

روشی برای محاسبه شتاب گرانشی میانگین در داخل زمین به منظور افزایش دقت محاسبه ارتفاع اورتومتریک

علیرضا آزموده اردلان* و سیدشهرام جزائری جونقانی*

*قطب مهندسی نقشه برداری و مقابله با سوانح طبیعی، گروه مهندسی نقشه برداری، دانشکده فنی دانشگاه تهران صندوق پستی ۴۵۶۳-۱۱۳۶۵

(دریافت مقاله: ۸۳/۸/۱۲، پذیرش مقاله: ۸۴/۸/۲۴)

چکیده

در این مقاله روشی برای محاسبه شتاب گرانشی میانگین در داخل زمین از نقطه مشاهده تا ژئوئید که مورد نیاز تعیین ارتفاع اورتومتریک است ارائه شده است. روش ارائه شده شامل مراحل زیر است:

۱. محاسبه اثرات جهانی - منطقه‌ای شتاب گرانشی از راه بسط شتاب جاذبه به هارمونیک‌های بیضوی تا درجه و مرتبه ۳۶۰ به اضافه شتاب گرینز از مرکز.
۲. تعیین شتاب جاذبه حاصل از جرم‌های نزدیک با استفاده از حل انتگرال نیوتن در سامانه تصویر هم‌مساحت استوانه‌ای تا شعاع ۵۵ کیلومتر.
۳. محاسبه شتاب گرانشی در امتداد خط شاغولی براساس نتایج مراحل (۱) و (۲) در دو نقطه واقع بر سطح زمین و سطح ژئوئید و محاسبه میانگین آنها و افزایش تعداد نقاط به کار برده شده در محاسبه میانگین تا جایی که تفاوت شتاب گرانشی میانگین از مقدار از پیش تعیین شده برای دقت شتاب گرانشی میانگین تجاوز نکند.
۴. تعیین میانگین شتاب گرانشی محاسبه شده در طی مراحل (۱) تا (۳). روش ارائه شده با مشاهدات شتاب گرانشی در داخل زمین در چاه اکتشافی به دو روش زیر مقایسه شده است: (الف) مقایسه شتاب گرانشی مشاهده شده در داخل زمین در امتداد چاه اکتشافی با شتاب گرانشی محاسبه شده در همان نقاط. (ب) مقایسه شتاب گرانشی میانگین حاصل از مشاهدات شتاب گرانشی در داخل چاه اکتشافی با شتاب گرانشی میانگین حاصل از محاسبات طی مراحل (۱) تا (۴). نتایج حاصل از دو مقایسه (الف) و (ب) حاکی از حصول دقت $10/768$ میلی‌گال در محاسبه شتاب گرانشی نقطه‌ای در عمق $474/7$ متر و دقت $5/56$ میلی‌گال در شتاب گرانشی میانگین داخل زمین تا عمق یاد شده است.

واژه‌های کلیدی: ارتفاع، ارتفاع اورتومتریک، شتاب گرانشی، مدل‌سازی میدان گرانشی، میدان گرانشی درونی زمین

۱ مقدمه

سهولت در اختیار عموم گرفته است، تاکنون امکان ساخت سامانه‌ای برای تعیین ارتفاعات به مفهوم فیزیکی آن وجود نداشته است. ارتفاع جزو محدود کمیت‌های فیزیکی است که هنوز مبدأ و دیتوم (datum) جهانی برای آن تعریف نشده است. از سال‌ها قبل دیتوم مسطحاتی از راه International Terrestrial Reference (-) ITRF (Frame) و دیتوم مسطحاتی و مقیاس از راه ITRS (International Terrestrial Reference System) (سایت <http://lareg.ensg.ign.fr/ITRF/ITRF2000/>) را ببینید) برای کل جهان ارائه شده، اما هنوز یکسان‌سازی دیتوم ارتفاعی از موضوعات کاری IAG (-) International-

ارتفاع به‌مثابه کمیت در ارتباط با شیب و جهت جریان آب از اطلاعات ضروری در اجرای کلیه طرح‌های عمرانی است. شیب در مفهوم فیزیکی چیزی جز اختلاف پتانسیل نیست و بنابراین تعیین آن بدون اندازه‌گیری شتاب گرانشی و آگاهی از نظریه پتانسیل امکان‌پذیر نیست. بدین خاطر مبحث ارتفاعات بر خلاف آنچه که در ظاهر به نظر می‌رسد از پیچیده‌ترین مباحث ژئودزی به‌شمار می‌رود. بر این اساس تعیین ارتفاع دقیق و مبنای ارتفاعی از موضوعات داغ تحقیقاتی ژئودزی (زمین‌سنجی) است و برخلاف موقعیت مسطحاتی که از سال‌ها قبل با روش‌های ماهواره‌ای همچون GPS به‌صورت کاملاً خودکار به

این دو نقطه ΔW_{pp_0} نیست که به صورت زیر قابل تعریف است.

$$\Delta W_{pp_0} = W_p - W_{p_0} = \int_{H_{p_0}=0}^{H_p} \langle g | dH \rangle \quad (1)$$

در رابطه (۱) dH ، بردار تغییر مکان جزئی در امتداد خط شاغولی است. چون g همواره در هر نقطه مماس بر امتداد خط شاغولی است هم امتداد و در دو جهت عکس هستند، بنابر این رابطه (۱) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\Delta W_{pp_0} = \int_{H_{p_0}=0}^{H_p} \|g\| \|dH\| \cos(\|g\|, \|dH\|) = - \int_{H_{p_0}=0}^{H_p} g dH \quad (2)$$

از طرف دیگر بر پایه تعریف، شتاب گرانشی میانگین در امتداد خط شاغولی عبارت است از:

$$\bar{g} = \frac{1}{H_p} \int_{H_{p_0}=0}^{H_p} g dH \quad (3)$$

از مقایسه (۲) و (۳) می توان به نتیجه زیر رسید:

$$H_p = \frac{-\Delta W_{pp_0}}{\bar{g}} = \frac{\int_{H_{p_0}=0}^{H_p} g dH}{\frac{1}{H_p} \int_{H_{p_0}=0}^{H_p} g dH} \quad (4)$$

در ژنودزی کمیت اختلاف پتانسیل از ژنوئید تا نقطه ای مانند P را عدد ژنوپتانسیل می نامند و به C نمایش می دهند. بنابراین، رابطه (۴) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$H_p = \frac{C_p}{\bar{g}} = \frac{W_{p_0} - W_p}{\bar{g}} \quad (5)$$

