

حل عددی شکل پایستار معادلات آب کم عمق با استفاده از روش

آبرفشده مرتبه ششم

سرمد قادر* و وحید اصفهانیان**

* مؤسسه ژئوفیزیک دانشگاه تهران، صندوق پستی ۶۴۶۶-۱۴۱۵۵

** دانشکده مهندسی مکانیک دانشگاه تهران

(دریافت: ۸۴۷/۲۰، پذیرش نهایی: ۸۵/۴/۱۳)

چکیده

در این مقاله حل عددی شکل پایستار معادلات آب کم عمق در صفحه B با استفاده از روش آبرفشده مرتبه ششم ارائه می شود. برای گسسته سازی زمانی معادلات از شکل دلتای روش بیم و وارمینگ و برای گسسته سازی مکانی معادلات از روش آبرفشده مرتبه ششم استفاده می شود. نتایج عددی به دست آمده نشان دادند که برای غلبه بر خطای دگرنامیدن ناشی از اندرکنش جملات غیرخطی موجود در معادلات، پالایه های رایج که در تحقیقات قبلی برای روش های مرتبه پایین مورد استفاده قرار گرفته اند، توانایی غلبه بر این خطا را ندارند و به همین دلیل در این مقاله نحوه به کارگیری یک پالایه براساس روش های فشرده مورد بررسی قرار گرفته است. کمیت های ناوردای مدل مانند انستروپی پتانسیلی (با به کارگیری پالایه برمینای روش های فشرده) در طول انتگرال گیری عددی از معادلات، به خوبی پایستگی خود را حفظ می کنند، این مطلب مؤید این حقیقت است که ماهیت غیرخطی معادلات با استفاده از روش عددی به کار رفته به خوبی شبیه سازی شده است. اعتبار حل عددی ارائه شده با مقایسه جواب های حاصل با نتایج روش فشرده مرتبه چهارم و همچنین سایر تحقیقات قبلی سنجیده می شود. همچنین با مقایسه نتایج حاصل از روش آبرفشده مرتبه ششم با نتایج حاصل از روش های فشرده مرتبه چهارم و مرتبه دوم مرکزی، روشن می شود که روش آبرفشده نسبت به دو روش دیگر از دقت بیشتری برخوردار است.

واژه های کلیدی: دقت عددی، روش آبرفشده، روش بیم و وارمینگ، معادلات آب کم عمق، جو

۱ مقدمه

خواص تفکیک متفاوت را معرفی کرده اند، از جمله تحقیقات مهم صورت گرفته در این زمینه، می توان به کار لی لی (۱۹۹۲) اشاره کرد.

دکسون و یانون، خانواده ای از روش های تفاضل محدود با دقت زیاد را که تحت عنوان آبرفشده نامگذاری شده اند در سال ۱۹۹۵ معرفی کردند. روابط این روش را می توان برای هر مرتبه از دقت که مورد نظر باشد به دست آورد. این دو محقق نحوه به دست آوردن روابط این روش (یانون و دکسون ۱۹۹۶) و همچنین نحوه اعمال آن را برای حل مسأله اندرکنش شوک-تاوه (vortex-shock interaction) در شبکه یکنواخت (دکسون و یانون، ۲۰۰۱) مورد بررسی قرار دادند. از سوی دیگر پاره ای از

در سال های اخیر توجه بسیاری از محققان به استفاده از روش های عددی بادقت زیاد برای شبیه سازی دقیق مسائل دینامیک شاره ها جلب شده است. روش های تفاضل محدود فشرده از جمله این روش ها هستند که موضوع مقالات بسیاری را در این سال ها به خود اختصاص داده اند. از لحاظ تاریخی می توان رد پای این روش ها را در کارهای نیومروف (۱۹۲۴) و همچنین فاکس و گودوین (۱۹۴۹) جستجو کرد. ولی در واقع پس از پیشنهاد کریس و اولیگر (۱۹۷۲) و مقاله کلیدی هرش (۱۹۷۵) این روش ها تبدیل به یک ابزار بسیار قوی برای شبیه سازی دقیق مسائل مکانیک سیالات شدند. در طی چند سال گذشته، محققان گوناگون، گروه های بسیار متنوعی از روش های فشرده با

مدل‌سازی می‌شود و همچنین به معادلات حاکم بر این مدل اشاره خواهد شد. در واقع مدلی که در این تحقیق مورد استفاده قرار می‌گیرد عبارت از یک شاره تراکم‌ناپذیر، همگن، ناوشکسان و همراه با تقریب هیدرواستاتیک است که در یک کانال متناظر ناحیه‌ای با عرض جغرافیایی میانی روی کره زمین محدود می‌شود. سطح زیرین کانال مسطح و سخت و سطح بالایی آن آزاد است. مرزهای شمالی و جنوبی کانال را دیوارهای سخت تشکیل می‌دهند. همچنین فرض می‌شود که جریان شاره در جهت شرقی-غربی از شرط دوره‌ای (پریودیک) بودن پیروی کند. همچنین از فرض صفحه β نیز استفاده می‌شود. معادلات حاکم بر این مدل فیزیکی را معادلات آب کم‌عمق می‌نامند. شکل اولری این معادلات برای ناحیه‌ای مستطیل شکل با طول L در راستای محور x ها و عرض D در راستای محور y ها به صورت زیر است (هالتینر و ویلیامز، ۱۹۸۰):

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - fv + g \frac{\partial h}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + fu + g \frac{\partial h}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} + h \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

در معادلات بالا، x نمایانگر محور مختصات در راستای شرق به غرب و y نشان‌دهنده راستای محور مختصات در جهت شمال به جنوب است. مؤلفه‌های سرعت در دو راستای x و y به ترتیب با u و v نمایش داده شده‌اند. t زمان، h عمق شاره و g شتاب گرانی (جاذبه) را نشان می‌دهد و در نهایت f پارامتر کوریولیس است که در صفحه β به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f = \hat{f} + \beta(y - D/2)$$

باتوجه به آنچه که هوگتون و همکاران (۱۹۶۶) مطرح ساخته‌اند می‌توان معادلات آب کم‌عمق را در شکل

جنبه‌های این روش در شبکه غیریکنواخت را قادر (۱۳۷۹) و اصفهانیان و همکاران (۲۰۰۴) مورد بررسی قرار داده‌اند. همچنین مؤلفین این مقاله تحقیقاتی برای بررسی نحوه اعمال این روش برای شبیه‌سازی دقیق مسائل در ارتباط با دینامیک شاره‌های ژئوفیزیکی آغاز کرده‌اند که در این خصوص، علاوه بر کار حاضر می‌توان به کار ارائه شده توسط اصفهانیان و همکاران (۲۰۰۵) اشاره کرد.

