مجلۀ فیزیک زمین و فضا، دوره ۳۶، شماره ۱، ۱۳۸۹، صفحۀ ۹۱- ۱۰۸

معرفی روشی جدید برای برآورد ضرایب توابع گویا

محمدعلی شریفی[۱*]، بابک امجدی پرور[۲] و موسی شیبانی[۳]

[۱] استادیار، گروه مهندسی نقشه‌برداری، پردیس دانشکده‌های فنی، دانشگاه تهران، ایران
[۲] دانشجوی کارشناسی ارشد ژئودزی، گروه مهندسی نقشه‌برداری، پردیس دانشکده‌های فنی، دانشگاه تهران، ایران
[۳] دانشجوی کارشناسی ارشد ژئودزی، گروه مهندسی نقشه‌برداری، پردیس دانشکده‌های فنی، دانشگاه تهران، ایران

(دریافت: ۸۶/۱۲/۱ ، پذیرش نهایی: ۸۸/۲/۲۲)

چکیده

با توجه به کاربرد روز افزون توابع گویا (rational functions) در تصویرسنجی (فتوگرامتری) این معادلات مورد توجه محققان زیادی است. یکی از معایب این معادلات، ناپایداری مدل در برآورد پارامترها یا همان ضرایب است. در واقع مسئله برآورد ضرایب توابع گویا (Rational Function Coefficients, RFCs) با استفاده از نقاط کنترل موجود در اغلب موارد یک مسئله‌ای بدطرح (Ill-posed) است که باید روشی را برای پایدارسازی (regularization) این معادلات اتخاذ کرد. همچنین مدل ریاضی برآورد ضرایب برخلاف روش معمول که یک مدل پارامتری خطی در نظر گرفته می‌شود، در واقع مدلی ترکیبی است. در این مقاله ضرایب معادلات با استفاده از مدل ترکیبی که مدل کامل‌تری نسبت به مدل پارامتری خطی می‌باشد برآورد شده است، همچنین با توجه به بدطرح بودن مسئله از روش پایدارسازی تیخونوف (Tikhonov regularization) برای پایدار کردن مسئله در حالت مدل ترکیبی استفاده شده است. با مقایسه روش پیشنهادی در برآورد ضرایب معادلات گویا (تبدیل مسئله به مدل ترکیبی همراه با پایدارسازی مسئله با روش تیخونوف) با روش‌های پیشین مورد استفاده در برآورد ضرایب، روش پیشنهادی دقت بهتری را در نقاط چک به دست می‌دهد.

واژه‌های کلیدی: توابع گویا، بدطرح، پایدارسازی، کمترین مربعات (Least squares, LS)، مدل پارامتری خطی (linear parametric model)، مدل ترکیبی (combined model)

A new method for estimating Rational Function Coefficients

Sharifi, M.A.[1], Amjadiparvar, B.[2] and Sheybani, M.[3]

[1] Assistant Professor, Department of Surveying and Geomatics Engineering, Faculty of Engineering, University of Tehran, Iran
[2] M. Sc. Student of Geodesy, Department of Surveying and Geomatics Engineering, Faculty of Engineering, University of Tehran, Iran
[3] M. Sc. Student of Geodesy, Department of Surveying and Geomatics Engineering, Faculty of Engineering, University of Tehran, Iran

(Received: 20 Feb 2008 , Accepted: 12 May 2009)

Abstract

Rational functions are of great interest to engineers and geoscientists. The rational polynomial coefficient (RPC) model as a generalized sensor model has been introduced as an alternative for the rigorous sensor model of the satellite imaging.

Numerical instability of normal equations is the only single obstacle to the implementation of these functions. Practically, estimating rational function coefficients using available control points is mostly an ill-posed problem. Condition number of the normal matrix in the linear parametric model is relatively large. Therefore, a

*نگارنده رابط: تلفن: ۸۸۰۰۸۸۴۱-۰۲۱ دورنگار: ۸۸۰۰۸۸۳۷-۰۲۱ E-mail: sharifi@ut.ac.ir

regularization method has to be employed in order to stabilize the equations. Implementation of the regularization technique improves the solution in the linear parametric model. The optimum value of the regularization parameter is estimated using the generalized cross validiation technique.

Moreover, simplification of the observation equations leads to a linear observation model which is the most frequently utilized approach for estimation of the unknown coefficients. However, rigorous modeling is recast in a combined adjustment model. Due to nonlinearity of the combined model, the initial values of unknown parameters are needed. The initialization process can be done using the estimated parameters from the linear parametric model.

Here, rational function coefficients are estimated using a combined model. Furthermore, the Tikhonov regularization method is employed for regularization of the problem in the combined model. Five different methods are implemented and their performances are compared.

Comparison of the root mean squared errors shows that the implementation of the combined model with an appropriate regularization parameter significantly improves the accuracy of the estimated coefficients. The regularized combined model gives the minimum root mean squared errors which is about half the value of the linear parametric model. The proposed method outperforms the already existing ones from an accuracy and computational point of view.