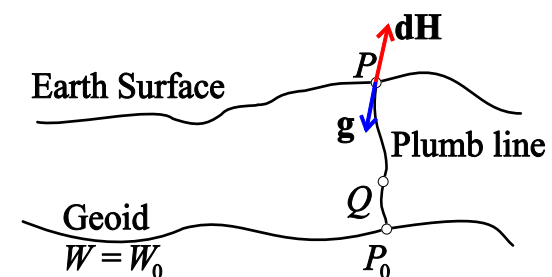
از آنجایی که به خاطر محدودیت اندازه گیری در عمل ناگزیر از منفصل کردن (discretization) فضاهای پیوسته هستیم، رابطه (۴) را می توان به صورت تقریبی زیر بر حسب Σ به جای \int نوشت:

(Association of Geodesy) است (برای جزئیات رجوع شود به

<http://iag.dgfi.badw.de/index.php?id=60&type=3>. محاسبه شتاب گرانشی در داخل زمین نیازمند مدل سازی شتاب گرانشی است. در این مقاله روشی برای برآورد شتاب گرانشی بر پایه (۱) استفاده از بسط هارمونیک های بیضوی میدان جاذبه زمین تا درجه و مرتبه ۳۶۰ و (۲) محاسبه اثر جرم های واقع در فاصله نزدیک به کمک انتگرال نیوتن در سامانه تصویر استوانه ای هم مساحت ارائه شده است. در بخش بعدی ارتفاع ارتومتریک تعریف می شود و در ادامه روش پیشنهادی با جزئیات کامل به همراه کنترل های عددی ارائه خواهد شد.

۲ ارتفاع اورتومتریک و نحوه محاسبه آن

طبق تعریف ارتفاع اورتومتریک عبارت است از طول خط شاغولی از نقطه P_0 واقع بر سطح ژنوئید تا نقطه P واقع بر سطح زمین (شکل ۱). خط شاغولی خطی است که در هر نقطه مماس بر بردار شتاب گرانشی g است.



شکل ۱. ارتفاع اورتومتریک به مثابه طول خط شاغولی از ژنوئید تا نقطه مورد نظر بر روی سطح زمین.

برای به دست آوردن رابطه ای ریاضی برای تعیین ارتفاع اورتومتریک از تعریف کار شتاب گرانشی W از نقطه P_0 روی ژنوئید تا نقطه P روی زمین در امتداد خط شاغولی آغاز می کنیم. این چیزی جز اختلاف پتانسیل بین

بنابراین کار نیروی گرانشی به مسیر بستگی ندارد و اختلاف پتانسیل از نقطه P_0 تا P را به جای امتداد شاغولی می‌توان از هر امتداد و مسیر دیگری نیز به دست آورد. بدین خاطر در عملیات ژئودزی برای به دست آوردن عدد ژئوپتانسیل از ترازایی همراه با گرانشی سنجی از سطح ژئوئید (حاصل از مشاهدات کشندنا) تا نقاط واقع بر سطح زمین استفاده می‌شود. بنابراین رابطه (۶) را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم و شتاب گرانشی موجود در صورت کسر را که در سطح زمین اندازه‌گیری می‌شود به g' نمایش می‌دهیم تا با شتاب گرانشی موجود در صورت و مخرج کسر g متمایز شود.

$$H_p \doteq \frac{-\sum_{i=1}^n g'_i \Delta H_i}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g_i} \quad (۸)$$

شکل ۲ بر اساس رابطه (۸) نشان دهنده نحوه عملی تعیین ارتفاع اورتومتریک با اندازه‌گیری اختلاف پتانسیل ژئوئید با پتانسیل در نقطه مورد نظر و تعیین میانگین شتاب گرانشی در درون زمین در امتداد خط شاغولی است.

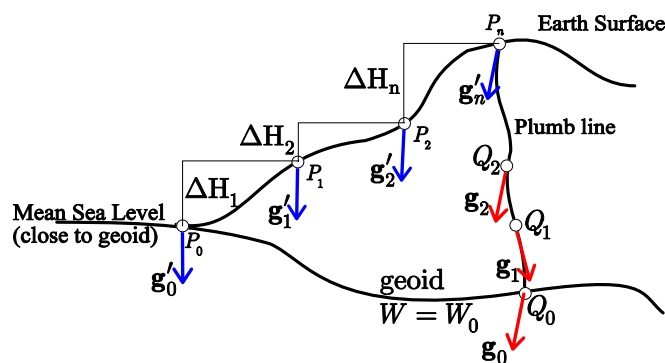
$$H_p \doteq \frac{-\sum_{i=1}^n g_i \Delta H_i}{\frac{1}{\sum_{i=1}^n \Delta H_i} \sum_{i=1}^n g_i \Delta H_i} \quad (۶)$$

رابطه (۶) را می‌توان صورت مفصل رابطه (۵) نامید. اگر ΔH_i های موجود در مخرج کسر (۶) را با هم برابر و مساوی ΔH در نظر بگیریم، مخرج کسر (۶) را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^n \Delta H_i} \sum_{i=1}^n g_i \Delta H_i = \frac{1}{n \Delta H} \Delta H \sum_{i=1}^n g_i$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g_i = \bar{g} \quad (۷)$$

بر اساس رابطه (۸) اگر g_i را در n نقطه در فواصل مساوی در امتداد خط شاغولی اندازه‌گیری کنیم، میانگین شتاب گرانشی در امتداد شاغولی برابر میانگین شتاب‌های گرانشی اندازه‌گیری شده خواهد بود. می‌دانیم که میدان شتاب گرانشی، غیر دورانی است،



شکل ۲. نحوه عملی تعیین ارتفاع اورتومتریک، با اندازه‌گیری اختلاف پتانسیل ژئوئید با پتانسیل در نقطه مورد نظر و تعیین میانگین شتاب گرانشی در درون زمین در امتداد خط شاغولی.