در مقاله حاضر حل عددی شکل پایستار معادلات آب کم‌عمق در صفحه β با استفاده از روش آب‌فشرده مرتبه ششم ارائه می‌شود. معادلات آب کم‌عمق در واقع بیان‌کننده حرکت جوی یک لایه‌ای همراه با تقریب هیدرواستاتیک است. در این جو چگالی ثابت فرض می‌شود و علاوه بر آن جو را خشک و بدون اصطکاک در نظر می‌گیرند. برای گسسته‌سازی زمانی معادلات از شکل دلتای روش بیم و وارمینگ (۱۹۷۸) به جای روش پایه‌ای به کار رفته (۱۹۷۶) در تحقیقات قبلی استفاده شده است. معادلات نهایی به دست آمده با استفاده از شکل دلتای روش بیم و وارمینگ نسبت به روابط به دست آمده قبلی بسیاری ساده‌تر بوده و همچنین شکستن آنها در دو راستای محورهای مختصات با استفاده از روش ADI (داگلاس و گان ۱۹۶۴) به سادگی امکان‌پذیر است و مشکلات مطرح شده قبلی را با خود به همراه ندارد. همچنین استفاده از شکل دلتا باعث کاهش در مراحل حل عددی و در نتیجه صرفه‌جویی در زمان و حافظه رایانه‌ای مورد نیاز خواهد شد. به علاوه در این تحقیق نتایج به دست آمده با نتایج حاصل از روش‌های مرتبه دوم مرکزی (اصفهانیان و قادر، ۱۳۸۲ الف) و فشرده مرتبه چهارم (اصفهانیان و قادر، ۱۳۸۲ ب) نیز مقایسه خواهند شد تا دقت روش آب‌فشرده مرتبه ششم در مقایسه با دو روش دیگر سنجیده شود.

۲ مدل فیزیکی و معادلات حاکم

در این بخش به مدلی که توسط آن فیزیک مسئله

$$U(x, y, 0) = \psi_0(x, y) \quad (6)$$

پایستار زیر بازنویسی کرد.

انرژی کل نیز به صورت

$$E = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^D (u^2 + v^2 + gh) h dx dy \quad (7)$$

تعریف می شود. مقدار انستروپی پتانسیلی را می توان از رابطه زیر به دست آورد.

$$Z = \int \int \left(\frac{\zeta_a^2}{h} \right) dx dy \quad (8)$$

ζ_a در رابطه بالا برابر با تاوایی (vorticity) مطلق است و به صورت زیر تعریف می شود.

$$\zeta_a = \zeta + f = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} + f$$

در مدل فیزیکی مورد بحث در تحقیق حاضر، مقدار انرژی کل و انستروپی پتانسیلی مستقل از زمان (ناورد) است.

۳ شکل دلتای روش بیم و وارمینگ

از شکل دلتای روش بیم و وارمینگ (۱۹۷۸) که روش مرتبه دوم یک مرحله ای است، برای گسسته سازی زمانی شکل پایستار معادلات آب کم عمق به منظور پیمایش در زمان استفاده می شود. رابطه این روش به صورت زیر است:

$$\Delta U^n = \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial \Delta U^n}{\partial t} + \Delta t \frac{\partial U^n}{\partial t} \quad (9)$$

در این رابطه، بالانویس n نشان دهنده مرحله زمانی به صورت $n\Delta t$ است، همچنین در این معادله $U^n = U(n\Delta t)$ و $\Delta U^n = U^{n+1}$ است. با استفاده از معادله (۳) می توان رابطه (۹) را به صورت زیر بازنویسی کرد.

$$\Delta U^n = -\frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \Delta P^n}{\partial x} + \frac{\partial \Delta Q^n}{\partial y} - f \Delta R^n \right) - \Delta t \left(\frac{\partial \Delta P^n}{\partial x} + \frac{\partial \Delta Q^n}{\partial y} - f R^n \right) \quad (10)$$

از آنجا که $\Delta Q^n, \Delta P^n$ غیر خطی اند، می بایست آنها را

$$\frac{\partial}{\partial t} (hu) + \frac{\partial}{\partial x} (hu^2) + \frac{\partial}{\partial y} (huv) - fvh + gh \frac{\partial h}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (hu) + \frac{\partial}{\partial x} (huv) + \frac{\partial}{\partial y} (hv^2) + fuh + gh \frac{\partial h}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (hu) + \frac{\partial}{\partial y} (hv) = 0$$

(۲)

معادلات بالا را می توان در شکل ماتریسی زیر خلاصه کرد.

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} - fR = 0 \quad (3)$$

با استفاده از قرارداد $\tilde{n} = hv, \tilde{m} = hu$ در معادله بالا بردارهای U, P, Q, R به صورت زیر خواهند بود.

$$U = \begin{pmatrix} \tilde{m} \\ \tilde{n} \\ h \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} \frac{\tilde{m}^2}{h} + \frac{1}{2} gh^2 \\ \frac{\tilde{m}\tilde{n}}{h} \\ \tilde{m} \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{\tilde{m}\tilde{n}}{h} \\ \frac{\tilde{n}^2}{h} + \frac{1}{2} gh^2 \\ \tilde{n} \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} \tilde{n} \\ -\tilde{m} \\ 0 \end{pmatrix}$$

شرایط مرزی مدل نیز به صورت زیر بیان می شود. چون مدل در راستای محور x ها دوره ای (پریودیک) است، بنابراین:

$$U(x, y, t) = U(x + L, y, t) \quad (4)$$

و در جهت محور y ها از شرط مرز سخت به صورت زیر استفاده می شود.

$$v(x, 0, t) = v(x, D, t) = 0 \quad (5)$$

شرایط اولیه به صورت زیر تعریف می شود.

به صورت زیر خطی سازی کرد:

$$\Delta P^n = A^n \Delta U^n, \Delta Q^n = B^n \Delta U^n$$

در روابط بالا A و B ماتریس های ژاکوبین اند که به صورت زیر تعریف می شوند.

$$A = \frac{\partial P}{\partial U}, \quad B = \frac{\partial Q}{\partial U}$$

با استفاده از رابطه زیر

$$f \Delta R^n = C \Delta U^n, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & f & 0 \\ -f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

می توان معادله (۱۰) را به صورت زیر نوشت:

$$\Delta U^n = -\frac{\Delta t}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} (A^n \Delta U^n) + \frac{\partial}{\partial y} (B^n \Delta U^n) - C \Delta U^n \right] - \Delta t \left(\frac{\partial P^n}{\partial x} + \frac{\partial Q^n}{\partial y} - C U^n \right) \quad (11)$$

