسما در تعادل گرمایی با توزیع ماکسولی است، مقدار آستانه عدد ماخ به $M_{min} = 1$ میل می‌کند، که نشان می‌دهد در پلاسماهای تعادلی فقط وقوع سالیوتون‌های فوق‌صوتی (supersonic solitons) امکان‌پذیر است (چن، ۲۰۱۶؛ دیویدسون، ۱۹۷۲). خاطر نشان می‌شود که در پلاسماهای در تعادل گرمایی و با توزیع ماکسولی سرعت‌ها، تحول ترمودینامیکی الکترون‌ها همدم ($\gamma = 1$) به دست می‌آید. در اینجا، با توجه به این که گستره شاخص آدیاباتیک برای ذرات با توزیع کاپا در بازه $0 < \gamma < 1$ قرار دارد (لیوادیوتیس، ۲۰۱۹)، لذا نتیجه می‌شود که در پلاسماهای دور از تعادل گرمایی امکان وقوع سالیوتون‌ها زیرصوتی (subsonic solitons) نیز امکان‌پذیر است که بستگی به مقدار شاخص طیفی κ_0 در حالت ایستای پلاسما دارد. این مسأله اخیراً در یک حالت کلی‌تر و با استخراج یک سرعت صوت تعمیم‌یافته برای پلاسماهای اختریف‌یکی بررسی شده است (صابریان، ۲۰۱۹a).

در شکل ۳، رابطه $\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}\right)_{\varphi=0} = 0$ را به صورت عددی در صفحه (κ_0, M) ترسیم کرده‌ایم به طوری که وابستگی کمینه مقدار عدد ماخ برای انتشار امواج غبار-صوتی سالیوتونی به شاخص کاپا را نشان می‌دهد. نواحی بالای منحنی به دست آمده متناظر با $\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}\right)_{\varphi=0} < 0$ هستند که دلالت بر شرط تشکیل چاه پتانسیل دارد.

$\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}$ و انتگرال گیری از آن به یک معادله انتگرال انرژی به فرم زیر دست می‌یابیم:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{d\xi}\right)^2 + \Psi(\varphi, M, \kappa_0, d\Phi) = 0 \quad (13)$$

که در آن تابع $\Psi(\varphi, M, \kappa_0, d\Phi)$ تابع شبه پتانسیل (موسوم به تابع شبه پتانسیل سقدی اف) است و به فرم زیر به دست می‌آید:

$$\Psi(\varphi, M, \kappa_0, d\Phi) = M^2 \left(1 - \sqrt{1 + \frac{2\varphi}{M^2}} \right) - \frac{\beta_{ed}(\beta_{ed} + \sigma_{ep}\beta_{pd})}{z_d^2} \left[\left(1 - \frac{1}{\kappa_0 + \frac{d\Phi}{2}} \frac{z_d\varphi}{(\beta_{ed} + \sigma_{ep}\beta_{pd})} \right)^{-\kappa_0 - \frac{d\Phi}{2}} - 1 \right] - \frac{\beta_{pd}(\beta_{ed} + \sigma_{ep}\beta_{pd})}{z_d^2\sigma_{ep}} \left[\left(1 + \frac{1}{\kappa_0 + \frac{d\Phi}{2}} \frac{z_d\sigma_{ep}\varphi}{(\beta_{ed} + \sigma_{ep}\beta_{pd})} \right)^{-\kappa_0 - \frac{d\Phi}{2}} - 1 \right] \quad (14)$$

معادله ۱۳ مشابه معادله حرکت یک ذره با جرم واحد است که مختصه مکانی آن φ و مختصه زمانی آن ξ است و در یک چاه پتانسیل به دام افتاده است.

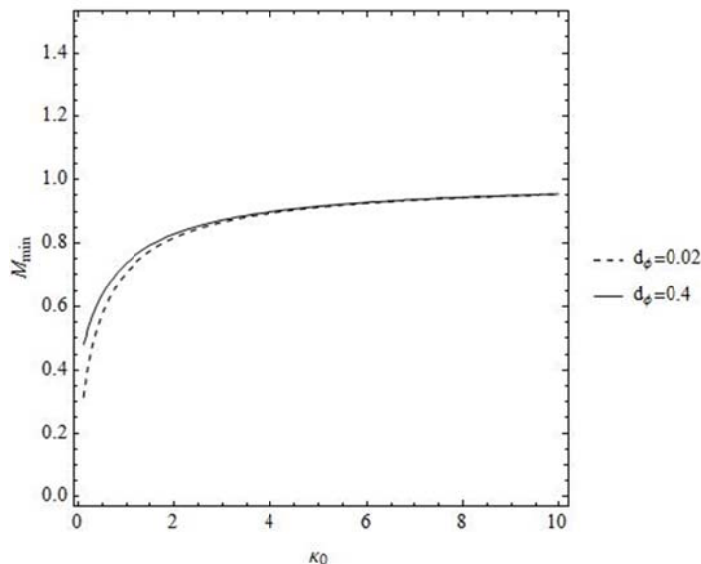
۴. شرایط وجود امواج سالیوتونی

شرایط لازم و کافی برای تشکیل یک چاه پتانسیل و انتشار امواج سالیوتونی غبار-صوتی عبارت‌اند از:

$$\Psi(\varphi = 0) = 0 \quad , \quad \left(\frac{d\Psi}{d\varphi}\right)_{\varphi=0} = 0 \quad , \quad \left(\frac{d^2\Psi}{d\varphi^2}\right)_{\varphi=0} < 0 \quad \Psi(\varphi = \varphi_{max}) = 0 \quad \left(\frac{d\Psi}{d\varphi}\right)_{\varphi=\varphi_{max}} \geq 0 \quad \text{for } \varphi_{max} \geq 0 \quad (15)$$

که در اینجا φ_{max} ریشه غیرصفر تابع شبه پتانسیل $\Psi(\varphi, M, \kappa_0, d\Phi)$ است.

