

حل عددی معادلات آب کم عمق دو لایه به روش تفکیک مد

حکیم گلشاهی*

استادیار، گروه فیزیک، واحد شوشتر، دانشگاه آزاد اسلامی، شوشتر، ایران

(دریافت: ۱۴۰۰/۹/۱۴، پذیرش نهایی: ۱۴۰۱/۱/۳۰)

چکیده

در پژوهش حاضر، برای حل عددی دستگاه معادلات آب کم عمق دو لایه برحسب متغیرهای فشارورد و کُزفشار از روش تفکیک مد با گام‌های زمانی متفاوت استفاده شد. برای گسسته‌سازی مکانی، روش‌های مرتبه دوم مرکزی و فشرده مرتبه چهارم به کار گرفته شدند و برای گسسته‌سازی زمانی در هر دو بخش فشارورد و کُزفشار از روش لیب فراگ به صورت نیمه‌ضمنی به همراه پالایه زمانی روبرت-آسلین استفاده شده است. ابتدا مد کُزفشار با گام زمانی بزرگ و سپس مد فشارورد با گام زمانی کوچک‌تر حل شده است تا بتوان مقادیر کُزفشار موردنیاز در مد فشارورد را از مد کُزفشار استخراج کرد. برای این منظور در طی یک گام زمانی کُزفشار، مقادیر کُزفشار ثابت در نظر گرفته شده یا با درون‌یابی زمانی تعیین شده‌اند. تحلیل منحنی‌های خطا نشان می‌دهد که درون‌یابی زمانی مقادیر کُزفشار برای به‌کارگیری در مد فشارورد می‌تواند به نتایجی بهتر منجر شود و شرایط پایدارتری را فراهم کند. همچنین، می‌توان ناپایداری عددی در گام‌های زمانی کُزفشار بزرگ را با افزایش ضریب پالایه زمانی کنترل کرد.

واژه‌های کلیدی: معادلات آب کم عمق، محیط دو لایه، روش تفکیک مد، مدهای فشارورد و کُزفشار، ناپایداری عددی.

۱. مقدمه

بزرگ‌تر از مد فشارورد در نظر گرفت که این منجر به افزایش سرعت پردازش خواهد شد. این افزایش سرعت پردازش به شرطی مزیت محسوب می‌شود که با افزایش خطا همراه نباشد.

اوبرین و هالبرت (۱۹۷۲) از یک مدل دو لایه یک بعدی برای مطالعه فراجوشی (Upwelling) استفاده کرده‌اند که در آن حل عددی به روش نیمه‌ضمنی انجام می‌شود. بنابراین، حتی در گام‌های زمانی بزرگ‌تر نیز این مدل پایداری خود را حفظ می‌کند. مادالا و پیاکسیک (۱۹۷۷) با ارائه روش تفکیک مد در یک مدل چند لایه، این روش نیمه‌ضمنی را تنها برای بخش فشارورد به کار گرفتند؛ به گونه‌ای که با به‌کارگیری گام زمانی بزرگ‌تر و حذف معادله هلمهولتز در بخش کُزفشار، می‌توان زمان پردازش را کاهش داد. به‌طور کلی، در روش تفکیک مد، با میانگین‌گیری از معادلات سه بعدی در راستای قائم، معادلات دو بعدی مربوط به مد فشارورد به دست می‌آیند که تحول زمانی سریع‌تری دارند و باید از گام‌های زمانی

در مدل‌هایی که از روش‌های تکراری برای حل معادلات تکانه با در نظر گرفتن تقریب مرز سخت استفاده می‌کنند با افزایش تفکیک شبکه، تعداد تکرار و در نتیجه مدت زمان پردازش به شدت افزایش می‌یابد. یکی از روش‌های جایگزین، استفاده از سطح آزاد به جای تقریب مرز سخت و تفکیک معادلات به دو بخش فشارورد و کُزفشار است. این روش که نخستین بار توسط مادالا و پیاکسیک (۱۹۷۷) ارائه شده و در خیلی از مدل‌ها از جمله ROMS، POM، MASNUM، CESM، HYCOM و FVCOM به کار رفته است (چن و همکاران، ۲۰۰۳؛ شپتکین و مک‌ویلیامز، ۲۰۰۵؛ هوانگ و همکاران، ۲۰۰۸؛ اسمیت و همکاران، ۲۰۱۰؛ هان، ۲۰۱۴؛ کیانگ و همکاران، ۲۰۱۴؛ ژوانگ و همکاران، ۲۰۱۸؛ هیگدون، ۲۰۲۰)، روش تفکیک مد (Mode splitting) نامیده می‌شود به گونه‌ای که در آن، گام زمانی مد کُزفشار متفاوت با مد فشارورد است. با توجه به کندتر بودن امواج گرانی درونی نسبت به امواج گرانی سطحی، می‌توان گام زمانی مد کُزفشار را خیلی

ایجاد نشده و صرفاً دستگاه معادلات اولیه برحسب متغیرهای جدید بازنویسی شده‌اند. به علاوه، بازنویسی دستگاه معادلات چند لایه برحسب متغیرهای فشارورد و کژفشار منجر به جفت‌شدگی بیشتر دستگاه معادلات حاکم می‌شود که این خود می‌تواند به پایداری حل عددی کمک کند.

حل عددی معادلات بخش فشارورد می‌تواند به شکل صریح، نیمه‌ضمنی یا ضمنی انجام شود (لازوره و دوماس، ۲۰۰۸). در مطالعه حاضر، حل عددی هر دو مد فشارورد و کژفشار، با روش‌های تفاضل متناهی یکسان و به صورت نیمه‌ضمنی انجام شده است. برای گسسته‌سازی زمانی از روش لیپ فراگ به همراه پالایه زمانی روبرت آسلین و برای گسسته‌سازی مکانی، علاوه بر روش مرتبه دوم مرکزی (E2S)، روش فشرده مرتبه چهارم (C4S) با دقت بالاتر ولی با هزینه محاسباتی بیشتر (High computational cost) نیز به کار گرفته شد (هرش، ۱۹۷۵؛ لل، ۱۹۹۲).

۲. معادلات حاکم

معادلات آب کم‌عمق دو لایه برحسب میدان‌های تاوایی (ζ)، واگرایی (δ) و ارتفاع (h) به صورت زیر است (گلشاهی و قادر، ۱۳۹۶):

کوچک‌تر استفاده کرد. معادلات مد کژفشار که به صورت سه‌بعدی هستند با گام زمانی بزرگ‌تر حل می‌شوند. اگر از روش تفکیک مد استفاده نشود، باید دستگاه معادلات سه بعدی را با گام زمانی کوچک حل کرد؛ بنابراین، استفاده از آن به‌ویژه در مدل‌هایی با تفکیک زیاد (High-resolution)، امری اجتناب‌ناپذیر است (کامبلن و همکاران، ۲۰۱۰؛ دیمنزه و همکاران، ۲۰۱۹؛ کنگ و همکاران، ۲۰۲۱).

گلشاهی و قادر (۱۳۹۶)، برای حل عددی معادلات آب کم‌عمق دو لایه دوبعدی برحسب متغیرهای تاوایی، واگرایی و ارتفاع (در شبکه Z) به جای حل دستگاه معادلات هر لایه، معادلات را برحسب متغیرهای فشارورد و کژفشار بازنویسی کردند و برای حل هر یک از این دو دستگاه معادلات جفت‌شده، از روش تفاضل متناهی به صورت نیمه‌ضمنی با گام‌های زمانی یکسان استفاده کردند. در پژوهش حاضر، با تغییر جزئی در تعریف این متغیرهای فشارورد و کژفشار، معادلات فشارورد و کژفشار در یک محیط دو لایه برای به‌کارگیری روش تفکیک مد معرفی شدند که می‌توان آن را برای مدل آب کم‌عمق چندلایه نیز تعمیم داد و همانند روش تفکیک مد از گام‌های زمانی متفاوت استفاده کرد در حالی که هیچ تغییری در دستگاه معادلات چند لایه اولیه

$$\begin{cases} \frac{\partial \zeta_1}{\partial t} = -\nabla \cdot [(\zeta_1 + f_0)\mathbf{u}_1] \\ \frac{\partial \delta_1}{\partial t} + g H_1 \nabla^2 h'_1 = f_0 \zeta_1 - g H_2 \nabla^2 h'_2 + 2J(u_1, v_1) - \nabla \cdot (\delta_1 \mathbf{u}_1) \\ \frac{\partial h'_1}{\partial t} + \delta_1 = -\nabla \cdot (h'_1 \mathbf{u}_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \zeta_2}{\partial t} = -\nabla \cdot [(\zeta_2 + f_0)\mathbf{u}_2] \\ \frac{\partial \delta_2}{\partial t} + (g + g') H_2 \nabla^2 h'_2 = f_0 \zeta_2 - g H_1 \nabla^2 h'_1 + 2J(u_2, v_2) - \nabla \cdot (\delta_2 \mathbf{u}_2) \\ \frac{\partial h'_2}{\partial t} + \delta_2 = -\nabla \cdot (h'_2 \mathbf{u}_2) \end{cases} \quad (1)$$

که بر حسب متغیرهای تاوایی (ζ) و واگرایی (δ) به شکل زیر درمی آیند:

$$\begin{cases} \delta_{bt} = \frac{H_1\delta_1 + H_2\delta_2}{H} \\ \delta_{bc} = \delta_1 - \delta_2 \end{cases}, \begin{cases} \zeta_{bt} = \frac{H_1\zeta_1 + H_2\zeta_2}{H} \\ \zeta_{bc} = \zeta_1 - \zeta_2 \end{cases} \quad (۳)$$

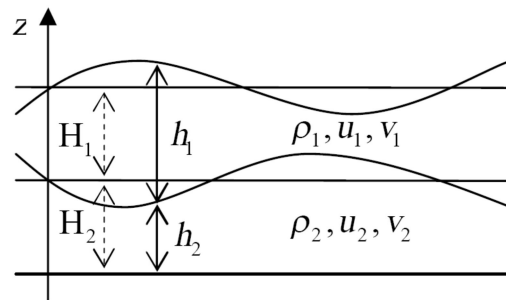
اندیس های bt و bc به ترتیب معرف مدهای فشارورد و کژفشار هستند. برای تعیین مقادیر کمیت ها در هر لایه می توان از تبدیلات وارون آنها استفاده کرد. برای نمونه تبدیلات وارون برای تعیین مؤلفه های جریان در هر لایه، به شکل زیر است:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_{bt} + \frac{H_2}{H} \mathbf{u}_{bc} \\ \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_{bt} - \frac{H_1}{H} \mathbf{u}_{bc} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_{bc} \end{cases} \quad (۴)$$

با مقایسه این روابط با روابط $\mathbf{u}_1 = \mathbf{U} + \mathbf{u}'_1$ و $\mathbf{u}_2 = \mathbf{U} + \mathbf{u}'_2$ (سیمونت و همکاران، ۲۰۰۳)، می توان دریافت که جریان فشارورد (\mathbf{u}_{bt}) بیانگر مقدار جریان میانگین کل در محیط دولایه \mathbf{U} و $\frac{H_2}{H} \mathbf{u}_{bc}$ و $-\frac{H_1}{H} \mathbf{u}_{bc}$ به ترتیب مقدار انحراف جریان از مقدار میانگین در لایه اول (\mathbf{u}'_1) و در لایه دوم (\mathbf{u}'_2) است. طبق این رابطه، اگر $H_2 > H_1$ باشد، $|\mathbf{u}'_2| < |\mathbf{u}'_1|$ خواهد بود؛ به عبارتی لایه ضخیم تر دارای مقدار انحراف جریان کوچک تری است. در این پژوهش، ارتفاع میانگین لایه اول و دوم با یکدیگر برابر انتخاب شده ($H_2 = H_1$) و در نتیجه، انحراف از مقدار میانگین در هر لایه برای یک نقطه معین از فضای دوبعدی ناحیه مورد مطالعه، دارای اندازه یکسان ولی علامت های مخالف هم است ($\mathbf{u}'_2 = -\mathbf{u}'_1$).

