

مقایسه مدل‌های ژئوپتانسیل جدید در منطقه جغرافیایی ایران از راه تابع‌های متفاوت میدان گرانی

علیرضا آزموه اردلان*، عبدالرضا صفری* و یحیی جمور**

*گروه مهندسی نقشه‌برداری، قطب مهندسی نقشه‌برداری و مقابله با سوانح طبیعی، پردیس فنی دانشگاه تهران صندوق پستی ۴۵۶۳-۱۱۳۶۵
 **سازمان نقشه‌برداری کشور صندوق پستی ۱۶۸۴-۱۳۱۸۵

(دریافت: ۸۵۳۲۹، پذیرش نهایی: ۸۵۶۲۸)

چکیده

پیشرفت‌های اخیر در گرانی‌سنجی ماهواره‌ای، هوایی و زمینی باعث تولید مدل‌های ژئوپتانسیل با توان تفکیک بالا شده است. از آنجا که این مدل‌ها ژئوپتانسیلی متکی بر مشاهدات گرانی نوین با تراکم و دقت بالا هستند، منابع با ارزشی، خصوصاً برای بیان طول‌موج‌های بلند و متوسط، به شمار می‌روند و بدین لحاظ تبدیل به بخش‌های اصلی الگوریتم‌های جدید در مدل‌سازی میدان گرانی زمین شده‌اند. با توجه به تنوع نسبتاً زیاد این مدل‌ها، لازم است که کیفیت آنها در مناطق مختلف با مقایسه با مشاهدات گرانی کنترل شود، تا از میان آنها بهترین مدل انتخاب شود. در این مقاله مدل‌های EGM96، PGM2000A، Eigen-cgo1c و Eigen-Grace2s در منطقه جغرافیایی ایران از نظر قابلیت تولید تابع‌های متفاوت میدان گرانی ارزیابی شده‌اند. برای این منظور از داده‌های مربوط به طول و عرض نجومی، شتاب گرانی و ژئوئید حاصل از GPS/Leveling استفاده شده است. براساس نتایج حاصل از کنترل‌های عددی مدل‌های ذکر شده، مدل EGM96 و تقریباً به صورت مشابه مدل PGM2000A نزدیک‌ترین مدل ژئوپتانسیلی به مشاهدات از انواع طول و عرض نجومی، شتاب گرانی و ژئوئید حاصل از GPS/Leveling در منطقه جغرافیایی ایران است.

واژه‌های کلیدی: مدل‌های ژئوپتانسیل، طول نجومی، عرض نجومی، شتاب گرانی، GPS/Leveling

۱ مقدمه

برای یک زمین صلب و دارای دوران، میدان پتانسیل گرانی $W(\lambda, \phi, \eta)$ به دو قسمت، میدان پتانسیل جاذبه $U(\lambda, \phi, \eta)$ و میدان پتانسیل گریز از مرکز قابل تجزیه است:

$$W(\lambda, \phi, \eta) = U(\lambda, \phi, \eta) + V(\lambda, \phi, \eta) \quad (1)$$

در رابطه (۱) مؤلفه‌های مختصات ژاکوبی $\{\lambda, \phi, \eta\}$ دارای تعریف زیرند:

$$\begin{aligned} x &= \varepsilon \cosh \eta \cos \phi \cos \lambda \\ y &= \varepsilon \cosh \eta \cos \phi \sin \lambda \\ z &= \varepsilon \sinh \eta \cos \phi \end{aligned}$$

همچنین $\varepsilon = \sqrt{a^2 - b^2}$ خروج از مرکز خطی بیضوی فرانس با نصف قطر اطول a و نصف قطر

اقصر b است.

پتانسیل جاذبه در خارج از بیضوی فرانس $E_{a,b}^2$ در معادله لاپلاس صدق می‌کند. از حل معادله لاپلاس به روش تفکیک متغیرها $U(\lambda, \phi, \eta) = \Lambda(\lambda)\Phi(\phi)H(\eta)$ جواب ذیل تحت مقادیر مرزی از نوع دیریکله حاصل می‌شود (مون و اسپنسر، ۱۹۶۱؛ هیسکانن و موریتز، ۱۹۶۷؛ اردلان؛ ۱۹۹۹):

$$U(\lambda, \phi, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n u_{nm} \frac{Q_{n/m}^*(\sinh \eta)}{Q_{n/m}^*(\sinh \eta_0)} e_{nm}(\lambda, \phi) \quad (2)$$

در رابطه (۲) $e_{nm}(\lambda, \phi)$ توابع هارمونیک بیضوی با تعریف زیرند:

$$V(\phi, \eta) = \frac{1}{2} \omega^2 \varepsilon^2 \cosh^2 \eta \cos^2 \phi \quad (۸)$$

بر حسب هارمونیک‌های بیضوی $e_{nm}(\lambda, \phi)$:

$$\left\{ \begin{aligned} V(\phi, \eta) &= \frac{1}{3} \omega^2 (P_{20}^*(\sinh \eta) + \varepsilon^2) \cos^2 \phi \\ &= \frac{2}{9} \omega^2 (P_{20}^*(\sinh \eta) + \varepsilon^2) P_{00}^*(\sin \phi) \\ &= \frac{2}{9\sqrt{5}} \omega^2 (P_{20}^*(\sinh \eta) + \varepsilon^2) P_{20}^*(\sin \phi) \\ &= \frac{2}{9} \omega^2 (P_{20}^*(\sinh \eta) + \varepsilon^2) e_{00} \\ &= \frac{2}{9\sqrt{5}} \omega^2 (P_{20}^*(\sinh \eta) + \varepsilon^2) e_{20} \end{aligned} \right. \quad (۹)$$