۳-۱ روش ADI

اگر بخواهیم دستگاه معادلات را (۱۱) به صورت مستقیم حل کنیم، یعنی مشتقات موجود در آن را با استفاده از روش تفاضل محدود در دو جهت x و y گسسته نمود، به حجم زیادی از عملیات محاسباتی و حافظه نیاز است. به همین دلیل اگر معادلات در دو جهت محورهای مختصات شکسته شوند، فرایند حل، به حل دو سری معادله که هر کدام فقط شامل مشتقات مکانی در یکی از جهت های محورهای مختصات اند، محدود خواهد شد. با گسسته سازی این معادلات با استفاده از روش آبرفشرده فقط می بایست در هر یک از راستاها یک ماتریس سه قطری بلوکی را معکوس کنیم. برای شکستن معادلات در دو راستای محورهای مختصات، روش ADI مورد استفاده قرار می گیرد. با توجه به شکل معادله (۱۱) روش ADI را می توان به آسانی برای شکستن این معادله به صورت زیر

به کار برد.

$$\left\{ I + \frac{\Delta t}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} (A^n) - C^{(1)} \right] \right\} \left\{ I + \frac{\Delta t}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} (B^n) - C^{(2)} \right] \right\} \Delta U^n = \Delta t \left(\frac{\partial P^n}{\partial x} + \frac{\partial Q^n}{\partial y} - C U^n \right)$$

معادله بالا را می توان به صورت دو معادله زیر در دو راستای محورهای مختصات نوشت:

$$\left\{ I + \frac{\Delta t}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} (A^n) - C^{(1)} \right] \right\} \Delta U^* = -\Delta t \left(\frac{\partial P^n}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} - C U^n \right) \quad (12)$$

$$\left\{ I + \frac{\Delta t}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} (B^n) - C^{(2)} \right] \right\} \Delta U^n = \Delta U^* \quad (13)$$

در معادلات بالا I معرف ماتریس واحد است و همچنین داریم:

$$C^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

۴ گسسته سازی مکانی

برای گسسته سازی مکانی معادلات در دو راستای x و y از روش آبرفشرده مرتبه ششم استفاده می شود. روابط مرکزی آبرفشرده مرتبه ششم برای مشتقات فرد به صورت زیر نوشته می شود (قادر، ۱۳۷۹):

$$2dF'_j + \frac{1}{60} d^3 F'''_{j+1} + \frac{3}{10} d^3 F'''_j + \frac{1}{60} d^3 F'''_{j-1} = F_{j+1} - F_{j-1} \quad (14)$$

$$F'_{j+1} - 2F'_j + F'_{j-1} - \frac{1}{12} d^2 F''_{j-1} - \frac{5}{6} d^2 F''_j - \frac{1}{12} d^2 F''_{j+1} = 0$$

سمت راست معادله (۱۸) به صورت زیر است:

$$RX1 = 2\Delta x \alpha R1_{i,j} + \frac{1}{60} \Delta x^2 \alpha \left(\frac{\partial^2 R1}{\partial x^2} \right) + \frac{3}{10} \Delta x^2 \alpha \left(\frac{\partial^2 R1}{\partial x^2} \right)_{i,j} + \frac{1}{60} \Delta x^2 \alpha \left(\frac{\partial^2 R1}{\partial x^2} \right)_{i+1,j}$$

شکل گسسته دومین معادله در راستای X نیز به صورت زیر در خواهد آمد.

$$\begin{aligned} & (C^{(l)} - \alpha I)_{i+1,j} \Delta U^*_{i+1,j} - 2(C^{(l)} - \alpha I)_{i,j} \Delta U^*_{i,j} + \\ & (C^{(l)} - \alpha I)_{i-1,j} \Delta U^*_{i-1,j} - \frac{1}{12} \Delta x^2 (C^{(l)} - \alpha I)_{i-1,j} \frac{\partial^2 \Delta U^*}{\partial x^2}_{j-1,j} \\ & - \frac{5}{6} \Delta x^2 (C^{(l)} - \alpha I)_{i,j} \frac{\partial^2 \Delta U^*}{\partial x^2}_{j-1,j} - \frac{1}{12} \Delta x^2 (C^{(l)} - \alpha I)_{i-1,j} \frac{\partial^2 \Delta U^*}{\partial x^2}_{j-1,j} = RX2 \end{aligned} \quad (19)$$

سمت راست معادله بالا به صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{aligned} RX2 = & -\alpha R1_{i+1,j} + 2\alpha R1_{i,j} - \alpha R1_{i-1,j} + \\ & -\frac{1}{12} \Delta x^2 \alpha \left(\frac{\partial^2 R1}{\partial x^2} \right)_{j-1,j} \\ & + \frac{5}{6} \Delta x^2 \alpha \left(\frac{\partial^2 R1}{\partial x^2} \right)_{i,j} + \frac{1}{12} \Delta x^2 \alpha \left(\frac{\partial^2 R1}{\partial x^2} \right)_{j+1,j} \end{aligned}$$

با روندی مشابه می توان شکل گسسته معادله (۱۳) را نیز به دست آورد. در اینجا برای اختصار از ذکر این معادلات خودداری می شود.

برای گسسته سازی مکانی معادله (۱۵) در ابتدا می بایست جمله R1 را با استفاده از اپراتورهای مشتق گیری تعریف شده، با روش آبرفشرده محاسبه کنیم. معادلات در راستای محور x دوره ای (پریودیک) اند که همین شرط در حکم شرط مرزی در این راستا مورد استفاده قرار می گیرد. در راستای محور y در مرزها از روابط پیش رو و پس رو

در روابط بالا علامت پریم نشان دهنده مشتق و d بیان کننده فاصله شبکه ای در شبکه ای یکنواخت است. برای حل معادلات ابتدا مشتقات در راستای X را با استفاده از روش آبرفشرده مرتبه ششم گسسته سازی می کنیم. برای رسیدن به این منظور معادله (۱۲) را به صورت زیر بازنویسی می کنیم.

$$\left\{ I + \frac{\Delta t}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} (A^n) - C^{(l)} \right] \right\} \Delta U^* = R1 \quad (15)$$

در معادله (۱۵) متغیر R1 به صورت زیر است.

$$R1 = -\Delta t \left(\frac{\partial P^n}{\partial x} + \frac{\partial Q^n}{\partial y} - C U^n \right)$$

مشتق مکانی موجود در معادله (۱۵) را می توان به صورت زیر پیدا کرد.

$$\frac{\partial}{\partial x} (A^n \Delta U^*) = \alpha R1 + (C^{(l)} - \alpha I) \Delta U^*$$

در این رابطه $\alpha = 2/\Delta t$ است. برای آن که بتوان رابطه بالا را با استفاده از روش آبرفشرده مرتبه ششم گسسته سازی کرد، به مشتق سوم رابطه بالا نیاز است.

$$\frac{\partial^3}{\partial x^3} (A^n \Delta U^*) = \alpha \frac{\partial^2 R1}{\partial x^2} + (C^{(l)} - \alpha I) \frac{\partial^2 \Delta U^*}{\partial x^2} \quad (17)$$