این نوع تعریف از متغیرهای فشارورد و کژفشار را می توان برای مدل چند لایه نیز تعمیم داد. برای نمونه در حالت سه لایه، یک متغیر فشارورد، دو متغیر کژفشار و تبدیلات وارون آنها به صورت زیر تعریف می شوند:

که در آن طبق فرضیات مدل، جملات تنش بستر، تنش بین لایه ها و تنش باد در نظر گرفته نشده اند. اندیس های ۱ و ۲ به ترتیب بیانگر لایه اول و لایه دوم است به گونه ای که در محیطی با عمق ثابت H ، لایه اول با چگالی کمتر روی لایه دوم قرار دارد تا تعادل هیدروستاتیک برقرار باشد. ارتفاع میانگین در لایه اول H_1 و در لایه دوم H_2 ، چگالی ρ ، پارامتر کوریولیس f_0 ، شتاب گرانی g و گرانی کاهشده $g' = g(\rho_2 - \rho_1)/\rho_2$ مقادیری ثابت هستند. مؤلفه افقی جریان در لایه اول $\mathbf{u}_1 = (u_1, v_1)^T$ (بالانویس T معرف ترنسپوز است) با ارتفاع $h_1 = H_1(1+h'_1)$ و مؤلفه افقی جریان در لایه دوم $\mathbf{u}_2 = (u_2, v_2)^T$ با ارتفاع $h_2 = H_2(1+h'_2)$ است. شکل ۱ شمایی از این محیط دولایه را نشان می دهد.



شکل ۱. شمایی از یک محیط دولایه با عمق ثابت (قادر و همکاران، ۱۳۸۹).

در پژوهش های جوی و اقیانوسی از فرمول بندی های مختلفی برای متغیرهای فشارورد و کژفشار استفاده شده است (کارستن و اسواترز، ۱۹۹۹؛ اسپایدل و سسی، ۲۰۰۳؛ تاناکا و آکیموتو، ۲۰۱۰؛ بوچات و همکاران، ۲۰۱۱). رابطه (۲) و (۳)، فرمول بندی متغیرهای فشارورد و کژفشار به کار گرفته شده در مطالعه حاضر را بیان می کنند:

$$\begin{cases} h'_{bt} = \frac{H_1 h'_1 + H_2 h'_2}{H} \\ h'_{bc} = h'_1 - h'_2 \end{cases}, \begin{cases} \mathbf{u}_{bt} = \frac{H_1 \mathbf{u}_1 + H_2 \mathbf{u}_2}{H} \\ \mathbf{u}_{bc} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 \end{cases} \quad (۲)$$

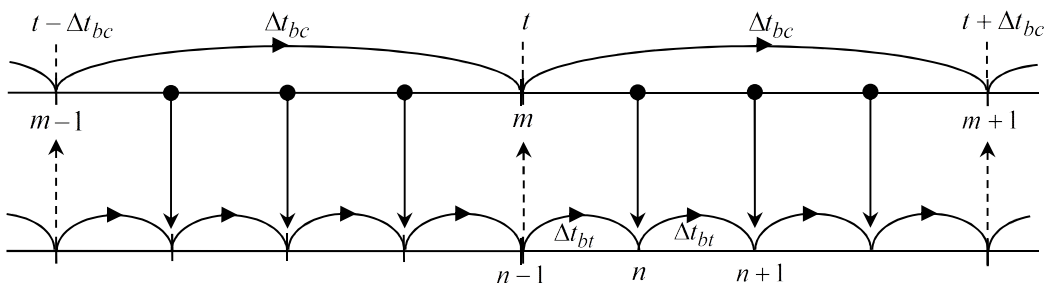
$$\begin{cases} \mathbf{u}_{bt} = \frac{H_1 \mathbf{u}_1 + H_2 \mathbf{u}_2 + H_3 \mathbf{u}_3}{H} \\ \mathbf{u}_{bc1} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_{bc2} = \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_{bt} + \frac{H_2 + H_3}{H} \mathbf{u}_{bc1} + \frac{H_3}{H} \mathbf{u}_{bc2} = \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_{bc1} \\ \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_{bt} - \frac{H_1}{H} \mathbf{u}_{bc1} + \frac{H_1}{H} \mathbf{u}_{bc2} \\ \mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_{bt} - \frac{H_1}{H} \mathbf{u}_{bc1} - \frac{H_1 + H_2}{H} \mathbf{u}_{bc2} = \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_{bc2} \end{cases} \quad (5)$$

دستگاه معادلات (۱) برای محیطی دولایه با عمق ثابت $H=2$ و لایه‌هایی با ارتفاع میانگین یکسان $H_1=H_2=1$ ، طبق رابطه (۲) و (۳) برحسب متغیرهای فشارورد و کژفشار به شکل زیر در می‌آید:

بدین ترتیب، برای یک مدل N لایه، یک مد فشارورد و $N-1$ مد کژفشار وجود دارد و در مجموع، در هر گام زمانی باید تعداد $3N$ معادله برای تعیین $3N$ مجهول حل شوند.

$$\begin{cases} \frac{\partial \zeta_{bt}}{\partial t} = -\frac{1}{2} \nabla \cdot [(\zeta_1 + f_0) \mathbf{u}_1 + (\zeta_2 + f_0) \mathbf{u}_2] \\ \frac{\partial \delta_{bt}}{\partial t} + \left[2g - \frac{g'}{2} \right] \nabla^2 h'_{bt} = f_0 \zeta_{bt} + \frac{1}{2} [(2J(u_1, v_1) - \nabla \cdot (\delta_1 \mathbf{u}_1)) + (2J(u_2, v_2) - \nabla \cdot (\delta_2 \mathbf{u}_2))] + \frac{g'}{4} \nabla^2 h'_{bc} \\ \frac{\partial h'_{bt}}{\partial t} + \delta_{bt} = -\frac{1}{2} \nabla \cdot (h'_1 \mathbf{u}_1 + h'_2 \mathbf{u}_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \zeta_{bc}}{\partial t} = -\nabla \cdot [(\zeta_1 + f_0) \mathbf{u}_1 - (\zeta_2 + f_0) \mathbf{u}_2] \\ \frac{\partial \delta_{bc}}{\partial t} + \frac{g'}{2} \nabla^2 h'_{bc} = f_0 \zeta_{bc} + [(2J(u_1, v_1) - \nabla \cdot (\delta_1 \mathbf{u}_1)) - (2J(u_2, v_2) - \nabla \cdot (\delta_2 \mathbf{u}_2))] - g' \nabla^2 h'_{bt} \\ \frac{\partial h'_{bc}}{\partial t} + \delta_{bc} = -\nabla \cdot (h'_1 \mathbf{u}_1 - h'_2 \mathbf{u}_2) \end{cases} \quad (6)$$



شکل ۲. طرح کلی روش تفکیک مد برای مدهای فشارورد و کژفشار به‌ازای $M=4$.

۳. روش تفکیک مد و فرمول بندی حل عددی

در روش تفکیک مد، معادلات مد فشارورد و معادلات مد کژفشار با گام‌های زمانی متفاوت، به طور مجزا حل می‌شوند به گونه‌ای که هم در مد فشارورد و هم در مد کژفشار، برای هر گام زمانی مقادیر همه متغیرها (چه فشارورد و چه کژفشار) مورد نیاز هستند. بنابراین، در هر مرحله زمانی که مد کژفشار حل می‌شود، علاوه بر مقادیر متغیرهای کژفشار، مقادیر متغیرهای فشارورد مربوط به همان مرحله زمانی نیز استفاده می‌شوند و به همین صورت در حل مد فشارورد نیز مقادیر متغیرهای کژفشار به کار گرفته می‌شوند. شکل ۲ طرح کلی روش تفکیک مد به کار گرفته شده را نشان می‌دهد که در آن نسبت گام زمانی کژفشار به گام زمانی فشارورد ($M = \Delta t_{bc} / \Delta t_{bt}$) برابر با ۴ انتخاب شده است. n و m به ترتیب معرف مرحله زمانی در مدهای فشارورد و کژفشار هستند و نقاط توپر معرف نقاطی است که باید مقادیر کژفشار آنها معلوم باشند تا بتوان از این مقادیر در حل عددی مد فشارورد استفاده کرد. اگر ابتدا مد فشارورد در مدت زمانی برابر با یک گام زمانی کژفشار حل شود، مقادیر کژفشار مورد نیاز مد فشارورد باید در این بازه زمانی، ثابت در نظر گرفته شوند (شپتکین و مک ویلیامز، ۲۰۰۵؛ مورل و همکاران، ۲۰۰۸)؛ اما در پژوهش حاضر، ابتدا مد کژفشار با گام زمانی بزرگ (Δt_{bc}) و به کارگیری مقادیر فشارورد و کژفشار معلوم در مرحله زمانی m حل می‌شوند تا مقادیر کژفشار مرحله زمانی $m+1$ تعیین شوند؛ آنگاه می‌توان مقادیر کژفشار مورد نیاز در مد فشارورد را از روی مقادیر معلوم در مد کژفشار تعیین کرد. بنابراین، هنگام حل مد فشارورد با گام زمانی فشارورد کوچک (Δt_{bt})، مقادیر فشارورد معلوم در مرحله زمانی n و مقادیر کژفشار استخراج شده از مد کژفشار به کار گرفته می‌شوند تا مقادیر فشارورد مرحله زمانی $n+1$ تعیین شوند. حل مد فشارورد تا همزمان شدن مراحل زمانی فشارورد و کژفشار (در شکل ۲ تا طی کردن تعداد ۴ گام زمانی فشارورد معادل با یک گام زمانی کژفشار) تداوم

می‌یابد؛ آنگاه دوباره این فرایند با حل مد کژفشار آغاز می‌شود. با به کارگیری گام زمانی کژفشار به صورت مضرب صحیحی از گام زمانی فشارورد، می‌توان تأثیر تفاوت گام‌های زمانی فشارورد و کژفشار روی نتایج حل عددی را مورد ارزیابی قرار داد.