برای استخراج روابط (۹)، از تساوی‌های زیر استفاده شده است:

$$\cos^2 \phi = \frac{2}{3} \left(P_{00}^*(\sin \phi) - \frac{1}{\sqrt{5}} P_{20}^*(\sin \phi) \right) \quad (۱۰)$$

$$u^2 + \varepsilon^2 = \frac{2}{3} (P_{20}^*(\sinh \eta) + \varepsilon^2) \quad (۱۱)$$

چنانچه بسط هارمونیک‌های بیضوی زمین تا درجه و مرتبه محدودی در نظر گرفته شود، به میدان جاذبه فرانس برای فضای بیرونی زمین خواهیم رسید. برای مثال اگر بسط هارمونیک بیضوی میدان جاذبه زمین را تا درجه و مرتبه M در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$U_g(\lambda, \phi, \eta) = \sum_{n=0}^M \sum_{m=-n}^n u_{nm} \frac{Q_{n/m}^*(\sinh \eta)}{Q_{n/m}^*(\sinh \eta_0)} e_{nm}(\lambda, \phi) \quad (۱۲)$$

در روابط (۱۲) ضرایب u_{nm} را می‌توان از راه آنالیز هارمونیک بیضوی میدان جاذبه خارجی زمین یا با تبدیل هارمونیک‌های کروی به هارمونیک‌های بیضوی تعیین کرد. برای تبدیل ضرایب هارمونیک کروی به هارمونیک بیضوی می‌توان برای مثال از رابطه زیر که جکلی آن را ارائه کرد (جکلی، ۱۹۸۸) و از دیدگاه نظری بدون خطاست، استفاده کرد:

$$e_{nm}(\lambda, \phi) = P_{n/m}^*(\sin \phi) \begin{cases} \cos m\lambda & m \geq 0 \\ \sin |m|\lambda & m < 0 \end{cases} \quad (۳)$$

جواب فوق با توجه به لحاظ کردن مقادیر مرزی دیریکله در فضای خارج بیضوی فرانس $x^2 + y^2 / (\varepsilon^2 \cosh^2 \eta_0) + z^2 / \varepsilon^2 \sinh^2 \eta_0 = 1$ است. در روابط (۲) و (۳) $P_{n/m}^*(\sin \phi)$ و $Q_{n/m}^*(\sin \phi)$ به ترتیب توابع لژاندر وابسته نوع اول و دوم‌اند. توابع هارمونیک بیضوی $e_{nm}(\lambda, \phi)$ با وزن $\omega(\phi)$ در روی سطح بیضوی فرانس متعامند (تانگ و گرافارند، ۱۹۸۹؛ اردلان، ۱۹۹۹):

$$\begin{aligned} \langle e_{pq}(\lambda, \phi) | e_{nm}(\lambda, \phi) \rangle \\ =: \frac{1}{S} \int_{E_{\varepsilon \cosh \eta, \varepsilon \sinh \eta}^2} dS \omega(\phi) e_{pq}(\lambda, \phi) e_{nm}(\lambda, \phi) \\ = \delta_{pn} \delta_{qm} \end{aligned} \quad (۴)$$

در رابطه (۴) $\omega(\phi)$ دارای تعریف زیر است:

$$\omega(\phi) = \frac{a}{\sqrt{b^2 + \varepsilon \sin^2 \phi \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \frac{b^2}{a\varepsilon} \ln \frac{a+\varepsilon}{a-\varepsilon} \right)}} \quad (۵)$$

و S نیز مساحت، سطح بیضوی فرانس $E_{a,b}^2$ ، و به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$S = \text{area}(E_{a,b}^2) = 4\pi a \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \frac{b^2}{a\varepsilon} \ln \frac{a+\varepsilon}{a-\varepsilon} \right) \quad (۶)$$

پتانسیل گریز از مرکز $V(\lambda, \phi, \eta)$ را می‌توان در دستگاه‌های مختصات کارترین و ژاکوبی $\{\lambda, \phi, \eta\}$ و نیز بر حسب هارمونیک‌های بیضوی $e_{nm}(\lambda, \phi)$ به صورت زیر نمایش داد:

در دستگاه‌های مختصات کارترین $\{x, y, z\}$:

$$V(x, y) = \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) \quad (۷)$$

در دستگاه مختصات: $\{\lambda, \phi, \eta\}$:

TRANET) و به علاوه فواصل آلتمتری مستقیم حاصل از GEOSAT و ERS-1، (T/P) TOPEX/Poseidon استفاده شده است. این مدل از ترکیب مدلی تا درجه و مرتبه ۷۰، جوابی قطری بلوکی (block-diagonal) از درجه و مرتبه ۷۱ تا درجه و مرتبه ۳۵۹ و جوابی تریبی (quadrature) در درجه و مرتبه ۳۶۰ حاصل شده است. از این مدل می‌توان ژئوئیدی با دقت در حد یک متر به دست آورد (به غیر از مناطق فاقد داده‌های شتاب گرانی سطحی و یا با دقت پایین). این مدل شامل ضرایب هارمونیک‌های کروی تا درجه و مرتبه ۳۶۰ است (لموینه و همکاران ۱۹۹۸).