در رابطه (۱۱) γ و J_0 به ترتیب مقدار شتاب گرانشی نرمال و میانگین انحنای سطوح هم پتانسیل میدان رفرانس هستند. با فرض

$$gJ \doteq \gamma J_0 \quad (12)$$

با استفاده از روابط (۱۰)، (۱۱) و (۱۲) داریم:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial h} \doteq \frac{\partial \gamma}{\partial \gamma} + 4\pi Gp \quad (13)$$

به صورت عددی، با صرف نظر کردن از تغییرات $\partial g / \partial h$ نسبت به عرض جغرافیایی، با فرض مقدار ثابت $p = 2.67 \text{ gcm}^{-3}$ برای چگالی و مقدار $G = 667 \times 10^{-9} \text{ c.g.s}$ برای ثابت جهانی جاذبه، داریم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial h} &\doteq -0.3086 + 0.2238 \\ &= -0.0848 (\text{Gal/km}) \end{aligned} \quad (14)$$

بنابراین بر اساس روش پوانکاره- پری مقدار شتاب گرانشی در نقطه دلخواه Q درون زمین به صورت زیر محاسبه می شود.

$$g_Q = g_p + 0.0848(H_p - H_Q) \quad (15)$$

که در رابطه (۱۵) H_p و H_Q به ترتیب ارتفاع های نقاط P و Q نسبت به سطح ژئوئید هستند. رابطه (۱۵) را می توان به صورت دیگری نیز محاسبه کرد که حاصل ترکیب سه تصحیح زیر روی شتاب گرانشی اندازه گیری شده در نقطه P واقع بر سطح زمین است:

$$1. \text{ تصحیح (حذف) اثر پلایت بوگه } -0.1119(H_p - H_Q)$$

از روی شتاب گرانشی اندازه گیری شده در نقطه P واقع بر سطح زمین.

$$2. \text{ انتقال شتاب گرانشی از نقطه } P \text{ به نقطه دلخواه } Q \text{ واقع در درون زمین بر اساس تصحیح هوای آزاد} \\ +0.3086(H_p - H_Q)$$

$$3. \text{ باز گرداندن اثر پلایت بوگه به شتاب گرانشی در نقطه} \\ -0.1119(H_p - H_Q) \quad Q$$

با اعمال سه تصحیح فوق الذکر می توان از شتاب گرانشی

بنابراین تنها مشکلی که در استفاده عملی از رابطه (۸) باقی می ماند، در نحوه به دست آوردن شتاب گرانشی متوسط در امتداد شاغولی است. تنها روش مشاهداتی برای این منظور، حفر چاهی در امتداد خط شاغولی از سطح زمین تا ژئوئید و اندازه گیری شتاب گرانشی در تعدادی نقطه در فواصل مساوی و محاسبه میانگین شتاب های گرانشی اندازه گیری شده است. این روش به خاطر هزینه زیاد حفر چاه و صورت گرفتن مشاهدات گرانی در داخل چاه عملی و اجرایی نیست و بدین خاطر در ژئودزی همواره برای محاسبه شتاب گرانشی میانگین از مدل های شتاب گرانشی استفاده شده است.

۳ ارتفاع اورتومتريک هلمرت

روش هلمرت یکی از معمول ترین روش های محاسبه ارتفاع اورتومتريک در ژئودزی است (هلمرت، ۱۸۹۰). این روش بر مبنای انتقال به سمت پایین (downward continuation) شتاب گرانشی اندازه گیری شده در سطح زمین بر اساس روش پوانکاره-پری (Poincaré-Prey) استوار است. اگر g_p شتاب گرانشی اندازه گیری شده در سطح زمین و g_Q شتاب گرانشی در نقطه Q در درون زمین باشد (شکل ۱)، داریم:

$$g_Q = g_p - \int_Q^P \frac{\partial g}{\partial h} dh \quad (9)$$

برای تغییرات ارتفاعی شتاب گرانشی بر اساس فرمول برونز داریم (هایسکانن و مویتز، ۱۹۶۷):

$$\frac{\partial \gamma}{\partial h} \doteq -2gj + 4\pi Gp - 2w^2 \quad (10)$$

در رابطه (۱۰) z انحنای متوسط سطوح هم پتانسیل، p چگالی، G ثابت جهانی نیوتن و w سرعت دورانی زمین است. از طرف دیگر در مورد گرادیانت هوای آزاد شتاب گرانشی نرمال داریم:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial h} \doteq 2\gamma J_0 - 2w^2 \quad (11)$$

در امتداد خط شاغولی استوار است. این مدل شامل دو بخش (الف) بخش جهانی - منطقه‌ای و (ب) بخش محلی است. بخش جهانی - منطقه‌ای از راه بسط به هارمونیک‌های بیضوی تا درجه و مرتبه ۳۶۰ و بخش محلی از راه به کارگیری انتگرال نیوتن بیضوی در شعاع ۵۵ کیلومتر اطراف نقطه محاسبه تأمین می‌شود. برای معرفی بخش جهانی میدان از رابطه زیر که بیان‌کننده میدان پتانسیل جاذبه و گریز از مرکز است آغاز می‌کنیم.

$$W(\lambda, \phi, \eta) = U(\lambda, \phi, \eta) + V(\lambda, \phi, \eta) \quad (19)$$

پتانسیل جاذبه از حل مسئله مرزی دریکله بیضوی به صورت زیر قابل محاسبه است (دنيس و فیدراستون، ۲۰۰۲).

$$(20)$$

$$U(\lambda, \phi, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n u_{nm} \frac{Q_{n|m}^*(\sinh \eta)}{Q_{n|m}^*(\sinh \eta_0)} e_{nm}(\lambda, \phi)$$

که در آن $e_{nm}(\lambda, \phi)$ توابع هارمونیک بیضوی سطحی، با تعریف زیر است.

$$(21)$$

$$e_{nm}(\lambda, \phi) = P_{n|m}^*(\sin \phi) \begin{cases} \cos m\lambda & \forall m \geq 0 \\ \sin |m|\lambda & \forall m < 0 \end{cases}$$

رابطه (۲۰) برای فضای خارج بیضوی رفرانس $E_{a,b}^2$ به رابطه زیر صادق است.

$$\frac{(x^2 + y^2)}{\varepsilon^2 \cosh^2 \eta_0} + \frac{z^2}{\varepsilon^2 \sinh^2 \eta_0} = 1 \quad (22)$$

در رابطه (۲۰) $Q_{nm}^*(\sinh \eta)$ و $P_{n|m}^*(\sin \phi)$ به ترتیب توابع لژاندر نرمال شده نوع دوم و اول اند.