هنگام حل مد فشارورد می‌توان مقادیر کژفشار مورد نیاز بین لحظات t و $t + \Delta t_{bc}$ را به شیوه‌های مختلفی از مد کژفشار استخراج کرد. در جدول ۱، ۹ حالت مختلف برای تعیین این مقادیر ارائه شده است. در این حالت‌ها، مقادیر کژفشار بین لحظات t و $t + \Delta t_{bc}$ یا ثابت هستند و یا با درون‌یابی خطی تعیین می‌شوند. برای ثابت گرفتن مقادیر کژفشار می‌توان به دو صورت عمل کرد: می‌توان مقدار کژفشار در مرحله زمانی m یا مقدار آن در مرحله زمانی $m+1$ را ثابت در نظر گرفت. برای نمونه، در حالت ۱، مقادیر ζ_{bc}^m ، δ_{bc}^m و h'_{bc}^m و در حالت ۲، مقادیر ζ_{bc}^m ، δ_{bc}^m و h'_{bc}^{m+1} بین لحظات t و $t + \Delta t_{bc}$ ثابت در نظر گرفته شده‌اند و در حالت ۹، همه مقادیر کژفشار مورد نیاز در مد فشارورد بین این دو لحظه با درون‌یابی خطی تعیین می‌شوند. در اینجا برای سادگی در نوشتار، این ۹ حالت، «حالت‌های ۹ گانه» نامیده شده و در کنار روش به کار گرفته شده، شماره حالت درج شده است. برای نمونه E2S-1 به معنی استفاده از حالت ۱ در روش E2S است.

در هر دو دستگاه معادلات فشارورد و کژفشار برای حل عددی از روش نیمه‌ضمنی به شیوه کاملاً یکسان استفاده شده است. برای گسسته‌سازی مکانی، از طرح‌واره‌های E2S و C4S و برای گسسته‌سازی زمانی از روش سه‌ترازی لپ‌فراگک به همراه پالایه زمانی روبرت-آسلین استفاده شده است تا با حذف مؤلفه‌های بسامد بالا، پایداری روش حفظ شود. این روش در خیلی از مدل‌های جوی و اقیانوسی مبتنی بر روش‌های تفاضل متناهی به کار گرفته شده است از جمله POM و MICOM (بلک و اسمیت، ۱۹۹۰؛ ملور، ۲۰۰۴؛ هان، ۲۰۱۴). این پالایه برای تابع دلخواه ϕ در مد فشارورد به صورت زیر تعریف

می‌شود:

$$\varphi^n = \varphi^n + \alpha(\varphi^{n+1} - 2\varphi^n + \varphi^{n-1}) \quad (7)$$

که در آن، مقدار α به‌عنوان یک ضریب ثابت با توجه به آزمایش عددی، بین $0/05$ تا $0/3$ تعیین می‌شود؛ به‌گونه‌ای که برای افزایش پایداری باید از اعداد بزرگ استفاده کرد که خود می‌تواند به افزایش خطای بریدگی (Truncation) منجر شود (دوران، ۱۹۹۹).

در هنگام حل عددی، برهم‌کنش‌های ناشی از جملات غیرخطی منجر به ایجاد خطای دگرنامیدن (Aliasing) و در نتیجه ناپایداری غیرخطی می‌شود. برای جلوگیری از آن، می‌توان هنگام حل عددی معادله تاوایی که به شکل صریح انجام می‌شود، مقداری پخش عددی اضافه کرد (دریچل و همکاران، ۱۹۹۹؛ قادر و همکاران، ۱۳۹۱). در پژوهش حاضر نیز برای کنترل خطا از این روش در معادلات تاوایی مدهای فشارورد و کژفشار استفاده شده است.

۴. شرایط اولیه و گام زمانی

شرایط اولیه انتخاب شده برای محیطی دولایه با عمق ثابت $H=2$ و لایه‌هایی با ارتفاع میانگین یکسان $H_1=H_2=1$ شرایطی کژفشار است که مطابق با مطالعه گلشاهی و قادر (۱۳۹۶) در یک ناحیه مربع شکل $-\pi < x < \pi$ و $-\pi < y < \pi$ با مرزهای دوره‌ای به‌ازای شتاب گرانی $g = 2\pi^2$ ، گرانی کاهیده $g' = g/400$ و پارامتر کوریولیس $f_0 = \pi/10$ به‌گونه‌ای تعریف شده است که مقادیر فشارورد اولیه صفر هستند ($u_2 = -u_1$ و $h'_2 = -h'_1$)؛ با این تفاوت که در پژوهش حاضر، میدان واگرایی کژفشار اولیه صفر نیست و با در نظر گرفتن شرایط $\partial^2 \delta / \partial t^2 = \partial^2 h' / \partial t^2 = 0$ تعیین شده است.

فردریکس-لوی (CFL) تعیین می‌شوند. گام زمانی مد کژفشار در مناطق کم‌عمقی مانند مصب‌ها حدود ۵ تا ۱۰ برابر و در مناطق عمیق اقیانوس به بیش از ۴۰ برابر مد فشارورد می‌رسد (کانتا و کلیسون، ۲۰۰۰). در پژوهش حاضر طبق شرط CFL، گام زمانی فشارورد Δt_{bt} از رابطه $\sqrt{gH} \Delta t_{bt} / d \leq 1$ و گام زمانی کژفشار Δt_{bc} از رابطه $\sqrt{g'H_1H_2} / H \Delta t_{bc} / d \leq 1$ تعیین شده‌اند که در آن فاصله شبکه‌ای d برای هر دو راستای x و y یکسان است. پس از قرار دادن مقادیر پارامترها و مقایسه این دو رابطه می‌توان دریافت که گام زمانی کژفشار با محدودیت $\Delta t_{bc} \leq 40 \Delta t_{bt}$ مواجه است. بنابراین، بیشینه M برابر با ۴۰ انتخاب شده است.

جدول ۱. حالت‌های مختلف مقادیری که به کمیت‌های کژفشار مورد نیاز در مدفشارورد بین لحظات t و $t + \Delta t_{bc}$ (عبارت‌های m و $m+1$ بیانگر بالانویس‌های متغیرهای کژفشاری هستند که در این بازه زمانی، ثابت در نظر گرفته شده‌اند و Int بیانگر درون‌یابی خطی آن متغیر است).

حالت	h'_{bc}	$(u, v)_{bc}$ و $(\zeta, \delta)_{bc}$
۱	m	m
۲	$m+1$	m
۳	Int	m
۴	m	$m+1$
۵	$m+1$	$m+1$
۶	Int	$m+1$
۷	m	Int
۸	$m+1$	Int
۹	Int	Int

۵. نتایج حل عددی

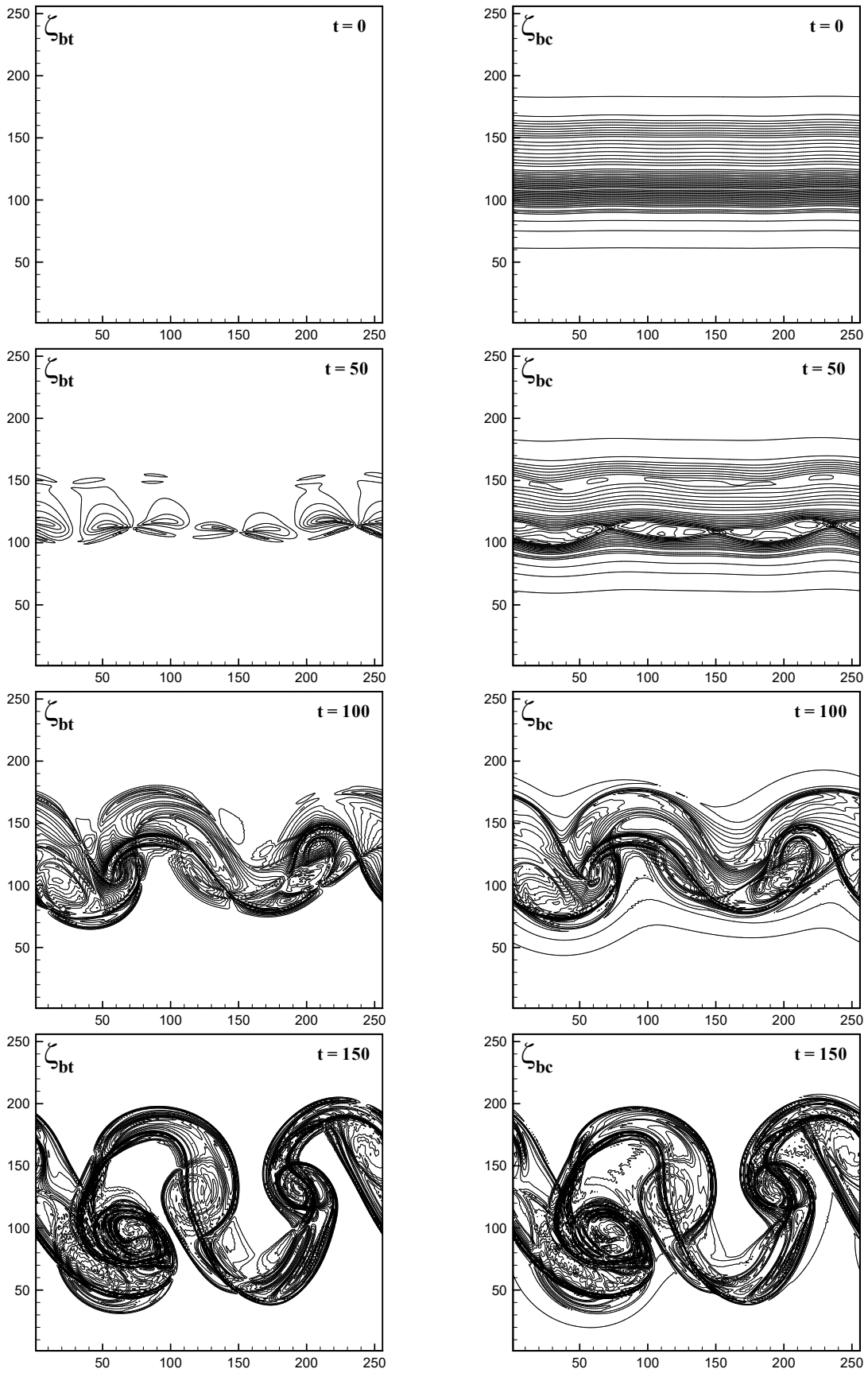
برای حل عددی معادلات آب کم‌عمق دولایه به‌روش نیمه‌ضمنی، در هر دو دستگاه معادلات فشارورد و کژفشار به شیوه یکسان، گسسته‌سازی زمانی با استفاده از روش

گام زمانی بخش فشارورد سازگار با سرعت امواج گرانی سطحی و گام زمانی بخش کژفشار سازگار با سرعت امواج گرانی درونی، طبق شرط کورانت-