مدل ژئوپتانسیلی PGM2000A حاصل از اطلاعات توپوگرافی دینامیکی اقیانوس متوسط (dynamic ocean topography) سال‌های ۱۹۹۴ تا ۱۹۹۳ و مدل جریان (circulation) POCM_4B است. اطلاعات یاد شده با داده‌های شتاب گرانی سطحی و داده‌های آلتمتری حاصل از ERS-1 و Topex/Poseidon نیز ترکیب شده و نهایتاً مدلی از نوع هارمونیک‌های کروی تا درجه و مرتبه ۳۶۰ به نام PGM2000A تولید شده است (پاولیس و همکاران ۲۰۰۰).

مدل Eigen-cg01 ترکیبی از اطلاعات GRACE (اطلاعات ۲۰۰ روز به غیر از ماه‌های آوریل، مه، اوت و نوامبر ۲۰۰۲ و ماه‌های آوریل، مه، اوت، اکتبر و نوامبر ۲۰۰۳) و اطلاعات ماموریت CHAMP (اطلاعات ۸۶۰ روز به غیر از ماه‌های اکتبر ۲۰۰۰ تا ژوئن ۲۰۰۳) و اطلاعات آلتمتری و داده‌های گراویمتری سطحی است. این مدل شامل ضرایب هارمونیک‌های کروی تا درجه و مرتبه ۳۶۰ است و بنابراین اطلاعات تا طول موج ۱۱۰ کیلومتر در ژئوئید و میدان گرانی را در بر می‌گیرد. دقت کلی مدل ۲۰ سانتی‌متر برحسب ژئوئید و ۵ میلی‌گال برحسب شتاب گرانی برآورد شده است. از ویژگی‌های این مدل می‌توان به کارگیری اطلاعات آنومالی شتاب

$$u_{n,m}(\text{Ellipsoid}) = Q_{n/m}^* (\sinh \eta_0) \sum_{l=0}^{(n-m)/2} \lambda_{n,|m|,l} u_{n-2|m|,|m|}(\text{Sphere})$$

$$\lambda_{n,m,l} = \frac{(2n-2l)!n!}{(2n)!!(n-1)!} \times \left[\frac{(2n-4l+1)(n-m)!(n+m)!}{(2n+1)!(n-2l+m)!(n-2l-m)!} \right]^{1/2} \left(\frac{\varepsilon}{a} \right)^{2l}$$

$$\forall n \in [0, \infty] \text{ and } m \in [-n, +n]$$

(۱۳)

در زمینه مدل‌سازی میدان گرانی زمین برحسب هارمونیک‌های کروی، تاکنون فعالیت‌های عدیده‌ای صورت گرفته که برای نمونه می‌توان به کارهای رپ و همکاران (۱۹۹۱)، فدرستون (۲۰۰۲a، ۲۰۰۲b)، فدرستون و همکاران (۱۹۹۷، ۲۰۰۰، ۲۰۰۱a,b)، جکلی (۱۹۹۹)، لموینه و همکاران (۱۹۹۶، ۱۹۹۸)، پاولیس و همکاران (۲۰۰۰)، ریگبر و همکاران (۲۰۰۴ و ۲۰۰۵)، شرنینگ و همکاران (۱۹۸۳) و ونتسل (۱۹۹۹) اشاره کرد.

مدل‌های Eigen-cg01, PGM2000A، EGM96 و Eigen-Grace2s، نمونه‌هایی از مدل‌های ژئوپتانسیلی جدیداند. از آنجایی که در این مقاله هدف بررسی صحت و دقت این مدل‌ها در منطقه جغرافیایی ایران است، در ادامه به معرفی اجمالی آنها خواهیم پرداخت.

سازمان NASA، NIMA و دانشگاه ایالتی اوهایو با همکاری یکدیگر در ۱۹۹۶ یک مدل هارمونیک‌های کروی را برای پتانسیل جاذبه زمین تا درجه و مرتبه ۳۶۰ ایجاد کرده‌اند. در ایجاد این مدل که مدل EGM96 نامیده می‌شود، از داده‌های شتاب گرانی سطحی، آنومالی‌های جاذبه استخراج شده از ارتفاع‌سنجی ماهواره‌ای حاصل از ماموریت ERS-1 و ماموریت ژئودتیک GEOSAT، داده‌های ردیابی ماهواره‌ای (با استفاده از داده‌های SLR، سامانه تعیین موقعیت جهانی GPS، سامانه فرانسوی DORIS و سیستم ردیابی دوپلر

به مقداری همچون M منجر به تولید یک میدان شتاب گرانی فرانس برای فضای بیرونی زمین می‌شود، به صورت زیر:

$$\Gamma_g := \text{grad} \left(\sum_{n=0}^M \sum_{m=-n}^n u_{nm} \frac{Q_{n|m|}^*(\sinh \eta)}{Q_{n|m|}^*(\sinh \eta_0)} e_{nm}(\lambda, \phi) \right) + \text{grad} \left(\frac{1}{2} \omega^2 \varepsilon^2 \cosh^2 \eta \cos^2 \phi \right) = \frac{1}{\sqrt{g_{\lambda\lambda}}} \frac{\partial(U_g(\lambda, \phi, \eta))}{\partial \lambda} e_\lambda + \frac{1}{\sqrt{g_{\phi\phi}}} \frac{\partial(U_g(\lambda, \phi, \eta))}{\partial \phi} e_\phi + \frac{1}{\sqrt{g_{\eta\eta}}} \frac{\partial(U_g(\lambda, \phi, \eta))}{\partial \eta} e_\eta + \frac{1}{\sqrt{g_{\phi\phi}}} \frac{\partial(V(\phi, \eta))}{\partial \phi} e_\phi + \frac{1}{\sqrt{g_{\eta\eta}}} \frac{\partial(V(\phi, \eta))}{\partial \eta} e_\eta \quad (15)$$

