

## Computational accuracy required in the evaluation of global geopotential models

Mosayebzadeh, M.<sup>1</sup>  | Karimi, R.<sup>2</sup>  | Azmoudeh Ardalan, A.<sup>3</sup> 

1. Department of Civil Engineering, Islamic Azad University, Zarand Branch, Kerman, Iran.

2. Department of Geodesy and Surveying Engineering, Faculty of Civil and Surveying Engineering, Tafresh University, Tafresh, Iran.

3. Department of Geodesy and Hydrography, School of Surveying and Geospatial Engineering, College of Engineering, University of Tehran, Tehran, Iran.

**Corresponding Author E-mail:** [mosayebz@ut.ac.ir](mailto:mosayebz@ut.ac.ir)

(Received: 23 May 2023, Revised: 5 Aug 2023, Accepted: 9 Jan 2024, Published online: 6 July 2024)

### Summary

Global geopotential models (GGMs) are mainly used in the remove-compute-restore (RCR) technique applied to gravity field modeling such as geoid determination and height datum unification. The increase in the number and quality of gravity data has led the developers of GGMs to produce models with higher resolution and accuracy. Basically, the long-wavelength coefficients of the gravity field are computed based on satellite data, while the medium- and short-wavelength coefficients are calculated based on terrestrial (land and sea) data. One of the main challenges regarding the evaluation of high-degree GGMs is to compute the associated Legendre functions of the first kind based on the usual recursive formulas. Since most computational softwares use the double-precision format by default, an important question is whether this level of precision is sufficient to numerically evaluate the associated Legendre functions of the first kind? To answer this question, the computation of the associated Legendre functions of the first kind in different degrees and latitudes is studied based on MATLAB software, which uses the double-precision format by default. From the numerical results, we find that the calculation of associated Legendre functions of the first kind up to degree of 2190 (the highest degree of existing GGMs), does not have sufficient accuracy at latitudes between  $56^{\circ}20'$  and  $78^{\circ}33'$ , where the most critical state occurs at the latitude  $60^{\circ}$ . We also find that the accuracy of the calculation of associated Legendre functions at the latitude  $60^{\circ}$  (the most critical state) significantly decreases for the degrees higher than 2029. These results imply that the usual computational softwares based on the double-precision format are not suitable for calculating the associated Legendre functions in all degrees and latitudes. This is due to the fact that if we consider the associated Legendre functions of the first kind in the form of a matrix with the dimensions corresponding to the degree and order of the functions, as the degree increases, the numbers on the main diagonal approach to the number  $10^{-308}$  and thus they are considered zero. In the recursive method, the entries below the main diagonal are calculated from the entries on the main diagonal. Since the entries below the main diagonal become very large as they move away from the main diameter, any error in computing the main diagonal entries leads to a large error in computing the entries below the main diagonal. In this paper, we also study the challenges of using the associated Legendre functions of the first kind in the production of gravity field functionals based on a GGM, utilizing MATLAB software. The results show that the gravity potential computation up to degree of 2190 suffers from very large computational errors at latitudes between  $57^{\circ}32'$  and  $60^{\circ}13'$ . We observe that the safe degrees for the gravity potential computation in all latitudes are degrees less than 2065. The critical latitudes and degrees for the gravity calculation are somewhat different. The results indicate that the gravity computation up to degree of 2190 leads to very large errors at latitudes between  $57^{\circ}41'$  and  $60^{\circ}13'$ . In addition, the maximum degree of expansion that grants sufficient accuracy for the calculation of gravity for all latitudes is estimated to be 2071. Therefore, since the usual computational software based on the double-precision format is not suitable for evaluating the current high-degree GGMs, in this research, a new proposal based on the use of the "long double-precision" format is presented and evaluated. Based on our evaluations, the use of the long double-precision format throughout the computational procedure provides sufficient accuracy to compute the gravity field functionals based on the current high-degree GGMs.

**Keywords:** Geopotential model, Associated Legendre function, Gravitational acceleration, Potential.

**Cite this article:** Mosayebzadeh, M., Karimi, R., & Azmoudeh Ardalan, A. (2024). Computational accuracy required in the evaluation of global geopotential models. *Journal of the Earth and Space Physics*, 50(2), 265-282. DOI: <http://doi.org/10.22059/jesphys.2024.357748.1007516>

E-mail: (2) [karimi@tafreshu.ac.ir](mailto:karimi@tafreshu.ac.ir) (3) [ardalan@ut.ac.ir](mailto:ardalan@ut.ac.ir)



Publisher: University of Tehran Press.  
DOI: <http://doi.org/10.22059/jesphys.2024.357748.1007516>

Print ISSN: 2538-371X  
Online ISSN: 2538-3906

## دقت محاسباتی مورد نیاز در ارزیابی مدل‌های ژئوپتانسیلی جهانی

مهدی مسیب‌زاده<sup>۱</sup> | روح‌اله کریمی<sup>۲</sup> | علیرضا آرموده اردلان<sup>۳</sup>

۱. گروه مهندسی عمران، دانشگاه آزاد اسلامی واحد زنند، کرمان، ایران.
۲. گروه ژئودزی و مهندسی نقشه‌برداری، دانشکده مهندسی عمران و نقشه‌برداری، دانشگاه تفرش، تفرش، ایران.
۳. گروه ژئودزی و هیدروگرافی، دانشکده مهندسی نقشه‌برداری و اطلاعات مکانی، پردیس دانشکده‌های فنی، دانشگاه تهران، تهران، ایران.

رایانامه نویسنده مسئول: [mosayebz@ut.ac.ir](mailto:mosayebz@ut.ac.ir)

(دریافت: ۱۴۰۲/۳/۲، بازنگری: ۱۴۰۲/۵/۱۴، پذیرش نهایی: ۱۴۰۲/۱۰/۱۹، انتشار آنلاین: ۱۴۰۳/۴/۱۶)

### چکیده

یکی از چالش‌های اصلی در به‌کارگیری مدل‌های ژئوپتانسیلی جهانی، محاسبه توابع لژاندر وابسته نوع اول بر اساس فرمول‌های بازگشتی معمول است. از آنجایی که اکثر نرم‌افزارهای محاسباتی به‌طور پیش‌فرض از فرمت «دقت مضاعف» در محاسبات استفاده می‌کنند، یک سوال مهم این است که آیا این سطح دقت برای محاسبه توابع لژاندر وابسته نوع اول و ارزیابی مدل‌های ژئوپتانسیلی کافی است؟ نتایج نشان می‌دهد که محاسبه توابع لژاندر در درجه ۲۱۹۰، معادل بالاترین درجه مدل‌های ژئوپتانسیلی جهانی موجود، حتی با به‌کارگیری دقت مضاعف، برای عرض‌های کروی در بازه  $[۷۸^{\circ}۳۳' و ۵۶^{\circ}۲۰']$  از دقت کافی برخوردار نیست، که بیشترین کاهش دقت در عرض کروی ۶۰ درجه رخ می‌دهد. همچنین نتایج نشان می‌دهد که در عرض کروی ۶۰ درجه، محاسبه توابع لژاندر در درجات بالاتر از ۲۰۲۹، دچار افت دقت شده و این افت دقت با افزایش درجه تشدید می‌شود. بر اساس نتایج، محاسبه پتانسیل ثقل و شتاب ثقل تا درجه ۲۱۹۰، به‌ترتیب در محدوده عرض‌های کروی از  $۵۷^{\circ}۳۲'$  تا  $۶۰^{\circ}۱۳'$  و  $۵۷^{\circ}۴۱'$  تا  $۶۰^{\circ}۱۳'$  دچار افت شدید دقت می‌شود. از نتایج ما درمی‌یابیم که حداکثر درجه بسط برای محاسبه دقیق پتانسیل ثقل و شتاب ثقل برای تمام عرض‌های کروی، به‌ترتیب درجه ۲۰۶۵ و ۲۰۷۱ است. در این تحقیق، ما نشان می‌دهیم که برای محاسبه توابع لژاندر بر اساس روابط بازگشتی و تولید تابع‌های میدان ثقل بر اساس مدل‌های ژئوپتانسیلی درجات بالای کنونی، نیازمند حفظ «دقت مضاعف طولی» در تمام فرایند محاسباتی هستیم. واژه‌های کلیدی: مدل ژئوپتانسیلی، توابع وابسته لژاندر، شتاب ثقل، پتانسیل.

### ۱. مقدمه

که  $\phi$ ،  $\lambda$  و  $r$  مؤلفه‌های مختصات کروی،  $GM$  ثابت جاذبی زمین،  $R$  شعاع رفرانس،  $\bar{P}_{nm}$  توابع لژاندر نوع اول نرمالیزه شده از درجه  $n$  و مرتبه  $m$ ،  $\bar{C}_{nm}$  و  $\bar{S}_{nm}$  ضرایب ژئوپتانسیلی و  $n_{max}$  درجه بیشینه بسط است. امروزه در سایه افزایش داده‌های مورد استفاده در تولید ضرایب ژئوپتانسیلی، این مدل‌ها تا درجه و مرتبه‌های بالایی توسعه یافته و در نتیجه، نحوه محاسبه عددی توابع لژاندر در درجه و مرتبه‌های بالا، خود به یک چالش در به‌کارگیری این ضرایب ژئوپتانسیلی تبدیل شده است. محاسبه دقیق توابع لژاندر با استفاده از ابزارهای محاسباتی و نرم‌افزارها، به‌دلیل خصلت فرمول‌های بازگشتی که برای محاسبه آنها به‌کار می‌رود، همواره با خطاهای تجمع

برای مدل‌سازی پدیده‌های فیزیکی، به توابع پایه مناسب نیاز داریم. از جمله توابع پایه‌ای که در علوم مهندسی و فیزیک برای مدل‌سازی پدیده‌های فیزیکی مورد استفاده بسیار قرار می‌گیرد، توابع هارمونیک‌های کروی هستند. هارمونیک‌های کروی در حل مسائل مرتبط به میدان‌های جاذبی و مغناطیسی، بسیار پرکاربرد هستند (کلمبو، ۱۹۸۱). به‌عنوان مثال، پتانسیل جاذبه زمین در فضای خالی از جرم، بر اساس این توابع پایه به‌صورت زیر نمایش داده می‌شود (هایسکنن و موریتز، ۱۹۶۷).

$$V(\lambda, \phi, r) = \frac{GM}{R} \sum_{n=0}^{n_{max}} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm} \cos(m\lambda) + \bar{S}_{nm} \sin(m\lambda)) \bar{P}_{nm}(\sin(\phi)) \quad (1)$$