بنابراین با جایگذاری معادلات (۱۶) و (۱۷) در روابط (۱۴) می توان شکل گسسته معادلات را به صورت زیر به دست آورد.

$$\begin{aligned} & (A^n \Delta U^*)_{i+1,j} - (A^n \Delta U^*)_{i-1,j} - 2\Delta x (C^{(l)} - \alpha I)_{i,j} \Delta U^*_{i,j} - \frac{1}{60} \Delta x^2 (C^{(l)} - \alpha I)_{i-1,j} \left(\frac{\partial^2 \Delta U^*}{\partial x^2} \right)_{i-1,j} \\ & - \frac{3}{10} \Delta x^2 (C^{(l)} - \alpha I)_{i,j} \left(\frac{\partial^2 \Delta U^*}{\partial x^2} \right)_{i,j} - \frac{1}{60} \Delta x^2 (C^{(l)} - \alpha I)_{i+1,j} \left(\frac{\partial^2 \Delta U^*}{\partial x^2} \right)_{i+1,j} = RX1 \end{aligned} \quad (18)$$

$$\bar{F}_i = 4.28\hat{F}_i - 2.16(\hat{F}_{i+1} + \hat{F}_{i-1}) + 0.52 \quad (20)$$

$$(\hat{F}_{i+2} + \hat{F}_{i-2})$$

$$\tilde{F}_i = 0.375\bar{F}_i - 0.25(\bar{F}_{i+1} + \bar{F}_{i-1}) + 0.0625$$

$$(\bar{F}_{i+2} + \bar{F}_{i-2})$$

خروجی این پالایه \tilde{F}_i است که در آن همه طول موج‌های کمتر از $3\Delta x$ حذف شده‌اند. اگر در نظر باشد که این پالایه بر میدانی دوبعدی اعمال شود، همان‌گونه که اشاره شد می‌بایست آن را به صورت متناوب در دو جهت این میدان دوبعدی اعمال کرد. البته با توجه به روابط این پالایه مشخص است که نمی‌توان آن را در نقاط مرزی اعمال کرد و به همین دلیل از این پالایه فقط در نقاط داخلی شبکه استفاده می‌شود.

عامل دیگری که در پدید آمدن ناپایداری غیرخطی مؤثر است، نوع شبکه عددی (رنдал، ۱۹۹۴) به کار رفته در حل عددی است. تحقیقات قبلی برای روش تفاضل محدود مرتبه دوم (رنдал، ۱۹۹۴ و آراکاو و لمب ۱۹۷۷) نشان داده‌اند که به کارگیری شبکه‌ای (شبکه A) که در آن متغیرهای میدان سرعت و ارتفاع، مانند مقاله حاضر به صورت جابه‌جا نشده مورد استفاده قرار می‌گیرند باعث می‌شود تا در طول فرایند حل عددی، امواج مزاحم بسیاری وارد حل شوند. بررسی‌های بلايو (۲۰۰۰) برای روش فشرده مرتبه چهارم و اصفهانیان و همکاران (۲۰۰۵) برای روش آبرفشرده مرتبه ششم روشن ساخته‌اند که این روش‌ها نیز دارای خصوصیات مشابهی‌اند. ولی از آنجا که روش آبرفشرده مرتبه ششم به علت دقت بیشتر محدوده بزرگ‌تری از اعداد موج (فضای فوریه) را به درستی شبیه‌سازی می‌کند، انتظار می‌رود که میزان اندرکنش‌های غیرخطی و ایجاد امواج مزاحم در این شبکه عددی (شبکه A) در این روش بیشتر باشد. نتایج عددی به دست آمده در تحقیق حاضر این مطلب را تأیید می‌کند و نشان می‌دهد که امکان استفاده از پالایه ولینگتن به تنهایی برای روش

آبرفشرده مرتبه ششم (قادر، ۱۳۷۹) استفاده می‌شود.

با حل معادلات (۱۸) و (۱۹) اندازه دو مجهول $\frac{\partial^2 \Delta U^*}{\partial x^2}$, ΔU^* به دست خواهد آمد. حال با به دست آمدن ΔU^* می‌توان ΔU^n را با روندی مشابه پیدا کرد.

۵ استفاده از پالایه

برای غلبه بر خطای دگرنامیدن (aliasing error) به وجود آمده از اندرکنش بخش‌های غیرخطی معادلات، می‌بایست از پالایه (filter) مناسب استفاده شود. پالایه در واقع نوعی هموارساز است که در طی مراحل انتگرال‌گیری عددی از معادلات برای حذف طول موج‌های مزاحم کوچک‌تر از حدی معین به صورت متناوب مورد استفاده قرار می‌گیرد. ولینگتن (۱۹۶۲) در مقاله‌ای به معرفی پالایه‌هایی که می‌توان در طول انتگرال‌گیری از آنها استفاده کرد. او در واقع با توجه به خصوصیتی که از پالایه انتظار می‌رود، نحوه طراحی آنها را مورد بررسی قرارداد. پالایه‌ای که او مورد استفاده قرار داد به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\hat{F}_i = a\hat{f}_i + b(\hat{F}_{i+1} + \hat{F}_{i-1}) + c(\hat{F}_{i+2} + \hat{F}_{i-2})$$

در معادله بالا \hat{F} نشان‌دهنده کمیتی است که مورد پالایش قرار می‌گیرد و ضرایب a ، b و c ضرایب ثابتی‌اند که آنها را با توجه به آن که وظیفه پالایه حذف چه طول موج‌هایی باشد، می‌توان پیدا کرد. همان‌گونه که مشاهده می‌شود این رابطه‌ای یک‌بعدی است ولی معادله را می‌توان برای حالت دوبعدی بسط داد در واقع کافی است که به صورت متناوب این رابطه در دو جهت (برای مثال) x و y اعمال کنیم. ولینگتن نشان داد که اگر در نظر باشد تا طول موج‌های کمتر از $3\Delta x$ به صورت کامل حذف شوند می‌بایست از پالایه‌ای به صورت زیر استفاده شود.