Key words: Rational functions, Ill-posed, Regularization, Least squares, Linear parametric model, Combined model

۱ مقدمه

در غیاب اطلاعات افمریز ماهواره‌ها یا مدل دوربین، بسیاری از محققان توابع گویا را درحکم مدل ریاضی برای انتقال از دستگاه مختصات عکسی به دستگاه مختصات زمینی معرفی کرده‌اند که مدل ریاضی این توابع به صورت تقسیم دو چندجمله‌ای است (ولدان زوج و همکاران، ۲۰۰۷). در تصویرسنجی برای تصحیح هندسی عکس‌ها و تصاویر گوناگون به طورکلی می‌توانیم به دو روش زیر عمل کنیم:

الف- پیاده‌سازی شرایط حاکم هنگام عکس‌برداری(فیزیک تصویربرداری): در این حالت بایستی اطلاعات داخلی حس‌گر و هندسه عکس‌برداری مشخص باشد. این روش به روش دقیق یا Rigorous مشهور است. دقت این روش از نظر مسطحاتی و ارتفاعی نسبت به سایر روش‌ها، بیشتر است و به تعداد نقاط کنترل کمتری برای پیاده‌سازی نیاز است، همچنین به نحوه توزیع نقاط کنترل حساسیت ندارد. یکی از معایب عمده این روش این است که همیشه اطلاعات داخلی حس‌گر و هندسه عکس‌برداری در دسترس نیست.

ب- تصحیح هندسی فقط با استفاده از نقاط کنترل زمینی (Ground Control Points): این روش که مستقل از هندسه عکس‌برداری است، فقط با کمک نقاط کنترل زمینی صورت می‌گیرد و به روش غیر دقیق یا Non-rigorous شهرت دارد. از مزایای این روش، نیاز نداشتن به اطلاعات داخلی حس‌گر و هندسه تصویربرداری است. حساسیت زیاد به تعداد، نحوه توزیع و دقت نقاط کنترل از معایب عمدهٔ آن محسوب می‌شود.

یکی از روش‌های غیردقیق برای تصحیح هندسی عکس‌ها و تصاویر، استفاده از توابع گویا سه‌بُعدی است. مفهوم این توابع را Greve توسعه داد (دومن و دولف، ۲۰۰۰) و آژانس نظامی تهیه نقشه امریکا (US Defense Mapping Agency) در سامانه تولید رقومی‌شان به نام PEGASUS مورد استفاده قرار گرفته است. توابع گویا تا

مدت‌ها در کاربردهای نظامی مورد استفاده بود و نتایج خوب آن منتهی به این شد که (OGC, Open GIS Consortium) این توابع را به‌مثابهٔ استانداردی در پردازش تصاویر به دلیل عمومیت این توابع، که برای همهٔ حس‌گرها (rame, Push broom, Whiskbroom) قابل استفاده هستند و مستقل از هندسه اخذ تصاویرند، قرار دهد (تائو و هو، ۲۰۰۱a). به این معنی که همگام با ورود حس‌گرهای جدید و متفاوت می‌توان بدون داشتن دانشی در مورد مدل فیزیکی حس‌گر عملیات تصحیح و استخراج اطلاعات سه‌بُعدی را از این گونه تصاویر با استفاده از توابع گویا عملی ساخت. درنتیجه معادلات گویا می‌توانند در مواردی که دقت بسیار زیادی مورد نیاز نیست مورد استفاده قرارگیرند.

معادلات گویا در تصویرسنجی و سنجش از دور برای بیان انتقال بین فضای شیء و فضای تصویر زمانی که مدل دقیق فیزیکی حس‌گر به طور عمدی و یا غیر عمدی در دسترس نباشد استفاده می‌شود که امروزه به دلیل گسترش اینگونه تصاویر ماهواره‌ای، این معادلات مورد توجه ویژه قرار گرفته است.

تحت این مدل، مختصات تصویری از تقسیم دو تابع چندجمله‌ای، در حالتی که هم مختصات تصویری و هم مختصات زمینی نرمال شده‌اند، به دست می‌آید (نرمال کردن مختصات سبب کاهش خطا در طول محاسبات می‌شود). در حالتی که هیچکدام از المان‌های توجیه داخلی و خارجی در دسترس نباشند، این مدل می‌تواند در استخراج اطلاعات سه‌بُعدی به‌کار رود. اساس مدل توابع گویا بر پایه چندجمله‌ای‌هایی است که ضرایب آن مستقیماً محاسبه می‌شوند، معادلات DLT, SDLT, 3D 3D Projective, Affine, از معادلات گویا مشتق می‌شوند.