شرایط $\Psi(\varphi = 0) = 0$ و $\left(\frac{d\Psi}{d\varphi}\right)_{\varphi=0} = 0$ که به ترتیب دلالت بر ریشه بدیهی چاه پتانسیل و شرط شبه‌خستگی بودن پلاسما در حالت تعادل دارند، خودبه‌خود برقرار هستند.



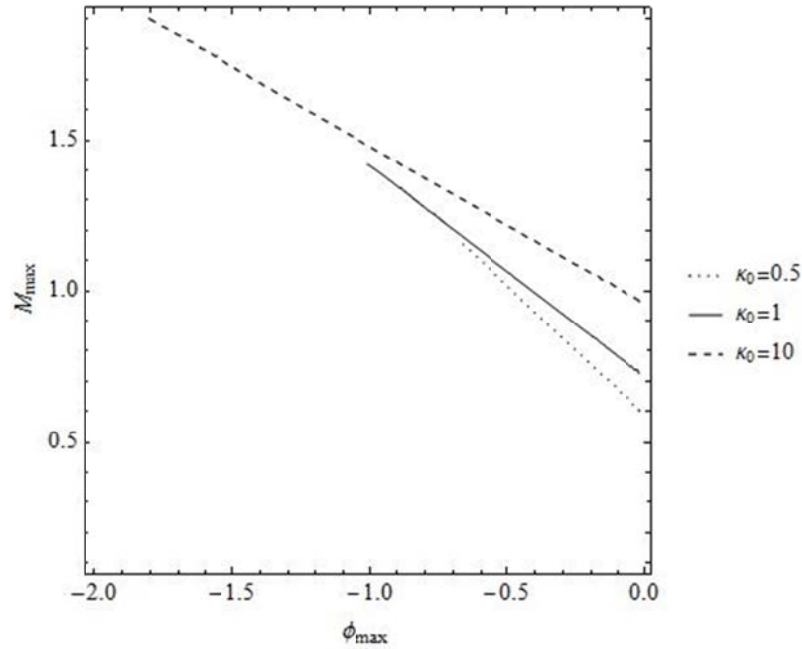
شکل ۳. تغییرات آستانه عدد ماخ (M_{min}) برحسب κ_0 و به ازای دو مقدار نوعی d_ϕ و مقادیر عددی $\beta_{ed} = 10000$, $\sigma_{ep} = 1$, $z_d = 500$

که با افزایش عدد ماخ مقدار مطلق φ_{max} افزایش می‌یابد که قابل انتظار می‌باشد. همچنین این شکل نشان می‌دهد که به ازای یک M ثابت با کاهش شاخص طیفی κ_0 مقدار مطلق φ_{max} افزایش می‌یابد. به لحاظ فیزیکی این گونه می‌توان استدلال کرد که با کاهش شاخص طیفی (κ_0) که دلالت بر یک پلاسما با کسری بیشتر از ذرات فوق گرمایی دارد دامنه موج سالیتمونی افزایش می‌یابد.

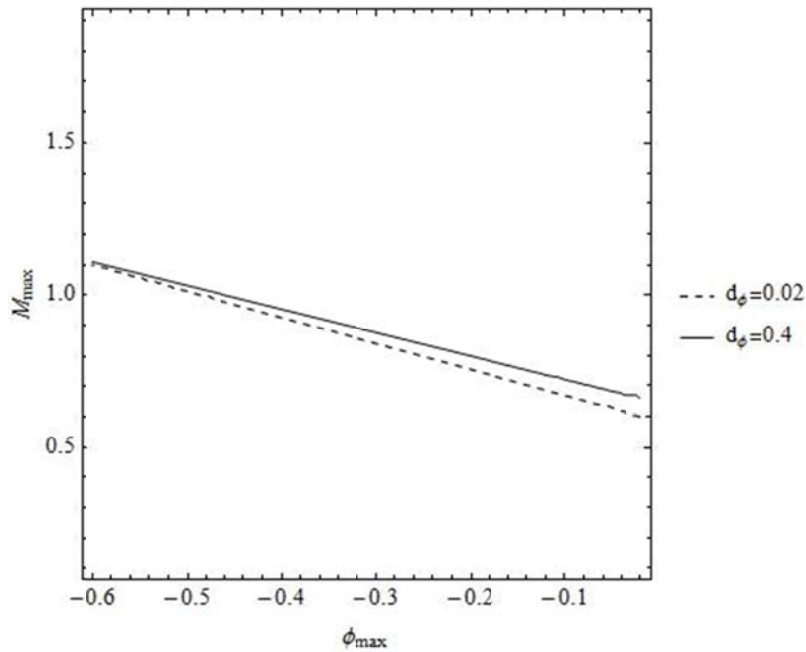
در شکل ۵، برای نشان دادن وابستگی φ_{max} و M_{max} به درجات آزادی اختلال d_ϕ در نواحی دور از تعادل گرمایی (جایی که در آنجا تغییرات d_ϕ اهمیت پیدا می‌کند)، ریشه‌های تابع $\Psi(\varphi, M) = 0$ را در صفحه (φ, M) به ازای دو مقدار نوعی درجات آزادی اختلالی، $d_\phi = 0.02$ و $d_\phi = 0.4$ و به ازای مقدار نوعی $\kappa_0 = 0.5$ برای شاخص طیفی به صورت عددی ترسیم کرده‌ایم. شکل ۵، علاوه بر این که نشان می‌دهد که عدد ماخ با افزایش d_ϕ یک افزایش جزئی دارد، گویای این نتیجه است که به ازای یک M ثابت با کاهش مقدار d_ϕ ، یک افزایش مختصر در مقدار مطلق φ_{max} نیز حاصل می‌شود. این موضوع در بخش بعدی مقاله و در تحلیل عددی چاه پتانسیل نیز آزموده خواهد شد.