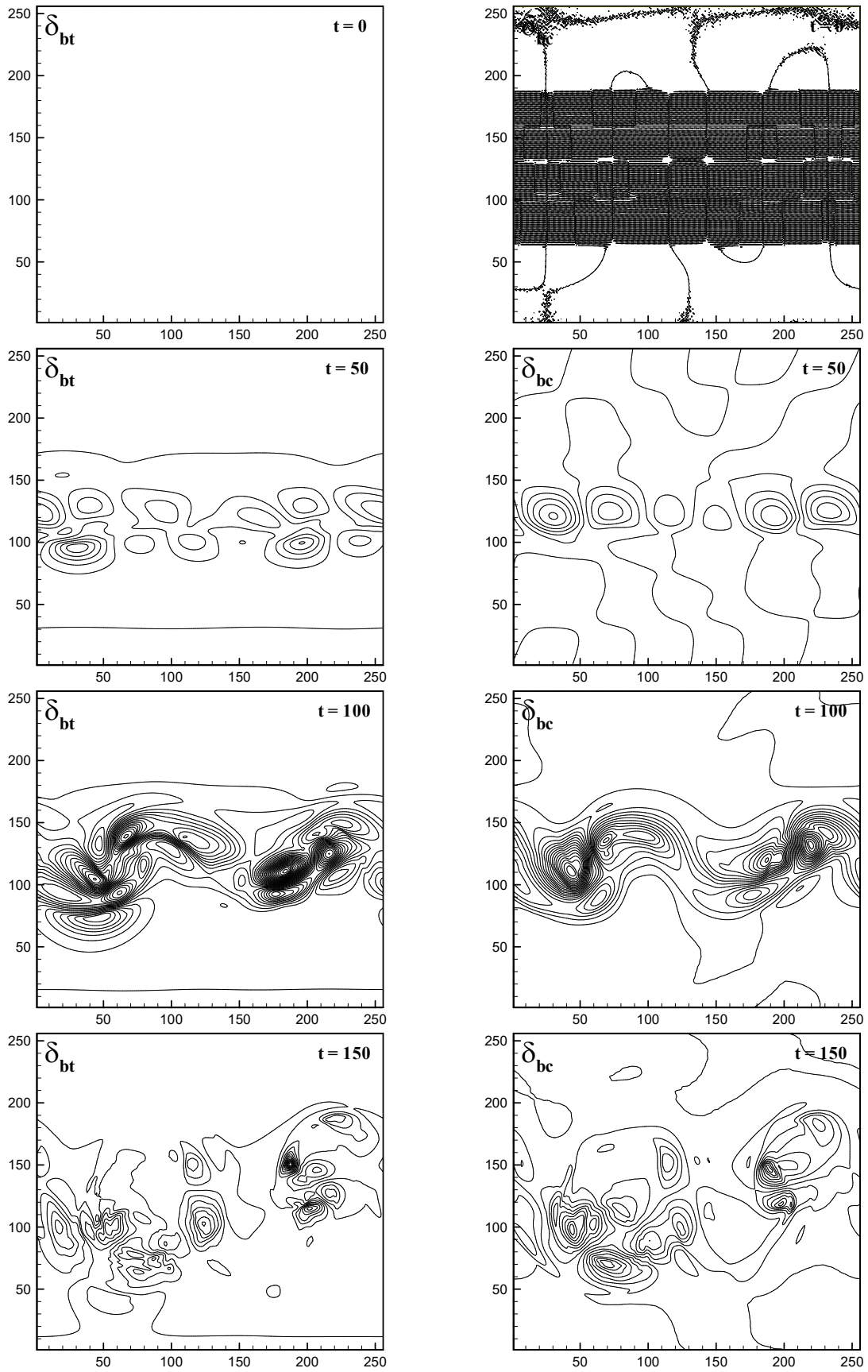
نظر گرفت، استفاده از پالایه زمانی مناسب است (شپتکین و ویلیامز، ۲۰۰۵؛ دبریو و همکاران، ۲۰۱۲). در کار حاضر از پالایه زمانی روبرت-آسلین استفاده شده است که باید ضریب مناسب آن تعیین شود. ابتدا مقدار $\alpha = 0.05$ در حالت پایه ($M=1$) انتخاب شد؛ همان گونه که انتظار می رفت به ازای هر سه تفکیک 64×64 ، 128×128 و 256×256 ، روش C4S نسبت به روش E2S دارای عملکرد بهتری در پایسته نگه داشتن انرژی است و در هر دو روش E2S و C4S ناپایداری عددی مشاهده نمی شود (گلشاهی و قادر، ۱۳۹۶)؛ اما به ازای $M \gg 1$ برای روش C4S باید از ضریب بزرگ تری در پالایه زمانی استفاده کرد. برای نمونه، شکل ۵، منحنی های خطای انرژی روش های E2S-1 و C4S-1 را برای مقادیر مختلف $0.05 \leq \alpha \leq 0.06$ در تفکیک 64×64 و $M=4$ نشان می دهد. مطابق این شکل، روش C4S-1 به ازای $\alpha = 0.054$ در شرف ناپایداری و در مقادیر کوچک تر کاملاً ناپایدار است و برای پایداری آن باید از ضریب $\alpha \geq 0.055$ استفاده کرد؛ در حالی که روش E2S-1 به ازای $\alpha \geq 0.05$ پایدار است. همچنین، با افزایش ضریب پالایه در حالت های پایدار، منحنی های خطای انرژی تقریباً برهم منطبق هستند؛ به عبارتی، با اندکی افزایش در ضریب پالایه زمانی، ضمن حفظ پایداری عددی تغییر قابل ملاحظه ای در منحنی های خطا ایجاد نمی شود. در کار حاضر، برای این که بتوان نتایج روش های مختلف را در شرایط یکسان مقایسه کرد، ضریب پالایه زمانی برای همه آزمایش ها، مقداری ثابت و برابر با $\alpha = 0.06$ انتخاب شده است تا مقدار آن در حین کوچک بودن، به مرز ناپایداری نزدیک نباشد.

لیپ فراگ به همراه پالایه زمانی روبرت-آسلین و گسسته سازی مکانی با روش های E2S و C4S در شبکه هایی با تفکیک 64×64 ، 128×128 و 256×256 طبق شرط CFL به ترتیب با گام های زمانی فشارورد 0.01 ، 0.005 و 0.0025 انجام شده است. با توجه به این که گام زمانی کژ فشار مضرب صحیحی از گام زمانی فشارورد است ($\Delta t_{bc} = M \Delta t_{bt}$)، برای ضریب M مقادیر ۲، ۴، ۱۰، ۲۰ و ۴۰ انتخاب شده اند. به ازای $M=1$ گام های زمانی فشارورد و کژ فشار با هم برابرند و آن معادل با شرایطی است که گویی از روش تفکیک مد استفاده نشده است. در هر تفکیک شبکه و برای هر یک از روش های E2S و C4S، نتایج مربوط به $M=1$ به عنوان حالت پایه در نظر گرفته شده است تا بتوان سایر روش ها را با آن مقایسه کرد. نتایج نشان می دهند که در هر دو روش E2S و C4S، میدان های فشارورد و کژ فشار حاصل از روش تفکیک مد به خوبی بر میدان های متناظر آنها در حالت پایه منطبق هستند. شکل های ۳ و ۴ تحول زمانی میدان های تاوایی و واگرایی فشارورد و کژ فشار را با استفاده از روش C4S-9 به ازای $M=20$ و تفکیک 256×256 نشان می دهند.

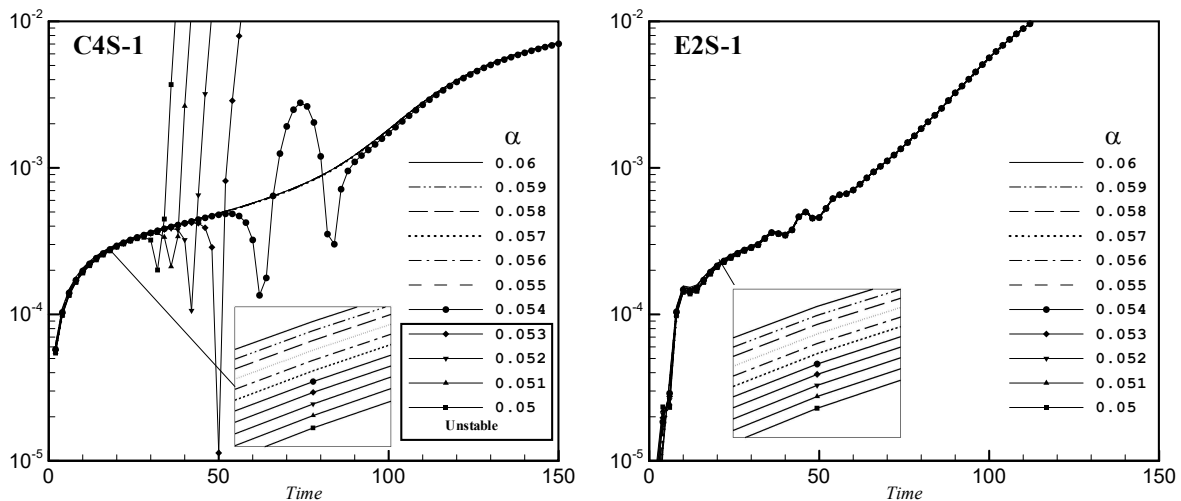
برای بررسی دقت نتایج، توانایی هر یک از روش ها در پایسته نگه داشتن انرژی مورد ارزیابی قرار گرفته است. اگر E_0 انرژی کل اولیه و E_t انرژی کل در لحظه t باشد، عبارت $|E_t - E_0|/|E_0|$ بیانگر خطای نسبی انرژی در لحظه t است که در اینجا به صورت «خطای انرژی» اطلاق می شود. توضیحات کامل در مورد نحوه محاسبه خطای انرژی توسط گلشاهی و قادر (۱۳۹۶) ارائه شده است. یکی از مواردی که در روش تفکیک مد باید در



شکل ۳. تحول زمانی ζ_{bt} و ζ_{bc} در تفکیک 206×206 ، $M=20$ و $\alpha = 0.06$ با روش C4S-9.



شکل ۴. تحول زمانی δ_{bt} و δ_{bc} در تفکیک $M=20$ و $\alpha = 0.06$ با روش C4S-9.