با پرتاب ماهواره‌های با توان تفکیک زیاد (high resolution) در سال‌های اخیر این روش به منظور پردازش‌های تصویرسنجی مورد توجه تصویرسنج‌ها قرار گرفته، که علت اصلی آن نیز عرضه نشدن پارامترهای مداری از سوی شرکت‌های عرضه کننده این تصاویر است.

پارامترهای معادلات گویا را می‌توان با دانستن یا بدون دانستن مدل فیزیکی حس‌گر حل کرد. اگر مدل فیزیکی حس‌گر معلوم باشد، می‌توان یک شبکه تصویری که کل تصویر را پوشش می‌دهد، قرار داد و شبکه زمینی سه‌بُعدی متناظر آن را با استفاده از مختصات شبکه‌ای هر نقطه محاسبه شده از راه نقطه تصویری متناظر آن با استفاده از مدل فیزیکی حس‌گر، تولید کرد. سپس ضرایب توابع گویا را می‌توان با استفاده از یک روش سرشکنی کمترین مربعات مستقیم با ورودی‌های نقاط شبکه‌ای زمینی (X,Y,Z) و نقاط شبکه‌ای تصویری متناظر آن (r,c)، برآورد کرد. در این روش، هیچ اطلاعات زمینی واقعی مورد نیاز نیست و معادلات گویا به‌منزلهٔ تابع مناسب بین شبکه تصویری و شبکه زمینی عمل می‌کند. به این روش، حل غیر وابسته به اطلاعات زمینی توابع گویا می‌گویند (اپن‌جی‌آی اس‌کنسرسیوم، ۱۹۹۹).

بدون دانستن اطلاعات مدل فیزیکی حس‌گر، تولید شبکه زمینی امکان‌پذیر نیست. بنابراین باید تعداد کافی از نقاط کنترل بر سطح زمین به روش‌های سنتی (مانند نقشه یا DEM) جمع‌آوری شود. پس از آن از روش سرشکنی کمترین مربعات تکراری به همراه یک روش پایدارسازی برای حل ضرایب توابع گویا استفاده می‌شود. در این روش، راه حل شدیداً وابسته به جابه‌جایی‌های واقعی زمینی، تعداد نقاط کنترل، و توزیع این نقاط در سراسر منطقه است. به این روش حل توابع گویا، روش وابسته به زمین می‌گویند. این روش، روشی مستحکم و با دقت کافی، برای حل معادلات گویا، جز در مواردی که تعداد زیادی نقطه کنترل با توزیع متراکم در دسترس باشد، نیست (اپن‌جی‌آی اس‌کنسرسیوم، ۱۹۹۹ و تیخونف و

آرسنین، ۱۹۷۷).

روش کمترین مربعات تکراری و مدلی که در (اپن‌جی‌آی اس‌کنسرسیوم، ۱۹۹۹) برای برآورد ضرایب معادلات گویا ذکر شده، روشی است که تا کنون به‌طور معمول برای برآورد این ضرایب مورد استفاده قرار می‌گرفته است و هدف ما در این مقاله عرضه مدلی کامل‌تر برای برآورد این ضرایب است.

همان‌طور که ذکر شد، در این روش برای حل معادلات فقط از نقاط کنترل زمینی استفاده می‌شود. در نتیجه، این روش شدیداً وابسته به جابه‌جایی‌های زمینی و تعداد و توزیع نقاط کنترل زمینی است (حتی در این روش برای انتخاب نقاط کنترل بایستی توزیع سه‌بُعدی این نقاط را نیز در نظر گرفت)، در مقابل، در مدل‌های حس‌گر ماهواره و یا روش گویا غیر وابسته به زمین که از تعداد کمی نقطه کنترل زمینی استفاده می‌کنند، نیازی به توزیع بهینه این نقاط وجود ندارد (هانسن، ۱۹۹۸) و برای محدوده خارج، نقاط کنترل، دقت به شدت کاهش می‌یابد (پس در نتیجه نقاط کنترل باید به‌گونه‌ای انتخاب شوند که سایر نقاط در محدوده این نقاط قرار گیرند (تائو و هو، a۲۰۰۱)). در این حالت، معادلات گویا سعی در برآورد هندسه پیچیده تصویر با استفاده از ترم‌های زیادی از چندجمله‌ای‌ها دارد و در نتیجه درحکم مدل مناسب ولی پیچیده‌ای عمل می‌کند و خطای انباشتگی پارامترها (over-parameterization error) ممکن است باعث نبود استحکام روش کمترین مربعات شود. در واقع مسئله برآورد پارامترهای معادلات گویا با استفاده از نقاط کنترل موجود در اغلب موارد یک مسئله بدطرح است که باید روشی را برای پایدارسازی آن مسئله اتخاذ کرد . موضوع دیگری که باید به آن توجه کرد مدل مورد استفاده در بر آورد پارامترها است. تاکنون در اغلب موارد معادلات گویا به مدل پارامتری خطی تبدیل شده و با استفاده از روابط مربوط به مدل پارامتری خطی پارامترهای مربوطه برآورد می‌شده است (هانسن، ۱۹۹۸)، اما همان طوری که در قسمت‌های بعدی نشان داده می‌شود مدل درست و کامل برای برآورد پارامترها، مدل تر کیبی است. بنابراین در این مقاله برای برآورد پارامترها از مدل ترکیبی که مدل کامل‌تری نسبت به مدل پارامتری خطی است، استفاده شده است. همچنین در مورد روش پایدارسازی تیخونوف که معمول‌ترین روش پایدارسازی است توضیحات مختصری آورده شده است. این روش در مورد توابع گویا، هم در حالت مدل پارامتری خطی و هم در حالت مدل ترکیبی به اجرا گذاشته شده است و نتایج هر کدام از این روش‌ها به تفصیل در قسمت‌های بعدی آورده شده و با هم مقایسه شده است.