نمایش پتانسیل خروج از مرکز برحسب مختصات کارتزین $\{x, y, z\}$ و مختصات بیضوی $\{\lambda, \phi, \eta\}$ به صورت زیر است.

$$V(x, y) = \frac{1}{2} w^2 (x^2 + y^2) \quad (23)$$

اندازه‌گیری شده در نقطه P روی زمین به برآوردی از شتاب گرانشی در نقطه دلخواه Q در درون زمین رسید. بر این اساس، رابطه (۱۵) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد.

$$g(z) = g + 0.0848(H - z) \quad (16)$$

که در آن g مقدار شتاب گرانشی اندازه‌گیری شده در نقطه P واقع بر سطح زمین است. با قرار دادن رابطه (۱۶) در رابطه (۳) داریم:

$$\bar{g} = \frac{1}{H} \int_0^H [g + 0.0848(H - z)] dz \quad (17)$$

$$= g + 0.0424H$$

در رابطه (۱۷) g برحسب گال (Gal) و H برحسب کیلومتر است. اگر از رابطه (۱۷) برای محاسبه میانگین شتاب گرانشی در امتداد خط شاغولی استفاده شود با جایگزینی میانگین شتاب گرانشی محاسبه شده در امتداد خط شاغولی در رابطه (۵) به فرمول هلمرت برای محاسبه ارتفاع اورتومتريک خواهیم رسید (هلمرت، ۱۸۹۰).

$$H = \frac{C}{g + 0.0424H} \quad (18)$$

در رابطه (۱۸)، C برحسب g.p.u (geo-potential-) برحسب گال و H برحسب کیلومتر است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، در این تقریب، اثر جرم‌های نزدیک با پلیمت بوگه به ضخامت H تقریب زده شده است.

۴ روش پیشنهادی برای محاسبه ارتفاع اورتومتريک

تاکنون تلاش‌های بسیاری در خصوص محاسبه ارتفاع اورتومتريک صورت گرفته است که برای نمونه می‌توان به موارد زیر اشاره کرد: رپ (۱۹۶۱)، کراکیوسکی (۱۹۶۵)، استرانگ (۱۹۸۲)، سونکل (۱۹۸۶)، آلیستر (۲۰۰۰) و کائو و همکاران (۲۰۰۰).

پیشنهاد ما برای محاسبه ارتفاع اورتومتريک بر مبنای استفاده مدلی دقیق‌تر برای محاسبه شتاب گرانشی میانگین

$$g_{22} = g_{33} = \varepsilon^2 (\cosh^2 \eta \cos^2 \phi) \quad (28)$$

به روش مشابه شتاب میدان گریز از مرکز با استفاده از گرادایانت پتانسیل گریز از مرکز به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$(29)$$

$$\begin{aligned} \text{grad } V(\phi, \eta) &= \text{grad} \left(\frac{1}{2} w^2 \varepsilon^2 \cosh^2 \eta \cos^2 \phi \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial V(\lambda, \phi, \eta)}{\partial \phi} e_\phi + \frac{1}{\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial V(\lambda, \phi, \eta)}{\partial \eta} e_\eta \end{aligned}$$

در نهایت مجموع دو بردار شتاب جاذبه و شتاب گریز از مرکز، بردار شتاب گرانشی $\gamma(\lambda, \phi, \eta)$ را به صورت زیر نتیجه می‌دهد:

$$\gamma(\lambda, \phi, \eta) = \text{grad}(U(\lambda, \phi, \eta) + V(\phi, \eta)) \quad (30)$$

که $\text{grad } U(\lambda, \phi, \eta)$ و $\text{grad } V(\phi, \eta)$ به ترتیب با روابط (۲۶) و (۲۹) محاسبه می‌شوند. حال که، اثر جرم‌های ناحیه‌ای و جهانی زمین را با بسط هارمونیک‌های بیضوی میدان پتانسیل تا درجه و مرتبه ۳۶۰ مدل‌سازی کردیم به دنبال مدل‌سازی اثرات جرم‌های در فاصله نزدیک خواهیم رفت. با بسط هارمونیک‌های بیضوی تا درجه و مرتبه ۳۶۰ اثر جرم‌های جهانی و منطقه‌ای تا طول موج ۵۵ کیلومتر در نظر گرفته می‌شود (اردلان، ۱۹۹۹). اثر جرم‌های باقی‌مانده در فاصله نزدیک، یعنی اثر عارضه‌های کوچک‌تر از ۵۵ کیلومتر، با اعمال انتگرال نیوتن روی جرم‌های توپوگرافی قابل محاسبه‌اند. در منابع ژئودزی چنین اثری به اثرترین (terrain correction) معروف است (اردلان، ۱۹۹۹). ما در اینجا از حل انتگرال نیوتن در سامانه تصویر هم مساحت استوانه‌ای تا شعاع ۵۵ کیلومتر برای محاسبه اثرات جرم‌های واقع در فاصله نزدیک استفاده کردیم. برای توضیح بیشتر و دقیق‌تر در این مورد به استرانگ (۱۹۸۲) مراجعه کنید.

$$V(\phi, \eta) = \frac{1}{2} w^2 \varepsilon^2 \cosh^2 \eta \cos^2 \phi \quad (24)$$

اگر هارمونیک‌های بیضوی میدان پتانسیل جاذبه زمین تا درجه و مرتبه مشخصی بسط داده شود به تقریبی برای نمایش میدان پتانسیل جاذبه خارجی زمین خواهیم رسید که می‌تواند در حکم میدان جاذبه رفرانس یا مدلی از میدان جاذبه در نظر گرفته شود. برای مثال اگر بسط هارمونیک‌های بیضوی میدان پتانسیل جاذبه خارجی زمین تا درجه و مرتبه ۳۶۰ بسط داده شود، خواهیم داشت.

$$U(\lambda, \phi, \eta) = \sum_{n=0}^{360} \sum_{m=-n}^n u_{nm} \frac{Q_{n|m}^*(\sin h \eta)}{Q_{n|m}^*(\sin h \eta_0)} e_{nm}(\lambda, \phi)$$

ضرائب هارمونیک‌های بیضوی u_{nm} که در رابطه (۲۵) آمده است را می‌توان از راه آنالیز هارمونیک‌های بیضوی میدان جاذبه خارجی زمین یا با انتقال ضرائب هارمونیک‌های کروی به ضرائب هارمونیک‌های بیضوی به دست آورد. ما در اینجا از انتقال ضرائب هارمونیک‌های کروی EGM96، به هارمونیک‌های بیضوی، صورت گرفته توسط اردلان (۱۹۹۹) استفاده کردیم (هوانگ و هسیاو، ۲۰۰۳).

گرادایانت رابطه (۲۰) میدان جاذبه برای فضای خارج زمین را نتیجه می‌دهد.

$$\begin{aligned} \text{grad } U(\lambda, \phi, \eta) &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial U(\lambda, \phi, \eta)}{\partial \lambda} e_\lambda \\ &+ \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial U(\lambda, \phi, \eta)}{\partial \phi} e_\phi \\ &+ \frac{1}{\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial U(\lambda, \phi, \eta)}{\partial \eta} e_\eta \end{aligned} \quad (26)$$

ضرائب تنسور متریک رابطه (۲۶) به صورت زیر به دست می‌آید.

$$g_n = \varepsilon^2 \cosh^2 \eta \cos^2 \phi \quad (27)$$

همان گونه که با مقایسه این جدول‌ها دیده می‌شود، حالت اول یعنی مدل‌سازی میدان گرانشی به روش پیشنهادی، دقیق‌ترین نتایج را به دست داده است.