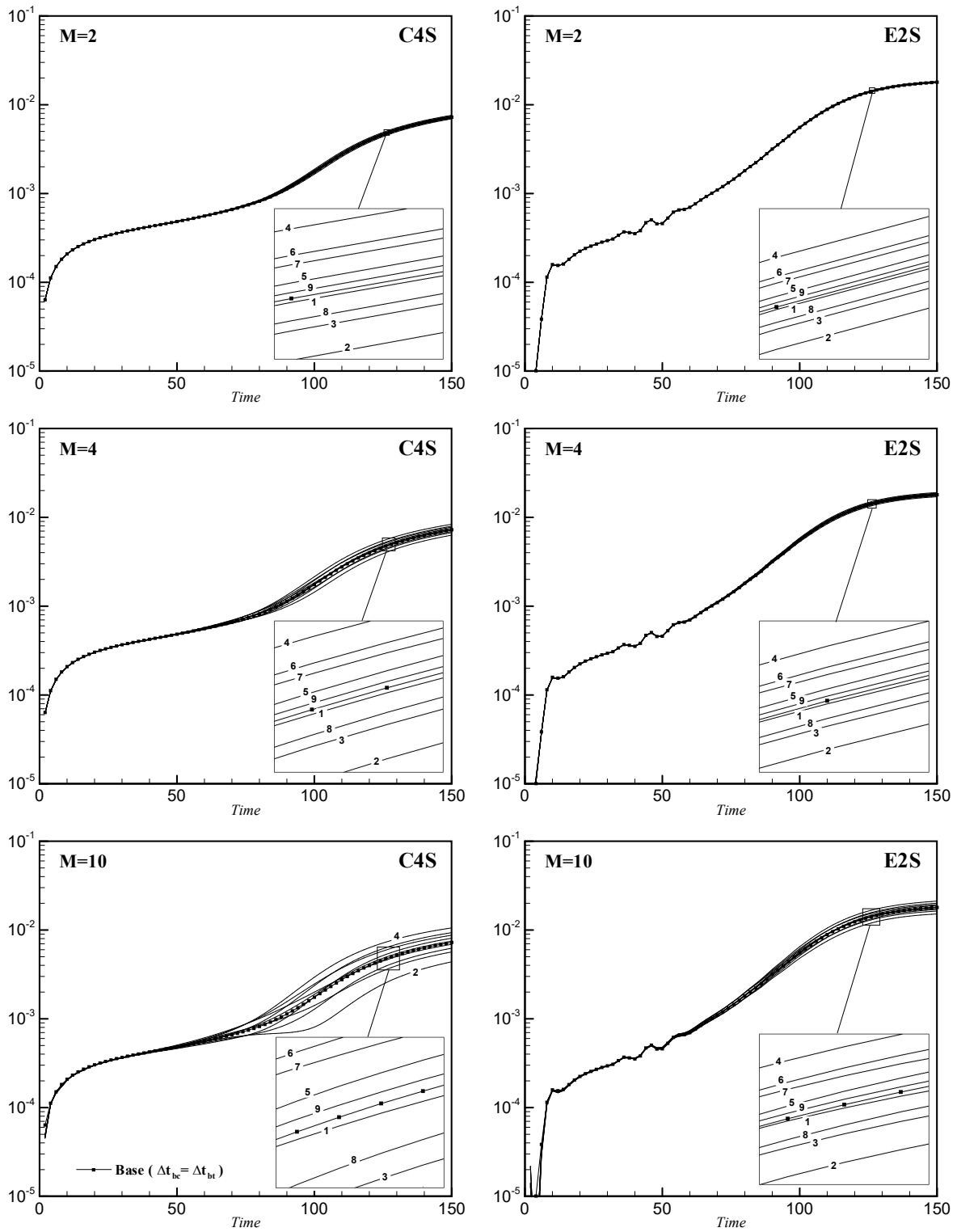
شکل ۵. منحنی‌های خطای انرژی روش‌های C4S-1 و E2S-1 برای $0.05 \leq \alpha \leq 0.06$ به‌ازای تفکیک 64×64 و $M=4$.

است، از لحاظ مدت‌زمان پردازش نیز نسبت به $M=20$ مزیت زیادی ندارد. برای نمونه، جدول ۲ درصد کاهش زمان پردازش به‌صورت نظری و تجربی را نشان می‌دهد که در آن مقادیر نظری در بازه زمانی $40 \Delta t_{bt}$ و مقادیر تجربی براساس حل عددی با استفاده از روش C4S-9 تعیین شده‌اند. نحوه محاسبه درصد کاهش زمان پردازش به‌صورت نظری در جدول ۳ ارائه شده است. مقادیر نظری با این فرض تعیین شده‌اند که مدت‌زمان پردازش برای همه گام‌های زمانی فشارورد و کژفشار یکسان است و ذخیره و بازیابی داده‌ها، وقفه ایجاد نمی‌کند؛ در حالی که در واقعیت، بخشی از زمان پردازش صرف ذخیره‌سازی و بازیابی داده‌ها می‌شود، به‌همین دلیل و سایر عواملی که پردازنده سیستم با آن مواجه است، مقادیر تجربی، اندکی کمتر از مقادیر نظری‌اند. لازم به‌ذکر است که حالت‌های ۹ گانه از لحاظ سرعت پردازش، تقریباً با هم برابرند و زمان پردازش بیشتر متأثر از مقدار M است.

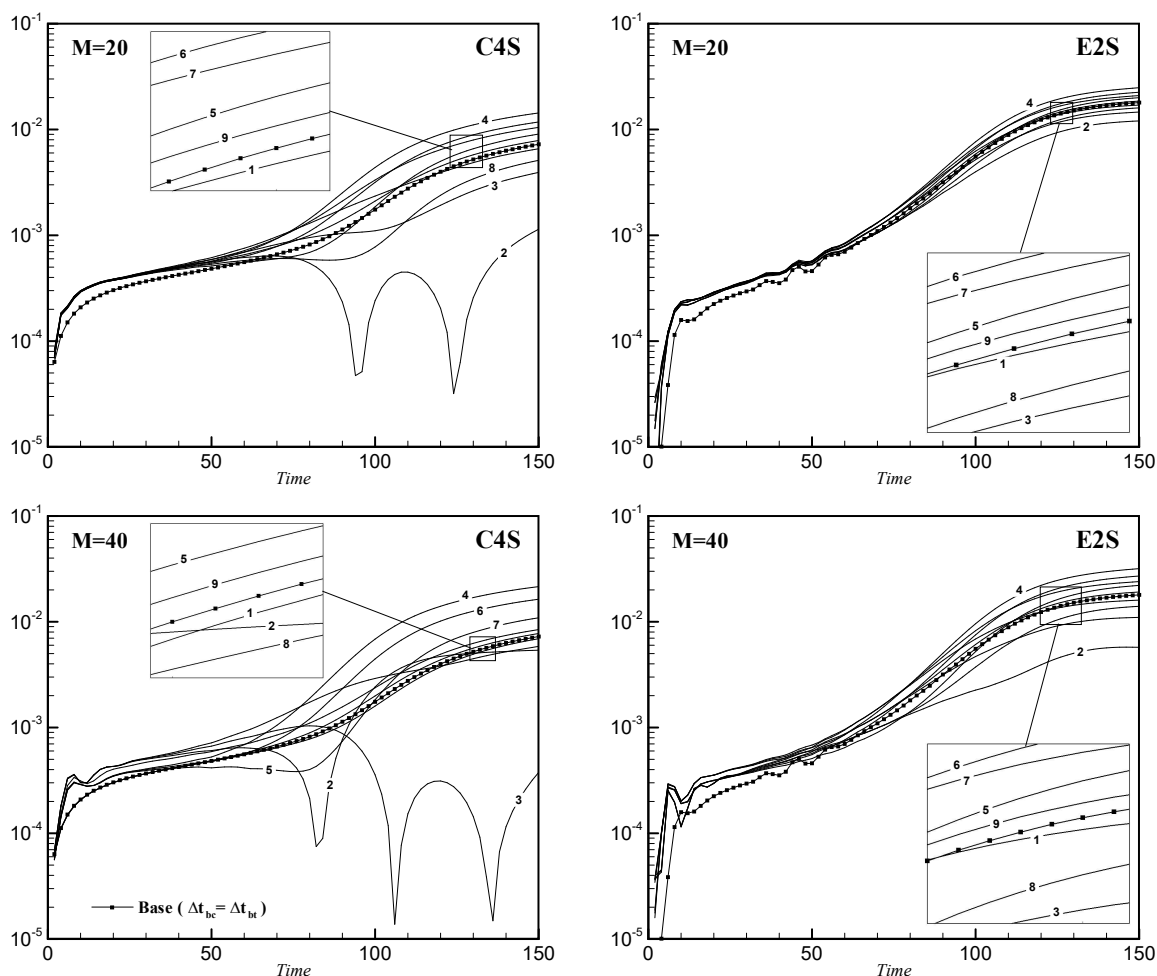
شکل‌های ۶ و ۷ منحنی‌های خطای انرژی روش‌های C4S و E2S را در تفکیک 64×64 برای حالت‌های ۹ گانه به‌ازای مقادیر مختلف M نشان می‌دهند. همان‌گونه که می‌توان مشاهده کرد، هرچه M بزرگ‌تر باشد، منحنی‌های خطای حالت‌های ۱ تا ۹ بیشتر از هم متمایز می‌شوند. این ویژگی در روش E2S دارای شدت کمتری است؛ به‌عبارتی روش E2S نسبت به روش C4S حساسیت کمتری به حالت‌های ۹ گانه دارد. به‌علاوه، در $M=40$ و با شدت کمتر در $M=20$ ، خطای لحظات اولیه متفاوت با حالت پایه است در حالی که در $M \leq 10$ تا حدود $t=50$ ، تقریباً همه منحنی‌ها بر منحنی حالت پایه منطبق هستند و با گذشت زمان که خطاها افزایش می‌یابند، اختلاف‌ها نمایان می‌شوند. این مسئله در $M=40$ با افت‌وخیز نیز همراه است. باید توجه داشت که از لحاظ کاهش زمان پردازش بین $M=40$ و $M=20$ اختلاف زیادی وجود ندارد. بنابراین، در شبکه‌هایی با تفکیک کم (Low-Resolution)، استفاده از $M=40$ علاوه‌بر این که با افزایش خطا همراه

جدول ۲. درصد کاهش زمان پردازش نسبت به حالت پایه به‌صورت نظری در بازه زمانی $40 \Delta t_{bt}$ و مقادیر تجربی آنها در روش C4S-9.

$M=40$	$M=20$	$M=10$	$M=4$	$M=2$	
۴۸/۷۵	۴۷/۵	۴۳/۷۵	۳۷/۵	۲۵	مقدار نظری
۴۶/۷۶	۴۶/۰۰	۴۳/۳۵	۳۵/۷۷	۲۳/۳۶	مقدار تجربی در تفکیک 64×64
۴۵/۷۸	۴۵/۲۶	۴۲/۹۱	۳۴/۵۵	۲۳/۲۸	مقدار تجربی در تفکیک 128×128



شکل ۶. منحنی‌های خطای انرژی روش‌های C4S و E2S در حالت‌های ۹ گانه به‌ازای تفکیک 64×64 و $\alpha = 0.06$ برای $M=2$ و 4 و 10 .