وجود دارد که با افزایش درجه  $\bar{P}_{nm}$  ها، هر بار با توان  $m$  و به صورت  $u^m$  ظاهر می‌شود. در نتیجه با افزایش درجه  $\bar{P}_{nm}$  ها، ضریب  $u^m$  باعث پاریز شدن درایه‌های روی قطر اصلی می‌شود. با فاکتور گرفتن جمله  $u^m$  می‌توان به جای محاسبه  $\bar{P}_{nm}$  ها، درایه‌ها را به صورت  $\frac{\bar{P}_{nm}}{u^m}$  محاسبه کرد. در این صورت تا درجات بالا می‌توان این جملات را محاسبه و ذخیره کرد. در نهایت در هنگام استفاده از این توابع، ضرایب  $u^m$  که به صورت یک ماتریس ذخیره شده‌اند نیز باید اعمال شوند. اشپرلاک (۲۰۱۱) نیز از همین روش برای اجتناب از صفر شدن درایه‌های  $\bar{P}_{nm}$  ها استفاده کرده است. این روش تا درجات بالا معتبر است اما گاهی اوقات ضرایب  $u^m$  نیز نمی‌توانند از پاریز شدن درایه‌های  $\bar{P}_{nm}$  جلوگیری کنند. هولمز و فدرستن (۲۰۰۲) در یک آنالیز عددی نشان داده‌اند که با فاکتور گرفتن یک ضریب ثابت از تمام درایه‌ها می‌توان این مسئله را نیز جبران کرد. برای این منظور عدد  $10^{-28}$  به عنوان ضریب ثابت معرفی شده است تا در هنگام محاسبه درایه‌های  $\bar{P}_{nm}$  ، این عدد را از تمام درایه‌ها فاکتور گرفته و از پاریز شدن آنها جلوگیری کرد. رکسر و هیرت (۲۰۱۵) نیز از همین روش برای پایداری محاسبات استفاده کرده است. در نتیجه دو ضریب  $u^m$  و  $10^{-28}$  باید در هنگام استفاده از  $\bar{P}_{nm}$  ها به تمام درایه‌ها اعمال شوند. در این گونه روش‌های مبتنی بر فاکتورگیری، علاوه بر پیچیدگی محاسبات، باز هم تضمین کاملی برای پاریز نشدن متغیرها وجود ندارد. مثلاً خود جمله  $u^m$  با افزایش مرتبه دچار ناپایداری می‌شود. روش‌های دیگری که جایگزین روش فاکتورگیری شده‌اند، روش‌های مبتنی بر روش کلنشاو (Clenshaw) هستند. در روشی که کلنشاو (۱۹۵۵) ارائه کرده است، برای جلوگیری از پاریز شدن درایه‌های  $\bar{P}_{nm}$  ، از محاسبه مستقیم  $\bar{P}_{nm}$  اجتناب کرده و در رابطه (۱) توسط ضرب همزمان سایر اجزای این رابطه، نتیجه نهایی یکجا محاسبه می‌شود. به این معنا که رابطه (۱) را به صورت یک ماتریس پایین‌مثلثی در نظر گرفته و با تعویض دو بسط درون رابطه (۱)، این رابطه را به صورت رابطه (۲)

شونده همراه بوده که می‌تواند نتایج حاصل را شدیداً تحت تأثیر قرار دهد. در گذشته، زمانی که حداکثر درجه مدل‌های ژئوپتانسیلی زیر ۲۰۰۰ بود، دغدغه اصلی در بسط هارمونیک‌های کروی تنها محدود به نحوه محاسبه هرچه دقیق‌تر تابعک‌های میدان ثقل در قطبین کره زمین بود. به عنوان مثال می‌توان از بوش (۲۰۰۰) یاد کرد که به مسئله پایداری محاسبات در قطبین می‌پردازد و روش‌هایی برای پایداری محاسبات ارائه می‌دهد. اما با افزایش بیشینه درجه و مرتبه مدل‌های ژئوپتانسیلی و ظهور مدل‌هایی مانند EGM2008 (پاولیس و همکاران، ۲۰۰۸) و EIGEN6c4 (فورسته و همکاران، ۲۰۱۴)، مسئله ناپایداری محاسبات در عرض‌های میانی، به صورت بحرانی‌تر و پیچیده‌تر از نواحی قطبی نمود یافت. در مقالات متعددی به خطای محاسبه عددی توابع لژاندر نوع اول اشاره و روش‌هایی برای کاهش خطای آن ارائه شده است. هولمز و فدرستن (۲۰۰۲) به این نکته اشاره می‌کنند که استاندارد محاسبه اعداد در زبان‌های برنامه‌نویسی، قادر به رسیدن به دقت مورد نیاز برای توابع لژاندر در درجات بالا نیست؛ زیرا کمترین عدد قابل محاسبه در استاندارد IEEE (۲۰۰۸)، عدد  $10^{-308}$  بوده و با نزدیک شدن متغیرها به این عدد، دقت محاسبات کاهش می‌یابد. در حقیقت اعداد کوچک‌تر از  $10^{-308}$  صفر فرض شده و به اصطلاح پاریز (Underflow) می‌شوند. اشپرلاک (۲۰۱۱)، در مورد دقت محاسبه در استاندارد IEEE (۲۰۰۸) و اثر آن بر محاسبه مدل‌های ژئوپتانسیلی، بحث کرده است. هولمز و فدرستن (۲۰۰۲) برای مقابله با این مشکل و افزایش دقت محاسبه این توابع، چندین روش را مورد بررسی قرار داده است. در اکثر این روش‌ها، یک ضریب کاهنده برای محاسبه  $\bar{P}_{nm}$  ها در نظر گرفته شده است تا با افزایش درجه و مرتبه توابع لژاندر، از نزدیک شدن اعداد به  $10^{-308}$  جلوگیری کند. نکته اساسی این است که توابع لژاندر معمولاً به صورت بازگشتی محاسبه شده و هر درجه و مرتبه از  $\bar{P}_{nm}$  ها از درجات و مراتب پایین‌تر محاسبه می‌شوند. در این روابط بازگشتی، یک جمله به صورت  $u = \cos(\phi)$

بازنویسی می‌کنند.

نظر گرفته می‌شود (اسمیت و همکاران، ۱۹۸۱):

$$\zeta = x.q^k \quad (۵)$$

$x$  قسمت اصلی (Principal part) و  $k$  شاخص کمکی (Auxiliary index) از عدد حقیقی غیر صفر  $q$  نامیده می‌شوند و  $q$  یک عدد توانی در پایه ۲ و تا حد امکان بزرگ است. زوج ( $x$  و  $k$ ) را حالت برد مبسوط عدد  $q$  می‌نامند. مقالات مختلفی مثل فوکوشیما (۲۰۱۲)، نوویکوا و دیمیترنکو (۲۰۱۶)، ژینگ و همکاران (۲۰۲۰) از این روش استفاده کرده‌اند. فوکوشیما (۲۰۱۸) برای جلوگیری از پاریز شدن محاسبات از روش X-numbers استفاده کرده است که این روش در فوکوشیما (۲۰۱۲) تشریح شده است. در این روش نیز مثل روش ERA، اعداد حقیقی به صورت یک عدد تواندار در نظر گرفته شده است. استفاده از ERA برای جلوگیری از پاریز شدن اعداد، زمان محاسبات را افزایش داده و حافظه بیشتری نسبت به حالت عادی محاسبات نیاز دارد. البته امروزه با افزایش حافظه رایانه‌ها، دغدغه‌ای در مورد حافظه تقریباً وجود ندارد؛ اما افزایش سرعت محاسبات، هنوز هم مورد توجه پژوهشگران در این حوزه قرار دارد. در همین راستا، گلی و همکاران (۲۰۲۲) برای افزایش سرعت محاسبات در استفاده از ERA تکنیکی ارائه کرده است که سرعت محاسبات را ۱۰ تا ۳۰ درصد افزایش داده است. مقالاتی که از روش ERA استفاده می‌کنند، بر روی پاریز نشدن اعداد تا درجات بسیار بالا متمرکز شده‌اند. به طور مثال گلی و همکاران (۲۰۲۲) دقت محاسبه توابع لژاندر را تا درجات ۱۰۰۰۰۰ در حد  $10^{-9}$  نگه داشته‌اند. بالمینو و همکاران (۲۰۱۲) با فاکتور گرفتن یک عدد کوچک، محاسبات توابع وابسته لژاندر را تا درجه ۳۲۴۰ تست کرده است. در روش‌های مشابه، برای جلوگیری از پاریز شدن محاسبات، با نزدیک شدن به مرز پاریز شدن اعداد، یک عدد مثل  $10^{-28}$  را فاکتور گرفته و محاسبات پایدار نگه داشته می‌شوند. همچنین در بسیاری از مقالات از جمله بالمینو و همکاران (۲۰۱۲)، برای دوری از پاریز شدن محاسبات، از روش لگاریتم گیری استفاده شده

$$V(\lambda, \phi, r) = \frac{GM}{R} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} (Y_c + Y_s) \quad (۲)$$

$$Y_c = \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \bar{C}_{nm} \cos(m\lambda) \bar{P}_{nm}(\sin(\phi)) \quad (۳)$$

$$Y_s = \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \bar{S}_{nm} \sin(m\lambda) \bar{P}_{nm}(\sin(\phi)) \quad (۴)$$

در هنگام محاسبه  $V(\lambda, \phi, r)$  از رابطه (۲)،  $\bar{P}_{nm}(\sin(\phi))$  به همراه ضرایب روابط (۳) و (۴) محاسبه می‌شود تا از پاریز شدن درایه‌های  $\bar{P}_{nm}$  اجتناب شود. اگر این رویه مورد استفاده قرار گیرد، نمی‌توان خود  $\bar{P}_{nm}$  را به صورت جداگانه محاسبه کرد و در هنگام محاسبه، باید به صورت تدریجی درایه‌های رابطه (۲) محاسبه شده و با هم جمع شوند. در روش کلنشاو اگر عناصری که در رابطه (۲) وجود دارند را به صورت یک ماتریس پایین مثلثی در نظر بگیریم، هر ستون را می‌توان جداگانه جمع کرده و نتیجه همه ستون‌ها را با هم جمع کرد. در این صورت باید از روابط بازگشتی محاسبه توابع لژاندر به صورت ستونی استفاده کرد. برای جمع هر ستون نیازی نیست که همه توابع لژاندر را محاسبه کنیم؛ زیرا هر درایه از ماتریس توابع لژاندر، از درایه قبلی محاسبه می‌شود و اگر این جمع را به یکباره محاسبه کنیم، نیازی به محاسبه خود توابع نیست. همچنین وجود سایر متغیرها در رابطه (۲) باعث خواهد شد که نتیجه، از عدد  $10^{-38}$  دور شده و دچار خطای محاسباتی نشویم. در بسیاری از شاخه‌های علوم که در آنها به جمع یک سری نیاز داریم که از روابط بازگشتی محاسبه می‌شوند، روش کلنشاو مورد استفاده قرار می‌گیرد. مزیت مهم این روش، دقت بالای آن است ولی بهای سنگین این دقت بالا، علاوه بر پیچیدگی زیاد، عدم محاسبه خود توابع لژاندر است که کار با این روش را بسیار مشکل می‌کند.