که در رابطه (۱۵)

$$U_g(\lambda, \phi, \eta) = \sum_{n=0}^M \sum_{m=-n}^n u_{nm} \frac{Q_{n|m|}^*(\sinh \eta)}{(\sinh \eta_0)} e_{nm}(\lambda, \phi) \quad (16)$$

بسط هارمونیک‌های بیضوی پتانسیل جاذبه تا درجه و مرتبه M و $e_\lambda, e_\phi, e_\eta$ بردارهای پایه دستگاه مختصات متحرک محلی (local moving frame) است. در فرمول (۱۵) $g_{\lambda\lambda}, g_{\phi\phi}, g_{\eta\eta}$ ضرایب تانسور متریک‌اند و به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$g_{\lambda\lambda} = \varepsilon^2 \cosh^2 \eta \cos^2 \phi \quad (17)$$

$$g_{\phi\phi} = g_{\eta\eta} = \varepsilon^2 (\cosh^2 \eta - \cos^2 \phi)$$

برای آشنایی با مشتقات جزئی به کار رفته در رابطه (۱۵) می‌توان به اردلان (۱۹۹۹) مراجعه کرد.

گرانی جدید در مناطق قطبی را برشمارد (ریگبر و همکاران ۲۰۰۴).

مدل Eigen-Grace2s از منحصراً اختلال‌های مداری ماهواره GRACE در ۱۱۰ فعالیت این ماهواره محاسبه شده و بدین لحاظ مدلی مستقل از داده‌های شتاب گرانی سطح زمین و اقیانوس‌ها است. بنا به گفته سازندگان این مدل، صحت آن ۱ میلی‌متر در طول موج ۱۰۰۰ کیلومتری و از ۱۰ برابر از مدل‌های گرانی حاصل از CHAMP و ۱۰۰ برابر از مدل‌های گرانی قبل از CHAMP دقیق‌تر است. ضرایب این مدل تا درجه و مرتبه ۱۵۰ در دسترس است (ریگبر و همکاران، ۲۰۰۵).

با این مقدمه به نحوه تولید تابع‌های متفاوت میدان گرانیک برحسب هارمونیک‌های بیضوی می‌پردازیم و در ادامه از آنها ارزیابی مدل‌های ژئوپتانسیلی استفاده خواهیم کرد.

۲ تابع‌های میدان گرانی حاصل از بسط هارمونیک‌های بیضوی

۱-۲ قدر مطلق شتاب گرانی

در بخش نخست، پتانسیل گرانی در خارج زمین را برحسب هارمونیک‌های بیضوی به صورت زیر به دست آوردیم:

$$W = (\lambda, \phi, \eta) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n u_{nm} \frac{Q_{n|m|}^*(\sinh \eta)}{(\sinh \eta_0)} e_{nm}(\lambda, \phi) \quad (14)$$

در رابطه (۱۴) ضرایب هارمونیک‌های بیضوی است که برای مثال می‌توانند از طریق رابطه (۱۳) با انتقال ضرایب هارمونیک‌های کروی به بیضوی محاسبه کرد. جهت به دست آوردن مدل شتاب گرانی بیرونی زمین می‌توان از اعمال اپراتور گرادیان به تساوی (۱۴) استفاده کرد. همچنین محدود نمودن درجه بسط

می‌شود:

$$\delta W = w - W \quad (19)$$

با تعریف فوق برای پتانسیل جاذبه تفاضلی مؤلفه‌های انحراف قائم به صورت زیر تعریف می‌شوند جکلی (۱۹۹۹):

$$\zeta = -\frac{1}{\gamma_0 g_{\phi\phi}} \frac{\partial \delta W}{\partial \phi} \quad (20)$$

$$\eta = -\frac{1}{\gamma_0 g_{\lambda\lambda}} \frac{\partial \delta W}{\partial \lambda}$$

که در رابطه فوق γ_0 قدمطلق شتاب گرانی نرمال روی بیضوی مواد میدان گرانی سومیگلیانا-پیزتی است.

۲-۴ میدان گرانی سومیگلیانا-پیزتی

در مطالعه میدان گرانی زمین معمولاً این میدان را به دو قسمت نرمال و جزء باقی‌مانده تجزیه می‌کنیم. میدان گرانی نرمال بایستی به نحوی انتخاب شود که بتوان از مربع آنامولی‌های پتانسیل و همه مشتقات آن صرف نظر کرد. ساده‌ترین میدان نرمال میدانی شعاعی است که با یک جرم نقطه‌ای یا با یک کره با توزیع جرم شعاعی تولید می‌شود. یک تقریب نزدیک‌تر به واقعیت میدان بیضوی نرمالی است که با میدان گرانی جسمی بیضوی تحت شرایط زیر تولید می‌شود:

۱. دارای همان سرعت چرخش زمین واقعی است.

۲. دارای شکل و اندازه‌ای نزدیک به زمین واقعی است.

۳. پتانسیل روی سطح آن با پتانسیل ژئوئید برابر است.

۴. جرم آن برابر با جرم زمین واقعی است.

چنین میدان نرمالی را میدان گرانی سومیگلیانا-

پیزتی می‌نامند. لازم به ذکر است که توزیع جرم در داخل جسم نرمال، تأثیری در میدان خارج آن ندارد (بیک و همکاران، ۱۹۷۳). پتانسیل میدان سومیگلیانا-پیزتی در مختصات بیضوی u, ϕ, λ به صورت زیر ارائه می‌شود.