در انتهای این قسمت تعدادی از مزایا و معایب استفاده از توابع گویا در تصحیح هندسی عکس‌ها و تصاویر متفاوت را بیان می کنیم:

از مزایای این روش می‌توان به موارد زیر اشاره کرد (الله توکلی، ۱۳۸۵ و جاکبسون و همکاران، ۲۰۰۵):

عمومیت داشتن: به جهت مستقل بودن از نوع حس‌گر (المان‌های توجیه داخلی و خارجی) می‌تواند برای انواع حس‌گرهای مختلف مثل Frame Type, Pushbroom, Whiskbroom, SAR به کار رود، ضرائب این توابع می‌تواند به صورت مجازی همه انواع تأثیرات (شامل هندسه حس‌گر، انحنای زمین، شکست، پارامترهای خودواسنج (self-calibration) را شامل شود، تصاویر ناتمام (partial image) را پردازش کند. همچنین کاربر تنها کافی است برای یک حس‌گر این توابع را اجرا کند و بقیه حس‌گرها را پوشش دهد.

محرمانه ماندن اطلاعات مداری: این روش نیازی به داشتن اطلاعات اولیه از تصاویر ندارد، در نتیجه در تصاویر با کیفیت زیاد که معمولاً اطلاعات مداری آنها منتشر نمی‌شود، به خوبی قابل استفاده است.

کارآیی: به علت داشتن سرعت کافی می‌تواند به صورت

آنی (real time) به‌کار رود.

قابلیت انتقال: می‌تواند با هر دستگاه مختصات زمینی به‌کار رود.

این معادلات، علی‌رغم مزایای فوق، معایبی جدی نیز دارند که می‌توان به موارد زیر اشاره نمود(الله توکلی، ۱۳۸۵ و جاکبسون و همکاران، ۲۰۰۵):

دقیق نبودن: این معادلات دقیق نیستند که در نتیجه استفاده از این معادلات، دقت نسبت به معادلات دقیق کاهش می‌یابد.

نداشتن استحکام: ضرایب آن دارای مفهوم فیزیکی نیستند، که در نتیجه تفسیر و تشخیص اهمیت ترم‌ها مشکل می‌شود. در نتیجه امکان پنهان ماندن خطاهای سامان‌مند و تزریق خطاهای درون‌یابی غیرقابل تعیین در بین نقاط چک وجود دارد. همچنین امکان صفر شدن مخرج نیز وجود دارد.

نبود اطمینان: در نتیجه استفاده از این معادلات، ارزیابی دقت و صحت به آسانی امکان‌پذیر نیست.

پیچیدگی: پیچیدگی در تعیین توابع گویا مناسب و تعداد نقاط مورد نیاز ممکن است منتهی به فقدان استحکام معادلات گویا و از دست دادن بیشتر دقت شود.

۲ مدل ریاضی توابع گویا

مدل ریاضی توابع گویا به صورت تقسیم دو چندجمله‌ای است که در حالت سه‌بُعدی تعداد پارامترهای مدل برای هر مولفه مختصاتی ۳۹ تا است (۲۰ ضریب برای صورت، ۱۹ ضریب به‌علاوهٔ مقدار ثابت ۱ برای مخرج) که معادلات مربوطه در جدول شماره (۱) آورده شده است (جاکبسون و همکاران، ۲۰۰۵، مدنی، ۱۹۹۹ و توتین و چنگ، ۲۰۰۰).

روش‌های حل معادلات گویا به‌طورکلی به دو صورت زیر است:

۱. روش فروسو(Downward): که از تصویر به زمین می‌رسد.

۲. روش فراسو (Forward یا Upward): که از زمین به تصویر می‌رسد. که در اینجا فقط به توضیح این روش می‌پردازیم.