روش دیگری که مقالات زیادی به آن پرداخته‌اند، استفاده از ایده حساب برد مبسوط ERA (Extended Range Arithmetic) است. در این روش، برای جلوگیری از پاریز شدن اعداد، هر عدد حقیقی  $q$  به صورت رابطه (۵) در

از سیستم مختصات کارترین به‌جای سیستم کروی استفاده کرده‌اند. نکته قابل تامل در روش‌هایی که از سیستم مختصات کارترین استفاده می‌کنند این است که علاوه بر پیچیده‌تر شدن محاسبات، بنا بر محاسبات فانتینو و کاسوتو، چندجمله‌ای‌های هلمهولتز مورد استفاده در این روش‌ها، با افزایش درجه و مرتبه، دچار ناپایداری عددی می‌شوند و فقط در نقاط قطبین می‌توانند جایگزینی برای روش‌های لژاندر و کلنشاو باشند. همچنین باید توجه داشت که محاسبات فانتینو و کاسوتو (۲۰۰۹) فقط تا درجه ۳۶۰ صورت گرفته است. نوویکوا و دیمترینکو (۲۰۱۶) نیز روش‌های مختلفی را برای مقابله با خطای محاسبه توابع لژاندر بررسی کرده و تأثیر خطا را در درجات مختلف و نواحی مختلف مورد ارزیابی قرار داده‌اند. در تمام این روش‌ها، یا از فاکتورگیری ضرایب کاهنده استفاده شده و یا برای کاهش اندازه اعداد، از روش لگاریتمی استفاده شده است. مشکل اصلی این روش‌ها، علاوه بر پیچیدگی زیاد در برنامه‌نویسی، کاهش دقت آنها در برخی عرض‌ها (عرض‌های بحرانی) و در درجات بالا است. همچنین در روش‌های فاکتورگیری، دقت ضرایبی که فاکتور گرفته می‌شوند نیز محدود است و به‌طور مثال جمله  $u^m$  نیز با افزایش  $m$  به صفر نزدیک شده و پاریز می‌شود. این دغدغه همواره در محاسبات تابعک‌های میدان جاذبه وجود داشته و در محاسبات باید مراقب بود که مسئله پاریز شدن در منطقه محاسباتی، برای  $\bar{P}_{nm}$ ها اتفاق نیفتد. درضمن، پیچیدگی این روش‌ها بسیار زیاد بوده و کار برنامه‌نویسی را برای محققین دشوار ساخته و به‌جای این که به محاسبات اصلی پرداخته شود، باید زمان بسیار زیادی را برای برنامه‌نویسی این روش‌ها صرف کنند. به‌عنوان مثال در روش کلنشاو، با هر تغییر کوچک در محاسبه تابعک‌های میدان ثقل، باید به دقت بررسی شود که روش کلنشاو برای محاسبه همزمان کلیه المان‌های رابطه (۲) و مشتقات این فرمول، به درستی اعمال و برنامه‌نویسی شود. مشکل دوم این روش‌ها آن است که خود  $\bar{P}_{nm}$ ها نیز محاسبه نمی‌شوند، بلکه جملاتی

است. یو و همکاران (۲۰۱۱)، در یک پژوهش سعی کرده‌اند که به‌جای فرمول‌های بازگشتی، از روش انتگرالی برای محاسبه توابع لژاندر استفاده کنند. این روش نسبت به روش بازگشتی، جواب پایدارتری دارد اما بهای این پایداری، افزایش زمان محاسبه این توابع است. ویتور و همکاران (۲۰۰۸) برای حل این مشکل، از یک الگوریتم عددی استفاده کرده و دقت محاسبات را بسیار بالا برده‌اند اما این روش نیز با مشکل کاهش بسیار زیاد سرعت مواجه است. در درجه ۱۸۰۰، استفاده از این الگوریتم حدود ۴۰ برابر زمان بیشتری برای محاسبه توابع لژاندر نسبت به الگوریتم‌های استاندارد نیاز دارد. جکلی و همکاران (۲۰۰۷) نیز برای افزایش دقت محاسبات در نرم‌افزارهایی مثل MATLAB پیشنهاد کرده است که از قابلیت محاسبات با دقت نامحدود این نرم‌افزارها استفاده شود. رکسر و هیرت (۲۰۱۵) نیز برای افزایش درجه محاسبات بیشتر از درجه ۲۷۰۰، همین روش را پیشنهاد کرده است؛ اما استفاده از این قابلیت سرعت محاسبات را بسیار کاهش داده و در درجات بالا، محاسبات را بسیار کند می‌کند. فانتینو و کاسوتو (۲۰۰۹) چندین روش برای محاسبه تابعک‌های مدل‌های ژئوپتانسیلی و مشتقات درجه یک تا چهار را بررسی و مقایسه کرده است. روش اول، روش لژاندر است که در مقاله حاضر مورد بررسی قرار گرفته است، روش دوم، روش کلنشاو بوده (که در این پژوهش نیز مورد بررسی قرار گرفته است) و روش سوم، روش پاینس (Pines) است که بر اساس مقاله پاینس (۱۹۷۳) مورد مطالعه قرار گرفته است. در روش پاینس، برای اجتناب از ناپایداری در قطبین، از سیستم مختصات کارترین به‌جای سیستم مختصات کروی استفاده شده است. روش دیگری که در مقاله فانتینو و کاسوتو (۲۰۰۹) مورد بررسی قرار گرفته است، روش کانینگهام-متریس (Metris-Cunningham) نامیده شده که بر اساس مقالات کانینگهام (۱۹۷۰) و متریس و همکاران (۱۹۹۸) شکل گرفته است. این مقالات نیز در جهت بهبود روش پاینس،

$$\bar{P}_{nm}(\sin(\phi)) = \sqrt{\frac{k(2n+1)(n-m)!}{(n+m)!}} P_{nm}(\sin(\phi)), \quad (۶)$$

$$k = \begin{cases} 1, & m = 0 \\ 2, & m > 0 \end{cases}$$

$$P_{nm}(t) = \frac{1}{2^n n!} (1-t^2)^{(m/2)} \frac{d^{n+m}(t^2-1)^n}{dt^{n+m}} \quad (۷)$$

در روابط فوق،  $P_{nm}$  توابع لژاندر نوع اول و  $\bar{P}_{nm}$  توابع نرمالیزه لژاندر نوع اول هستند. از آنجا که مشتق‌گیری بی‌درپی در این روابط بسیار مشکل است، از روابط بازگشتی برای محاسبه آنها استفاده می‌شود. در این روابط بازگشتی  $\bar{P}_{nm}$  ها به صورت یک ماتریس در نظر گرفته می‌شوند که ابتدا درایه‌های قطر اصلی این ماتریس از رابطه (۸) و درایه‌های کنار قطر اصلی از رابطه (۹) محاسبه می‌شوند (کلمبو، ۱۹۸۱).

$$\bar{P}_{nm} = \sqrt{\frac{2n+1}{2n}} \cos(\phi) \bar{P}_{n-1,n-1} \quad (۸)$$

$$\bar{P}_{n,n-1} = \sqrt{\frac{2n+1}{2n-2}} \cos(\phi) \bar{P}_{n-1,n-2} \quad (۹)$$

درایه‌های زیر قطر اصلی را می‌توان به صورت رابطه بازگشتی ستونی یا سطری محاسبه کرد. درایه‌های هر ستون زیر قطر اصلی از درایه‌های روی قطر اصلی به صورت عمودی و از رابطه بازگشتی (۱۰) محاسبه می‌شوند (کلمبو، ۱۹۸۱). همچنین می‌توان به جای این که ستون زیر قطر را محاسبه کنیم، سطر زیر قطر را به صورت افقی محاسبه کنیم (کلمبو، ۱۹۸۱).

$$\bar{P}_{nm} = \sqrt{\frac{4n^2-1}{n^2-m^2}} \sin(\phi) \bar{P}_{n-1,m} - \sqrt{\frac{(2n+1)(n+m-1)(n-m-1)}{(n^2-m^2)(2n-3)}} \bar{P}_{n-2,m} \quad (۱۰)$$

نکته حائز اهمیت در محاسبه توابع لژاندر این است که اگر بخواهیم این توابع را در درجات پایین محاسبه کنیم، مشکل خاصی به وجود نمی‌آید؛ اما زمانی که بخواهیم توابع  $\bar{P}_{nm}$  را در درجات بالا مثلاً درجه ۲۱۹۰ محاسبه کنیم، دچار مشکلات محاسبه عددی آن خواهیم شد. در

شبه به رابطه‌های (۳) و (۴) به صورت یکجا محاسبه می‌شوند. در نتیجه بررسی و اصلاح برنامه‌های محاسباتی بسیار سخت شده و اگر محاسبات یکی از تابع‌های میدان ثقل با مشکل مواجه شده و نتایج مطلوب حاصل نشوند، تشخیص این که کدام قسمت یا کدام کمیت باید مورد اصلاح قرار گیرد، بسیار مشکل و زمان‌بر خواهد بود. مقاله حاضر در واقع با رویکرد ساده‌سازی محاسبات و با دو هدف اصلی نوشته شده است. اول این که در صورت استفاده از دقت مضاعف (Double Precision)، مناطق بحرانی و درجات بحرانی را تا آخرین درجه‌ای که مدل‌های ژئوپتانسیلی فعلی منتشر شده‌اند، با جزئیات دقیق معرفی می‌کند تا افرادی که در مناطق غیربحرانی یا درجات پایین‌تر از درجات بحرانی در حال محاسبه این توابع هستند، به سادگی و بدون نگرانی و با برنامه‌نویسی ساده به نتیجه برسند؛ دوم این که در صورت ورود به مناطق و عرض‌های بحرانی و در درجات بالا، با استفاده از روشی که در اینجا معرفی شده است، بدون دغدغه از نتیجه محاسبات توابع لژاندر، زمان را صرف سایر محاسبات کرده و از محاسبات خود توابع لژاندر فارغ شوند. روش پیشنهادی دارای این حسن است که خود  $\bar{P}_{nm}$  ها و مشتقات آنها جداگانه و با دقت خوب محاسبه می‌شوند که این باعث می‌شود اولاً عیب‌یابی برنامه‌ها بسیار ساده‌تر شده و اشکالات محاسبه  $\bar{P}_{nm}$  به صورت جداگانه قابل بررسی شود. ثانیاً، در هر پروژه محاسباتی، می‌توان یک بار  $\bar{P}_{nm}$  ها را در تمامی عرض‌های موردنیاز محاسبه و ذخیره کرده و در هر بار اجرای برنامه‌ها، این توابع را فقط بازخوانی کرد، که این باعث افزایش سرعت محاسبات می‌شود.

## ۲. مشکلات محاسبه توابع لژاندر نرمالیزه شده از نوع اول

روابط اصلی محاسبه توابع لژاندر نرمالیزه شده که حالت بسته دارند به صورت رابطه (۶) و رابطه (۷) قابل بیان است (هایسکنن و موریتز، ۱۹۶۷):

محاسبه توابع لژاندر در صورت استفاده از دقت مضاعف پاسخ دهیم:

- در صورت محاسبه توابع لژاندر تا درجه ۲۱۹۰، که معادل بیشترین درجه مدل‌های ژئوتانسیلی جهانی امروزی است، در چه عرض‌های کروی محاسبه توابع لژاندر دچار خطای زیادی می‌شود؟ در حقیقت در پاسخ به این سوال می‌خواهیم عرض‌های کروی بحرانی در محاسبه توابع لژاندر را شناسایی کنیم.

- در عرض‌های کروی بحرانی، از چه درجه‌ای به بعد، محاسبه توابع لژاندر دچار خطای زیاد می‌شوند؟

برای ارزیابی خطای توابع لژاندر و مشتقات آنها (در روابط زیر، مشتق توابع لژاندر نسبت به  $\phi$  با  $d\bar{P}_{nm}$  نمایش داده شده است) می‌توانیم از روابط تحلیلی و دقیق (۱۱) و (۱۲) استفاده کنیم (هولمز و فدرستن ۲۰۰۲):

$$\sum_{n=0}^{n_{\max}} \sum_{m=0}^n (P_{nm})^{-2} = (n_{\max} + 1)^2 \quad (11)$$

$$\sum_{n=0}^{n_{\max}} \sum_{m=0}^n (dP_{nm})^{-2} = \frac{n_{\max} (n_{\max} + 1)^2 (n_{\max} + 2)}{4} \quad (12)$$

بر این اساس، خطای تحلیلی محاسبه توابع لژاندر ( $e_{\bar{P}_{nm}}$ ) و خطای تحلیلی مشتق آن ( $e_{d\bar{P}_{nm}}$ ) را به صورت روابط (۱۳) و (۱۴) تعریف می‌کنیم:

$$e_{\bar{P}_{nm}} = \sum_{n=0}^{n_{\max}} \sum_{m=0}^n (P_{nm})^{-2} - (n_{\max} + 1)^2 \quad (13)$$

$$e_{d\bar{P}_{nm}} = \sum_{n=0}^{n_{\max}} \sum_{m=0}^n (dP_{nm})^{-2} - \frac{n_{\max} (n_{\max} + 1)^2 (n_{\max} + 2)}{4} \quad (14)$$

از طرفی می‌توانیم توابع لژاندر و مشتقات آنها را در محاسبه تابع‌های میدان ثقل مانند پتانسیل ثقل ( $W$ ) و شتاب ثقل زمین ( $g$ ) با استفاده از یک مدل ژئوتانسیلی جهانی مانند EIGEN-6C4 (فورسته و همکاران، ۲۰۱۴) به کار برده و تأثیر خطای محاسبه توابع لژاندر و مشتقات آن را روی آنها بررسی کنیم.