۲-۲ تعیین ژئوئید با استفاده از ضرایب ژئوتانسیلی

برونز، در سال ۱۸۸۰ فرمول تبدیل مشهور خود را ارائه کرد. این فرمول پتانسیل تفاضلی روی کره فرانس $S_{f_0}^2$ را به ارتفاعات ژئوئید تبدیل می‌کند (برونز ۱۸۷۸). تا حدود ۹۰ سال فرمول برونز اسکالر بدون تغییر باقی ماند. افراد زیادی نظیر هیروان (۱۹۶۱a, ۱۹۶۱b)، کراروپ (۱۹۶۹)، گرافارند (۱۹۷۸، ۱۹۸۰)، سانسو (۱۹۷۹) و بده و گرافارند (۱۹۸۲) در مبحث ژئودزی سه‌بعدی، فرمول برونز اسکالر را به فرمول برونز برداری تبدیل کردند. اخیراً گرافارند و همکارانش (۱۹۹۹) پیشنهاد استفاده از یک میدان پتانسیل فرانس بیضوی و بیضوی فرانس بین‌المللی را برای به دست آوردن تبدیل برونز بیضوی اسکالر مطرح کرده‌اند. فرمول برونز بیضوی برای میدان پتانسیل گرانی سومیگلیانا-پیزتی به صورت زیر بیان شده است:

$$N = -\frac{\sqrt{b^2 + \varepsilon^2} \sin^2 \phi}{\sqrt{b^2 + \varepsilon^2}} / \left\{ -\frac{GM}{b^2 + \varepsilon^2} \right. \\ \times \left(\frac{6(b^2 + \varepsilon^2) \operatorname{arccot} \cot \left(\frac{b}{e} \right) - 3b\varepsilon + \varepsilon^2 - 3\varepsilon}{6(b^2 + \varepsilon^2) \operatorname{arccot} \cot \left(\frac{b}{\varepsilon} \right) - 3b\varepsilon} \right) \\ \times (3 \sin^2 \phi + 1) + \Omega^2 b \cot \phi \} \\ \times (w(x_0) - W_0) \quad (18)$$

براساس این فرمول برای تعیین ژئوئید کافی است که روی بیضوی فرانس از نوع سومیگلیانا-پیزتی پتانسیل گرانی را محاسبه کرده و از پتانسیل ژئوئید تفاضل نمائیم. این عمل را می‌توان از راه بسط به هارمونیک‌های بیضوی با استفاده از روابط (۱۴) و پتانسیل گریز از مرکز رابطه (۸) به انجام رساند.

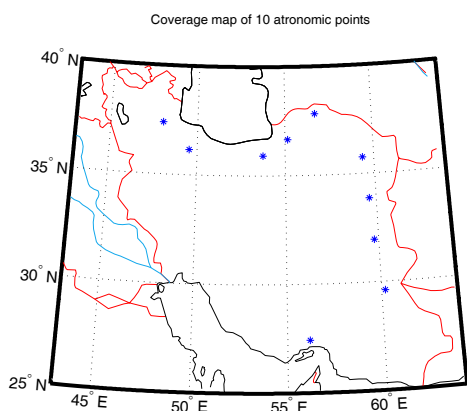
۲-۳ مؤلفه‌های انحراف قائم

با تعریف پتانسیل نرمال توسط W و پتانسیل گرانی واقعی با w پتانسیل جاذبه تفاضلی δW به صورت زیر تعریف

نمونه قابل دستیابی مؤلفین از منابع سازمان نقشه‌برداری کشور است.

برای محاسبه شتاب گرانی از رابطه (۱۵) استفاده شده نرم شتاب گرانی در تعداد ۶۹۴۵ ایستگاه گرانی شبکه ترازیبی دقیق سازمان نقشه‌برداری کشور (شکل ۲) با استفاده از مدل‌های ژئوپتانسیلی متفاوت محاسبه و نتایج حاصل با مشاهدات گرانی مقایسه شده است. نتایج این مقایسه در جدول ۲ خلاصه شده است. همان‌طور که در این جدول ملاحظه می‌شود. کوچک‌ترین میانگین اختلاف مربوط به مدل‌های EGM96 و PGM2000A بوده و بیشترین اختلاف میانگین مربوط به مدل Eigen-cg01 است.

تابع سوم محاسبه شده از راه ضرایب ژئوپتانسیلی ژئوئید است. برای محاسبه ژئوئید به کمک ضرایب ژئوپتانسیلی از رابطه (۱۸) استفاده شده، و نتایج حاصل با ژئوئید به دست آمده از تعداد ۴۰۰ نقطه GPS/Leveling (شکل ۳) مقایسه و نتایج مقایسه در جدول ۳ آورده شده است. همان‌طور که در این جدول ملاحظه می‌شود، کوچک‌ترین میانگین اختلاف، مربوط به مدل‌های EGM96 و PGM2000A و بیشترین اختلاف میانگین، مربوط به مدل Eigen-GRACE2S است.

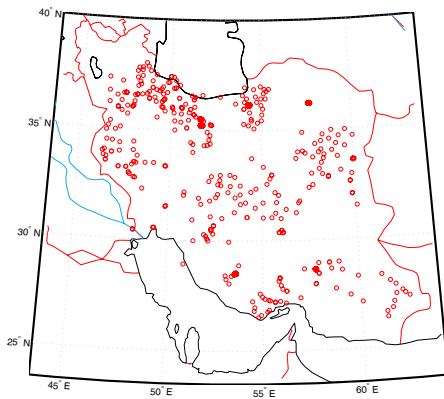


شکل ۱. تعداد ۱۰ ایستگاه لاپلاس به کار رفته در ارزیابی مدل‌های ژئوپتانسیلی این تحقیق.