روش فراسو: در این حالت مختصات تصویری از تقسیم دو چندجمله‌ای به دست می‌آید. این مدل شبیه به معادلات شرط هم‌خطی ارتباط بین فضای شئ و تصویر را برقرار می‌کند. یک مدل عمومی از توابع گویا که برای انتقال از فضای سه‌بُعدی زمین به فضای دوبُعدی تصویر مناسب باشد، در جدول ۱ آورده شده است. در معادلات داده شده در جدول ۱، (x,y) مختصات تصویری نقاط و (X,Y,Z) مختصات زمینی متناظر با آنها است، و a_{ijk} ضرایب چندجمله‌ای‌ها هستند که به آنها ضرایب توابع گویا می‌گویند.

ازآنجاکه در توابع گویا وجود دستگاه مختصات با مقادیر مختصات خیلی بزرگ غیر عادی نیست، اگر به همراه مختصات بزرگ، چندجمله‌ای با درجه نسبتاً زیاد نیز به کار رود، نبود استحکام عددی (numerical instabitliy) و خطاهای سرریزی (overflow error) یا برشی (truncation error) ممکن است رخ دهد. لذا به منظور استحکام محاسباتی و کاهش تزریق خطاها در طول محاسبات، دو مختصات تصویری و سه مختصات زمینی هرکدام شیفت‌دهی و مقیاس‌دهی می‌شوند تا در بازه ۱+ و ۱- قرار گیرند و این امر باعث استحکام محاسباتی و کاهش و کمینه شدن خطاهای محاسباتی می‌شود. فرآیند نرمال‌سازی مختصات با استفاده از روابط زیر صورت می‌گیرد:

$$x_n = \frac{x - x_0}{x_s} \quad , \quad y_n = \frac{y - y_0}{y_s} \qquad (۱)$$

$$X_n = \frac{X - X_0}{X_s} \quad , \quad Y_n = \frac{Y - Y_0}{Y_s} \quad , \quad Z_n = \frac{Z - Z_0}{Z_s}$$

که x_0 و y_0 مقادیر شیفت و x_s و y_s مقادیر مقیاس مختصات تصویری هستند. مشابه آن X_0، Y_0، Z_0 مقادیر شیفت و X_s، Y_s، Z_s مقادیر مقیاس مختصات زمینی هستند.

عموماً بیشینه توان هر مختصات زمینی محدود به ۳ و مجموع توان همه مختصات‌های زمینی نیز محدود به ۳ است به این معنی که: $0 \le m \le 3$، $0 \le n \le 3$، $0 \le p \le 3$، $m+n+p \le 3$. در نتیجه ۳۹ ضریب، شامل ۲۰ ضریب برای صورت و ۱۹ ضریب برای مخرج خواهیم داشت که برای حل ضرایب معادلات گویا، حداقل به ۳۹ نقطه کنترل نیاز است.

۳ تبدیل مدل به مدل پارامتری خطی

شکل خطی شده معادلات جدول (۱) به صورت زیر است:

$$x = \frac{(1 \quad X \quad Y \quad Z \quad \cdots \quad Z^3).(a_0 \quad a_1 \quad \cdots \quad a_{19})^T}{(1 \quad X \quad Y \quad Z \quad \cdots \quad Z^3).(1 \quad b_1 \quad \cdots \quad b_{19})^T}$$

$$y = \frac{(1 \quad X \quad Y \quad Z \quad \cdots \quad Z^3).(c_0 \quad c_1 \quad \cdots \quad c_{19})^T}{(1 \quad X \quad Y \quad Z \quad \cdots \quad Z^3).(1 \quad d_1 \quad \cdots \quad d_{19})^T} \qquad (۲)$$

$$v_x = \begin{bmatrix} \frac{1}{B} & \frac{X}{B} & \frac{Y}{B} & \frac{Z}{B} & \cdots & \frac{Z^3}{B} & \frac{-xX}{B} & \frac{-xY}{B} & \cdots & \frac{-xZ^3}{B} \end{bmatrix} J - \frac{x}{B}$$
$$v_y = \begin{bmatrix} \frac{1}{D} & \frac{X}{D} & \frac{Y}{D} & \frac{Z}{D} & \cdots & \frac{Z^3}{D} & \frac{-yX}{D} & \frac{-yY}{D} & \cdots & \frac{-yZ^3}{D} \end{bmatrix} K - \frac{y}{D}$$

(۳)

یا

$$v'_x = Bv_x = \begin{bmatrix} 1 & X & Y & Z & \cdots & Z^3 & -xX & -xY & \cdots & -xZ^3 \end{bmatrix} J - x$$
$$v'_y = Dv_y = \begin{bmatrix} 1 & X & Y & Z & \cdots & Z^3 & -yX & -yY & \cdots & -yZ^3 \end{bmatrix} K - y$$

(۴)

که در آن

$$B = (1 \quad X \quad Y \quad Z \quad \cdots \quad Z^3).(1 \quad b_1 \quad \cdots \quad b_{19})^T$$
$$D = (1 \quad X \quad Y \quad Z \quad \cdots \quad Z^3).(1 \quad d_1 \quad \cdots \quad d_{19})^T$$
$$J = \left(a_0 \quad a_1 \quad \ldots \quad a_{19} \quad b_1 \quad \ldots \quad b_{19}\right)^T$$
$$K = \left(c_0 \quad c_1 \quad \ldots \quad c_{19} \quad d_1 \quad \ldots \quad d_{19}\right)^T$$