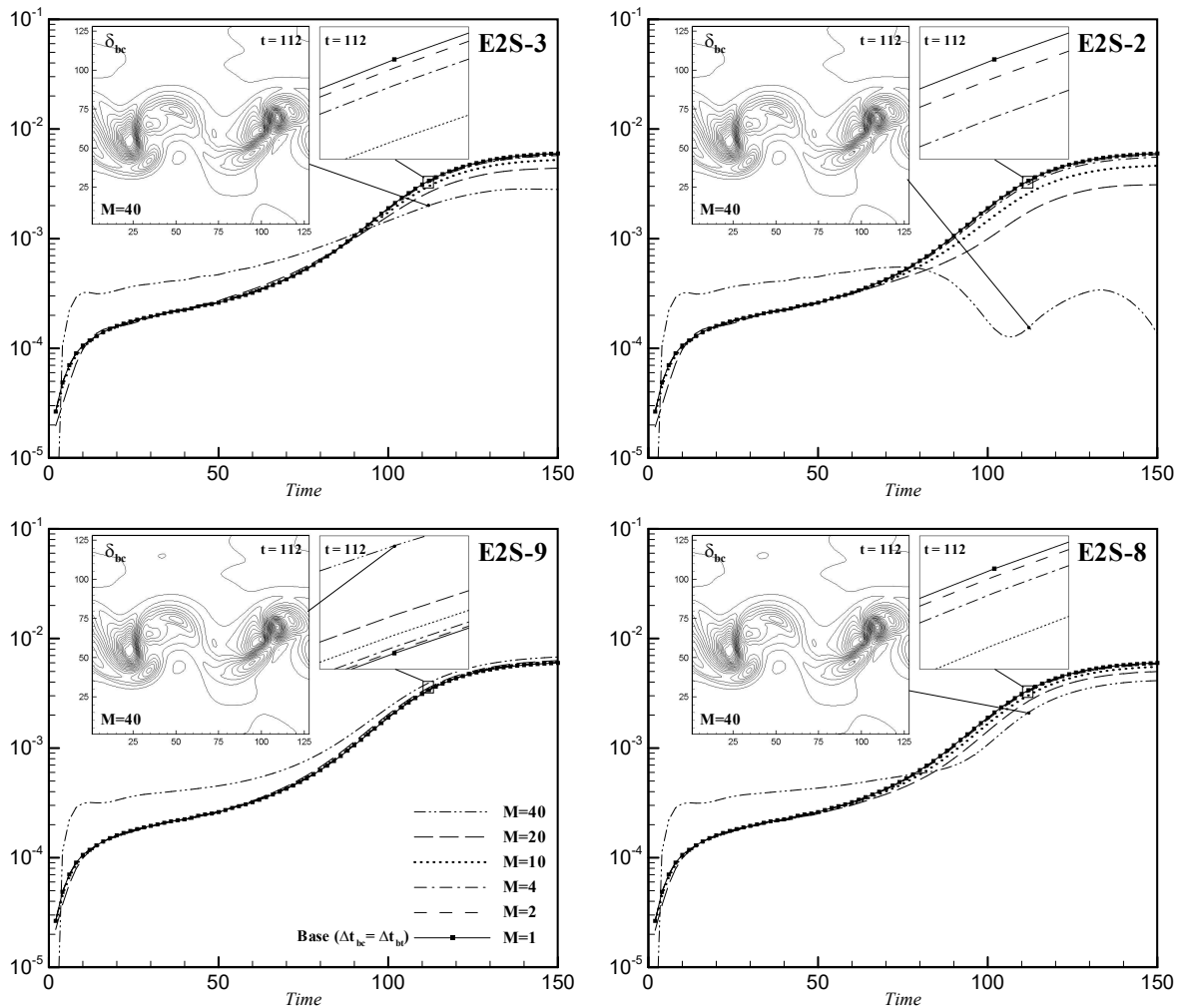
شکل ۷. مشابه شکل ۶ ولی برای $M=20$ و $M=40$.

به ویژه $M=40$ با افت و خیز شدیدی همراه است که همانند شکل ۵، می‌تواند نشانه مستعد بودن آنها به ناپایداری باشد. در روش E2S، این افت و خیزها مشاهده نمی‌شوند و بهترین عملکرد روش E2S در حالت ۲ و پس از آن در حالت‌های ۳ و ۸ حاصل می‌شود. تفاوت این حالت‌ها، در تفکیک 64×64 برای روش E2S چندان زیاد نیست ولی هر چه تفکیک شبکه بیشتر باشد، تفاوت‌ها بیشتر آشکار می‌شوند.

با مقایسه منحنی‌های خطای انرژی در تفکیک 64×64 ، می‌توان دریافت که در هر دو روش C4S و E2S، بیشترین خطا به ترتیب مربوط به حالت‌های ۴، ۶، ۷ و ۵ است؛ بنابراین، از بررسی آنها در شبکه‌هایی با تفکیک بیشتر صرف نظر شده است. همچنین نزدیک‌ترین منحنی خطا به منحنی حالت پایه، مربوط به حالت ۱ و ۹ می‌باشد. در روش C4S، اگرچه حالت‌های ۲ و ۳ از خطای کمتری برخوردار هستند ولی منحنی خطای آنها به ازای $M=20$

جدول ۳. نحوه محاسبه درصد کاهش زمان پردازش به صورت نظری.

$M=40$	$M=20$	$M=10$	$M=4$	$M=2$	$M=1$	
$40+1$	$40+2$	$40+4$	$40+10$	$40+20$	$40+40$	تعداد گام‌های زمانی فشارورود و کژفشار برای $\Delta t_{bt} 40$
۳۹	۳۸	۳۶	۳۰	۲۰		تعداد کاهش گام زمانی نسبت به حالت پایه
$\frac{39}{40}$	$\frac{38}{40}$	$\frac{36}{40}$	$\frac{30}{40}$	$\frac{20}{40}$		کاهش نسبی زمان پردازش
$\frac{48}{75}$	$\frac{47}{50}$	$\frac{43}{75}$	$\frac{37}{50}$	۲۵		درصد کاهش زمان پردازش



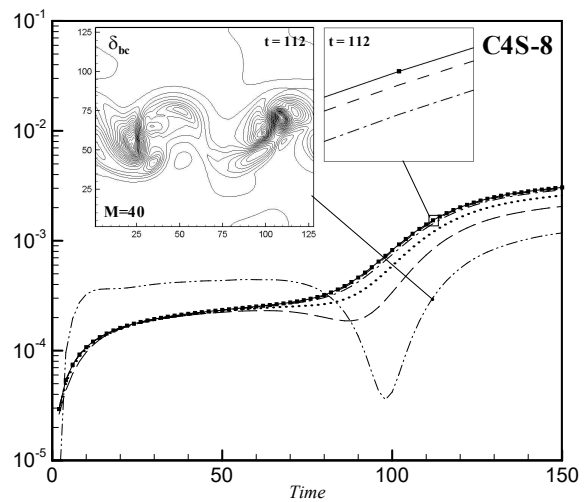
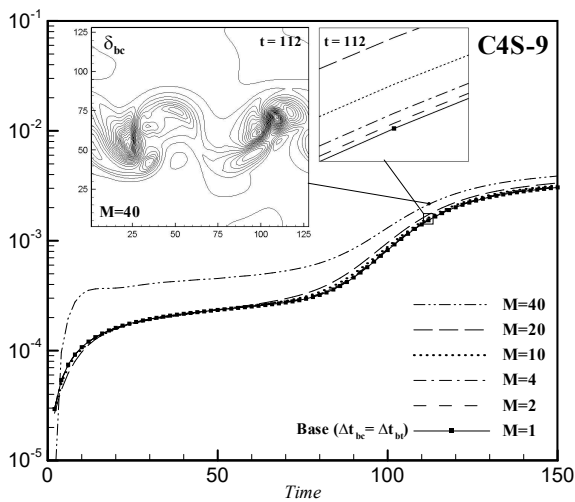
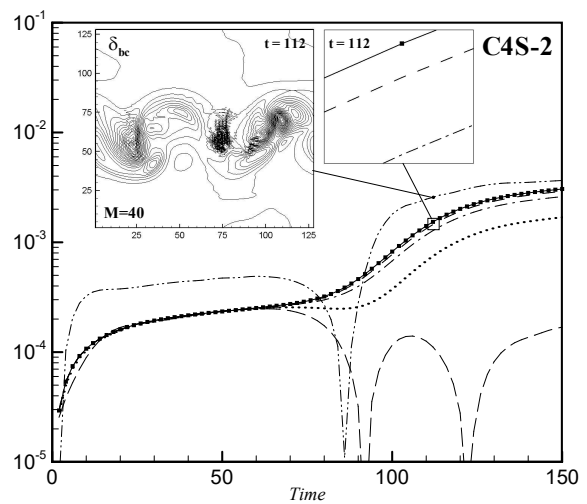
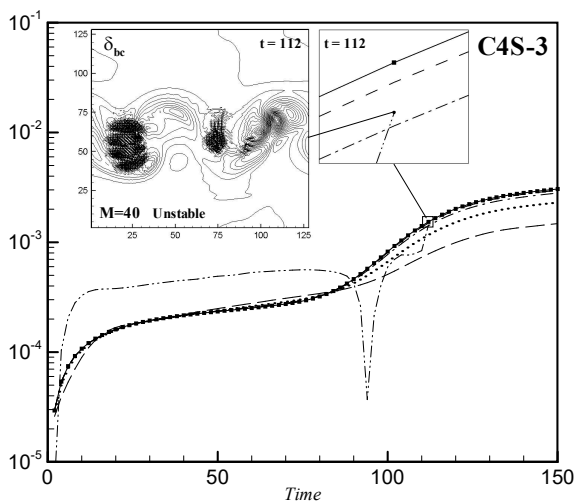
شکل ۸. منحنی‌های خطای انرژی روش E2S در حالت‌های ۲، ۳، ۸ و ۹ به‌ازای تفکیک 128×128 و برای M های مختلف به‌همراه میدان تاوایی کز فشار آنها در لحظه $t=112$ برای $M=40$.

روش C4S، نیز حالت‌های ۲ و ۳ دارای خطای کمتری هستند با این تفاوت که در M های بزرگ به سمت ناپایداری میل می‌کنند. مطابق شکل ۹، منحنی خطای انرژی روش C4S-2 در $M=40$ ، بعد از یک افت شدید با افزایش قابل‌ملاحظه‌ای همراه است که کم‌کم به وضعیت پایا (Steady) می‌رسد. این وضعیت را می‌توان در شکل ۷ در تفکیک 64×64 نیز مشاهده کرد؛ اما در تفکیک 128×128 ، با اغتشاش و آشفتگی میدان‌های تاوایی، واگرایی و ارتفاع نیز همراه است. با وجود این، روش C4S-2 پایدار باقی می‌ماند و آشفتگی‌ها که در حدود $t=82$ شروع شده‌اند، حدود $t=186$ محو می‌شوند. بنابراین، می‌توان نتیجه گرفت که به‌ازای ضریب پالایه