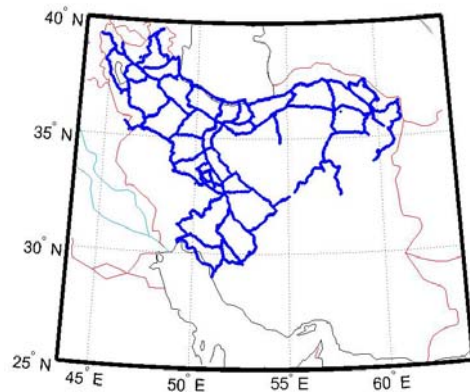
$$\begin{aligned}
 W(\phi, u) = & \frac{GM}{\varepsilon} \arccot\left(\frac{u}{\varepsilon}\right) + \frac{1}{6} \Omega^2 a^2 \\
 & + \left[\left(3\left(\frac{u}{\varepsilon}\right)^2 + 1 \right) \arccot\left(\frac{u}{\varepsilon}\right) - 3\left(\frac{u}{\varepsilon}\right) \right] \\
 & \times \left[\left(3\left(\frac{b}{\varepsilon}\right)^2 + 1 \right) \arccot\left(\frac{b}{\varepsilon}\right) - 3\left(\frac{b}{\varepsilon}\right) \right] \\
 & \times \frac{\Omega^2 a^2}{3\sqrt{5}} e_{20}(\lambda, \phi) + \\
 & + \frac{1}{3} \omega^2 (u^2 + \varepsilon^2) \left(e_{00}(\lambda, \phi) - \frac{1}{\sqrt{5}} e_{20}(\lambda, \phi) \right)
 \end{aligned}
 \tag{21}$$

۳ مطالعه موردی براساس داده‌های واقعی

در این بخش به ارائه ارزیابی مدل‌های ژئوپتانسیلی از راه تولید تابع‌های میدان گرانی از انواع طول و عرض نجومی، شتاب گرانی و ژئوئید پرداخته‌ایم. مقایسه طول و عرض نجومی حاصل از ضرایب ژئوپتانسیلی در ۱۰ ایستگاه نجومی لاپلاس (شکل ۱)، مقایسه شتاب گرانی حاصل از ضرایب ژئوپتانسیلی در ۶۹۴۵ ایستگاه گرانی شبکه ترازیبی دقیق سازمان نقشه‌برداری کشور (شکل ۲) و مقایسه ژئوئید حاصل از مدل‌های ژئوپتانسیلی در تعداد ۴۰۰ نقطه GPS/Leveling (شکل ۳) صورت گرفته است. جدول ۱ بیانگر خلاصه اطلاعات آماری تفاوت بین مؤلفه‌های انحراف قائم مشاهده شده با مؤلفه‌های انحراف قائم محاسبه شده از مدل‌های ژئوپتانسیلی بر اساس روابط (۲۰) است. همان‌طور که در این جدول ملاحظه می‌شود، کوچک‌ترین میانگین اختلاف در مؤلفه x مربوط به مدل‌های EGM96 و PGM2000A است. در مورد مؤلفه h کوچک‌ترین میانگین اختلاف، مربوط به مدل‌های ژئوپتانسیلی Eigen-cg01 است و بیشترین اختلاف میانگین مربوط به مدل Eigen-GRACE2S است. لازم به توضیح است که این نتایج از یک جامعه آماری ۱۰ عضوی به دست آمده است که از نظر آماری شاید جامعه نسبتاً کوچکی به شمار رود، اما به هر حال این بزرگترین



شکل ۳. تعداد ۴۰۰ نقطه در امتداد خطوط ترازیبی که دارای مختصات دقیق ژئودتیکی است و بدین لحاظ در این نقاط ارتفاع ژئوئید قابل محاسبه است.



شکل ۲. تعداد ۶۹۴۵ نقطه دارای شتاب گرانی در امتداد خطوط ترازیبی درجه یک ایران.

جدول ۱. مؤلفه‌های انحراف قائم محاسبه شده از راه مدل‌های ژئوپتانسیلی با مؤلفه‌های انحراف قائم حاصل از مشاهدات نجومی دقیق صورت گرفته در ۱۰ ایستگاه لاپلاس آرک سراسری کشور.

	Min	Mean	Max	Std
$\zeta^{Obs} - \zeta^{EGM96}$	16.00"	-0.031"	-35.84"	14.56"
$\eta^{Obs} - \eta^{EGM96}$	-12.21"	2.09"	12.74"	6.64"
$\zeta^{Obs} - \zeta^{EGM2000A}$	15.97"	-0.031"	-35.82"	14.56"
$\eta^{Obs} - \eta^{EGM2000A}$	-12.21"	2.10"	12.72"	6.64"
$\zeta^{Obs} - \zeta^{Eigen-cg01}$	16.12"	-0.24"	-37.32"	14.92"
$\eta^{Obs} - \eta^{Eigen-cg01}$	11.61"	2.02"	-12.06"	6.47"
$\zeta^{Obs} - \zeta^{Eigen-GRACE2S}$	13.97"	0.32"	-34.10"	13.14"
$\eta^{Obs} - \eta^{Eigen-GRACE2S}$	-7.60"	2.36"	13.36"	6.47"

جدول ۲. اختلاف شتاب گرانی محاسبه شده از راه مدل‌های ژئوپتانسیلی و شتاب گرانی مشاهده شده در ۶۹۴۵ ایستگاه گرانی‌سنجی در امتداد شبکه ترازیبی دقیق ایران.