(۵)

با n نقطه کنترل، معادلات پارامتری را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix} V_x \\ V_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_x & 0 \\ 0 & P_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J \\ K \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P_x & 0 \\ 0 & P_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ C \end{bmatrix} \qquad (۶)$$

رابطه بالا را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد:

$$V = PAx - Pl \qquad (۷)$$

که در روابط بالا R و C و M و N به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$R = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}^T$$
$$C = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{bmatrix}^T \qquad (۸)$$

جدول ۱. مدل ریاضی توابع گویا.

$$R_{3D}(XYZ) = \frac{P1(X,Y,Z)}{P2(X,Y,Z)} = \frac{\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{p} a_{ijk} X^i Y^j Z^k}{\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{p} b_{ijk} X^i Y^j Z^k}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{a_0 + a_1X + a_2Y + a_3Z + a_4XY + a_5XZ + a_6YZ + \ldots + a_{19}Z^3}{1 + b_1X + b_2Y + b_3Z + b_4XY + b_5XZ + b_6YZ + \ldots + b_{19}Z^3} \\ y = \dfrac{c_0 + c_1X + c_2Y + c_3Z + c_4XY + c_5XZ + c_6YZ + \ldots + c_{19}Z^3}{1 + d_1X + d_2Y + d_3Z + d_4XY + d_5XZ + d_6YZ + \ldots + d_{19}Z^3} \end{cases}$$

$$P1(X,Y,Z) = a_0 + a_1X + a_2Y + a_3Z + a_4XY + a_5XZ + a_6YZ + a_7XYZ + a_8X^2 + a_9Y^2 + a_{10}Z^2 + a_{11}X^3 + a_{12}X^2Y + a_{13}X^2Z + a_{14}XY^2 + a_{15}Y^3 + a_{16}Y^2Z + a_{17}XZ^2 + a_{18}YZ^2 + a_{19}Z^3$$

$$M=\begin{bmatrix}1 & X_1 & \cdots & Z_1^3 & -x_1X_1 & \cdots & -x_1Z_1^3\\ 1 & X_2 & \cdots & Z_2^3 & -x_2X_2 & \cdots & -x_2Z_2^3\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & X_n & \cdots & Z_n^3 & -x_nX_n & \cdots & -x_nZ_n^3\end{bmatrix} \quad (۹)$$

$$N=\begin{bmatrix}1 & X_1 & \cdots & Z_1^3 & -y_1X_1 & \cdots & -y_1Z_1^3\\ 1 & X_2 & \cdots & Z_2^3 & -y_2X_2 & \cdots & -y_2Z_2^3\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & X_n & \cdots & Z_n^3 & -y_nX_n & \cdots & -y_nZ_n^3\end{bmatrix}$$

و P را می‌توان درحکم ماتریس وزن باقی‌مانده‌ها به صورت زیر درنظر گرفت:

$$P=\begin{bmatrix}P_x & 0\\ 0 & P_y\end{bmatrix} \quad (۱۰)$$

که در آن

$$P_x=\begin{bmatrix}\frac{1}{B_1} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \frac{1}{B_2} & 0 & \vdots\\ \vdots & 0 & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{B_n}\end{bmatrix},\ P_y=\begin{bmatrix}\frac{1}{D_1} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \frac{1}{D_2} & 0 & \vdots\\ \vdots & 0 & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{D_n}\end{bmatrix} \quad (۱۱)$$

همچنین A ماتریس ضرایب، x بردار مجهولات و l بردار مشاهدات (مختصات تصویری مشاهده شده) هستند. درنتیجه معادلات نرمال به صورت زیر خواهد شد:

$$\begin{aligned}&(A^TP^2A)x-A^TP^2l=0\\ &\rightarrow x=\left(A^TP^2A\right)^{-1}A^TP^2l\end{aligned} \quad (۱۲)$$

معادله بالا را می‌توان با دو روش حل کرد: روش مستقیم و روش تکراری.

روش مستقیم: روش حل مستقیم توابع گویا با قرار دادن ماتریس P به صورت ماتریس یکه است. در این صورت معادله نرمال را می‌تواند با استفاده از سرشکنی کمترین مربعات استاندارد حل کرد:

$$x=(A^TA)^{-1}A^Tl \quad (۱۳)$$

روش تکراری: در روش تکراری به منظور ارتقای دقت پارامترهای تعیین شده و رسیدن به مقادیر دقیق‌تر، از روش سرشکنی کمترین مربعات تکراری در تعیین پارامترهای مجهول استفاده می‌شود. در مورد روش تکراری، مقدار اولیه ضرایب را می‌توان ابتدا از روش مستقیم به‌دست آورد، سپس P^j و x^j را با استفاده از حل معادله نرمال به صورت تکراری تا زمان رسیدن به شرط نهایی محاسبه کرد. همچنین مخرج را از نظر صفر نشدن در طول محاسبات نیز کنترل کرد تا از تقسیم ماتریس وزن بر صفر جلوگیری به عمل آید.