که مقادیر اولیه متغیرها در لحظه شروع انتگرال گیری، معین باشند. این مقادیر را می‌بایست از روی مقادیر اندازه‌گیری شده ایستگاه‌های هواشناسی به دست آورد، البته این مقادیر باید با فرایند آغازگری برای انتگرال گیری آماده شوند. ولی در اینجا از میدان اولیه تحلیلی (ناون و ریفاگن، ۱۹۷۹) به منظور به دست آوردن مبنایی برای مقایسه نتایج حاصل با نتایج سایر محققان، به صورت زیر استفاده می‌شود. مقدار اولیه h به شکل زیر تعریف می‌شود.

$$h(x, y) = H_0 + H_1 \tanh \frac{9(D/2 - y)}{2D} + H_2 \operatorname{sech}^2 \frac{9(D/2 - y)}{D} \sin\left(\frac{2\pi y}{L}\right)$$

میدان شرایط اولیه h در شکل ۱ نشان داده شده است. مؤلفه‌های میدان سرعت اولیه یعنی u و v با استفاده از تقریب زمین گرد به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$u = \left(\frac{-g}{f}\right) \frac{\partial h}{\partial y}, \quad v = \left(\frac{g}{f}\right) \frac{\partial h}{\partial x}$$

ناحیه مورد نظر مستطیلی به طول $L=6000$ km و عرض $D=4400$ km است که ثابت‌های زیر در آن تعریف شده‌اند.

$$H_0 = 2000 \text{ m}, \quad H_1 = 220 \text{ m}, \\ H_2 = 133 \text{ m}, \quad g = 10 \text{ ms}^{-2}$$

در صفحه β پارامتر کوریولیس یعنی f با رابطه زیر بیان می‌شود:

$$f = \hat{f} + \beta(y - D/2)$$

که $\hat{f} = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$, $\beta = 1/5 \times 10^{-11} \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-1}$ در این مسئله شرط مرزی دوره‌ای (پریودیک) بر مرزهای غربی و شرقی حاکم است. بنابراین برای کمیت وابسته‌ای مانند ϕ داریم:

$$\phi(x, y, t) = \phi(x + L, y, t)$$

آبرفشرده وجود ندارد. به همین دلیل می‌بایست به دنبال پالایه‌ای بود که با ماهیت این نوع روش‌ها نزدیک باشد و توانایی حذف امواج مزاحم را داشته باشد. لی لی (۱۹۹۲) در مقاله خود تعدادی پالایه براساس روش‌های فشرده معرفی کرده است که در اینجا یکی از آنها مورد استفاده قرار می‌گیرد. این پالایه به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\beta \tilde{F}_{j-2} + \alpha \tilde{F}_{j-1} + \tilde{F}_j + \alpha \tilde{F}_{j+1} + \beta \tilde{F}_{j+2} = a \tilde{F}_j + \frac{d}{2} (\hat{F}_{j+3} + \hat{F}_{j-3}) + \frac{c}{2} (\hat{F}_{j+2} + \hat{F}_{j-2})$$

$\frac{b}{2} (\hat{F}_{j+1} + \hat{F}_{j-1})$ در پالایه بالا، \hat{F} میدان اولیه و \tilde{F} نشان دهند میدان پالایش شده است. حال با انتخاب‌هایی که برای ضرایب بالا وجود دارد می‌توان پالایه‌هایی را با خواص طیفی گوناگون به دست آورد. با توجه به نیازهای تحقیق حاضر از بین انتخاب‌های گوناگونی که وجود دارد می‌بایست به دنبال پالایه‌ای بود که بیشترین اثر را بر طول موج‌های کوچک داشته باشد. لی لی روشن ساخت که برای به دست آوردن پالایه مرتبه چهارم، ضرایب موجود در رابطه بالا را می‌بایست به صورت زیر انتخاب کرد:

$$\alpha = 0.475, \beta = d = 0, a = 0.98125, b = 0.975 \\ c = -6.25 \times 10^{-3}$$

پالایه بالا در مقایسه با سایر پالایه‌های معرفی شده لی لی، دارای مناسب‌ترین خواص طیفی است که در شبیه‌سازی حاضر نیز از همین پالایه استفاده شده است. البته جواب‌های حاصل از شبیه‌سازی نیز عملکرد مناسب پالایه فوق را تأیید می‌کنند.

۶ نتایج

برای انتگرال‌گیری معادلات آب کم عمق در کانال با شرایط مرزی توضیح داده شده در ابتدای مقاله، نیاز است

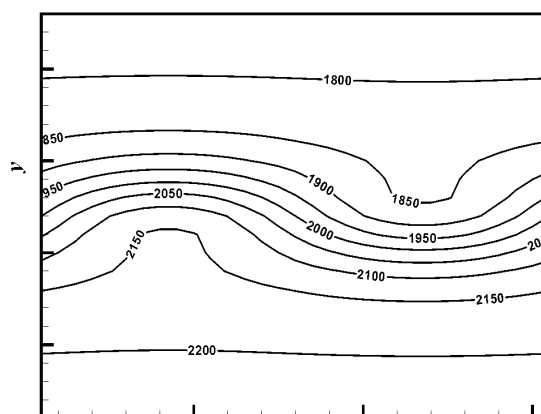
صفحه β با استفاده از شرایط اولیه مورد بحث در مقاله پرداخته است، کارهای ارائه شده گوستاوسن (۱۹۷۱) ناون و ریفاگن (۱۹۷۹) و اصفهانیان و قادر (۱۳۸۲) نیز از همین شرایط اولیه استفاده کرده‌اند. جواب‌های تحقیق حاضر و مقالات ذکر شده از لحاظ کیفی دارای تطابق خوبی‌اند و در واقع این تطابق نشان‌دهنده صحت جواب‌های به‌دست آمده نیز هست. ولی کارهای ارائه شده در این مقالات تفاوت‌هایی هم دارند. تفاوت اول مربوط به نوع فرمول‌بندی معادلات حاکم و تفاوت دوم نیز مربوط به دقت حل عددی به‌کار رفته در هر کدام از آنها است. از آنجا که برای مقایسه دقیق جواب‌های به‌دست آمده از دو شبیه‌سازی متفاوت بهتر است که فرمول‌بندی‌ها یکسان باشند، در مقاله حاضر در بخش بررسی دقت نتایج حاصل از روش آبرفشده با نتایج روش‌های مرتبه دوم مرکزی و فشرده مرتبه چهارم (اصفهانیان و قادر، ۱۳۸۲) که دارای فرمول‌بندی‌های یکسانی با کار حاضرند مقایسه شده‌اند.