جدول ۱. شتاب گرانشی اندازه‌گیری شده و محاسبه شده و اختلاف این دو مقدار با استفاده از الگوریتم ارائه شده.

مقدار عمق (m)	شتاب گرانشی اندازه‌گیری شده (ms^{-2})	شتاب گرانشی محاسبه شده (ms^{-2})	اختلاف شتاب گرانشی اندازه‌گیری شده و محاسبه شده (mGal)
۰/۲	۹/۸۰۹۴۲۱۸۸	۹/۸۰۹۴۲۴۶۷	-۰/۲۷۹
۲۴/۴	۹/۸۰۹۴۴۸۷۵	۹/۸۰۹۴۵۶۲۷	-۰/۷۵۲
۷۴/۴	۹/۸۰۹۴۹۴۳۸	۹/۸۰۹۵۱۲۶۵	-۱/۸۲۷
۱۲۴/۴	۹/۸۰۹۵۳۸۷۵	۹/۸۰۹۵۶۷۸۹	-۲/۹۱۴
۱۷۴/۵	۹/۸۰۹۵۸۱۲۵	۹/۸۰۹۶۲۱۴۷	-۴/۰۲۲
۲۲۴/۵	۹/۸۰۹۶۲۲۵۰	۹/۸۰۹۶۷۳۸۹	-۵/۱۳۹
۲۷۴/۶	۹/۸۰۹۶۶۲۵۰	۹/۸۰۹۷۲۵۱۹	-۶/۲۶۹
۲۹۹/۶	۹/۸۰۹۶۸۲۵۰	۹/۸۰۹۷۵۰۸۲	-۶/۸۳۲
۳۲۴/۷	۹/۸۰۹۷۰۱۸۸	۹/۸۰۹۷۷۵۹۲	-۷/۴۰۴
۳۴۹/۷	۹/۸۰۹۷۲۱۸۸	۹/۸۰۹۸۰۱۵۵	-۷/۹۶۷
۳۷۴/۷	۹/۸۰۹۷۴۲۵۰	۹/۸۰۹۸۲۷۷۲	-۸/۵۲۲
۴۲۴/۷	۹/۸۰۹۷۸۱۸۸	۹/۸۰۹۸۷۸۳۸	-۹/۶۵۰
۴۷۴/۷	۹/۸۰۹۸۲۱۸۸	۹/۸۰۹۹۲۹۵۶	-۱۰/۷۶۸

جدول ۲. شتاب گرانشی اندازه‌گیری شده و محاسبه شده و اختلاف این دو مقدار با استفاده از هارمونیک‌های بیضوی تا درجه و مرتبه ۳۶۰.

مقدار عمق (m)	شتاب گرانشی اندازه‌گیری شده (ms^{-2})	شتاب گرانشی محاسبه شده (ms^{-2})	اختلاف شتاب گرانشی اندازه‌گیری شده و محاسبه شده (mGal)
۰/۲	۹/۸۰۹۴۲۱۸۸	۹/۸۰۹۴۳۲۵۸	-۲/۰۷
۲۴/۴	۹/۸۰۹۴۴۸۷۵	۹/۸۰۹۴۶۲۳۹	-۲/۵۴
۷۴/۴	۹/۸۰۹۴۹۴۳۸	۹/۸۰۹۵۲۰۷۳۶	-۳/۶۳
۱۲۴/۴	۹/۸۰۹۵۳۸۷۵	۹/۸۰۹۵۷۶۰۹۹	-۴/۷۳
۱۷۴/۵	۹/۸۰۹۵۸۱۲۵	۹/۸۰۹۶۲۹۸۱۱	-۵/۸۵
۲۲۴/۵	۹/۸۰۹۶۲۲۵۰	۹/۸۰۹۶۸۲۳۶۷	-۶/۹۸
۲۷۴/۶	۹/۸۰۹۶۶۲۵۰	۹/۸۰۹۷۳۳۸۳۰	-۸/۱۳
۲۹۹/۶	۹/۸۰۹۶۸۲۵۰	۹/۸۰۹۷۵۰۹۵۶	-۸/۷۰
۳۲۴/۷	۹/۸۰۹۷۰۱۸۸	۹/۸۰۹۷۸۴۷۳۵	-۹/۲۸
۳۴۹/۷	۹/۸۰۹۷۲۱۸۸	۹/۸۰۹۸۱۰۴۵۱	-۹/۸۵
۳۷۴/۷	۹/۸۰۹۷۴۲۵۰	۹/۸۰۹۸۳۶۷۳۵	-۱۰/۴۲
۴۲۴/۷	۹/۸۰۹۷۸۱۸۸	۹/۸۰۹۸۷۵۹۹	-۱۱/۵۷
۴۷۴/۷	۹/۸۰۹۸۲۱۸۸	۹/۸۰۹۹۳۹۰۳۲	-۱۲/۷۱

در نهایت با استفاده از الگوریتم توضیح داده شده بردار شتاب گرانشی حاوی اثر جرم‌های جهانی و منطقه‌ای و جرم‌های در فاصله نزدیک به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$g_i(\lambda_i, \phi_i, \eta_i) = \|\gamma_i + \Gamma_i\| \quad (31)$$

$$= \sqrt{(\gamma_x + \Gamma_x)^2 + (\gamma_y + \Gamma_y)^2 + (\gamma_z + \Gamma_z)^2}$$

γ_i بردار شتاب گرانشی حاوی اثر جرم‌های جهانی- منطقه‌ای محاسبه شده با استفاده از بسط هارمونیک‌های بیضوی تا درجه و مرتبه ۳۶۰ به اضافه شتاب گریز از مرکز و Γ_i شتاب جاذبه جرم‌های نزدیک محاسبه شده با استفاده از انتگرال نیوتن است.