شکل ۳ نشان می‌دهد که با افزایش شاخص طیفی κ_0 کمینه عدد ماخ (M_{min}) افزایش می‌یابد، که دلالت بر این واقعیت فیزیکی دارد که با نزدیک شدن به حالت تعادل ترمودینامیکی ($\kappa_0 \rightarrow \infty$) سرعت صوت افزایش می‌یابد. در واقع همان گونه که ذیل رابطه ۹ نیز توضیح داده شد، سرعت صوت موج غباری در حالت تعادل دارای بیشینه مقدار خود است، و با نزدیک شدن به نواحی دور از تعادل گرمایی که با مقادیر کوچک تر شاخص طیفی (κ_0) برچسب می‌خورند، سرعت صوت در پلاسما کاهش می‌یابد. علاوه بر این، شکل ۳ به ازای دو مقدار نوعی درجات آزادی اختلالی، $d_\phi = 0.02$ و $d_\phi = 0.4$ ترسیم شده است و نشان می‌دهد که در نواحی دور از تعادل گرمایی (با مقادیر کوچک تر κ_0) که در آنجا d_ϕ اهمیت پیدا می‌کند، با افزایش d_ϕ آستانه عدد ماخ افزایش می‌یابد.

در شکل ۴ ریشه‌های تابع $\Psi(\varphi, M) = 0$ را به صورت عددی در صفحه (φ, M) به ازای برخی مقادیر κ_0 ترسیم کرده‌ایم. منحنی به دست آمده دلالت بر بیشینه مقدار پتانسیل (φ_{max}) و در نتیجه بیشینه مقدار عدد ماخ (M_{max}) دارند. این شکل نشان می‌دهد که نشان می‌دهد



شکل ۴. مقادیر دقیق (ϕ_{max}, M_{max}) برای امواج سالیتمونی غبار-صوتی ازای سه مقدار شاخص طیفی κ_0 و مقادیر عددی $z_d = 500$
 $\beta_{ed} = 10000, \sigma_{ep} = 1, d_\phi = 0.04$



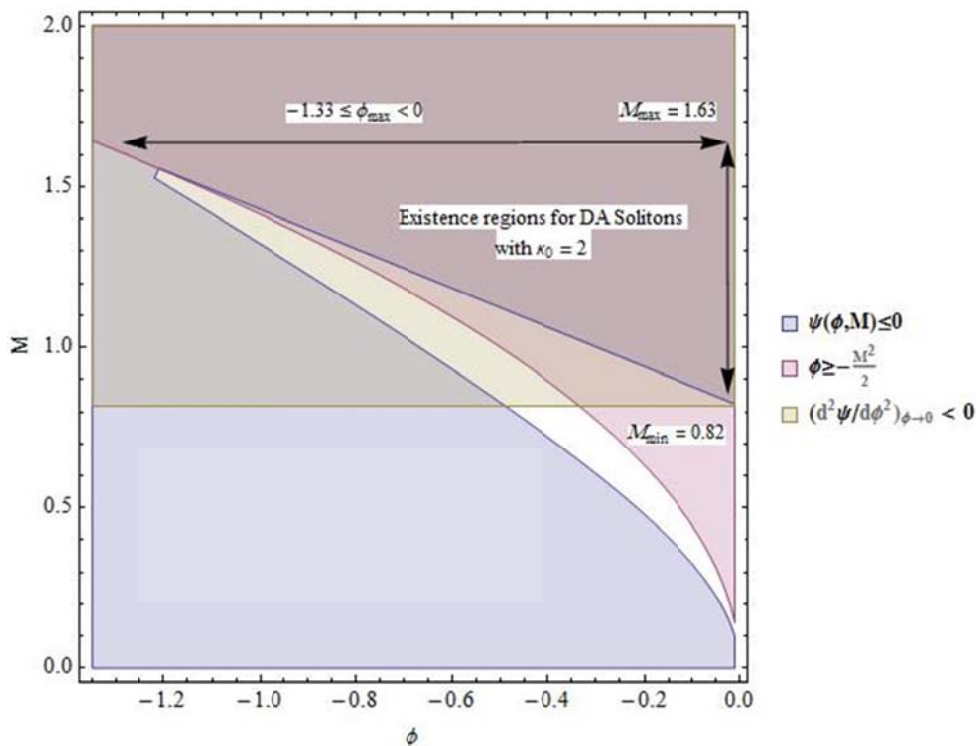
شکل ۵. مقادیر دقیق (ϕ_{max}, M_{max}) برای امواج سالیتمونی غبار-صوتی ازای دو مقدار نوعی d_ϕ و مقادیر عددی $z_d = 500$
 $\beta_{ed} = 10000, \sigma_{ep} = 1, \kappa_0 = 0.5$