ولی در مرزهای شمالی و جنوبی هیچ‌گونه جرمی از ناحیه خارج نمی‌شود یعنی داریم:

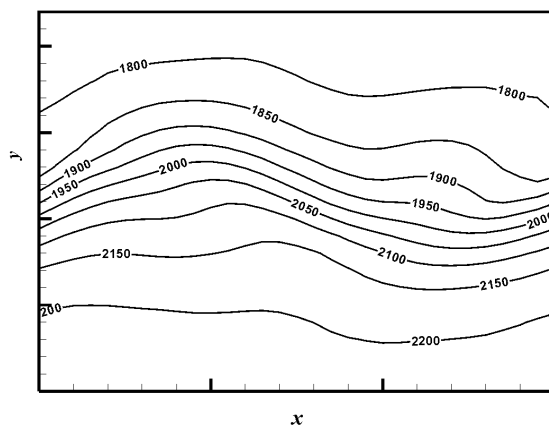
$$v(x, y, t) = v(x, D, t) = 0$$

۱-۶ تشریح نتایج حل عددی

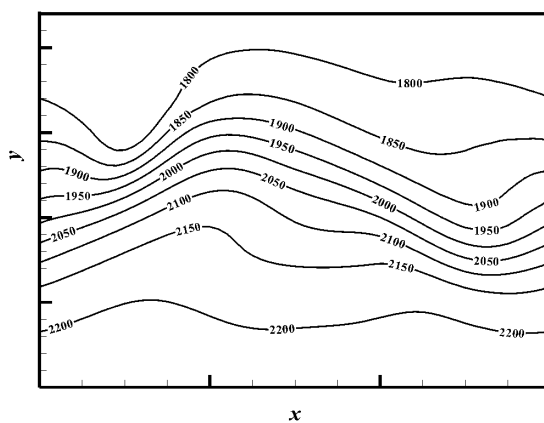
شکل‌های ۲ و ۳ به ترتیب نشان‌دهنده تغییرات میدان اولیه ارتفاع نشان داده شده در شکل ۱ پس از انتگرال‌گیری ۲۴ ساعته و ۴۸ ساعته از معادلات آب کم‌عمق با استفاده از روش آبرفشده مرتبه ششم است. در این جواب‌ها از فاصله شبکه‌ای برابر با ۲۰۰ km استفاده شده و گام زمانی جهت انتگرال با توجه به شرط پایداری (ناون ریفاگن، ۱۹۷۸) برابر با ۳۰۰ s انتخاب شده است. بین جواب‌های حاصل از روش آبرفشده و جواب‌های به‌دست آمده از روش‌های فشرده مرتبه چهارم (اصفهانیان و قادر، ۱۳۸۲) و مرتبه دوم مرکزی (اصفهانیان و قادر، ۱۳۸۲) که در شکل‌های ۴ تا ۷ ارائه شده‌اند، مطابقت خوبی برقرار است. در اینجا می‌بایست به این نکته اشاره کرد که علاوه بر کار حاضر که به حل شکل پایستار معادلات آب کم‌عمق در



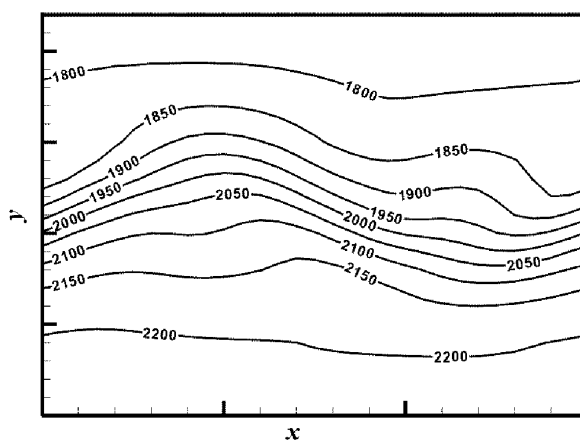
شکل ۱. شرایط اولیه میدان ارتفاع h .



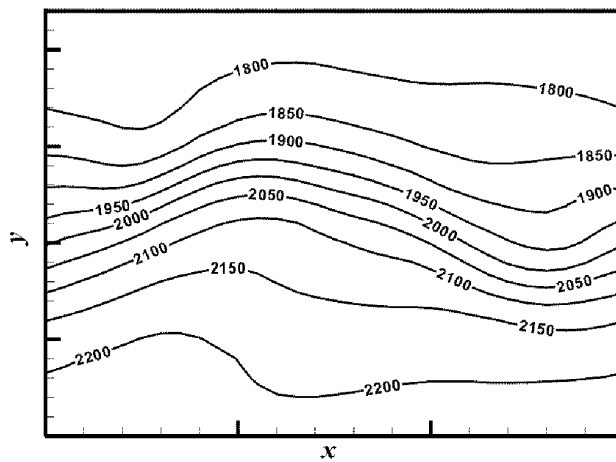
شکل ۲. پیش‌بینی ۲۴ ساعته میدان ارتفاع با استفاده از روش آب‌فشرده مرتبه ششم.



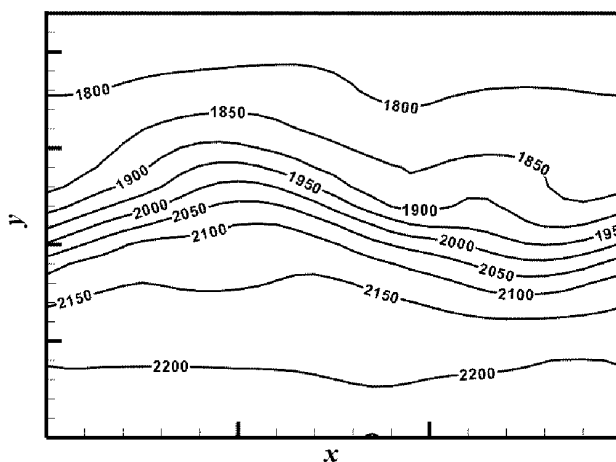
شکل ۳. پیش‌بینی ۴۸ ساعته میدان ارتفاع با استفاده از روش آب‌فشرده مرتبه ششم.



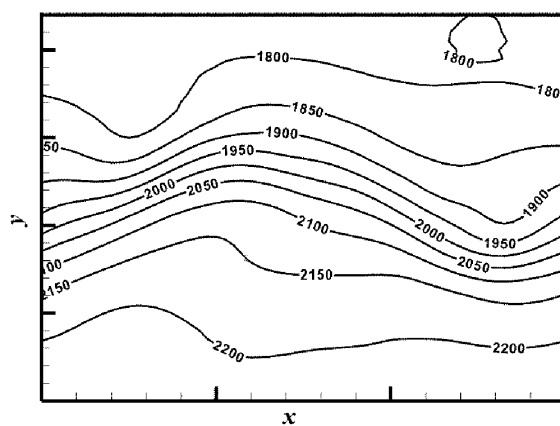
شکل ۴. پیش‌بینی ۲۴ ساعته میدان ارتفاع با استفاده از روش فشرده مرتبه چهارم.



شکل ۵. پیش‌بینی ۴۸ ساعته میدان ارتفاع با استفاده از روش فشرده مرتبه چهارم.



شکل ۶. پیش‌بینی ۲۴ ساعته میدان ارتفاع با استفاده از روش دوم مرکزی.



شکل ۷. پیش‌بینی ۴۸ ساعته میدان ارتفاع با استفاده از روش دوم مرکزی.