۵ بررسی عددی روش ارائه شده

برای آزمودن روش ارائه شده محاسبه ارتفاع اورتومتریکی، از اطلاعات گرانی‌سنجی در چاه اکتشافی در موقعیت $\lambda = 12.1194^\circ$ $\phi = 49.8164^\circ$ استفاده شد، و با استفاده از الگوریتم ارائه شده برای محاسبه شتاب گرانشی، در عمق‌های متفاوت حفره مذکور، شتاب گرانشی به دست آمد و کنترل‌های عددی زیر صورت گرفت:

- دو بخش جهانی- منطقه‌ای و محلی برای مدل‌سازی میدان گرانشی به کار برده شده و مقادیر حاصل با مشاهدات شتاب گرانشی مقایسه شدند. نتیجه این مقایسه در جدول ۱ آورده شده است.
- تنها بخش جهانی- منطقه‌ای برای مدل‌سازی میدان گرانشی به کار برده شده و مقادیر حاصل با مشاهدات شتاب گرانشی مقایسه شدند. نتایج این مقایسه در جدول ۲ مشهود است.
- از مدل پوآنکاره- پری برای مدل‌سازی میدان گرانشی استفاده و مقادیر حاصل با مشاهدات مقایسه شدند. نتایج این مقایسه در جدول ۳ ثبت شده است.

$$\sigma_H = 490 \left(\frac{5.565(\text{mGal})}{980000(\text{mGal})} \right) = 2.78(\text{mm}) \quad (33)$$

بنابراین مقدار خطا در تخمین ارتفاع اورتومتریك در این مثال ۲/۷۸ میلی‌متر خواهد بود.

برای تعدادی نقطه از شبکه ترازبایی ایران با استفاده از الگوریتم ارائه شده ارتفاع اورتومتریك محاسبه شد که نتایج آن در جدول ۴ مشاهده می‌شود. همچنین در این نقاط به روش هلمرت نیز ارتفاع اورتومتریك محاسبه شد که در جدول ۵ آورده شده است. اختلاف این دو ارتفاع اورتومتریك در جدول ۶ مندرج است. همان‌گونه که جدول ۶ نشان می‌دهد اختلاف دو روش در ارتفاع حدود ۲۰۰۰ متر می‌تواند به بیش از ۶ متر برسد. این نکته بیانگر اهمیت استفاده از روش دقیق در محاسبه ارتفاع اورتومتریك در کاربردهای مدرن، خصوصاً تعیین ژئوئید از راه تلفیق ارتفاع اورتومتریك با ارتفاع GPS (اصطلاحاً GPS/Leveling) است، نکته‌ای که عموماً در نزد زمین‌سنج (ژئودزین)‌های معاصر فراموش شده است!

جدول ۴. محاسبه ارتفاع اورتومتریك با استفاده از الگوریتم ارائه شده.

ارتفاع اورتومتریك (m)	C (m ² /s ²)	شتاب گرانشی مشاهده شده در سطح زمین (mGal)	φ°	λ°
۸۶/۶۷۰	۸۴۹/۶۰۶	۹۸۰۱۲۵/۳۷۷	۳۹/۵۵۳۳	۴۷/۶۵۰
۴۳۲/۴۶۱	۴۲۴۰/۹۵۵	۹۷۹۹۶۳/۳۲۶	۳۹/۱۵۶۶	۴۷/۶۳۶۶
۸۱۳/۵۴۱	۷۹۸۲/۰۳۴	۹۷۹۸۷۰/۴۳۹	۳۹/۰۲۰۰	۴۷/۶۷۰۰
۱۱۹۷/۷۲۸	۱۱۷۵۷/۷۲۴	۹۷۹۷۸۹/۰۷۰	۳۸/۷۱۳۳	۴۷/۷۷۸۳
۱۲۹۷/۸۷۰	۱۲۷۴۱/۹۲۸	۹۷۹۷۳۵/۹۳۷	۳۸/۳۸۶۶	۴۸/۲۴۸۳
۱۹۰۹/۲۵۹	۱۸۷۵۷/۳۵۴	۹۷۹۴۶۶/۷۰۳	۳۷/۹۷۰۰	۴۷/۷۸۳۳
۲۰۷۸/۷۹۰	۲۰۴۲۷/۷۰۹	۹۷۹۴۴۱/۶۳۶	۳۸/۰۰۳۳	۴۷/۸۸۱۶
۸۰۲/۱۳۹	۷۸۶۵/۴۲۶	۹۷۹۳۱۳/۲۴۵	۳۳/۰۷۳۳	۵۵/۸۶۳۳
۱۳۱۸/۵۱۸	۱۲۹۳۹/۱۱۱	۹۷۹۲۶۷/۴۶۸	۳۴/۰۲۰۰	۴۶/۶۴۰۰
۱۵۹۱/۱۹۳	۱۵۶۲۱/۳۴۹	۹۷۹۲۴۹/۷۴۰	۳۴/۱۸۶۹	۵۸/۵۵۱۳
۱۳۱۲/۷۵۱	۱۲۸۸۰/۹۸۶	۹۷۹۱۹۲/۹۲۱	۳۲/۷۸۵۸	۵۸/۸۹۳۳
۱۴۲۴/۴۹۷	۱۳۹۷۹/۷۸۱	۹۷۹۱۹۶/۴۷۰	۳۳/۰۱۰۰	۶۰/۲۱۵۰

جدول ۳. شتاب گرانشی اندازه‌گیری شده و محاسبه شده و اختلاف این دو مقدار با استفاده از فرمول پوانکاره-پری.

اختلاف شتاب گرانشی اندازه‌گیری شده و محاسبه شده (mGal)	شتاب گرانشی محاسبه شده (ms ⁻²)	شتاب گرانشی اندازه‌گیری شده (ms ⁻²)	مقدار عمق (m)
۶/۹۹	۹/۸۰۹۳۵۱۹۰	۹/۸۰۹۴۲۱۸۸	۰/۲
۹/۶۸	۹/۸۰۹۳۵۱۹۲	۹/۸۰۹۴۴۸۷۵	۲۴/۴
۱۴/۲۴	۹/۸۰۹۳۵۱۹۶	۹/۸۰۹۴۹۴۳۸	۷۴/۴
۱۸/۶۷	۹/۸۰۹۳۵۲۰۰	۹/۸۰۹۵۳۸۷۵	۱۲۴/۴
۲۲/۹۲	۹/۸۰۹۳۵۲۰۴	۹/۸۰۹۵۸۱۲۵	۱۷۴/۵
۲۷/۰۴	۹/۸۰۹۳۵۲۰۹	۹/۸۰۹۶۲۲۵۰	۲۲۴/۵
۳۱/۰۳	۹/۸۰۹۳۵۲۱۳	۹/۸۰۹۶۶۶۲۵۰	۲۷۴/۶
۳۳/۰۳	۹/۸۰۹۳۵۲۱۵	۹/۸۰۹۶۸۱۲۵۰	۲۹۹/۶
۳۴/۹۷	۹/۸۰۹۳۵۲۱۷	۹/۸۰۹۷۰۱۸۸	۳۲۴/۷
۳۶/۹۶	۹/۸۰۹۳۵۲۱۹	۹/۸۰۹۷۲۱۸۸	۳۴۹/۷
۳۹/۰۲	۹/۸۰۹۳۵۲۲۱	۹/۸۰۹۷۴۲۵۰	۳۷۴/۷
۴۲/۹۶	۹/۸۰۹۳۵۲۲۶	۹/۸۰۹۷۸۱۸۸	۴۲۴/۷
۴۶/۹۵	۹/۸۰۹۳۵۲۳۰	۹/۸۰۹۸۲۱۸۸	۴۷۴/۷