روابط بازگشتی، اگر  $\bar{P}_{nm}$  را به صورت یک ماتریس در نظر بگیریم، در عرض‌های کروی تقریباً بین ۵۵ تا ۸۰ درجه، محاسبه درایه‌های قطر اصلی و کنار قطر اصلی دچار اشکال می‌شود. دلیل این امر این است که در رابطه (۸) با افزایش  $n$ ، اعداد روی قطر اصلی به سمت صفر میل کرده و به عدد  $10^{-308}$  رسیده و کوچک‌تر می‌شوند.

زبان‌های برنامه‌نویسی و نرم‌افزارهای ریاضی مثل MATLAB معمولاً از متغیر نوع دقت مضاعف (Double Precision) برای محاسبات دقیق استفاده می‌کنند. بر اساس استاندارد IEEE (۲۰۰۸) (Institute of Electrical and Electronic Engineers) شماره ۷۵۴، برای ذخیره‌سازی اعداد اعشاری با دقت مضاعف تعداد ۸ بایت در نظر گرفته شده است. در نتیجه اعداد بزرگ‌تر از  $10^{308}$  اصطلاحاً سرریز (Overflow) شده و NaN (Not a Number) در نظر گرفته می‌شوند و اعداد کوچک‌تر از  $10^{-308}$  نیز اصطلاحاً پاریز شده و صفر در نظر گرفته می‌شوند. در نگاه اول این عدد بسیار کوچک بوده و به نظر می‌رسد هر قدر هم سایر اجزای رابطه (۱) بزرگ باشند، در هنگام ضرب بین اعداد، تأثیری نداشته باشند و این پاریز شدن، برای محاسبه  $V(\lambda, \phi, r)$  در رابطه (۱) قابل اغماض باشد. اما نکته اینجاست که در روش بازگشتی محاسبه  $\bar{P}_{nm}$  ها، پس از محاسبه قطر اصلی، سایر عناصر زیر قطر، از روی اعداد روی قطر محاسبه می‌شوند. این عناصر زیر قطر، نه تنها کوچک نیستند بلکه با دور شدن از قطر اصلی بسیار بزرگ می‌شوند. خطا در محاسبه قطر اصلی باعث می‌شود اعداد زیر قطر همگی با خطا محاسبه شوند و این مسئله باعث می‌شود که خطاهای بسیار بزرگی در هنگام محاسبه پتانسیل از رابطه (۱) به وجود آید.

### ۳. بررسی دقت محاسبه توابع لژاندر در درجات و

#### عرض‌های کروی مختلف

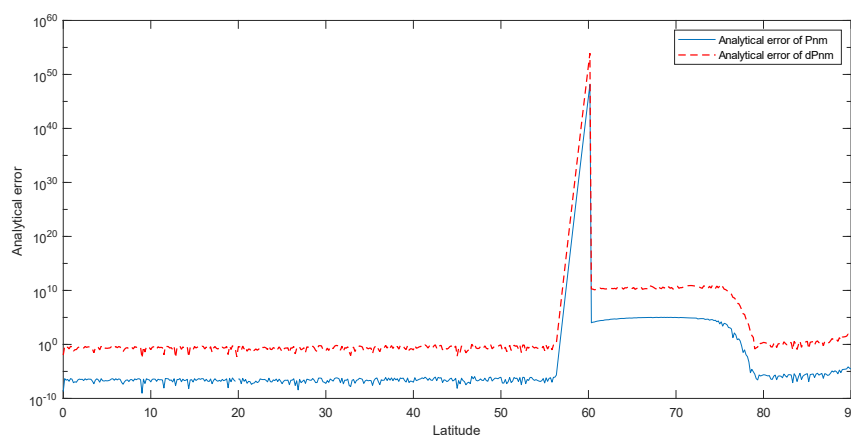
در این بخش سعی داریم به دو سوال اساسی در خصوص

## ۱-۳. تعیین عرض‌های کروی بحرانی در محاسبه توابع

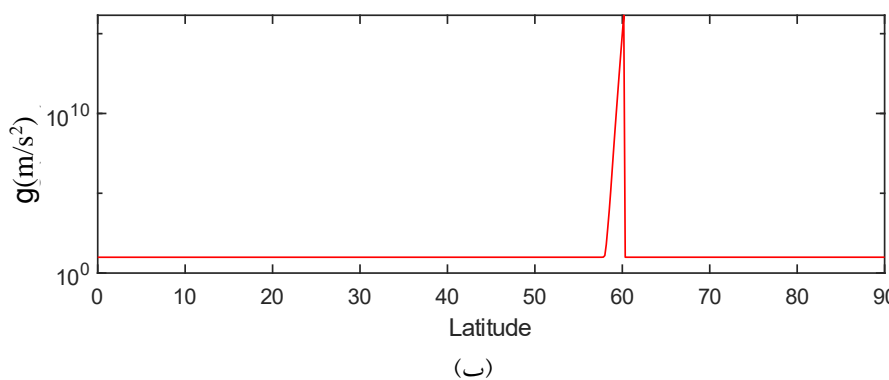
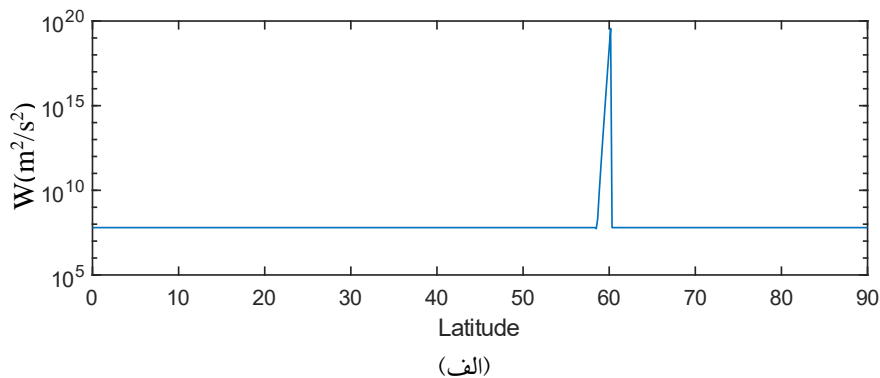
لژاندر

برای مشخص‌شدن عرض‌های کروی بحرانی، ابتدا از عرض صفر درجه تا عرض ۹۰ درجه با گام‌های ۱۰ دقیقه‌ای،  $\bar{P}_{nm}$  را تا درجه ۲۱۹۰ محاسبه کرده و با استفاده از رابطه‌های (۱۱) و (۱۲) به بررسی دقت محاسبه توابع لژاندر و مشتق آنها می‌پردازیم.

منظور از دقت در اینجا محاسبه  $e_{\bar{P}_{nm}}$  و  $e_{d\bar{P}_{nm}}$  با استفاده از روابط (۱۱) و (۱۲) است. همچنین، در امتداد یک نصف‌النهار و بر روی سطح بیضوی، پتانسیل ( $W$ ) و مقدار شتاب ثقل ( $g$ ) را محاسبه کرده و ترسیم می‌کنیم تا مناطق بحرانی برای محاسبه تابع‌های میدان ثقل مشخص شوند. شکل ۱ و ۲ نتایج این محاسبات را نشان می‌دهند.



شکل ۱. خطای محاسبه توابع لژاندر  $e_{\bar{P}_{nm}}$  (نمودار آبی پیوسته) و مشتق توابع لژاندر  $e_{d\bar{P}_{nm}}$  (نمودار قرمز خط‌چین) با استاندارد دقت مضاعف در عرض‌های کروی صفر تا ۹۰ درجه با گام‌های ۱۰ دقیقه‌ای تا درجه بسط ۲۱۹۰. شکل در مقیاس لگاریتمی ترسیم شده است.

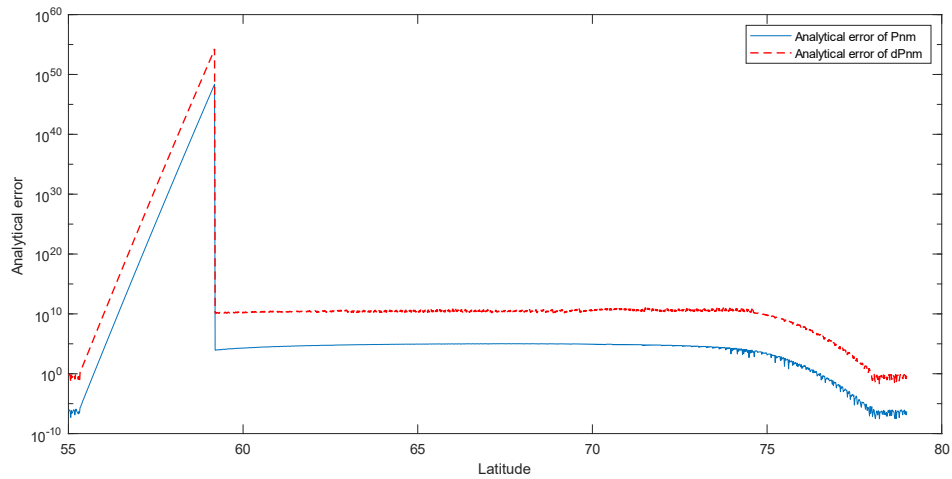


شکل ۲. نتیجه محاسبه پتانسیل ثقل (الف) و شتاب ثقل (ب) با استفاده از متغیرهای با دقت مضاعف در مدل ژئوپتانسیلی EIGEN-6C4 در امتداد نصف‌النهار گرینویچ (طول کروی صفر درجه) بر روی سطح بیضوی، در عرض‌های صفر تا ۹۰ درجه با گام‌های ۱۰ دقیقه‌ای تا درجه بسط ۲۱۹۰. شکل در مقیاس لگاریتمی ترسیم شده است.

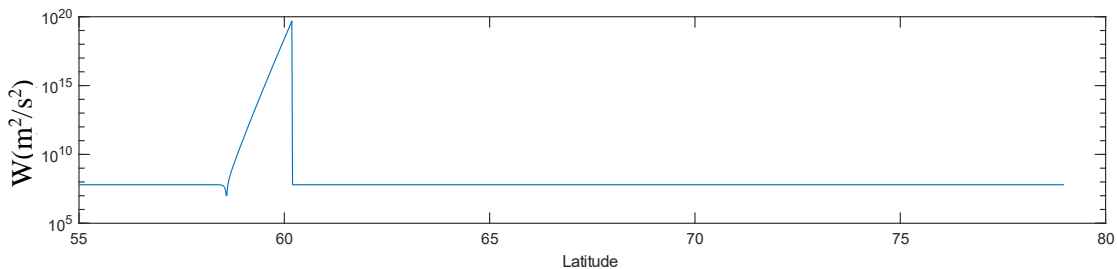


دقیق‌تر مشخص کردن محدوده عرض بحرانی، در این محدوده با گام‌های یک دقیقه‌ای، محاسبات را تکرار می‌کنیم. نتیجه این بررسی در شکل ۳ و ۴ نمایش داده شده است.