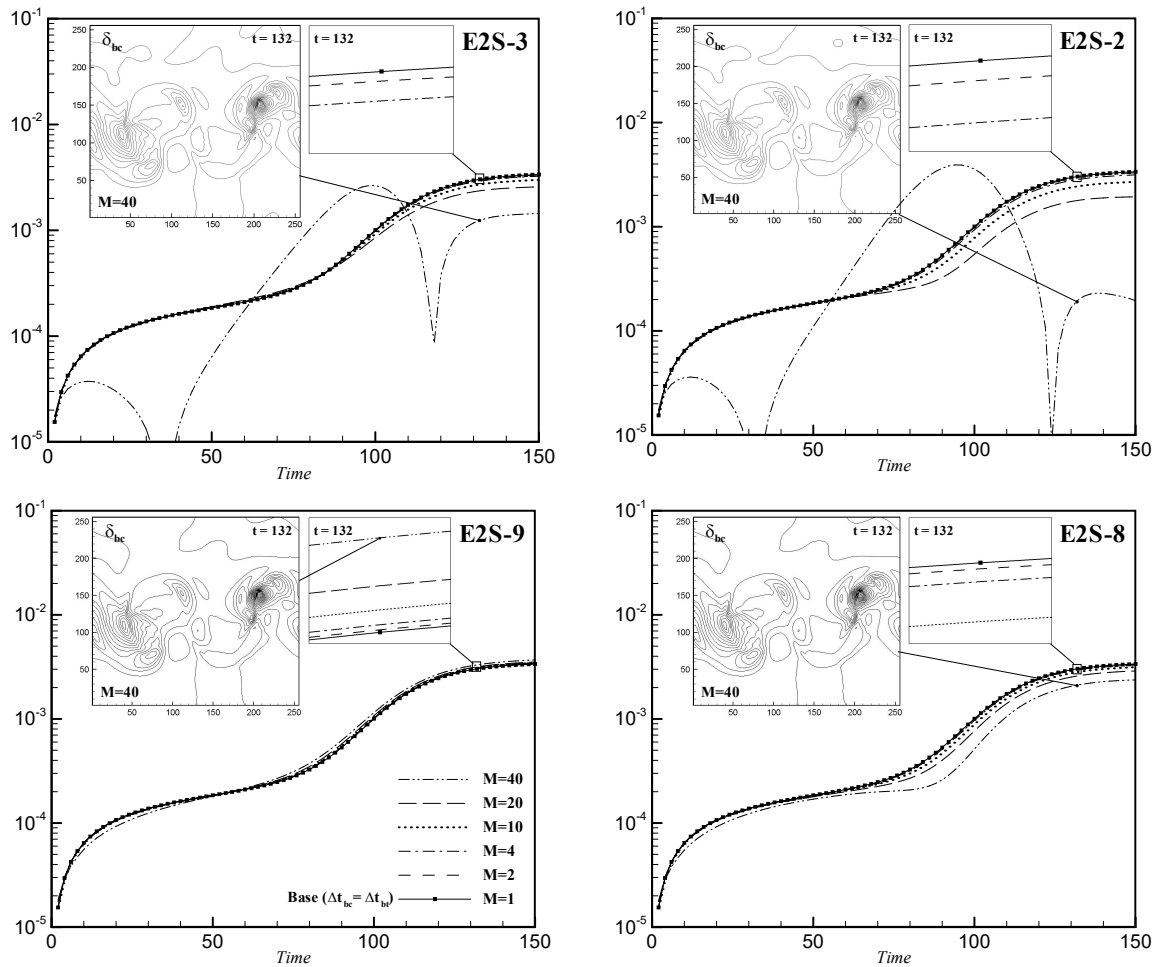
شکل‌های ۸ و ۹، منحنی‌های خطای انرژی روش‌های E2S و C4S را برای تفکیک 128×128 و $\alpha = 0.06$ در حالت‌های ۲، ۳، ۸ و ۹ نشان می‌دهند. در روش E2S، کمترین خطا به‌ترتیب مربوط به حالت‌های ۲، ۳ و ۸ است. حالت‌های ۱ و ۹ که نزدیک‌ترین حالت‌ها به حالت پایه محسوب می‌شوند، منحنی خطای انرژی تقریباً یکسانی دارند (در اینجا منحنی E2S-1 ارائه نشده است). تفاوت منحنی‌های خطای این دو روش با گذشت زمان، این است که منحنی E2S-1 اندکی حول حالت پایه افت‌وخیز دارد در حالی که منحنی E2S-9، همیشه اندکی بالاتر از منحنی حالت پایه باقی می‌ماند. این رفتار E2S-9 را می‌توان علاوه بر شکل ۸ در شکل‌های ۶ و ۷ نیز مشاهده کرد. در

$\alpha = 0.06$ نیز رفع نمی‌شوند. این روش در $M=4$ نیز به‌ازای $\alpha = 0.07$ ناپایداری است ولی به‌ازای $\alpha = 0.06$ آن رفع می‌شود و آشفتگی‌ها نیز از بین می‌روند. بنابراین اگرچه حالت‌های ۱، ۲ و ۳ در تفکیک 64×64 برای روش C4S در ضمن پایداری دارای خطای کمتر و بدون ایجاد آشفتگی هستند ولی در تفکیک‌های زیاد، گزینه‌های مناسبی محسوب نمی‌شوند. در مقابل، حالت ۹ با رفتاری نزدیک به حالت پایه و حالت ۸ با خطای انرژی کمتر می‌توانند گزینه‌های خوبی برای روش C4S باشند.

روش C4S-2 در تفکیک 128×128 و $\alpha = 0.06$ در آستانه ناپایداری است و باید در پالایه زمانی روبرت-آسلین از ضریب بزرگ‌تری استفاده کرد. بروز این آشفتگی‌ها در روش C4S-3 به حدی است که موجب سرریز (Overflow) شدن در $t=112$ می‌شود و حل عددی به ناپایداری ختم می‌شود. برای نمایش این آشفتگی‌ها، میدان واگرایی کثرفشار لحظه $t=112$ ، به شکل‌های ۸ و ۹ اضافه شده است. روش C4S-1 نیز همانند C4S-3 ناپایدار است به‌گونه‌ای که آشفتگی‌های آن حتی به‌ازای 0.2



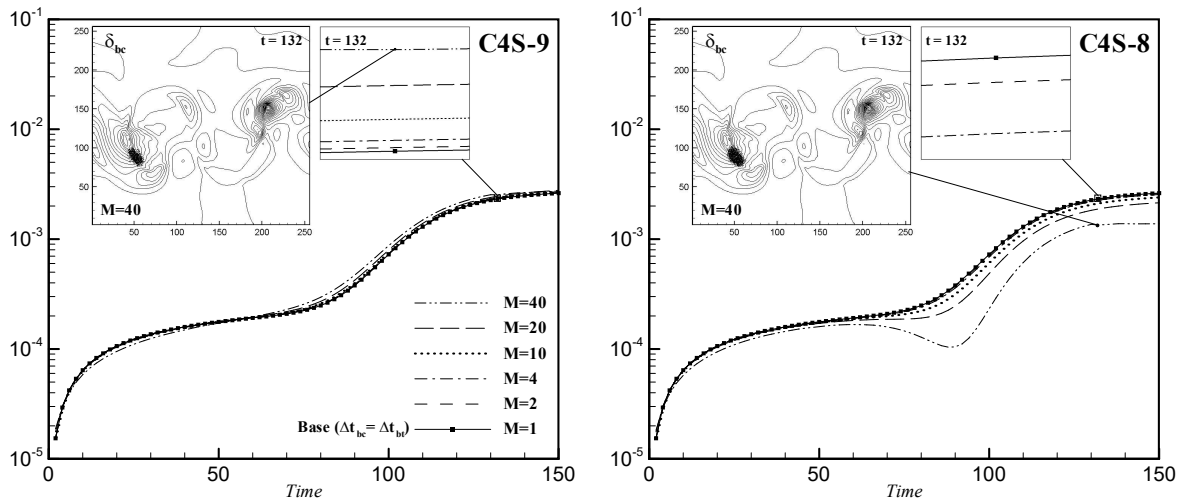
شکل ۹. مشابه شکل ۸ ولی برای روش C4S.



شکل ۱۰. منحنی‌های خطای انرژی روش E2S در حالت‌های ۲، ۳، ۸ و ۹ به‌ازای تفکیک 256×256 و $\alpha = 0.06$ برای M های مختلف به‌همراه میدان تاوایی کژ فشار آنها در لحظه $t=132$ برای $M=40$.

میدان‌ها منجر می‌شود. حالت‌های ۸ و ۹ می‌توانند جایگزین مناسبی باشند؛ با وجود این، مطابق شکل ۱۱ در تفکیک 256×256 به‌ازای $\alpha = 0.06$ حتی روش‌های C4S-8 و C4S-9 نیز در $M=40$ با آشفتگی همراه هستند. آشفتگی‌های ایجاد شده در میدان واگرایی کژ فشار که در حدود $t=132$ شروع شده‌اند، در حدود $t=170$ محو می‌شوند و هردو روش پایدار باقی می‌مانند. بنابراین، برای تفکیک 256×256 در $M=40$ ، روش‌های C4S-8 و C4S-9 به‌ازای $\alpha = 0.06$ در شرف ناپایداری هستند و برای به‌کارگیری آنها در $M=40$ باید از ضریب بزرگ‌تری در پالایه زمانی روبرت-آسلین استفاده شود. در $M \leq 20$ همانند شکل‌های ۳ و ۴، هیچ‌گونه آشفتگی در میدان‌های فشارورد و کژ فشار مشاهده نمی‌شود و این دو روش کاملاً پایدار هستند.

شکل ۱۰ منحنی‌های خطای انرژی روش E2S را به‌ازای تفکیک 256×256 و $\alpha = 0.06$ ، برای مقادیر مختلف M در حالت‌های ۲، ۳، ۸ و ۹ نشان می‌دهد. همان‌گونه که انتظار می‌رفت منحنی‌های روش E2S-9 تقریباً برای همه M ها، خیلی نزدیک به منحنی حالت پایه باقی می‌مانند. روش‌های E2S-2 و E2S-3 نسبت به حالت پایه خطای کمتری دارند؛ به‌جز در $M=40$ که منحنی‌های خطا با افت‌وخیز شدیدی همراه است؛ به‌گونه‌ای که در پربندهای واگرایی کژ فشار نیز نوعی اعوجاج مشاهده می‌شود. در حالی که روش‌های E2S-8 و E2S-9 در حین پایداری و بدون ایجاد آشفتگی حتی در $M=40$ نیز از عملکرد نسبتاً خوبی برخوردار هستند. همان‌گونه که در تفکیک 128×128 مشاهده شد، استفاده از حالت‌های ۲ و ۳ برای روش C4S در M های بزرگ، به ناپایداری و آشفتگی



شکل ۱۱. منحنی‌های خطای انرژی روش C4S در حالت‌های ۸ و ۹ به‌ازای تفکیک 256×256 و $\alpha = 0.06$ برای M های مختلف به‌همراه میدان تاوایی کژفشار آنها در لحظه‌ی $t=132$ برای $M=40$.

چهارم برخلاف روش مرتبه دوم مرکزی، ناپایدارکننده است؛ در حالی که با درون‌یابی زمانی مقادیر کژفشار تقریباً در هر دو روش می‌توان نتایجی بهتر و شرایطی پایدارتر را فراهم کرد. به‌طور کلی، تعیین پالایه زمانی مناسب و ارائه راه‌کاری جهت بهبود نتایج روش تفکیک مد به‌ویژه در گام‌های زمانی کژفشار بزرگ، از جمله مواردی است که می‌توانند در پژوهش‌های آتی مورد ارزیابی قرار گیرند.

مراجع

قادر، س.، احمدی‌گیوی، ف. و گلشاهی، ح.، ۱۳۸۹، مقایسه عملکرد روش‌های ابرفشرده و فشرده ترکیبی مرتبه ششم در گسسته‌سازی مکانی مدل آب کم‌عمق دولایه‌ای: نمایش امواج گرانی-لختی و راسبی خطی. مجله ژئوفیزیک ایران، ۴(۲)، ۴۹-۶۹.

قادر، س.، احمدی‌گیوی، ف. و گلشاهی، ح.، ۱۳۹۱، حل عددی معادلات آب کم‌عمق با استفاده از روش فشرده ترکیبی مرتبه ششم. مجله ژئوفیزیک ایران، ۶(۴)، ۳۵-۴۹.

گلشاهی، ح. و قادر، س.، ۱۳۹۶، حل عددی معادلات آب کم‌عمق دو لایه بر حسب متغیرهای فشارورد و کژفشار با استفاده از روش فشرده مرتبه چهارم. مجله ژئوفیزیک ایران، ۱۱(۲)، ۱-۱۴.