با مقایسه روش مستقیم و روش تکراری، روش دوم به لحاظ نظری به این دلیل که ماتریس وزن در محاسبات وارد می‌شود، دقیق‌تر است.

در این روش چند نکته مهم وجود دارد که شامل موارد زیر است: اولین مورد، نرمال کردن مقادیر مختصات‌های زمینی و تصویری است که قبلاً توضیح داده شد. علاوه‌براین از آنجا که، دامنه تغییرات چندجمله‌ای‌ها زمانی که نقاط کنترل توزیع مناسب و یکنواختی را ندارند، زیاد است، در نتیجه، در تابع توزیع نقاط کنترل و تابع مقادیر ارتفاعی احتمال آن وجود دارد که ماتریس نرمال $\left(A^TP^2A\right)$، ناپایدار شود. در نتیجه ممکن است معادله نرمال به‌ویژه در چندجمله‌ای‌های دارای درجات بالاتر (بیشتر از درجه ۲) تکین (سینگولار (singular)) شود. در این موارد احتمال واگرایی فرایند تکرار وجود دارد. اگر فرض کنیم که مدل دوربین برای کاربر در دسترس نباشد (مثل تصاویر ماهواره‌ای با توان تفکیک زیاد)، در نتیجه به منظور انتخاب نقاط کنترل باید از روش سنتی استفاده کرد که روش Cartography/DEM و یا GPS است. به همین دلیل به دست آوردن توزیع منظمی از نقاط کنترل غیر ممکن است و در نتیجه، استفاده از یک الگوریتم پایدار سازی (regularization) عددی برای همگرایی فرایند تکرار ضرورت دارد.

روش‌های پایدارسازی بسیاری وجود دارند که به دلیل محـدودیت، اسـتفاده از آنهـا در روش‌هـای گونـاگون، مناسب نیست. اما الگوریتم تیخونوف (گروه، ۱۹۹۲ و تائو و هو،a۲۰۰۱) یکی از رایج‌ترین الگوریتم‌های پایدارسازی برای دستگاه‌های ناپایدار است که این روش شامل افزودن یک مقدار ثابت دلخواه کوچک $\lambda > 0$ به قطر مـاتریس نرمال به منظور پایدار کردن مسئله است. سپس مـاتریس نرمال به صورت منظم زیر در می‌آید (گروه، ۱۹۹۲ و تـائو و هو،b۲۰۰۱):

$$\begin{aligned}&(A^T P^2 A + \lambda^2 I)x - A^T P^2 l = 0\\&\rightarrow x = (A^T P^2 A + \lambda^2 I)^{-1} A^T P^2 l\end{aligned} \tag{۱۴}$$

برای رسیدن به یک روش نرم‌تر، معادله بالا به صورت تکراری با استفاده از روش تیخونوف حل خواهد شد:

$$\begin{aligned}&x_{(0)} = 0 \quad , \quad P_{(0)} = P\left(x_{(0)}\right) = I\\&x_{(s)} = x_{(s-1)} + \left(A^T P_{(s-1)}^2 A + \lambda^2 I\right)^{-1} A^T P_{(s-1)}^2 \delta l_{(s-1)}\end{aligned} \tag{۱۵}$$

که در آن

$$\begin{aligned}&p_{(s)} = P\left(x_{(s)}\right)\\&\delta l_{(s)} = l - Ax_{(s)}\end{aligned} \tag{۱۶}$$

در رابطه (۱۴)، λ پـارامتر پایدارسـازی، s عـدد تکـرار، P مـاتریس وزن و δl خطـای بسـت نقـاط کنتـرل اسـت. انتخـاب بهینـه پـارامتر λ بـا اسـتفاده از منحنـی L صـورت مـی‌گیـرد (توضـیحات کامـل‌تـر در مـورد الگـوریتم پایدارسازی تیخونوف در قسـمت‌هـای بعـدی آورده شـده است).

روشی که در این قسمت ذکر شد روش معمولی است که تـاکنون بـرای بـرآورد ضـرایب معـادلات گویـا از آن استفاده شـده اسـت. اسـاس ایـن روش بـر مشـاهده فـرض کردن مختصات عکسی و مطلق در نظر گـرفتن مختصـات نقاط کنترل زمینی است. چنین فرضـی منطبـق بـر واقعیـت مسئله نیست. حل صحیح این مدل ریاضـی بـه ازای فـرض مشاهداتی بودن مختصات عکسی و زمینی عملی است. در چنـین حـالتی دیگـر مـدل بـه صـورت صـریح بـر حسـب مشاهدات و یا به عبارتی مدل پارامتری نیسـت و تبـدیل بـه یک مدل ضمنی از مشاهدات و مجهولات خواهد شد کـه در اصطلاح مدل ترکیبی نامیده می‌شود.