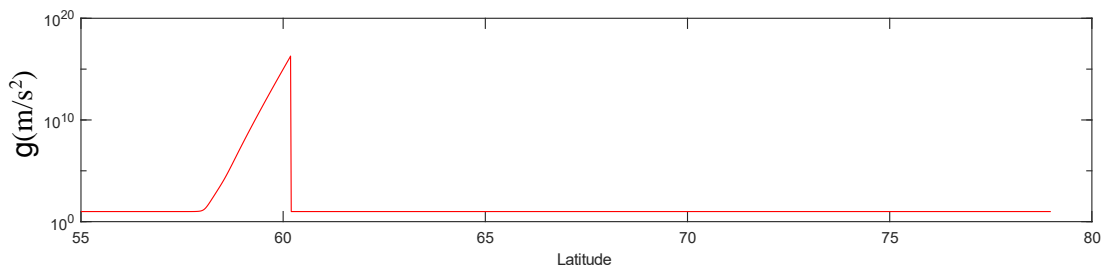
با توجه به شکل ۱ و ۲ می‌توان دریافت که محاسبات توابع لزاندر و مشتقات آن و به تبع آنها، محاسبه تابع‌های میدان ثقل، در عرض‌های کروی بین ۵۶ و ۷۹ درجه، دچار ناپایداری و کاهش دقت شده است. در نتیجه برای



شکل ۳. خطای محاسبه توابع لزاندر  $e_{\bar{P}_{nm}}$  (نمودار آبی پیوسته) و مشتق توابع لزاندر  $e_{d\bar{P}_{nm}}$  (نمودار قرمز خط‌چین) با استاندارد دقت مضاعف در عرض‌های کروی ۵۶ تا ۷۹ درجه با گام‌های ۱ دقیقه‌ای تا درجه بسط ۲۱۹۰. شکل در مقیاس لگاریتمی ترسیم شده است.



(الف)



(ب)

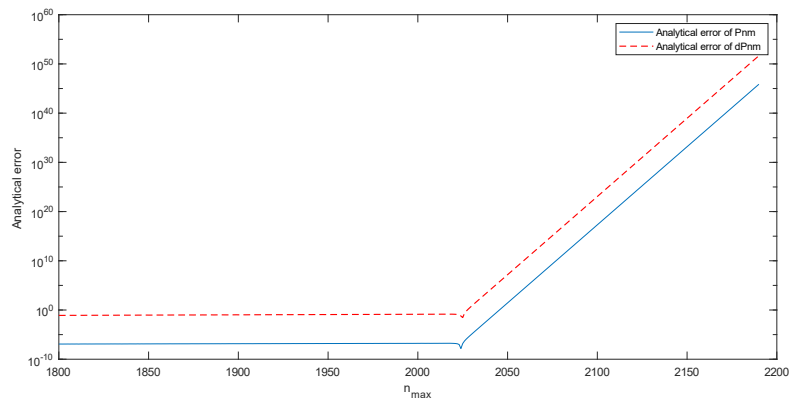
شکل ۴. نتیجه محاسبه پتانسیل ثقل (الف) و شتاب ثقل (ب) با استفاده از متغیرهای با دقت مضاعف در مدل ژئوپتانسیلی EIGEN-6C4 در امتداد نصف‌النهار گرینویچ (طول کروی صفر درجه) بر روی سطح بیضوی، در عرض‌های کروی ۵۵ تا ۷۹ درجه با گام‌های ۱ دقیقه‌ای تا درجه بسط ۲۱۹۰. شکل در مقیاس لگاریتمی ترسیم شده است.

همان‌طور که در شکل ۳ مشخص است، محاسبه توابع لژاندر و مشتق آنها، از عرض کروی  $۵۶^{\circ}۲۰'$  به تدریج دچار افت دقت شده، در عرض  $۶۰$  درجه به بحرانی‌ترین حالت رسیده و سپس مقدار خطا کم شده و در عرض کروی  $۷۸^{\circ}۳۳'$  خطای محاسبه توابع لژاندر به  $۱۰^{-۵}$  و خطای محاسبه مشتق توابع لژاندر نیز در عرض کروی  $۷۹$  درجه به  $۰/۱۵۹$  می‌رسد. در شکل (۴) مقدار خطا آنقدر زیاد است که در سایر مناطق، مقدار پتانسیل و مقدار شتاب ثقل به صورت یک خط مستقیم دیده می‌شوند. نکته جالب توجه این است که ناحیه بحرانی در محاسبه پتانسیل و شتاب ثقل محدوده کوچک‌تری است. نتایج نشان می‌دهد که ناحیه بحرانی در محاسبه پتانسیل ثقل، از عرض کروی

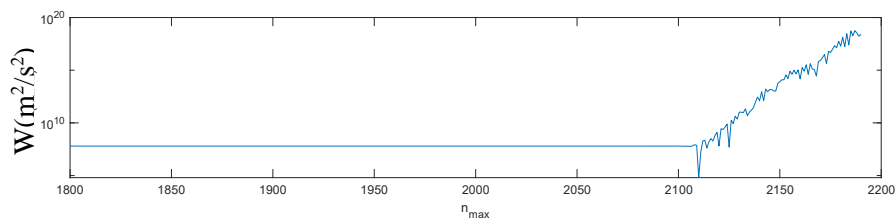
همان‌طور که در شکل ۳ مشخص است، محاسبه توابع لژاندر و مشتق آنها، از عرض کروی  $۵۶^{\circ}۲۰'$  به تدریج دچار افت دقت شده، در عرض  $۶۰$  درجه به بحرانی‌ترین حالت رسیده و سپس مقدار خطا کم شده و در عرض کروی  $۷۸^{\circ}۳۳'$  خطای محاسبه توابع لژاندر به  $۱۰^{-۵}$  و خطای محاسبه مشتق توابع لژاندر نیز در عرض کروی  $۷۹$  درجه به  $۰/۱۵۹$  می‌رسد. در شکل (۴) مقدار خطا آنقدر زیاد است که در سایر مناطق، مقدار پتانسیل و مقدار شتاب ثقل به صورت یک خط مستقیم دیده می‌شوند. نکته جالب توجه این است که ناحیه بحرانی در محاسبه پتانسیل و شتاب ثقل محدوده کوچک‌تری است. نتایج نشان می‌دهد که ناحیه بحرانی در محاسبه پتانسیل ثقل، از عرض کروی

۲-۳. تعیین درجه بسط بحرانی

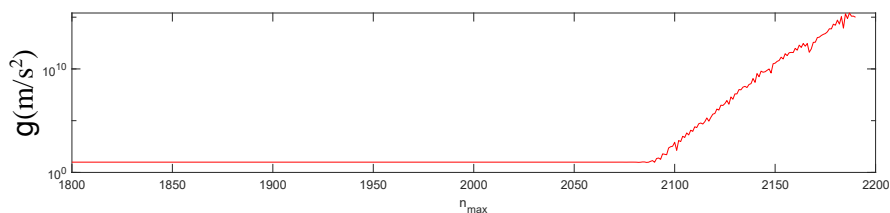
برای این که مشخص شود ناپایداری دقت محاسبه توابع لژاندر و تابعک‌های میدان ثقل از چه درجه‌ای شروع می‌شود، محاسبات را در عرض  $۶۰$  درجه برای درجه و مرتبه‌های  $۱۸۰۰$  تا  $۲۱۹۰$  تکرار می‌کنیم. نتیجه در شکل ۵ و ۶ نمایش داده شده است.



شکل ۵. خطای محاسبه توابع لژاندر  $e_{\bar{p}_{nm}}$  (نمودار آبی پیوسته) و مشتق توابع لژاندر  $e_{d\bar{p}_{nm}}$  (نمودار قرمز خط‌چین) با استاندارد دقت مضاعف در عرض کروی  $۶۰$  درجه، در درجات  $۱۸۰۰$  تا  $۲۱۹۰$ . شکل در مقیاس لگاریتمی ترسیم شده است.



(الف)



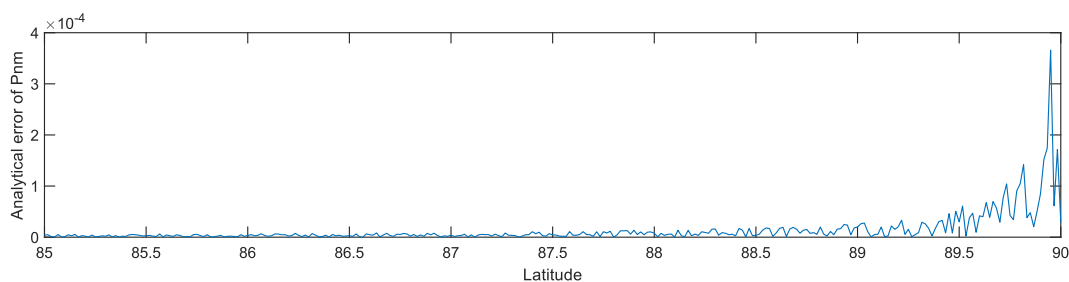
(ب)

شکل ۶. نتیجه محاسبه پتانسیل ثقل (الف) و شتاب ثقل (ب) با استفاده از متغیرهای دقت مضاعف در مدل ژئوپتانسیلی EIGEN-6C4. در

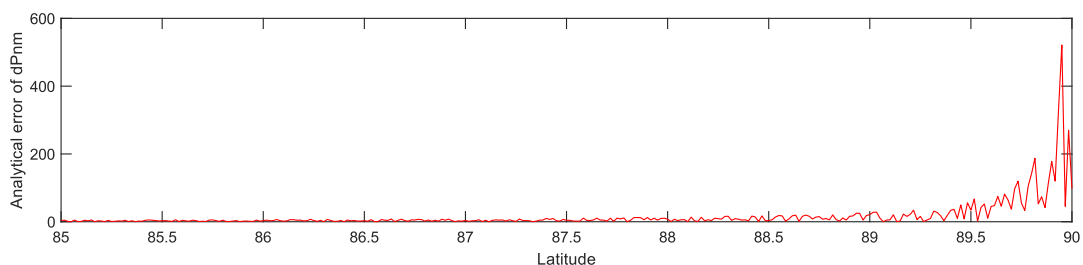
نصف‌النهار صفر درجه و مدار ۶۰ درجه بر روی سطح بیضوی، در درجات ۱۸۰۰ تا ۲۱۹۰. شکل در مقیاس لگاریتمی ترسیم شده است. نواحی نزدیک به قطب، محاسبات را در عرض‌های ۸۵ تا ۹۰ درجه و با گام‌های یک دقیقه‌ای برای درجه و مرتبه ۲۱۹۰ تکرار می‌کنیم نتایج در شکل ۷ و ۸ نمایش داده شده است.