۶. نتیجه‌گیری

در پژوهش حاضر، با به‌کارگیری متغیرهای فشارورد و کژفشار برای میدان‌های واگرایی، تاوایی و ارتفاع، دستگاه معادلات آب کم‌عمق دولایه به دو بخش فشارورد و کژفشار تقسیم شد تا بتوان هنگام حل عددی، از روش تفکیک مد با گام‌های زمانی متفاوت استفاده کرد. ابتدا مد کژفشار حل می‌شود، تا بتوان مقادیر کژفشار موردنیاز در مد فشارورد را با درون‌یابی زمانی تعیین کرد. نتایج نشان می‌دهند که برای گام‌های زمانی کژفشار بزرگ تا حدود ۲۰ برابر گام زمانی فشارورد، در هر دو روش مرتبه دوم مرکزی و فشرده مرتبه چهارم انطباق خوبی بین میدان‌های فشارورد و کژفشار با میدان‌های متناظر آنها در گام‌های زمانی فشارورد و کژفشار یکسان (حالت پایه)، وجود دارد. هرچه گام زمانی کژفشار بزرگ‌تر از گام زمانی فشارورد باشد، اختلاف منحنی‌های خطای انرژی نسبت به حالت پایه بیشتر نمایان می‌شود. این اختلاف در روش فشرده مرتبه چهارم به حدی است که می‌تواند به ناپایداری عددی نیز منجر شود و برای رفع آن باید از ضریب بزرگ‌تری در پالایه زمانی استفاده کرد؛ اما روش مرتبه دوم مرکزی حساسیت کمتری دارد و با ضریب کوچک‌تر نیز پایدار باقی می‌ماند. همچنین، ثابت گرفتن مقادیر کژفشار در مد فشارورد برای روش فشرده مرتبه

- Bleck, R. and Smith, L.T., 1990, A wind-driven isopycnic coordinate model of the north and equatorial Atlantic Ocean: 1. Model development and supporting experiments. *Journal of Geophysical Research: Oceans*, 95(C3), 3273-3285.
- Bouchut, F., Ribstein, B. and Zeitlin, V., 2011, Inertial, barotropic, and baroclinic instabilities of the Bickley jet in two-layer rotating shallow water model. *Physics of Fluids*, 23(12), 126601, <https://doi.org/10.1063/1.3661995>
- Chen, C., Liu, H. and Beardsley, R. C., 2003, An unstructured grid, finite-volume, three-dimensional, primitive equations ocean model: application to coastal ocean and estuaries. *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology*, 20(1), 159-186.
- Comblen, R., Blaise, S., Legat, V., Remacle, J. F., Deleersnijder, E. and Lambrechts, J., 2010, A discontinuous finite element baroclinic marine model on unstructured prismatic meshes. *Ocean Dynamics*, 60(6), 1395-1414.
- Debreu, L., Marchesiello, P., Penven, P. and Cambon, G., 2012, Two-way nesting in split-explicit ocean models: Algorithms, implementation and validation. *Ocean Modelling*, 49, 1-21.
- Demange, J., Debreu, L., Marchesiello, P., Lemarié, F., Blayo, E. and Eldred, C., 2019, Stability analysis of split-explicit free surface ocean models: Implication of the depth-independent barotropic mode approximation. *Journal of Computational Physics*, 398, 108875, <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2019.108875>
- Dritschel, D. G., Polvani, L. M. and Mohebalhojeh, A. R., 1999, The contour-advective semi-Lagrangian algorithm for the shallow water equations. *Monthly Weather Review*, 127(7), 1551-1565.
- Durrant, D. R., 1999, Numerical methods for wave equations in geophysical fluid dynamics. Springer, 465.
- Han, L., 2014, A two-time-level split-explicit ocean circulation model (MASNUM) and its validation. *Acta Oceanologica Sinica*, 33(11), 11-35.
- Higdon, R. L., 2020, Discontinuous Galerkin methods for multi-layer ocean modeling: Viscosity and thin layers. *Journal of Computational Physics*, 401, 109018, <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2019.109018>
- Hirsh, R. S., 1975, Higher order accurate difference solutions of fluid mechanics problems by a compact differencing technique. *Journal of Computational Physics*, 19, 90-109.
- Huang, H., Chen, C., Cowles, G. W., Winant, C. D., Beardsley, R. C., Hedstrom, K. S. and Haidvogel, D. B., 2008, FVCOM validation experiments: Comparisons with ROMS for three idealized barotropic test problems. *Journal of Geophysical Research*, 113(C7), C07042, <https://doi.org/10.1029/2007JC004557>.
- Kang, H. G., Evans, K. J., Petersen, M. R., Jones, P. W. and Bishnu, S., 2021, A scalable semi-implicit barotropic mode solver for the MPAS Ocean. *Journal of Advances in Modeling Earth Systems*, 13(4), e2020MS002238.
- Kantha, L. H. and Clayson, C. A., 2000, Numerical models of oceans and oceanic processes. Academic Press, 940.
- Karsten, R. H. and Swaters, G. E., 1999, A unified asymptotic derivation of two-layer, frontal geostrophic models including planetary sphericity and variable topography. *Physics of Fluids*, 11(9), 2583-2597.
- Lazure, P. and Dumas, F., 2008, An external-internal mode coupling for a 3D hydrodynamical model for applications at regional scale (MARS). *Advances in Water Resources*, 31(2), 233-250.
- Lele, S. K., 1992, Compact finite difference schemes with spectral-like resolution. *Journal of Computational Physics*, 103, 16-42.
- Madala, R. V. and Piacsek, S. A., 1977, A semi-implicit numerical model for baroclinic oceans. *Journal of Computational Physics*, 23, 167-178.
- Mellor, G. L., 2004, Users guide for a three-dimensional, primitive equation, numerical ocean model (January 2004 version) In: Program in Atmospheric and Oceanic Sciences. Princeton University, Princeton, NJ 08544-0710, 56.
- Morel, Y., Baraille, R. and Pichon, A., 2008, Time splitting and linear stability of the slow part of the barotropic component. *Ocean Modelling*, 23(3-4), 73-81.
- O'Brien, J. J. and Hurlburt, H. E., 1972, A numerical model of coastal upwelling. *Journal of Physical Oceanography*, 2, 14-26.
- Qiang, W., Zhou, W. and Wang, D., 2014, Implementation of new time integration methods in POM. *Ocean Dynamics*, 64(5), 643-654.
- Shchepetkin, A. F. and McWilliams, J. C., 2005, The regional oceanic modeling system (ROMS): a split-explicit, free-surface, topography-following-coordinate oceanic model. *Ocean Modelling*, 9(4), 347-404.
- Simonnet, E., Ghil, M., Ide, K., Temam, R. and Wang, S., 2003, Low-frequency variability in shallow-water models of the wind-driven ocean circulation. Part I: Steady-state solution. *Journal of Physical Oceanography*, 33(4),

- 712-728.
- Smith, R., Jones, P., Briegleb, B., Bryan, F., Danabasoglu, G., Dennis, J., Dukowicz, J., Eden, C., Fox-Kemper, B., Gent, P., Hecht, M., Jayne, S., Jochum, M., Large, W., Lindsay, K., Maltrud, M., Norton, N., Peacock, S., Vertenstein, M. and Yeager, S., 2010, The parallel ocean program (POP) reference manual ocean component of the community climate system model (CCSM) and community earth system model (CESM). LAUR-01853, 141, 1-140.
- Spydell, M. and Cessi, P., 2003, Baroclinic modes in a two-layer basin. *Journal of Physical Oceanography*, 33(3), 610-622.
- Tanaka, Y. and Akitomo, K., 2010, Alternating zonal flows in a two-layer wind-driven ocean. *Journal of Oceanography*, 66(4), 475-487.
- Zhuang, Z., Yuan, Y. and Yang, G., 2018, An ocean circulation model in σ S-z- σ B hybrid coordinate and its validation. *Ocean Dynamics*, 68(2), 159-175.

Numerical solution of two-layer shallow water equations using mode splitting method

Golshahy, H.*

Assistant Professor, Department of Physics, Shoushtar Branch, Islamic Azad University, Shoushtar, Iran

(Received: 5 Dec 2021, Accepted: 19 April 2022)

Summary

In the numerical models that use iterative methods to solve the momentum equations by applying the rigid-lid approximation, the number of iterations increases for high resolution, therefore processing time increases. An alternative method is applying a free surface and splitting equations to barotropic and baroclinic modes. The surface gravity waves that are faster than slow moving internal gravity waves; impose a limitation on the time steps with the CFL condition. Thus, mode splitting method is computationally efficient to handle the multiple time steps separating the barotropic and baroclinic mode equations. In this method, the barotropic mode equations are solved at small time steps consistent with the fast surface gravity wave speeds and the baroclinic mode equations are solved at larger time steps consistent with the slow internal gravity wave speeds. This is used in most of the ocean circulation models and is an unavoidable choice to high resolution models.

In this study, we considered the shallow water equations for two-layer basin with vorticity-divergence formulation using mode splitting method by a small time step of barotropic mode within a larger time step of baroclinic mode. The primary systems of equations that contain both upper and lower layer variables, are rewritten in terms of new (barotropic and baroclinic) variables without any variation or more approximation of primary systems. This procedure can be extended to multi-layer systems so that primary N-layer system of equations is changed to 1 system of barotropic mode equations and N-1 systems of baroclinic mode equations coupled together.

For numerical experiments, a fully baroclinic (non-barotropic) initial condition is considered in a constant depth rectangular domain with 64, 128 and 256 grid points in each direction and periodic boundaries. For spatial differencing, second order centered scheme with low computational cost and fourth-order compact scheme with high computational cost are used. For time integration, a semi-implicit discretization based on leapfrog scheme is implemented with the Robert-Asselin time filter for both barotropic and baroclinic systems of equations, similarly.

Mode splitting method may presents numerical instabilities on the larger baroclinic time steps, in spite of time step limitation based on CFL condition coming from each system of barotropic and baroclinic mode equations taken individually. Here, it is controlled by increasing the coefficient of time filter to some extent.

First, we solve the baroclinic mode equations to derive all baroclinic variables that are necessary to solve barotropic mode equations during a baroclinic time step. In this case, these variables can be taken to be constant up to the next baroclinic time level or determined by time interpolation between two successive baroclinic time levels.

To assess the performance of the numerical method, relative error of energy conservation is calculated. Results show that for the ratio of baroclinic time step to up to 20 times of that of barotropic time step, time evolution of the barotropic and baroclinic variables have appropriate correspondence to the basic state, in which the barotropic mode has the same time step as the baroclinic mode. When this ratio increases, the differences of errors from basic state are presented more clearly. These errors are increased on fourth order compact method insofar as it leads to numerical instabilities so the time filter coefficient had to be increased, while second order scheme is not sensitive and stays stable with small coefficient. Moreover, taking constant for baroclinic variables to solve barotropic mode equations makes the solution on fourth order compact scheme for large baroclinic time step unstable, but on the other hand time interpolation provides more stable condition and has a good performance almost on both spatial schemes.

Keywords: Shallow-water equations, Two-layer basin, Mode splitting method, Barotropic and baroclinic modes, Numerical instability.

* Corresponding author:

hm.golshahi@iau.ac.ir