حال می‌خواهیم ببینیم مقدار متوسط خطای مدل پیشنهادی برای محاسبه شتاب گرانشی متوسط در داخل زمین چه تأثیری بر دقت ارتفاع اورتومتریك حاصل دارد. برای این منظور از قانون انتشار خطاها و رابطه (۵) استفاده خواهیم کرد. از آنجایی که در اینجا هدف ما تنها بررسی نحوه انتشار خطای شتاب گرانشی متوسط روی ارتفاع اورتومتریك محاسبه شده است، تنها خطای این کمیت را در اعمال قانون انتشار خطاها به رابطه (۵) در نظر می‌گیریم.

$$\sigma_H = \frac{C \sigma_{\bar{g}}}{(\bar{g})^2} = \frac{\left(\frac{C}{\bar{g}}\right) \sigma_{\bar{g}}}{\bar{g}} = \frac{H \sigma_{\bar{g}}}{\bar{g}} \quad (32)$$

با توجه به نتایج جدول ۱ میانگین قدرمطلق خطای محاسبه شتاب گرانشی میانگین با استفاده از الگوریتم ارائه شده $\sigma_{\bar{g}} = 5.56549(\text{mGal})$ است. لذا با فرض مقدار $H = h = 400(\text{m})$ و $\bar{g} = 980000(\text{mGal})$ داریم:

جدول ۵. محاسبه ارتفاع اورتومتریک با استفاده از روش هلمرت.

ارتفاع اورتومتریک (m)	C (m ² /s ²)	شتاب گرانشی مشاهده شده روی سطح زمین (mGal)	φ°	λ°
۸۶/۶۸۳	۸۴۹/۶۰۶	۹۸۰۱۲۵/۳۷۷	۳۹/۵۵۳۳	۴۷/۶۵۵۰
۴۳۲/۷۵۸	۴۲۴۰/۹۵۵	۹۷۹۹۶۳/۳۲۶	۳۹/۱۵۶۶	۴۷/۶۳۶۶
۸۱۴/۵۷۲	۷۹۸۲/۰۳۴	۹۷۹۸۷۰/۴۳۹	۳۹/۰۲۰۰	۴۷/۶۷۰۰
۱۱۹۹/۹۶۳	۱۱۷۵۷/۷۲۴	۹۷۹۷۸۹/۰۷۰	۳۸/۷۱۳۳	۴۷/۷۷۸۳
۱۳۰۰/۴۸۷	۱۲۷۴۱/۹۲۸	۹۷۹۷۲۵/۹۳۷	۳۸/۲۸۶۶	۴۸/۲۴۸۳
۱۹۱۴/۸۹۹	۱۸۷۵۷/۳۵۴	۹۷۹۴۶۶/۷۰۳	۳۷/۹۷۰۰	۴۷/۷۸۳۳
۲۰۸۵/۴۶۰	۲۰۴۲۷/۷۰۹	۹۷۹۴۴۱/۶۳۶	۳۸/۰۰۳۳	۴۷/۸۱۱۶
۸۰۳/۱۲۹	۷۸۶۵/۴۲۶	۹۷۹۳۱۳/۲۴۵	۳۳/۰۷۳۳	۵۵/۸۶۳۳
۱۳۲۱/۳۲۹	۱۲۹۳۹/۱۱۱	۹۷۹۳۶۷/۴۶۸	۳۴/۰۲۰۰	۴۶/۶۴۰۰
۱۵۹۵/۱۳۶	۱۵۶۲۱/۳۴۹	۹۷۹۲۴۹/۷۴۰	۳۴/۱۸۶۹	۵۸/۵۵۱۳
۱۳۱۵/۳۹۴	۱۲۸۸۰/۹۸۶	۹۷۹۱۹۲/۹۲۱	۳۲/۷۸۵۸	۵۸/۸۹۶۳
۱۴۲۷/۵۹۰	۱۳۹۷۹/۷۸۱	۹۷۹۱۹۶/۴۷۰	۳۳/۰۱۰۰	۶۰/۲۱۵۰

جدول ۶. اختلاف ارتفاع اورتومتریک محاسبه شده به روش ارائه شده در این مقاله و روش هلمرت.

ارتفاع اورتومتریک (m)	C (m ² /s ²)	شتاب گرانشی مشاهده شده روی سطح زمین (mGal)	φ°	λ°
-۰/۱۳	۸۴۹/۶۰۶	۹۸۰۱۲۵/۳۷۷	۳۹/۵۵۳۳	۴۷/۶۵۵۰
-۰/۲۹۷	۴۲۴۰/۹۵۵	۹۷۹۹۶۳/۳۲۶	۳۹/۱۵۶۶	۴۷/۶۳۶۶
-۱/۰۳۱	۷۹۸۲/۰۳۴	۹۷۹۸۷۰/۴۳۹	۳۹/۰۲۰۰	۴۷/۶۷۰۰
-۲/۲۳۵	۱۱۷۵۷/۷۲۴	۹۷۹۷۸۹/۰۷۰	۳۸/۷۱۳۳	۴۷/۷۷۸۳
-۲/۶۱۷	۱۲۷۴۱/۹۲۸	۹۷۹۷۲۵/۹۳۷	۳۸/۲۸۶۶	۴۸/۲۴۸۳
-۵/۶۴۰	۱۸۷۵۷/۳۵۴	۹۷۹۴۶۶/۷۰۳	۳۷/۹۷۰۰	۴۷/۷۸۳۳
-۶/۶۷۰	۲۰۴۲۷/۷۰۹	۹۷۹۴۴۱/۶۳۶	۳۸/۰۰۳۳	۴۷/۸۱۱۶
-۰/۹۹۰	۷۸۶۵/۴۲۶	۹۷۹۳۱۳/۲۴۵	۳۳/۰۷۳۳	۵۵/۸۶۳۳
-۲/۸۱۱	۱۲۹۳۹/۱۱۱	۹۷۹۳۶۷/۴۶۸	۳۴/۰۲۰۰	۴۶/۶۴۰۰
-۳/۹۳۳	۱۵۶۲۱/۳۴۹	۹۷۹۲۴۹/۷۴۰	۳۴/۱۸۶۹	۵۸/۵۵۱۳
-۲/۶۴۳	۱۲۸۸۰/۹۸۶	۹۷۹۱۹۲/۹۲۱	۳۲/۷۸۵۸	۵۸/۸۹۶۳
-۳/۰۹۰	۱۳۹۷۹/۷۸۱	۹۷۹۱۹۶/۴۷۰	۳۳/۰۱۰۰	۶۰/۲۱۵۰