در شکل ۶، نواحی مجاز برای وقوع امواج سالیتمونی غبار-صوتی در پلاسما را که از هم پوشانی همزمان سه شرط $\Psi(\varphi, M) < 0$ (منفی بودن چاه پتانسیل)، $\varphi \geq \frac{-M^2}{2}$ و $(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2})_{\varphi=0} < 0$ (آستانه عدد ماخ) به دست می آید، به ازای مقادیر عددی داده شده در شکل ترسیم کرده ایم. با مقادیر

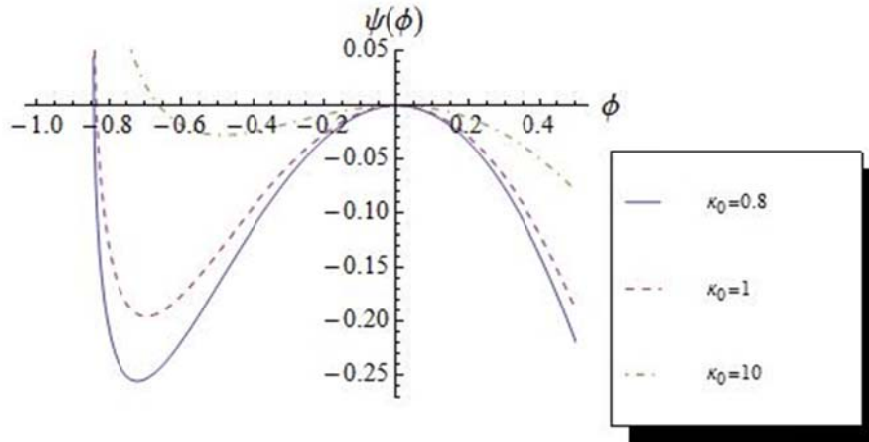
تضمین حقیقی بودن تابع چگالی ذرات غبار) و شرط

۵. تحلیل عددی چاه پتانسیل و بحث در مورد جواب‌ها در شکل ۷ تغییرات چاه پتانسیل را برای چند مقدار نوعی شاخص طیفی κ_0 و به‌ازای مقادیر داده شده در شکل به‌صورت عددی ترسیم کرده‌ایم. ملاحظه می‌شود که در نواحی دور از تعادل گرمایی که با شاخص طیفی κ_0 با مقادیر کوچک‌تر برجسب می‌خورند، پهنای چاه پتانسیل بیشتر است که متناظر با تحریک امواج غبار-صوتی سالیوتونی با دامنه بیشتر، و در نتیجه شیب پالس بیشتر است. با توجه به این که مقادیر کوچک‌تر شاخص طیفی κ_0 دلالت بر یک پلاسما با کسر بیشتری از ذرات فوق گرمایی دارد، لذا این نتیجه در اثر تأثیر بیشتر ذرات فوق گرمایی بر روی انتشار امواج سالیوتونی توجیه می‌شود. همچنین، در نظر گرفتن توزیع ذرات در مدل فوق با مقادیر شاخص طیفی در محدوده $\kappa_0 > 1$ عملاً به توزیع ذرات در یک پلاسما تعادلی میل می‌کند.

عدد ذکر شده، کمینه و بیشینه مقدار عدد ماخ در پلاسما به ترتیب برابر با $M_{min} = 0.8$ و $M_{max} = 1.6$ به دست می‌آیند. همچنین مقادیر مجاز برای ϕ_{max} در بازه $-1.33 \leq \phi_{max} < 0$ به دست می‌آید. لذا نواحی مجاز برای انتشار امواج سالیوتونی غبار-صوتی به صورت نشان داده شده در شکل ۵ می‌باشد. در این روش تحلیل می‌توان فهمید که به‌ازای $M_{min} \leq M \leq M_{max}$ یک جواب سالیوتونی حاصل می‌شود و ϕ_{max} به‌ازای هر انتخاب برای M برابر با نقطه متناظر در منحنی $\Psi(\phi, M) = 0$ می‌باشد. ملاحظه می‌شود که در مسأله فوق، فقط وقوع سالیوتون‌ها با پلاریته منفی امکان‌پذیر است. علت این امر این است که ذرات غبار را با بار منفی در نظر گرفته‌ایم که باعث تشکیل امواج غبار-صوتی سالیوتونی با پتانسیل منفی می‌شوند.



شکل ۶. نواحی مجاز دقیق برای سالیوتون‌های غبار-صوتی به‌ازای $\kappa_0 = 2$ در صفحه (ϕ, M) و به‌ازای مقادیر عددی $z_d = 500$ ، $\beta_{ed} = 10000$ ، $\sigma_{ep} = 1$ ، $d_\phi = 0.04$