همان‌طور که در شکل ۷ دیده می‌شود، محاسبه توابع لژاندر و مشتق آن در نواحی نزدیک قطب (تقریباً عرض‌های بالاتر از ۸۹/۵ درجه) دچار نوسانات شدید شده تا جایی که خطای محاسبه توابع لژاندر به  $1 \times 10^{-4}$  و خطای محاسبه مشتق آن به عدد ۳۰۰ می‌رسد. هرچند لازم به ذکر است که این میزان خطا در مقایسه با محاسبه توابع لژاندر و مشتق آن در نواحی بحرانی (عرض‌های حدود ۶۰ درجه) خیلی کوچک است. همچنین از شکل ۸ می‌توان دریافت که مشکلی در محاسبه تابع‌های میدان ثقل (پتانسیل و شتاب ثقل) در نواحی نزدیک قطب وجود ندارد.

۳-۳. مطالعه توابع لژاندر در نواحی نزدیک قطب  
برای بررسی توابع لژاندر و تابع‌های میدان ثقل، در

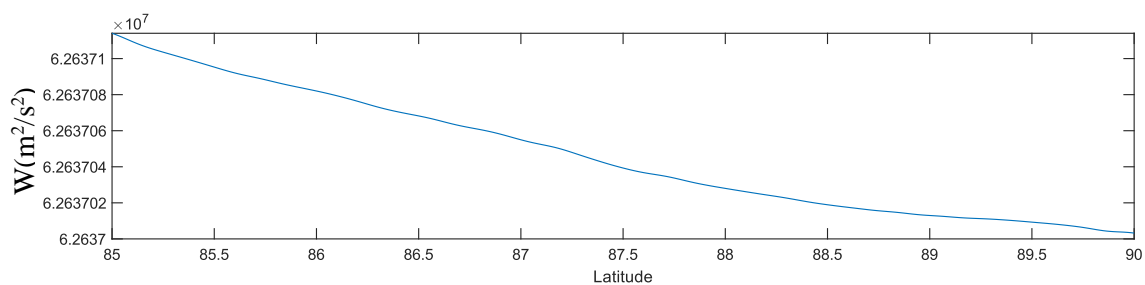


(الف)

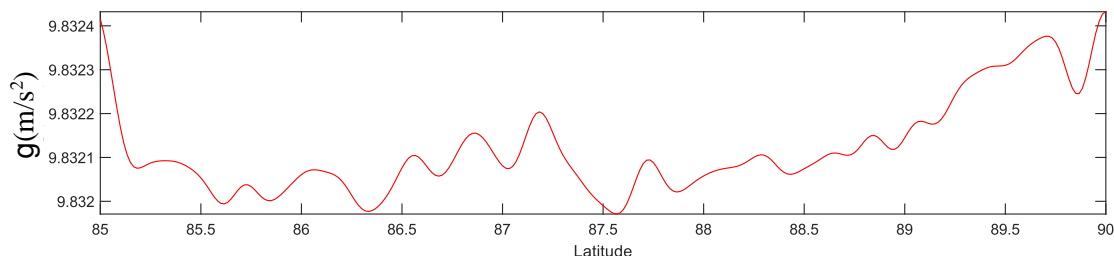


(ب)

شکل ۷. خطای محاسبه توابع لژاندر  $e_{\bar{P}_{nm}}$  (الف) و خطای محاسبه مشتق توابع لژاندر  $e_{d\bar{P}_{nm}}$  (ب) با استاندارد دقت مضاعف در مقایسه با فرمول‌های تحلیلی، در عرض‌های کروی ۸۵ تا ۹۰ درجه با گام‌های ۱ دقیقه‌ای تا درجه ۲۱۹۰.



(الف)



(ب)

شکل ۸. نتیجه محاسبه پتانسیل ثقل (الف) و شتاب ثقل (ب) با استفاده از متغیرهای با دقت مضاعف در مدل ژئوپتانسیلی EIGEN-6C4 در امتداد نصف‌النهار صفر درجه بر روی سطح بیضوی، در عرض‌های ۸۵ تا ۹۰ درجه با گام‌های ۱ دقیقه‌ای تا درجه ۲۱۹۰.

متغیری که شماره اندیس داخل ماتریس را ذخیره می‌کند، همواره از نوع عدد طبیعی بوده و نمی‌توانیم نوع آن را تغییر بدهیم. این در حالی است که این متغیر به‌عنوان شماره درجه یا مرتبه، باید در عملیات ریاضی شرکت کند؛ در نتیجه حتی ممکن است در ضرب بین دو متغیر، هر دو متغیر به یک نوع واحد تبدیل شوند. با توجه به این که در زبان ++C متغیرها می‌توانند در حین محاسبات تغییر نوع بدهند، حفظ دقت متغیرها در حالت Long Double نیازمند دقت زیادی است. همچنین بعضی از توابع ریاضی به‌صورت پیش‌فرض، نتیجه را به Double precision تغییر می‌دهند. در نتیجه تمام متغیرها به‌صورت تک‌به‌تک باید مورد بررسی قرار گیرند تا در تمام مراحل محاسبات در حالت Long Double باقی بمانند.

پس از افزایش دقت متغیرها به Long double، بررسی‌های عددی نشان داد که در منطقه بحرانی عرض‌های میانی، هیچ مشکلی به‌وجود نیامده و تمام درایه‌های  $\bar{P}_{nm}$  و مشتق آن به‌خوبی و بدون مشکل پاریز شدن محاسبه می‌شوند. اما در منطقه عرض کروی  $۸۹^{\circ}۳۰'$  تا عرض کروی ۹۰ درجه، باز هم درایه‌های قطر اصلی از عدد  $۱۰^{-۴۹۳۲}$  عبور

#### ۴. روش پیشنهادی برای محاسبه دقیق توابع لزاندر

روش پیشنهادی در این تحقیق، برای مقابله با خطاهای ناشی از پاریز و سرریز شدن درایه‌های  $\bar{P}_{nm}$ ، مبتنی بر خروج از استاندارد دقت مضاعف IEEE (۲۰۰۸) و افزایش دقت محاسبه اعداد به ماورای دقت مضاعف است. این خود مستلزم استفاده از زبان برنامه‌نویسی با کامپایلری است که قادر به به‌کارگیری متغیرهای با طول بیش از ۸ بایت باشد. به‌عنوان نمونه، کامپایلر زبان برنامه‌نویسی Borland C++ این قابلیت را دارد که نوعی از متغیر به نام Long Double را به‌کار گیرد. با این نوع متغیر می‌توان دقت محاسبات را تا  $۱۰^{-۴۹۳۲}$  حفظ کرد. به این ترتیب، اگر کدهای محاسبه  $\bar{P}_{nm}$  را به زبان ++C نوشته و به این کامپایلر معرفی کنیم می‌توان دقت محاسبات را تا  $۱۰^{-۴۹۳۲}$  حفظ کرده و به این طریق مانع از پاریز شدن مقادیر  $\bar{P}_{nm}$  شویم. بنابر این، در این تحقیق ابتدا یک برنامه به زبان ++C نوشته شد که تمام متغیرهای موردنیاز را با دقت Long Double محاسبه کند. اما در عمل متوجه شدیم که بعضی از متغیرها اصولاً نمی‌توانند در متغیر نوع Long Double قرار گیرند. برای مثال

معمولاً، محاسبات اصلی، در نرم‌افزارهای ریاضی مانند MATLAB انجام می‌شود. اگر  $\bar{P}_{nm}$  های محاسبه شده را در این نرم‌افزارها فراخوانی کنیم، باز هم در هنگام فراخوانی، درایه‌های کوچک‌تر از حدود  $10^{-308}$  به صفر تبدیل می‌شوند. نکته‌ای که باید بررسی شود این است که آیا این مسئله در نتیجه محاسبات تابعک‌های میدان ثقل، اثر محسوسی دارد یا این که تأثیر این مسئله قابل اغماض است؟ برای جواب به این سوال، یک تست عددی صورت گرفت که نشان می‌داد این صفر شدن اعداد کوچک، مشکلی در محاسبات تابعک‌های میدان ثقل به وجود نمی‌آورد. صفر شدن آن تعداد از درایه‌هایی که از عدد  $10^{-308}$  کوچک‌تر هستند، فقط روی خود آن درایه‌ها و ضرایب مربوط به آنها اثر گذاشته و سایر درایه‌ها تأثیر منفی از این درایه دریافت نمی‌کنند. در ضمن با توجه به رابطه (۱) می‌توان ملاحظه کرد که اگر یکی از درایه‌های  $\bar{P}_{nm}$  از عدد  $10^{-308}$  کوچک‌تر باشد، صفر فرض کردن آن درایه، تأثیری در محاسبه  $V(\lambda, \phi, r)$  در رابطه (۱) نداشته و خطای محاسباتی در حد قابل اغماض باقی خواهد ماند؛ زیرا سایر اجزای رابطه (۱) آنقدر بزرگ نیستند که صفر فرض شدن یک درایه کوچک‌تر از عدد  $10^{-308}$  تأثیری در نتیجه محاسبه  $V(\lambda, \phi, r)$  داشته باشد.

در نهایت برای بررسی دقت روش پیشنهادی در این تحقیق، یک برنامه رایانه‌ای بنام ALF22 به زبان C++ نوشته شده و به زبان اجرایی (ALF22.exe) کامپایل و تست محاسبات بر اساس نتایج آن برنامه انجام شد. در ادامه، برای کنترل کیفیت و تست نتایج، در تمام عرض‌ها و به خصوص در مناطق بحرانی یعنی عرض‌های میانی و عرض‌های نزدیک به قطب، نتایج را به دقت مورد بررسی قرار خواهیم داد. برای این بررسی، دو نوع تست محاسباتی انجام خواهیم داد. در تست اول، دقت محاسبه  $\bar{P}_{nm}$  ها را با استفاده از روابط تحلیلی (۱۱) و (۱۲) بررسی می‌کنیم. در تست دوم، ابتدا در یک سری نقاط که شامل عرض‌های بحرانی هم هستند، با استفاده از برنامه ALF22

کرده و به سرعت درایه‌ها صفر می‌شوند. این پاریز شدن به خصوص بر روی مشتق  $\bar{P}_{nm}$  اثر بیشتری می‌گذارد. به همین دلیل از تکنیک فاکتور کاهنده  $(\cos(\phi))^m$  استفاده شده است. این تکنیک باعث می‌شود که سرعت پاریز شدن درایه‌های  $\bar{P}_{nm}$  بسیار کند شده و در نقاط نزدیک به قطب هم دقت محاسبه  $\bar{P}_{nm}$  در حد  $10^{-6}$  باقی مانده و در دقت محاسبه مشتق  $\bar{P}_{nm}$  نیز کاهش محسوسی نداشته باشد.