دقت روش تعریف می شود. شکل گسسته ضرب داخلی و نرم مورد نظر به صورت زیر خواهد بود.

$$\langle a, b \rangle = \Delta x \Delta y \sum_{i=1}^{N_x} \left\{ \sum_{j=1}^{N_y-1} a_{i,j}^T b_{i,j} + \frac{1}{2} (a_{i,0}^T b_{i,0} + a_{i,N_y}^T b_{i,N_y}) \right\} \quad (22)$$

حال می توان با استفاده از رابطه زیر

$$\text{خطای نسبی} = \frac{\|\varepsilon\|}{\|U_{50}\|} \quad (23)$$

که در آن

$$\varepsilon = U - U_{50}$$

خطای نسبی بین جواب دقیق و جواب تقریبی را به دست آورد. در رابطه بالا متغیر U بیان کننده جواب تقریبی است و دقیق ترین جواب با متغیر U_{50} که مربوط به جواب به دست آمده حاصل از روش آب فرشرده در شبکه ای با فواصل شبکه ای 50km در دو راستای محورهای مختصات است، نشان داده می شود. حال می توان این خطای نسبی را برای روش های آب فرشرده مرتبه ششم، فشرده مرتبه چهارم و مرتبه دوم مرکزی در شبکه هایی با فواصل شبکه ای متفاوت محاسبه کرد.

جدول ۱ نتایج مربوط به خطای نسبی را نشان می دهد. جدول ۱ دقت بیشتر روش آب فرشرده را در مقایسه با دو روش دیگر روشن می سازد. همچنین با دقت در این جدول می توان مشاهده کرد که روش آب فرشرده در مقایسه با روش فشرده ۲۰ درصد افزایش دقت را دارد این مطلب با نتایج اصفهانیان و همکاران (۲۰۰۵) منطبق است.

۷ نتیجه گیری

در مطالعه حاضر حل عددی شکل پایستار معادلات آب کم عمق در صفحه β با استفاده از روش آب فرشرده مرتبه ششم ارائه شد. استفاده از شکل دلتای روش بیم و

جواب های ارائه شده در شکل های ۲ و ۳ با به کارگیری پالایه فشرده معرفی شده در بخش قبل به دست آمده است. برای آن که بتوان اثر این پالایه را مشاهده کرد، در شکل ۸ جواب انتگرال گیری ۲۴ ساعته از معادلات با به کارگیری پالایه ولینگتن بدون استفاده از پالایه فشرده، نشان داده شده است. با توجه به این شکل می توان ناپایداری های پدید آمده در جواب را خصوصاً در نزدیکی مرزها مشاهده کرد. از طرف دیگر برای آن که بتوان از نحوه عملکرد پالایه فشرده معرفی شده مطمئن شد، در شکل ۹ تغییرات زمانی انستروپی پتانسیلی برای حالتی که از پالایه فشرده استفاده شده و برای حالتی که این پالایه در انتگرال گیری مورد استفاده قرار نگرفته، به نمایش در آمده است. به وضوح می توان مشاهده کرد که استفاده از پالایه فشرده، پایستگی انستروپی پتانسیلی را در طول انتگرال گیری حفظ کرده است. همچنین این شکل نبود حفظ پایستگی انستروپی پتانسیلی و ایجاد ناپایداری هنگام استفاده از پالایه ولینگتن را نشان می دهد.

۶-۲ بررسی دقت روش آب فرشرده

در این بخش در نظر داریم تا دقت روش آب فرشرده را با روش های فشرده مرتبه چهارم و مرتبه دوم مقایسه کنیم، از آنجا که روش آب فرشرده روشی از مرتبه ششم است، انتظار می رود که نسبت به دو روش دیگر دقیق تر عمل کند. برای رسیدن به این منظور یک فضای هیلبرت شامل همه بردارهایی که در شرایط زیر صدق کنند، تعریف می شود (گوستاوسن، ۱۹۷۱).

$$\tilde{U}_{i,j} = \tilde{U}_{i+N_x,j}, \quad \tilde{U} = (u, v, h)^T$$

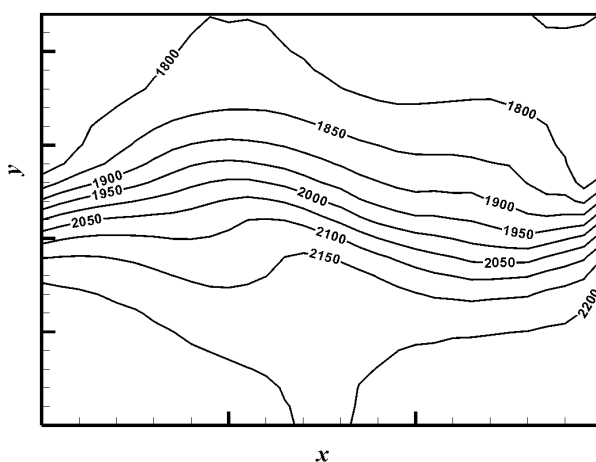
و

$$v_{i,0} = v_{i,N_y}$$

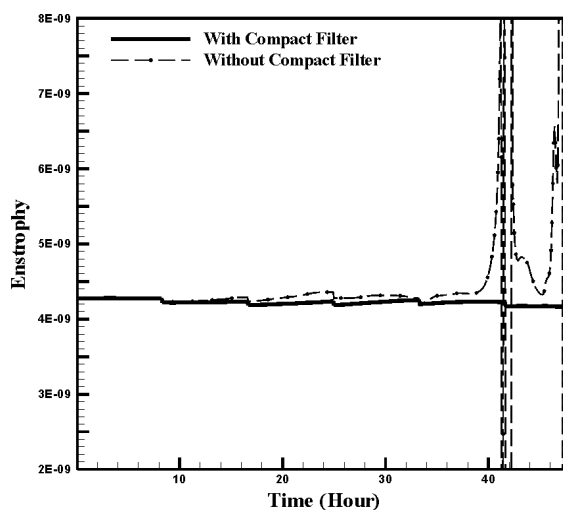
در معادلات بالا فرض می شود که $j = 0, 1, \dots, N_y, i = 0, \dots, N_x$ برقرار باشد. نرمی ناشی از ضرب داخلی هر دو بردار دلخواه a و b ، برای آزمودن

جدول ۱. خطای نسبی.

خطای نسبی	روش	
4.602×10^{-4}	$\Delta x = \Delta y = 100\text{km}$	آبرفشده
1.265×10^{-3}	$\Delta x = \Delta y = 200\text{km}$	آبرفشده
5.839×10^{-4}	$\Delta x = \Delta y = 100\text{km}$	فشده
1.407×10^{-3}	$\Delta x = \Delta y = 200\text{km}$	فشده
7.570×10^{-4}	$\Delta x = \Delta y = 100\text{km}$	مرتبه دوم
2.500×10^{-3}	$\Delta x = \Delta y = 200\text{km}$	مرتبه دوم



شکل ۸. پیش‌بینی ۲۴ ساعته میدان ارتفاع با استفاده از روش ابرفشده مرتبه ششم بدون استفاده از پالایه مرتبه چهارم.