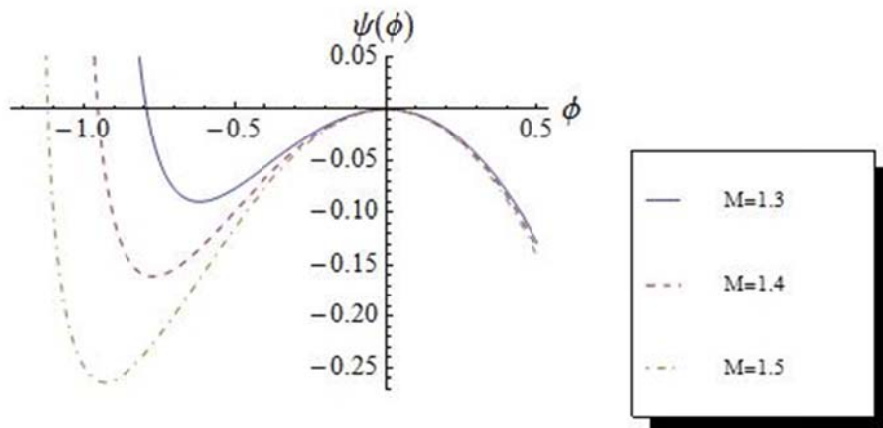


شکل ۷. نقش شاخص طیفی κ_0 بر روی چاه پتانسیل و امواج سالیوتونی به ازای $M = 1.3$ و مقادیر عددی $z_d = 500$ ، $\beta_{ed} = 10000$ ، $\sigma_{ep} = 1$ ، $d_\phi = 0.04$

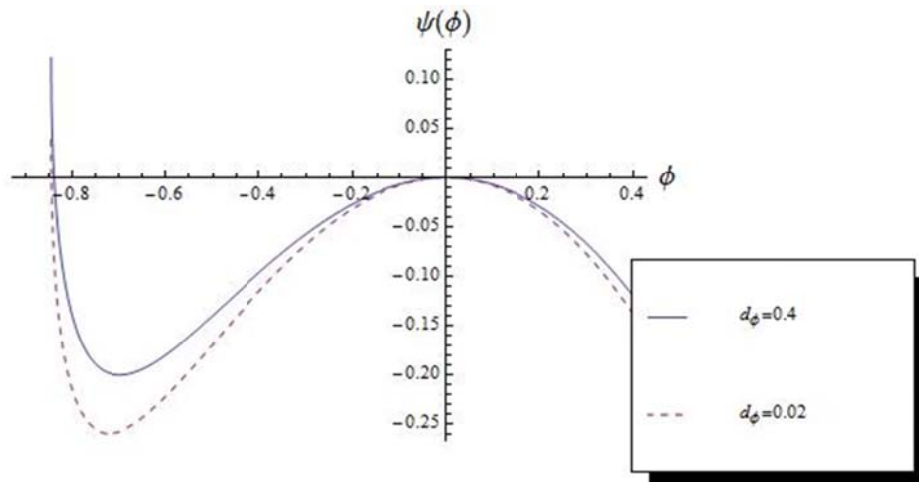
در شکل ۸ تغییرات چاه پتانسیل را به ازای سه مقدار مختلف M (که در ناحیه مجاز می باشند) و به ازای مقادیر داده شده در شکل ترسیم کرده ایم. این شکل نشان می دهد که با کاهش مقدار d_ϕ پهنا و عمق چاه پتانسیل افزایش مختصری دارد. لذا نتیجه می شود که با کاهش درجات آزادی وابسته به پتانسیل اختلالی، ماکزیم دامنه و شیب پالس سالیوتونی افزایش می یابد. این موضوع در بخش قبل و در نتایج شکل ۵ نیز استخراج شده بود، جایی که نشان دادیم با کاهش مقدار d_ϕ ، یک افزایش مختصر در مقدار مطلق ϕ_{max} حاصل می شود. این نتیجه، با نتایج به دست آمده در مورد سالیوتون های یون-صوتی دامنه کوتاه در پلاسماهای دور از تعادل بادهای خورشیدی (صابریان، ۲۰۱۹b)، در توافق است.

در شکل ۸ تغییرات چاه پتانسیل را به ازای سه مقدار مختلف M (که در ناحیه مجاز می باشند) و به ازای مقادیر داده شده در شکل ترسیم کرده ایم. این شکل نشان می دهد که با افزایش عدد ماخ، پهنا و عمق چاه پتانسیل افزایش می یابد. با توجه به این که پهنای چاه پتانسیل متناظر با حداکثر دامنه سالیوتون و عمق چاه پتانسیل متناظر با شیب پالس سالیوتونی می باشد، لذا نتیجه می شود که با افزایش سرعت سالیوتون ماکزیم دامنه و شیب پالس سالیوتونی افزایش می یابد.

علاوه بر این، در شکل ۹ تغییرات چاه پتانسیل را به ازای دو مقدار نوعی درجات آزادی اختلالی، $d_\phi = 0.02$ و $d_\phi = 0.4$ در نواحی دور از تعادل گرمایی، با مقدار نوعی



شکل ۸. نقش سرعت سالیوتون بر روی چاه پتانسیل به ازای $\kappa_0 = 2$ و مقادیر عددی $z_d = 500$ ، $\beta_{ed} = 10000$ ، $\sigma_{ep} = 1$ ، $d_\phi = 0.04$



شکل ۹. نقش درجات آزادی اختلالی بر روی چاه پتانسیل در نواحی دور از تعادل گرمایی به ازای دو مقدار نوعی d_ϕ و به ازای $\kappa_0 = 0.8$ و مقادیر عددی $z_d = 500$, $\beta_{ed} = 10000$, $\sigma_{ep} = 1$, $M = 1.3$