در مورد خود نقطه قطب نیز نکته خاصی وجود دارد. کسینوس  $90^\circ$  درجه باید صفر فرض شود اما در کامپایلر اکثر زبان‌های برنامه‌نویسی، کسینوس گرفتن از عدد  $90^\circ$  درجه، عددی شبیه به  $10^{-17} \times 612223399573677$  را نتیجه می‌دهد. این مقدار خطا نیز با توجه به ضریب  $(\cos(\phi))^m$ ، با افزایش درجه و مرتبه، اثر چشم‌گیری دارد. به همین دلیل در خود نقطه قطب که دارای عرض  $\phi = \pm 90^\circ$  است، تمام درایه‌ها به جز ستون اول، صفر فرض شده و برای ستون اول نیز باید یا  $\bar{P}_{nm}$  را از فرمول جایگزین رابطه (۱۵) محاسبه کرد (نوویکوا و دیمیترنکو، ۲۰۱۶)؛ و یا درایه‌های ابتدایی را به صورت دستی و با مقادیر دقیق جایگزین کرده و سپس با فرمول‌های بازگشتی عادی، سایر درایه‌های ستون اول را محاسبه کنیم.

$$\bar{P}_{n,0} = \pm \sqrt{2n+1} \quad (15)$$

همچنین در نقطه قطب، برای مشتق  $\bar{P}_{nm}$  نیز تمام درایه‌ها به جز ستون دوم صفر هستند و ستون دوم نیز با همان فرمول‌های بازگشتی معمولی اما با دو درایه ابتدایی به صورت فرمول (۱۶) و (۱۷) شروع شده و تا انتها محاسبه می‌شوند.

$$d\bar{P}_{1,1} = -\sqrt{3} \quad (16)$$

$$d\bar{P}_{2,1} = -\sqrt{15} \quad (17)$$

##### ۵. بررسی دقت روش پیشنهادی

قبل از بررسی دقت نتایج باید به یک نکته اشاره شود که

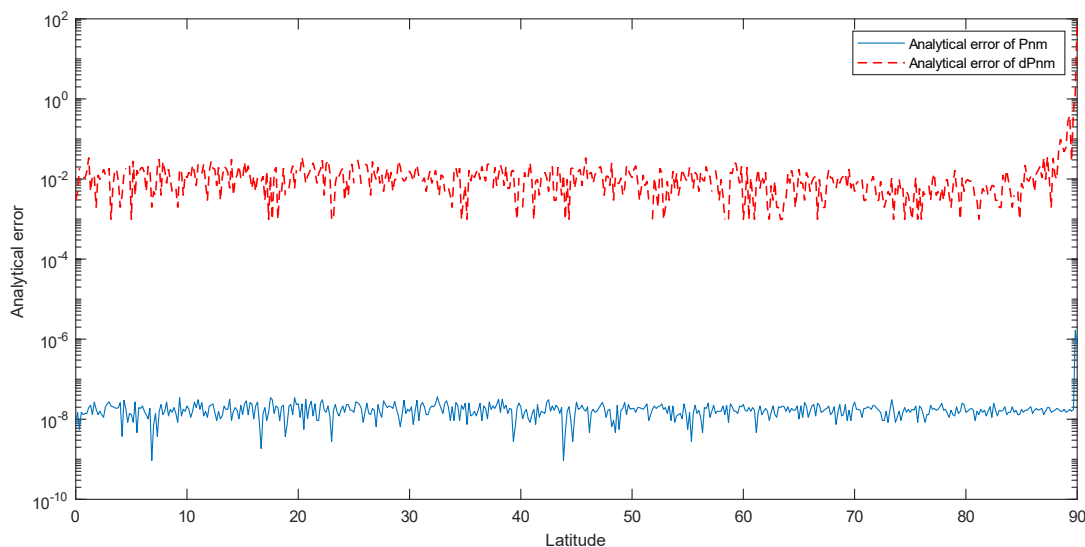
مقادیر  $\bar{P}_{nm}$  و مشتق آن را تولید کرده و تابعک‌های میدان ثقل را محاسبه می‌کنیم. سپس با استفاده از برنامه GrafLab (بوچا و جاناک، ۲۰۱۳) که از روش کلنشاو برای محاسبه تابعک‌های میدان استفاده می‌کند، در همین نقاط تست، تابعک‌های میدان ثقل را تولید کرده و با نتایج حالت قبل مقایسه می‌کنیم.

برای تست نوع اول، دقت محاسبه  $\bar{P}_{nm}$  و مشتق آن را یک بار در عرض‌های صفر تا ۹۰ درجه با گام‌های ۱۰ دقیقه‌ای و یک بار در فاصله یک درجه نزدیک به قطب با گام‌های یک دقیقه‌ای محاسبه کرده و با استفاده از روابط (۱۳) و (۱۴) خطای کل آنها را ترسیم می‌کنیم. شکل ۹ و ۱۰ این نتایج را نمایش می‌دهند.

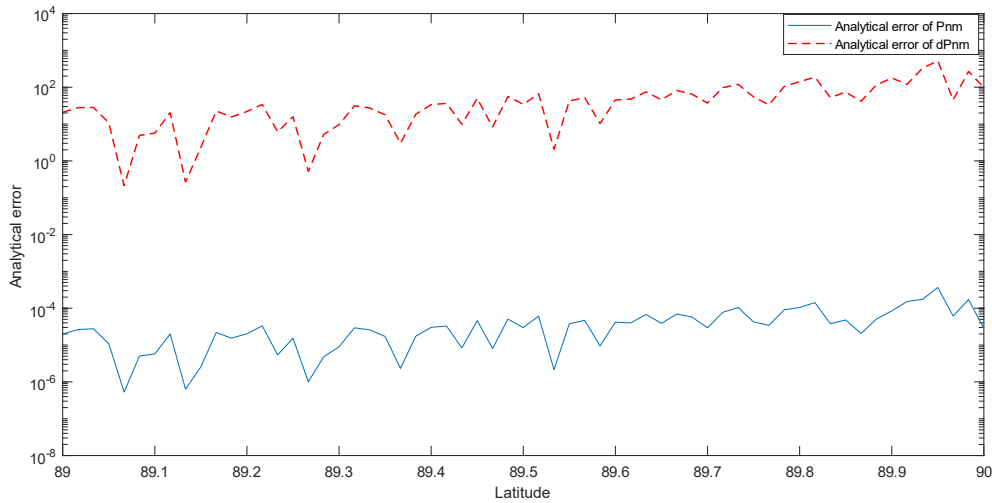
همان‌طور که در شکل ۹ و ۱۰ دیده می‌شود، خطای محاسبه  $\bar{P}_{nm}$  به جز نزدیک به قطبین، همیشه زیر عدد  $10^{-6}$  قرار دارد و فقط در مناطق نزدیک قطب این عدد بزرگ می‌شود ولی باز هم هیچگاه از عدد  $10^{-5}$  تجاوز نمی‌کند. طبق رابطه (۱۱) در درجه و مرتبه ۲۱۹۰، جمع توان دوم درایه‌های ماتریس  $\bar{P}_{nm}$  باید برابر با

۱۰ این نتایج را نمایش می‌دهند.

برای تست نوع دوم، نتایج محاسبات با نرم‌افزار GrafLab، در یک سری نقاط تست، مقایسه شد. به‌عنوان نمونه در ۵ نقطه با عرض کروی صفر، ۴۰، ۶۰، ۸۹/۶۰ و ۹۰ درجه، دو کمیت پتانسیل جاذبی و نرم شتاب ثقل را محاسبه کرده و با هم مقایسه می‌کنیم. برای این منظور ۵ نقطه بر روی سطح بیضوی WGS84 با مختصاتی که در جدول ۱ نمایش داده شده است، مورد استفاده قرار می‌دهیم.



شکل ۹. خطای محاسبه توابع لژاندر  $e_{\bar{P}_{nm}}$  و خطای محاسبه مشتق توابع لژاندر  $e_{d\bar{P}_{nm}}$  با استفاده از متغیر نوع «دقت مضاعف طولی (Long Double)» در عرض‌های صفر تا ۹۰ درجه با گام‌های ۱۰ دقیقه‌ای.



شکل ۱۰. خطای محاسبه توابع لزاندر  $e_{\bar{P}_{nm}}$  و خطای محاسبه مشتق توابع لزاندر  $e_{d\bar{P}_{nm}}$  با استفاده از متغیر نوع «دقت مضاعف طویل ( Long Double)» تا درجه ۲۱۹۰ در عرض‌های ۸۹ تا ۹۰ درجه کروی با گام‌های ۱ دقیقه‌ای.

جدول ۱. نتایج محاسبه پتانسیل تولیدشده با مدل ژئوپتانسیلی EIGEN-6C4 در نرم‌افزار MATLAB با استفاده از  $\bar{P}_{nm}$  تولید شده در C++ تا درجه و مرتبه ۲۱۹۰ در مقایسه با نتایج نرم‌افزار Graflab (روش کلنشاو) در نقاط تست.

اختلاف محاسبه پتانسیل ( $m^2/s^2$ )	پتانسیل محاسبه‌شده با استفاده از $\bar{P}_{nm}$ تولید شده در C++ ( $m^2/s^2$ )	پتانسیل محاسبه‌شده در Graflab ( $m^2/s^2$ )	r (m)	عرض کروی (درجه)	طول کروی (درجه)	شماره
-۰/۰۰۰۲۴۶۶	۶۲۶۳۷۰۷۱/۲۲۳۰۶۶	۶۲۶۳۷۰۷۱/۲۲۷۰۶	۶۳۷۸۱۳۷	۰	۱۷۹	۱
۰/۰۰۰۰۶۱	۶۲۶۳۶۰۵۴/۷۴۵۹۸۸۸	۶۲۶۳۶۰۵۴/۷۴۶۰۵	۶۳۶۹۳۴۴/۸۶۳	۴۰	۱۷۹	۲
۰/۰۰۰۰۳۱	۶۲۶۵۱۳۹۵/۴۹۶۵۵۸۹	۶۲۶۵۱۳۹۵/۴۹۶۸۷	۶۳۶۰۵۹۸/۱۶۶	۶۰	۱۷۹	۳
۰/۰۰۰۰۵۰	۶۲۶۳۷۰۰۱/۲۹۶۵۶۲۶	۶۲۶۳۷۰۰۱/۲۹۷۰۷	۶۳۵۶۷۵۲/۳۷۹	۸۹/۹	۱۷۹	۴
۰/۰۰۰۰۵۰	۶۲۶۳۷۰۰۳/۲۳۵۵۵۴۱	۶۲۶۳۷۰۰۳/۲۳۶۰۶	۶۳۵۶۷۵۲/۳۱۴	۹۰	۱۷۹	۵

جدول ۲. نتایج محاسبه شتاب ثقل تولید شده با مدل ژئوپتانسیلی EIGEN-6C4 در نرم‌افزار MATLAB با استفاده از  $\bar{P}_{nm}$  تولید شده در C++ تا درجه و مرتبه ۲۱۹۰ در مقایسه با نتایج نرم‌افزار Graflab (روش کلنشاو) در نقاط تست.