۶ بحث و نتیجه گیری

در این مقاله روشی برای محاسبه شتاب گرانشی میانگین در داخل زمین از نقطه مشاهده تا ژئوئید که مورد نیاز تعیین ارتفاع اورتومتریک است ارائه شد. روش ارائه شده شامل مراحل زیر است:

۱. محاسبه اثرات جهانی و منطقه‌ای شتاب گرانشی از راه بسط شتاب جاذبه به هارمونیک‌های بیضوی تا درجه و مرتبه ۳۶۰ به اضافه شتاب گرینز از مرکز.
۲. تعیین شتاب جاذبه حاصل از جرم‌های نزدیک با استفاده از حل انتگرال نیوتن در سامانه تصویر هم‌مساحت استوانه‌ای تا شعاع ۵۵ کیلومتر.
۳. محاسبه شتاب گرانشی در امتداد خط شاغولی بر اساس نتایج مراحل (۱) و (۲) در دو نقطه واقع بر سطح زمین و سطح ژئوئید و محاسبه میانگین آنها و افزایش تعداد نقاط به کار برده شده در محاسبه میانگین تا جایی که اختلاف شتاب گرانشی میانگین از مقدار از پیش تعیین شده برای دقت شتاب گرانشی میانگین تجاوز ننماید.
۴. تعیین میانگین شتاب گرانشی محاسبه شده در طی مراحل (۱) تا (۳).

روش ارائه شده با مشاهدات شتاب گرانشی در داخل زمین در یک چاه اکتشافی به دو روش زیر مقایسه شده است:

الف- مقایسه شتاب گرانشی مشاهده شده در داخل زمین در امتداد چاه اکتشافی با شتاب گرانشی محاسبه شده در همان نقاط.

ب- مقایسه شتاب گرانشی میانگین حاصل از مشاهدات شتاب گرانشی در داخل چاه اکتشافی با شتاب گرانشی میانگین حاصل از محاسبات طی مراحل (۱) تا (۵).

نتایج حاصل از دو مقایسه (الف) و (ب) حاکی از حصول دقت ۱۰/۷۶۸ میلی‌گال در محاسبه شتاب گرانشی نقطه‌ای در عمق ۴۷۴/۷ متر داخل زمین و دقت ۵/۵۶ میلی‌گال در شتاب گرانشی میانگین در داخل زمین در همان عمق است. که دقت بسیار بیشتری را در تعیین ارتفاع اورتومتریک در مقایسه با روش هلمرت نتیجه می‌دهد. نتایج حاصل از مقایسه دو روش در تعدادی از نقاط شبکه ترازیبی درجه کشور حاکی از اختلاف بیش از ۶ متر در ارتفاع در حدود ۲۰۰۰ متر به روش معرفی شده در این

- the Department of Geodetic Science and Surveying, No. 355, The Ohio State University, Columbus, Ohio, USA.
- Heiskanen, W. A., and Moritz, H., 1967, *Physical Geodesy*. WH Freeman & Co, San Francisco, USA, 364.
- Helmert, F. R., 1890, *Die Schwerkraft im Hochgebirge, insbesondere in den Tyroler Alpen*. Veroff. Konigl. Preuss. Geod. Inst., No. 1.
- <http://iag.dgfi.badw.de/index.php?id=60&type=3>
- <http://lareg.ensg.ign.fr/ITRF/ITRF2000/>
- Hwang, C., and Hsiao, Y. S., 2003, Orthometric corrections from leveling, gravity, density and elevation data: a case study in Taiwan. *Journal of geodesy*, 77, 279-291.
- Kao S. P., Rongshin H., and Ning F. S. 2000, Results of field test for computing orthometric correction based on measured gravity. *Geomatics Research Australasia*, 72, 43-60.
- Krakiwsky, E. J., 1965, *Heights*. M. S. Thesis, Department of Geodetic Science and Surveying, Ohio State University, Columbus, USA, 157.
- Rapp, R. H., 1961, *The orthometric height*. M. S. Thesis, Department of Geodetic Science, Ohio State University, Columbus, USA, 117.
- Strange, W. E., 1982, An evaluation of orthometric height accuracy using borehole Gravimetry. *Bulletin Géodésique*, 56, 300-311.
- Sünkel, H., 1986, Digital height and density model and its use for the orthometric height and gravity field determination for Austria. *Proceedings of the International Symposium on the Definition of the Geoid*, Florence, Italy, May, 599-604.

مقاله و روش هلمرت است. این اختلاف مؤید اهمیت استفاده از روش ارائه شده در تعیین ارتفاع ارتومتریک خصوصاً در عصر GPS و کاربردهای نوین ژئودزی است.

منابع

- Allister, N., 2000, Orthometric corrections using observed gravity in the Darling Scarp. Perth, Western Australia, Bsurv (Hons) thesis, Department of Spatial Sciences, Curtin, University of Technology, Perth, Australia, 125.
- Ardalan, A. A., 1999, High resolution regional geoid computation in the world geodetic datum 2000, based upon collection of linearized observational functionals of the type Gps, gravity potential and gravity intensity. Ph.D thesis, Stuttgart University, Germany.
- Ardalan, A. A., and Grafarend E.W., 2000, Reference ellipsoidal gravity potential field and gravity intensity field of degree/order 360/360 (Manual of using ellipsoidal harmonic coefficients "ellipfree.dat" and ellipmean.dat"). <http://www.uni-stuttgart.de/gi/research/index.html#Projects>.
- Dennis, M. L., and Featherstone, W. E., 2002, Evaluation of orthometric and related height systems using a simulated mountain gravity field. *Proceedings of Third Meeting of the International Gravity and Geoid Commission*, Thessaloniki, Greece, August 26-30.
- Forsberg, R., 1984, A study of terrain reductions, density anomalies and geophysical inversion methods in gravity field modelling, Reports of