	Min mGal	Mean mGal	Max mGal	Std mGal
$g^{Obs} - g^{EGM96}$	-320.96	-17.00	458.10	85.49
$g^{Obs} - g^{EGM2000A}$	-320.82	-17.04	458.06	85.48
$g^{Obs} - g^{Eigen-cg01}$	-317.84	-19.01	453.01	85.59
$g^{Obs} - g^{Eigen-GRACE2S}$	-302.51	-18.58	476.58	87.77

جدول ۳. اختلاف ژئوئید محاسبه شده از راه مدل‌های ژئوپتانسیلی و ژئوئید حاصل از GPS/Leveling.

	Min	Mean	Max	Std
$N^{Obs} - N^{EGM96}$	2.83	-0.46	-3.00	0.72
$N^{Obs} - N^{EGM2000A}$	2.86	-0.46	-2.99	0.73
$N^{Obs} - N^{Eigen-cg01}$	2.81	-0.76	-3.43	0.76
$N^{Obs} - N^{Eigen-GRACE2S}$	-5.54	-0.89	3.37	1.17

۵ بحث و نتیجه‌گیری

با توجه پیشرفت‌های اخیر در گرانی‌سنجی ماهواره‌ای، هوایی و زمینی و تولید مدل‌های ژئوپتانسیل جدید، همواره این سؤال در ذهن متخصصین علوم زمین دست اندرکار میدان گرانی مطرح بوده است که استفاده از این مدل‌ها به چه میزان موجب بهبودی نتایج قبلی خواهد شد. برای پاسخ به این سؤال در این مقاله اقدام به محاسبه تابعک‌های متفاوت میدان گرانی که به‌طور مستقیم قابل اندازه‌گیری هستند، شد. مدل‌های مورد بررسی EGM96، PGM2000A، Eigen-cg01c و Eigen-Grace2s و تابعک‌های تولید شده طول و عرض نجومی، شتاب گرانی و ژئوئید است. بر اساس نتایج حاصل، دو مدل EGM96 و PGM2000A تقریباً دارای دقت مساوی در محدوده جغرافیایی ایران‌اند و دو مدل Eigen-cg01c و Eigen-Grace2s در این منطقه جغرافیایی دارای دقت کمتری هستند. این نتیجه شاید از آنجا ناشی شود که محتوای اطلاعات به‌کار رفته در مدل‌های جدید، مانند PGM2000A با مدل‌های قبل مانند EGM96 یکسان است و در مورد مدل‌های Eigen-cg01c و Eigen-Grace2s احتمالاً اطلاعات گرانی منطقه جغرافیایی ایران مورد استفاده قرار نگرفته باشد. این نتیجه شاید تأکیدی مجدد بر نیاز ملی تولید مدلی ژئوپتانسیلی برای منطقه جغرافیایی ایران، به‌دست متخصصین داخلی باشد.

منابع

- Ardalan, A. A., 1999, High resolution regional geoid computation in the world geodetic datum 2000, based upon collocation of linearized observational functionals of the type GPS, gravity potential and gravity intensity, Ph.D. thesis, Stuttgart University.
- Ardalan, A. A., and Grafarend, E. W., 2004, High-resolution regional geoid computation without applying Stokes's formula: a case study of the Iranian geoid. *J. Geodesy*, **78**, 138-156.
- Bode, A., Grafarend, E.W., 1982, The telluroid mapping based on a normal gravity potential including the centrifugal term. *Boll Geod. Sci. Aff.*, **41**, 21-56.
- Bruns, H., 1878, Die figur der erde. ein beitrage zur europaischen gradmessung. publ kgl Preu ß Inst, Berlin.
- Featherstone, W. E., 2002a, Expected contributions of dedicated satellite gravity field missions to regional geoid determination with some examples from Australia. *J. Geospatial Eng.* **4**, 2-19.
- Featherstone, W. E., 2002b, Comparison of different satellite altimeter-derived gravity anomaly grids with ship-borne gravity data around Australia, Proceedings of GG2002, Thessaloniki, <http://olimpia.topo.auth.gr/GG2002/SESSION4/session4.html>.
- Featherstone, W. E., and Guo, W., 2001a, A spatial evaluation of the precision of AUSGeoid98 versus AUSGeoid93 using GPS and levelling data, *Geomat. Res. Australasia*, **74**, 75-102.
- Featherstone, W. E., Kearsley, A. H. W. and Gilliland, J. R., 1997, Data preparations for a new Australian gravimetric geoid, *The Aus. Surv.* **42**, 33-44.