اختلاف محاسبه شتاب ثقل ( $m/s^2$ )	شتاب ثقل محاسبه‌شده با استفاده از $\bar{P}_{nm}$ تولید شده در C++ ( $m/s^2$ )	شتاب ثقل محاسبه‌شده در Graflab ( $m/s^2$ )	r (m)	عرض کروی (درجه)	طول کروی (درجه)	شماره
-۱/۱۷۵x <sup>-۱۰</sup>	۹/۷۸۰۳۹۲۷۵۴۳۴۰۲	۹/۷۸۰۳۹۲۷۵۴۲۲۲۷۷	۶۳۷۸۱۳۷	۰	۱۷۹	۱
۲/۷۹۰x <sup>-۱۰</sup>	۹/۸۰۱۵۸۳۴۳۳۵۴۲۹۷	۹/۸۰۱۵۸۳۴۳۳۵۷۰۸۷	۶۳۶۹۳۴۴/۸۶۳	۴۰	۱۷۹	۲
۱/۴۸۶x <sup>-۱۰</sup>	۹/۸۲۳۵۱۵۳۰۳۱۹۱۲	۹/۸۲۳۵۱۵۳۰۳۳۲۹۸۵	۶۳۶۰۵۹۸/۱۶۶	۶۰	۱۷۹	۳
۲/۳۷۸x <sup>-۱۰</sup>	۹/۸۳۲۳۶۳۳۶۷۹۱۹	۹/۸۳۲۳۶۳۳۶۵۰۲۹۷۱	۶۳۵۶۷۵۲/۳۷۹	۸۹/۹	۱۷۹	۴
-۵/۲۶۲x <sup>-۱۰</sup>	۹/۸۳۲۴۳۲۱۲۳۶۰۷۶	۹/۸۳۲۴۳۲۱۲۳۰۸۱۳۷	۶۳۵۶۷۵۲/۳۱۴	۹۰	۱۷۹	۵

همان‌طور که در جدول ۱ و جدول ۲ مشاهده می‌شود، برای نقاط ۱ و ۲ در منطقه غیربحرانی و نقاط ۳ و ۴ و ۵ در مناطق بحرانی عرض‌های میانی و عرض‌های نزدیک قطب، هم در نتایج محاسبات پتانسیل و هم در محاسبات شتاب ثقل، نتایج کاملاً یکسان بوده و اختلافات معنی‌دار نیست. بیشترین اختلاف در محاسبه پتانسیل در جدول ۱، مقدار  $0/0005$  متر مربع بر مجذور ثانیه است که کاملاً ناچیز است. صرفاً جهت اطلاع و مقایسه، در مدل ژئوپتانسیلی EIGEN-6c4 از دقت منتشر شده برای ضرایب استفاده کرده و خطای محاسبه پتانسیل تا درجه و مرتبه ۲۱۹۰ محاسبه شد که به‌طور متوسط حدود  $0/3$  متر مربع بر مجذور ثانیه به دست آمد که در مقیاس ارتفاعی هم‌ارز با حدود ۳ سانتی‌متر خطا برای ارتفاع ژئوئید است. این نشان می‌دهد که اختلافات  $0/0005$  متر مربع بر مجذور ثانیه معنی‌دار نبوده و نتایج محاسبات انجام‌شده در نقاط کنترل، با محاسبات برنامه GrafLab کاملاً یکسان است. در خصوص شتاب ثقل نیز بیشترین اختلاف از جدول ۲،  $5/2624 \times 10^{-5}$  میلی‌گال است که این مقدار نیز کاملاً کوچک است. بر اساس دقت ضرایب مدل ژئوپتانسیلی EIGEN-6c4 تا درجه ۲۱۹۰، مقدار خطای محاسبه شتاب ثقل حدود  $1/5$  میلی‌گال برآورد شد، که این نیز نشان می‌دهد مقدار اختلاف  $5/262 \times 10^{-5}$  میلی‌گال معنی‌دار نیست.

#### ۶. بحث و نتیجه‌گیری

در این تحقیق، به دو سوال اساسی زیر در خصوص محاسبه توابع لژاندر وابسته نوع اول بر اساس نرم‌افزارهای محاسباتی با دقت مضاعف پاسخ داده شد:

- در صورت محاسبه توابع لژاندر تا درجه ۲۱۹۰، که معادل بیشترین درجه مدل‌های ژئوپتانسیلی جهانی امروزی است، در چه عرض‌های کروی محاسبه توابع لژاندر دچار خطای فاحش می‌شود؟ (عرض‌های بحرانی در محاسبه توابع لژاندر تا درجه ۲۱۹۰ کدامند؟)

- در عرض‌های کروی بحرانی، از چه درجه‌ای به بعد محاسبه توابع لژاندر دچار خطای زیاد می‌شود؟ همچنین به‌عنوان مطالعه موردی، چالش‌های استفاده از این توابع در تولید تابعک‌های میدان ثقل بر اساس مدل‌های ژئوپتانسیلی و با استفاده از نرم‌افزارهای دارای دقت مضاعف مطالعه شد. دریافتیم که محاسبه توابع لژاندر در درجه ۲۱۹۰ (معادل با بیشترین درجه مدل‌های ژئوپتانسیلی حاضر) با دقت مضاعف در عرض‌های کروی بین  $56^{\circ}20'$  تا  $78^{\circ}33'$  از دقت کافی برخوردار نبوده و بحرانی‌ترین حالت در عرض ۶۰ درجه اتفاق می‌افتد. همچنین دریافتیم که بعد از درجه ۲۰۲۹، در عرض کروی ۶۰ درجه (بحرانی‌ترین حالت)، محاسبه توابع لژاندر و در نتیجه تابعک‌های میدان ثقل دچار افت دقت شده و با افزایش درجه، این کاهش دقت تشدید می‌شود. همچنین محاسبات نشان داد که به‌دلیل خطای موجود در محاسبات توابع لژاندر، محاسبه پتانسیل در محدوده  $57^{\circ}32'$  تا  $60^{\circ}13'$  عرض کروی، دچار خطا می‌شود. برای محاسبه شتاب ثقل، این محدوده خطا، بین  $57^{\circ}41'$  تا  $60^{\circ}13'$  عرض کروی به دست آمد. در نتیجه، محدوده  $60^{\circ}13'$  و  $57^{\circ}32'$  به‌عنوان محدوده بحرانی معرفی می‌شود. محدوده امن برای محاسبه پتانسیل در تمام عرض‌های کروی، درجات کمتر از ۲۰۶۵ و محدوده امن برای محاسبات شتاب ثقل در تمام عرض‌ها، درجه کمتر از ۲۰۷۱ به دست آمد.

از آنجایی که نرم‌افزارهای محاسباتی معمول که با دقت مضاعف کار می‌کنند، پاسخگوی نیازهای موردنیاز در محاسبه توابع لژاندر نیستند، روشی برای حل این مشکل پیشنهاد شد. ارزیابی‌های عددی نشان دادند که اگر بخواهیم توابع لژاندر را بر اساس روابط بازگشتی برای تولید تابعک‌های میدان ثقل با دقت کافی محاسبه شوند، نیاز به دقت محاسبات حداقل در حد «دقت مضاعف طولی» است.

مراجع



- Balmino, G., Vales, N., Bonvalot, S., & Briais, A. (2012). Spherical Harmonic modeling to ultrahigh degree of Bouguer and isostatic anomalies. *J. geod.*, 86, 499–520. DOI: 10.1007/s00190-011
- Bosch, W. (2000). On the Computation of Derivatives of Legendre Functions. *Phys. Chem. Earth (A)*, 25(9-1 I), 655-659.
- Bucha, B., & Janák, J. (2013). A MATLAB-based graphical user interface program for computing functionals of the geopotential up to ultra-high degrees and orders. *Computers & Geosciences*, 56, 186-196, <https://doi.org/10.1016/j.cageo.2013.03.012>.
- Clenshaw, C. W. (1955). A note on the summation of Chebyshev series. *Mathematics of Computation*, 9(51), 118–118. doi:10.1090/s0025-5718-1955-0071.
- Colombo, O.L. (1981). *Numerical methods for harmonic analysis on the sphere*. Report No. 310, Department of Geodetic Science and Surveying”, The Ohio State University, Columbus, Ohio, 139pp,1981.
- Cunningham, L.E. (1970). On the computation of the spherical harmonic terms needed during the numerical integration of the orbital motion of an artificial satellite. *Celestial Mech*, 2, 207–216.
- Fantino, E.m & Casoto, S. (2009). Methods of harmonic synthesis for global geopotential models and their first-, second- and third-order gradients. *J. Geod.*, 83, 595–619. DOI: 10.1007/s00190-008-0275-0.
- Foerste, C., Bruinsma, S.L., Abrykosov, O., Lemoine, J., Marty, J., Flechtner, F., Balmino, G., Barthelmes, F., & Biancale, R. (2014). EIGEN-6C4 The latest combined global gravity field model including GOCE data up to degree and order 2190 of GFZ Potsdam and GRGS Toulouse. *GFZ Data Services*. <https://doi.org/10.5880/icgem.2015.1>.
- Fukushima, T. (2018). Fast computation of sine/cosine series coefficients of associated Legendre function of arbitrary high degree and order. *Journal of Geodetic Science*, 8(1), 162-173. <https://doi.org/10.1515/jogs-2018-0017>.
- Fukushima, T. (2012). Numerical computation of spherical harmonics of arbitrary degree and order by extending exponent of floating point numbers. *J. Geod.*, 86, 271–285. <https://doi.org/10.1007/s00190-011-0519-2>.
- Goli, M., Foroughi, I., & Novák, P. (2022). New methods for numerical evaluation of ultra-high degree and order associated Legendre functions. *Stud Geophys Geod.*, 66, 81–97. <https://doi.org/10.1007/s11200-022-0830-9>.
- Heiskanen, W.A., & Moritz, H. (1967). *Physical geodesy*. San Francisco, WH Freeman.
- Holmes, S. A., & Featherstone, W.E. (2002). A unified approach to the Clenshaw summation and the recursive computation of very degree and order normalised associated Legendre functions. *Journal of Geodesy*, 76, 279-299.
- IEEE, (2008) Computer Society: IEEE Standard for Floating-Point Arithmetic, IEEE Std 754-2008, (2008).
- Jekeli, C., Lee, K. J. & Kwon, J. H. (2007). On the computation and approximation of ultra-high-degree spherical harmonic series. *J. Geod.*, 81, 603–615. DOI: 10.1007/s00190-006-0123-z.
- Métris, G., Xu, J., & Wytrzyzszczak, I. (1998). Derivatives of the Gravity Potential with Respect to Rectangular Coordinates. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 71, 137–151 (1998). <https://doi.org/10.1023/A:1008361202235>.
- Novikova, E., & Dmitrenko, A. (2016). Problems and methods of calculating the Legendre functions of arbitrary degree and order. *Geodesy and Cartography*, 65(2), 283-312. doi:10.1515/geocart-2016-0017.
- Pavlis, N. K., Holmes, S. A., Kenyon, S. C., & Factor, J. K. (2008). An Earth Gravitational Model to Degree 2160: EGM2008. Presented at European Geosciences Union 2008 General Assembly, Vienna, Austria, 2008.
- Pines, S. (1973). Uniform representation of the gravitational potential and its derivatives. *AIAA J.*, 11, 1508–1511.
- Rexer, M., & Hirt, C. (2015). Ultra-high-degree surface spherical harmonic analysis using the Gauss–Legendre and the Driscoll/Healy Quadrature theorem and application to planetary topography models of Earth, Mars and Moon. *Surv Geophys*, 36(6), 803–830. <https://doi.org/10.1007/s10712-015-9345-z>.
- Smith, J.M., Olver, F., & Lozier, D. (1981). Extended-range arithmetic and normalized Legendre polynomials. *ACM Trans. Math. Softw.*, 7, 93-105. DOI: 10.1145/355934.355940.
- Šprlák, M. (2011). On the numerical problems of spherical harmonics: Numerical and algebraic methods avoiding instabilities of the associated legendre’s functions. *Zeitschrift für Geodäsie, Geoinformation und Landmanagement*, 136(5), 310-320.
- Wittwer, T., Klees, R., Seitz, K. & Heck, B. (2008). Ultra-high degree spherical harmonic analysis and synthesis using extended-range arithmetic. *Journal of Geodesy.*, 82(4-5), 223-229, 2008.
- Xing, Z., Li, S., Tian, M., Fan, D., & Zhang, C. (2020). Numerical experiments on column-wise recurrence formula to compute fully normalized associated Legendre functions of ultra-high degree and order. *Journal of Geodesy*, 94(1), 2.

Yu, J., Wan, X. & Zeng Y. (2011). The integral formulas of the associated Legendre functions. *J. Geod.*, 86(6), 467-473.