۶. نتیجه گیری

عدد ماخ برای انتشار سالیتون‌های غبار-صوتی استخراج شدند. نشان دادیم که آستانه عدد ماخ به شاخص آدیاباتیک ذرات با توزیع کاپا ارتباط دارد. در پلاسماهای دور از تعادل گرمایی امکان وقوع سالیتون‌ها زیر صوتی (با سرعت‌های کمتر از سرعت صوت) پیش بینی می‌شود، که بستگی به مقدار شاخص طیفی κ_0 در حالت ایستای پلاسما دارد. نشان دادیم که وقوع سالیتون‌های غبار-صوتی با پلاریته منفی امکان‌پذیر است. همچنین، حالت‌های نزدیک به تعادل و دور از تعادل گرمایی مطالعه شدند. در نواحی دور از تعادل گرمایی که با مقادیر کوچک‌تر شاخص κ_0 برچسب می‌خورند، امواج غبار-صوتی سالیتونی با دامنه و شیب پالس بیشتر اتفاق می‌افتند. علاوه بر این، کاهش درجات آزادی وابسته به پتانسیل اختلالی باعث یک افزایش مختصر در ماکزیمم دامنه و شیب پالس سالیتون‌های غبار-صوتی می‌شود.

مراجع

Adnan, M., Mahmood, S. and Qamar, A., 2014, Small amplitude ion acoustic solitons in a weakly magnetized plasma with anisotropic ion pressure and kappa distributed electrons, *Advances in Space Research*, 53, 845-852.

در این مقاله، انتشار امواج غبار-صوتی در یک پلاسما غیرتعادلی شامل ذرات باردار شده غبار با بار منفی و توزیعی از الکترون‌ها و پوزیترون‌های فوق گرمایی مطالعه شدند. توزیع ذرات پس‌زمینه (الکترون و پوزیترون) با به کارگیری یک تابع توزیع کاپا که متضمن حالات دور از تعادل ترمودینامیکی است توصیف شد، به طوری که حالت ایستای پلاسما توسط یک شاخص طیفی κ_0 (مستقل از تعداد درجات آزادی) و پارامتر d_ϕ (درجات آزادی اختلالی) برچسب زده می‌شود. در تحلیل خطی، رابطه پاشندگی برای امواج غبار-صوتی بررسی شد و از طریق آن سرعت صوت موج غبار-صوتی در پلاسما محاسبه شد. سپس در تحلیل غیرخطی، امواج غبار-صوتی سالیتونی با استخراج یک معادله انتگرال انرژی مطالعه شدند. در استخراج معادله انتگرال انرژی و تحلیل آن، عدد ماخ (نسبت سرعت موج به سرعت صوت) به شیوه صحیح و با به کار بردن سرعت صوت به دست آمده از رابطه پاشندگی پلاسما، تحلیل شد و مقادیر مجاز دقیق

Baluku, T. K. and Hellberg, M. A., 2012, Ion acoustic solitons in a plasma with two-temperature kappa-distributed electrons, *Phys. Plasmas*, 19, 012106.
Baluku, T. K., Hellberg, M. A. and Mace, R. L.,