- G., Cox, C. M., Rachlin, K. E., Wang, Y. M., Kenyon, S. C., Salman, R., Trimmer, R., Rapp, R. H., and Nerem, R. S., 1996, The development of the NASA GSFC and NIMA joint geopotential model. In: J. Segawa, H. Fujimoto, and S. Okubo (eds), Gravity, Geoid and Marine Geodesy, International Association of Geodesy Symposia, Vol. 117, Springer Berlin Heidelberg pp 461-469.
- Lemoine, F. G., Smith, D. E., Kunz, L., Smith, R., Pavlis, E. C., Pavlis, N. K., Klosko, S. M., Chinn, D. S., Torrence, M. H., Williamson, R. G., Cox, C. M., Rachlin, K. E., Wang, Y. M., Kenyon, S. C., Salman, R., Trimmer, R., Rapp, R. H., and Nerem, R. S., 1998, The development of the NASA GSFC and NIMA joint geopotential model. NASA, technical report No. 206861.
- Moon, P., Spencer, D. E., 1961, Field theory handbook. Springer-verlag, New York, Heidelberg, Berlin.
- Pavlis, N. P., Chinn, D. S., Cox, C. M., Lemoine, F. G. 2000, Geopotential model improvement using POCM-4B Dynamic Ocean Topography Information: PGM2000A. Presented to Joint TOPEX/Poseidon and Jason-1 SWT Meeting Miami, FL. Nov. 15-17, 2000.
- Pick, M., Picha, J., Vyskocil, V., 1973, Theory of the Earth's Gravity Field. Elsevier Scientific Publishing Company.
- Rapp, R. H., Wang, Y. M., Pavlis, N. K., 1991, The Ohio state 1991 geopotential and sea surface topography harmonic coefficient models. report No. 410, department of geodetic science and surveying, The Ohio State University, Columbus, Ohio.
- Reigber, C., Schmidt, R., Flechtner, F., König, R., Meyer, U., Neumayer, K., Schwintzer, P., Zhu, S. Y., 2005, An earth gravity field model complete to degree and order 150 from GRACE:EIGEN-GRACE02S. *J. Geophys.* **39**, 1-10.
- Reigber, C., Schwintzer, P., Stubenvoll, R., Schmidt, R., Flechtner, F., Meyer, U., R., König(1), Neumayer, H., Förste, C., Barthelmes, F., Zhu, S. Y., Balmino, G., Biancale, R., Lemoine, J.-M., Meixner, H., Raimondo, J. C., 2004, A high resolution global gravity field model combining CHAMP and GRACE satellite mission and surface gravity data: EIGEN-CG01C. Accepted for publication in *J. Geodesy*.
- Safari, A., 2004, Ellipsoidal boundary value problem for geoid computations via modulus of gravity, astronomical longitude, Featherstone, W. E., Kirby, J. F., Kearsley, A. H. W., Gilliland, J. R., Johnston, G. M., Steed, J., Forsberg, R., and Sideris, M. G., 2001b, The AUSGeoid98 geoid model of Australia: data treatment, computations and comparisons with GPS-levelling data, *J. Geodesy*, **75**, 313-330.
- Featherstone, W. E., and Rieger, J. M., 2000, The importance of using deviations of the vertical in the reduction of terrestrial survey data to a geocentric datum, *The Trans-Tasman Surveyor*, 1(3), 46-61 (erratum in *The Aus. Surv.* 47, 7).
- Grafarend, E. W., 1978, Dreidimensionale geodatische Abbildungs-gleichungen und die Näherungsfigur der Erde. *Z., Vermess.* **103**, 132-140.
- Grafarend, E. W., 1980, The Bruns transformation and a dual set-up of geodetic observational equations. National Oceanic and Atmospheric Administration, Rep NOS 85, NGS 16, Rockville.
- Grafarend, E. W., 2001, The spherical horizontal and spherical vertical boundary value problem-vertical deflections and geoidal undulations-the complete Meissl diagram. *J. Geodesy*, **75**, 363-390.
- Grafarend, E. W., Ardalan, A. A., 1999, World Geodetic Datum 2000, *J. Geodesy*, **73**, 611-623.
- Grafarend, E. W., Ardalan, A. A., Sideris, M., 1999, The ellipsoidal fixed-free two-boundary value problem for geoid determination (the ellipsoidal Bruns transform). *J. Geod.*, **73**, 513-533.
- Heiskanen, W. A., Moritz, H., 1967, Physical Geodesy. Institute of Physical Geodesy, Technical University of Graz, Austria, W. H. Freeman.
- Hirvonen, R. A., 1961a, New theory of the gravimetric geodesy. *Publ Isostatic Inst, Ann Acad Sci Fenn A3*: 1-50.
- Hirvonen, R. A., 1961b, The reformation of geodesy. *J. Geophys Res.*, **66**, 1471-1478.
- Jekeli, C., 1988, The exact transformation between ellipsoidal and spherical harmonic expansions. *Manuscr. geodaet.* **13**, 106-113.
- Jekeli, C., 1999, An analysis of vertical deflections derived from high-degree spherical harmonic models. *J. Geodesy*, **73**, 10-22.
- Krarpup, T., 1969, A contribution to the mathematical foundation of physical geodesy. Internal rep, Geodetic Institute, Copenhagen.
- Lemoine, F. G., Smith, D. E., Kunz, L., Smith, R., Pavlis, E. C., Pavlis, N. K., Klosko, S. M., Chinn, D. S., Torrence, M. H., Williamson, R.

- Thong, N. C., and Grafarend, E. W., 1989, An ellipsoidal model of the terrestrial gravitational field. *Manuscr Geodaet.*, 14, 285-304.
- Tscherning, C. C., Rapp, R. H., and Goad, C., 1983, A comparison of methods for computing gravimetric quantities from high degree spherical harmonic expansions. *Manuscr. geodaet.* **8**, 249-272.
- Wenzel, H. G., 1999, Global models of gravity field of high and ultra-high resolution. In *Lecture Notes of IAG's Geoid school*, Milano, Italy.
- astronomical latitude, and satellite altimetry observations. Ph.D. thesis. Department of Surveying and Geomatics Engineering University of Tehran (In Persian).
- Safari, A., Ardalan, A. A., Grafarend, E. W., 2005, A new ellipsoidal gravimetric, satellite altimetry, astronomic boundary value problem; case study: geoid of Iran. *J. Geodyn.* **39**, 545-568.
- Sanso, F., 1979, The gravity space approach to the geodetic boundary value problem including rotational effects. *Manuscr Geod.*, **4**, 207-244.