شکل ۹. تغییرات زمانی انستروفی پتانسیلی برای هنگامی که از پالایه مرتبه چهارم استفاده شده است (خطوط ضخیم) و حالتی که این پالایه مورد استفاده قرار نگرفته است (خطوط خط چین نازک)، محور زمان برحسب ساعت است.

سازمان هواشناسی کشور تهران ۱۳۸۲.
اصفهانیان، و. و قادر، س.، ۱۳۸۲ ب، حل عددی معادلات آب کم عمق با استفاده از روش فشرده، نشریه دانشکده فنی دانشگاه تهران، جلد ۳۷ شماره ۳، شماره پیاپی ۸۱، صفحات ۳۳۵ تا ۳۴۴.
قادر، س.، ۱۳۷۹، شبیه سازی عددی معادلات پایداری جریان لایه مرزی آرام بر روی صفحه تخت با استفاده از معادلات PSE به روش عددی آبرفشرده، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه تهران.

- Arakawa, A., and Lamb, R., 1977, Computational design of the basic dynamic processes of the UCLA general circulation model, *Method. Comput. Phys.*, **17**, 174-265.
- Beam, R. M., and Warming, R. F., 1976, An implicit finite difference algorithm for hyperbolic systems in conservative-low form, *J. Comput. Phys.*, **22**, 87-116.
- Beam, R. M., and Warming, R. F., 1978, An implicit factored scheme for The compressible Navier-stokes equations, *Am. Ins. Aeron. Astronaut. J.*, **16**, 393-402.
- Blayo, E., 2000, Compact finite difference schemes for ocean models 1.ocean waves., *J. Comput. Phys.*, **164**, 241-257.
- Dexun, Fu., and Yanwen, Ma., 2001, Analysis of super compact finite difference method and application for simulation of vortex-shock interaction, *Int. J. Numer. Meth. Fl.*, **36**, 773-805.
- Douglas, J. Jr., and Gunn, J. E., 1964, A general formulation of alternating direction methods, *Numer. Math.*, **6**, 428-453.
- Esfahanian, V., Ghader, S., and Ashrafi, kh., 2004, Accuracy analysis of super compact scheme in nonuniform grid with application to parabolized stability equations, *Int. J. Numer. Meth. Fl.*, **46**, 485-505.
- Esfahanian, V., Ghader, S., and Moheblhojeh, A. R., 2005, On the use of super compact scheme for spatial differencing in numerical models of the Atmosphere, *Q. J. Roy. Meteor. Soc.*, **131**, 2109-2129.
- Fox, L., and Goodwin, E. T., 1949, Some new methods for the numerical integration of ordinary differential equations, *Proc. Cambridge Phil. Soc. Math. Phys.*, **45**, 373-388.
- Gustafsson, B., 1971, An ADI method for solving

وارمینگ برای گسسته سازی معادلات منجر به حذف یک مرحله از مراحل حل عددی نسبت به روش پایه ای بیم و وارمینگ (ناون وریفانگن ۱۹۷۹) شده است. برای گسسته سازی مکانی شکل پایستار معادلات آب کم عمق با استفاده از روش آبرفشرده به علت وجود مشتقات مرتبه بالا به صورت ضمنی در فرمول بندی روش نیاز است تا شکل پایستار معادلات به گونه ای که جزئیات آن در متن مقاله آمد، گسسته شود.

برای غلبه بر خطای دگر نامیدن ناشی از اندرکنش جملات غیرخطی موجود در معادلات، می بایست از پالایه ای در طول مراحل انتگرال گیری به صورت متناوب استفاده شود. در این تحقیق نشان داده شد که استفاده از پالایه های رایج، توانایی حذف امواج مزاحم را هنگام به کارگیری روش آبرفشرده در پی ندارد و به همین دلیل نحوه استفاده از یک پالایه بر پایه روش های فشرده مورد بررسی قرار گرفت. کمیت های ناوردای مدل مانند انستروپی پتانسیلی در طول انتگرال گیری عددی از معادلات با استفاده از پالایه فشرده به خوبی پایستگی را حفظ می کنند. اعتبار حل ارائه شده از جواب های حاصل با نتایج محققان قبلی سنجیده می شود. نتایج آزمایش های عددی به منظور نشان دادن دقت زیاد روش آبرفشرده در مقایسه با روش های مرتبه دوم مرکزی و فشرده مرتبه چهارم نیز ارائه شده است.

تشکر و قدردانی

از دانشگاه تهران و پژوهشگاه هواشناسی و علوم جو به خاطر حمایت از این کار تحقیقاتی سپاسگزاریم.

منابع

اصفهانیان، و. و قادر، س.، ۱۳۸۲ الف، حل عددی شکل پایستار معادلات آب کم عمق با استفاده از روش های مرتبه دوم مرکزی و فشرده مرتبه چهارم، مجموعه مقالات سومین کنفرانس پیش بینی عددی وضع هوا

- Navon, I. M., and Riphagen, H. A., 1979, An Implicit compact fourth-order algorithm for solving the shallow the shallow water equations in conservative-law form, *Mon. Wea. Rev.*, **107**, 1107-1127.
- Numerov, B. V., 1924, A method of extrapolation of perturbations, *Roy. Astron. Soc. Mon. Notice.*, **84**, 592-601.
- Randall, D. A., 1994, Geotropic adjustment and finite-difference shallow-water equations, *Mon. Wea. Rev.*, **122**, 1371-1377.
- Wallington, C. E., 1962, The use of smoothing or filtering operators in numerical forecasting, *Q. J. Roy. Meteor. Soc.*, **88**, 473-484.
- Yanwen, Ma., and Dexun, Fu., 1996, Super compact finite difference method (SCFDM) with arbitrary high accuracy, *Comput. fluid Dyn. J.*, **5**, 259-276.
- the shallow water equations, *J. Comput. Phys.*, **7**, 239-253.
- Haltiner, G. J., and Williams, R. T., 1980, *Numerical prediction and dynamic meteorology*, John Wiley & Sons, Inc., New York.
- Hirsch, S. R., 1975, Higher order accurate difference solutions of fluid mechanics problems by a compact differencing technique, *J. Comput. Phys.*, **19**, 90-109.
- Houghton, D., Kasahara, A., and Washington, w., 1966, Lonhterm integration of the barotropic equations by the lax-wendroff method, *Mon. Wea. Rev.*, **94**, 141-150.
- Kreiss, H. o., Oliger, J., 1972, Comparison of accurate methods for the integration of hyperbolic equations, *Tellus*, **24**, 199-215.
- Lele, S. K., 1992, Compact finite difference schemes with spectral-like resolution, *J. Comput. phys.*, **103**, 16-42.