- 2011, Electron acoustic waves in double-kappa plasmas: Application to Saturn's magnetosphere, *J. Geophys. Res.*, 116, A04227.
- Chen, F. F., 2016, *Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion*, 3rd ed., Springer.
- Daniel, J. and Tajima, T., 1998, Outbursts from a black hole via alfvén wave to electromagnetic wave mode conversion, *Astrophys. J.*, 498, 296.
- Davidson, R.C., 1972, *Methods in nonlinear plasma theory*, Academic Press.
- Dialynas, K., Roussos, E., Regoli, L., Paranicas, C.P., Krimigis, S.M., Kane, M., Mitchell, D.G., Hamilton, D.C., Krupp, N. and Carbary, J.F., 2018, Energetic Ion Moments and Polytopic Index in Saturn's Magnetosphere using Cassini/MIMI Measurements: A Simple Model Based on κ -Distribution Functions, *J. Geophys. Res: Space Phys.*, 123, 8066.
- Dubinov, A. E., 2009, On a Widespread Inaccuracy in Defining the Mach Number of Solitons in a Plasma, *Plasma Phys. Rep.*, 35, 991.
- El-Awady, E. I., El-Tantawy, S.A., Moslem, W.M., and Shukla, P.K., 2010, Electron-positron-ion plasma with kappa distribution: Ion acoustic soliton propagation, *Phys. Letters A*, 374, 3216 – 3219.
- Feldman, W. C., Asbridge, J. R., Bame, S. J., Montgomery, M. D. and Gary, S. P., 1975, Solar wind electrons, *J. Geophys. Res.*, 80, 4181.
- Gibbons, G. W., Hawking, S. W. and Siklos, S., 1983, *The Very Early Universe*, Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- Goldreich, P. and Julian, W. H., 1969, Pulsar Electrodynamics, *Astrophys. J.*, 157, 869.
- Grandi, S. and Molendi, S., 2002, Temperature Profiles of Nearby Clusters of Galaxies, *Astrophys. J.*, 567, 163.
- Kim, S. H. and Merlino, R. 2007, Electron attachment to C_7F_{14} and SF_6 in a thermally ionized potassium plasma, *Phys. Rev. E* 76, 035401(R).
- Livadiotis, G., 2017, *Kappa distributions: Theory and applications in Plasmas*, Elsevier.
- Livadiotis, G. and McComas, D. J., 2011, Invariant Kappa Distribution in Space Plasmas Out of Equilibrium, *Astrophys. J.*, 741, 88.
- Livadiotis, G., 2019, On the Origin of Polytopic Behavior in Space and Astrophysical Plasmas, *Astrophys. J.*, 874, 10.
- Maksimovic, M., Pierrard, V. and Riley, P., 1997, Ulysses electron distributions fitted with Kappa functions, *Geophys. Res. Lett.*, 24, 1151.
- Mamun, A. A., 1997, Effects of ion temperature on electrostatic solitary structures in nonthermal plasmas, *Phys. Rev. E*, 55, 1852-1857.
- Mamun, A. and Shukla, P. K., 2002, The role of dust charge fluctuations on nonlinear dust ion-acoustic waves, *IEEE Transactions on Plasma Science*, 30, 720-724.
- Max, C. and Perkins, F.W., 1972, Instability of a Relativistically Strong Electromagnetic Wave of Circular Polarization, *Phys. Rev. Lett.* 29, 1731.
- Mendis, D. A. and Rosenberg, M., Analysis of Nonlinear Dust-Acoustic Shock Waves in an Unmagnetized Dusty Plasma with q -Nonextensive Electrons Where Dust Is Arbitrarily Charged Fluid, 1994, *Anu. Rev. Astron. Astrophys.*, 32, 419.
- Michael, M., Willington, N. T., Jayakumar, N., Sebastian, S., Sreekala, G. and Venugopal, C., 2016, *J. Theor. Appl. Phys.*, 10, 289.
- Miller, H. R. and Witta, P. J., 1987, *Active galactic nuclei*, Springer-Verlag, Berlin, Germany.
- Mishra, K. and Chhabra, R. S., 1996, Ion-acoustic compressive and rarefactive solitons in a warm multicomponent plasma with negative ions, *Phys. Plasmas*, 3, 4446.
- Nasim, M. H., Mirza, A. M., Qaisar, M. S. and Murtaz, G., 1998, Energy loss of charged projectiles in dusty plasmas, *Phys. Plasmas*, 5, 3581.
- Nicolaou, G., Livadiotis, G. and Moussas, X., 2014, Long-Term Variability of the Polytopic Index of Solar Wind Protons at 1 AU, *Solar Phys.*, 289, 1371.
- Northrop, T. G., 1992, *Dusty Plasmas*, *Physica Scripta*, 45, 475.
- Oohara, W. and Hatakeyama, R., 2003, Pair-Ion Plasma Generation using Fullerenes, *Phys. Rev. Lett.*, 91, 205005.
- Oohara, W., Date, D. and Hatakeyama, R., 2005, Electrostatic Waves in a Paired Fullerene-Ion Plasma, *Phys. Rev. Lett.* 95, 175003.
- Orsoz, J. R., Remillard, R. A., Bailyn, C. D. and McClintock, J. E., 1997, An Optical Precursor to the Recent X-Ray Outburst of the Black Hole Binary GRO J1655-40, *Astrophys. J.*, 478, L83.
- Pierrard, V. and Lazar, M., 2010, Kappa Distributions: Theory and Applications in Space Plasmas, *Sol Phys.*, 267, 153-174.
- Pilipp, W. G., Miggenrieder, H., Montgomery, M.D., Mühlhäuser, K.H., Rosenbauer, H. and Schwenn, R., 1987, Characteristics of electron velocity distribution functions in the solar wind derived from the Helios Plasma Experiment, *J. Geophys. Res.*, 92, 1075.
- Prasad, S. K., Raes, J. O., Van Doorselaere, T., Magyar, N. and Jess, D. B., 2018, The Polytopic Index of Solar Coronal Plasma in Sunspot Fan Loops and Its Temperature Dependence, *Astrophys. J.*, 868, 149.
- Rao, N. N., Shukla, P. K. and Yu, M. Y., 1990, dust-acoustic waves in dusty plasmas, *Planetary and Space Science*, 38, 543-546.
- Saberian, E., Esfandyari-Kalejahi, A., Afsari-Ghazi, M. and Rastakar-Ebrahimzadeh, A., 2013, Propagation of ion-acoustic solitons in an electron beam-superthermal plasma system with finite ion-

- temperature: Linear and fully nonlinear investigation, *Phys. Plasmas*, 20, 032307.
- Saberian, E., Esfandyari-Kalejahi, A. and Afsari-Ghazi, M., 2017, Nonlinear Dust-Acoustic Structures in Space Plasmas with Superthermal Electrons, Positrons and Ions, *Plasma Phys. Rep.*, 43, 83-93.
- Saberian, E., 2019a, The Generalized Ion-sound Speed in Space and Astrophysical Plasmas, *Astrophys. J.*, 887, 121.
- Saberian, E., 2019b, Ion-acoustic Solitons in Solar Winds Plasma Out of Thermal Equilibrium, *J. Earth and Space Phys.*, 45, 235-246.
- Saini, N. S., Kourakis, I. and Hellberg, M. A., 2009, Arbitrary amplitude ion-acoustic solitary excitations in the presence of excess superthermal electrons, *Phys. Plasmas*, 16, 062903.
- Sauer, K., Dubinin, E., Baumgärte, K. and Tarasov, V., 1998, Low-frequency electromagnetic waves and instabilities within the Martian bi-ion plasma, *Earth Planets and Space*, 50, 269.
- Shah, A. and Saeed, R., 2011, Nonlinear Korteweg–de Vries–Burger equation for ion-acoustic shock waves in the presence of kappa distributed electrons and positrons, *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 53, 095006.
- Shukla, P. K. and Marklund, M., 2004, Dust acoustic wave in a strongly magnetized pair-dust plasma, *Physica Scripta*, 36, T113.
- Sultana, S., Kourakis, I., Saini, N. S. and Hellberg, M. A., 2010, Oblique electrostatic excitations in a magnetized plasma in the presence of excess superthermal electrons, *Phys. Plasmas*, 17, 032310.
- Tajima, T. and Shibata, K., 1997, *Plasma Astrophysics*, Addison-Wesley.
- Tandberg-Hansen, E. and Emslie, A. G., 1988, *The physics of solar flares*, Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- Vasyliunas, V. M., 1968, A survey of low-energy electrons in the evening sector of the magnetosphere with OGO 1 and OGO 3, *J. Geophys. Res.*, 73, 2839-2884.
- Verheest, F., Hellberg, M. A. and Lakhina, G. S., 2007, Necessary conditions for the generation of acoustic solitons in magnetospheric and space plasmas with hot ions, *Astrophys. Space Sci. Transactions*, 3, 15-20.
- Wang, T., Ofman, L., Sun, X., Provornikova, E. and Davila, J. M., 2015, Evidence of thermal conduction suppression in a solar flaring loop by coronal seismology of slow-mode waves, *Astrophys. J. Lett.*, 811, L13.
- Wardle, J. F. C., Homan, D. C., Ojha, R. and Roberts, D. H., 1998, Electron–positron jets associated with the quasar 3C279, *Nature* 395, 457.
- Whipple, E. C., 1981, Potentials of surfaces in space, *Rep. Progr. Physics*, 44, 1197.
- Winterhalter, D., Kivelson, M. G., Walker, R. J. and Russell, C. T., 1984, The MHD Rankine-Hugoniot jump conditions and the terrestrial bow shock: A statistical comparison, *Advances in Space Res.*, 4, 287.
- Zouganelis, I., 2008, Measuring suprathermal electron parameters in space plasmas: Implementation of the quasi-thermal noise spectroscopy with kappa distributions using in situ Ulysses/URAP radio measurements in the solar wind, *J. Geophys. Res.*, 113, A08111.

Dust-acoustic Solitary Waves in Space Dusty Plasmas with Nonequilibrium Distribution

Saberian, E.^{1*} and Khoosheh Shahi, R.²

1. Assistant Professor, Department of Physics, Faculty of Basic Sciences, University of Neyshabur, Neyshabur, Iran

2. M.Sc. Graduated, Department of Physics, Faculty of Basic Sciences, University of Neyshabur, Neyshabur, Iran

(Received: 1 Jan 2020, Accepted: 9 June 2020)

Summary

In this paper by using the most recent findings in the field of the Kappa distribution statistics for the non-equilibrium space plasmas, dust-acoustic waves have been studied in a dusty plasma comprising of the inertial dust particles with negative charges and suprathermal distributions of electrons and positrons. The velocity distribution function for stationary state of the plasma in this model is labeled by an invariant Kappa index (κ_0) which is independent of the numbers of degrees of freedom, and the parameter d which represents the the numbers of degrees of freedom. In linear analysis, the dispersion relation of dust-acoustic waves is studied, where the true sound speed of the problem is derived. The derived dust-sound speed is a generalized one which depends on the polytropic index of Kappa distributed particles (γ), which itself depends on the spectral index κ_0 and the potential degrees of freedom (d_ϕ). Generally, the dust-sound speed has its maximum in an equilibrium plasma with Maxwellian distribution or isothermal electrons ($\gamma=1$), and it reduces by approaching to the anti-equilibrium regions with sub-isothermal electrons ($\gamma<1$).

On the other hand, in the non-linear analysis, the dust-acoustic solitary waves have been studied by deriving an energy-integral equation, where we have used the true dust-sound speed for defining the true Mach number (the fractional wave speed to the sound speed). The formation conditions of the potential well, the true Mach number domains, and the effects of the parameters of soliton speed, the spectral index κ_0 and the potential degrees of freedom via the perturbation (d_ϕ) in the propagation of dust-acoustic solitary waves have been studied analytically and numerically.

In such a plasma, only the negative polarity solitons are possible. The reason is the negative charge of dust particles via the attracted electrons, which causes the formation of negative potential solitons.

The structure of dust-acoustic solitons are examined in the near-equilibrium states, where the spectral indices are distributed with the values of $\kappa_0 > 1$, and also in the far-from-thermal equilibrium states which are labeled by the spectral indices with the values of $0 < \kappa_0 < 1$.

It is found that the threshold Mach number is proportional to the square root of the polytropic index of Kappa distributed particles which varies in the range $0 < \gamma < 1$. So, the threshold Mach number increases by approaching to the equilibrium state and it reduces in far-from-thermal equilibrium states.

It is shown that the subsonic solitons are possible in the far-from-thermal equilibrium plasmas. On the other hand, in an equilibrium plasma, corresponding to the asymptotic limit of $\kappa_0 \rightarrow \infty$, only the ultrasonic solitons are possible which confirms the classical theory of solitons in equilibrium statistical mechanics.

It is found that the amplitude and steepening of the dust-acoustic solitons grows in far-from-thermal equilibrium states, which corresponds to the lower values of the spectral index κ_0 . It is because of the impact the suprathermal particles on dust-acoustic solitons in that regions. Furthermore, an increase in Mach number results in the propagation of dust-acoustic solitons with more amplitude and steepening, in agreement with the standard theory of solitary waves. Moreover, decreasing the potential degrees of freedom causes an increase in the maximum amplitude and pulse steepening of dust-acoustic solitons.

Keywords: Dust-acoustic wave, Space plasma, Invariant kappa index, Potential degrees of freedom, Soliton.

* Corresponding author:

e.saberian@neyshabur.ac.ir