۴ پیشنهاد مدل ترکیبی به منزلهٔ مدل کامل

مدل پارامتری در برآورد کمتـرین مربعـات مجهـولات در صورتی قابل استفاده است کـه بتـوان مـدل ریاضـی را بـه صورت صریح برحسب مشاهدات نوشت و یـا بـه عبـارتی اگر بتوان به ازای هر مشاهده یک معادله نوشت، مـی‌تـوان از مدل پـارامتری کـه قـبلاً ذکـر شـد، استفاده کـرد. ولـی درصورتی‌که در هر معادله ترکیبی چنـدین مشـاهده ظـاهر شده باشد و یا به عبارتی معـادلات ریاضـی تشـکیل‌دهنـده مدل ریاضی بـه‌صـورت معـادلات ضـمنی از مشـاهدات و مجهولات باشد، مدل ریاضی تبدیل به یک مـدل ترکیبـی خواهدشد. در مورد معـادلات گویـا چنـین حـالتی وجـود دارد.

در حالت کلی مدل ترکیبی برای برآورد مجهولات را می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

$$f\left(x,l\right) = 0 \tag{۱۷}$$

که پس از خطی کردن، معادلات مدل ترکیبی به صـورت زیر در می آید:

$$A\delta x + Bv + W = 0 \tag{۱۸}$$

که در رابطه (۱۸)، A ماتریس ضرایب اولیـه و B مـاتریس ضرایب ثانویه است و از روابط زیر به‌دست می‌آید:

$$A = \nabla_{\hat{x}}^{f} \Big|_{x_0,l} \quad , \quad B = \nabla_{\hat{l}}^{f} \Big|_{x_0,l} \tag{۱۹}$$

W نیز بردار خطای بست است که با استفاده از مقدار اولیـه مجهولات و مقدار مشاهدات از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$W = f(x,l)\Big|_{x_0,l} \tag{۲۰}$$

در نهایت بردار تصحیحات مجهولات این مدل به روش کمترین مربعات با استفاده از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$\delta\hat{x} = -\left(A^T M^{-1} A\right)^{-1} A^T M^{-1} W \tag{۲۱}$$

که در آن P ماتریس وزن مشاهدات و $M = BP^{-1}B^T$ است.

به علت غیرخطی بودن روابط بالا راه حل ما به صورت تکراری است که باید در هر تکرار تا رسیدن به شرط مورد نظر مجهولات را به هنگام (update) کنیم. با استفاده از فرایند تکرار بردار مجهولات برآورد شده $\hat{x}$ به صورت زیر قابل برآورد است:

$$\hat{x} = x_0 + \delta\hat{x} \tag{۲۲}$$

در این قسمت برای حل مدل توابع گویا به صورت ترکیبی، معادلات گویا را به صورت معادلات داده شده در جدول ۲ بازآرایی می‌کنیم و برای برآورد پارامترها از روابط مدل ترکیبی استفاده می‌کنیم.

در حل این مدل پارامترهای برآوردشده از حل مدل به صورت پارامتری خطی در حکم مقادیر اولیه برای خطی‌کردن استفاده قرار می‌گیرند. همچنین در هر تکرار از روش پایدارسازی تیخونوف برای پایدار کردن مسئله استفاده می‌کنیم.

۵ ناپایداری و روش‌های متفاوت پایدارسازی

مبانی مسائل بد طرح را آدامار (Hadamard) در اوایل قرن حاضر بیان کرد. از نظر او یک مسئله بدطرح گفته می‌شود اگر:

۱- مسئله جواب نداشته باشد

۲- جواب مسئله یکتا نباشد

۳- جواب یک تابع پیوسته از داده‌های معلوم (در کار ما مشاهدات) نباشد (گروه، ۱۹۹۲ و ولدان زوج و همکاران، ۲۰۰۷). به عبارت دیگر، واپیچش بسیارکوچک روی داده‌ها، باعث واپیچش بسیار بزرگ روی جواب مسئله شود.

به عبارت دقیق‌تر مسئله کمترین مربعات زیر را

$$\begin{cases} Ax = b \qquad A \in \mathbb{R}^{m\times n} \\ \min \|Ax - b\|_2 \end{cases} \tag{۲۳}$$

یک مسئله بدطرح می‌نامیم هر گاه دو خصوصیت زیر را دارا باشد:

۱- مقادیر ویژه (singular values) ماتریس A به تدریج به سمت صفر میل کند.

۲- نسبت بین بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین مقدار ویژه غیر صفر ماتریس A مقدار بزرگی باشد.

نکتهٔ مهم و جالبی که باید به آن توجه کنیم این است که بدطرح بودن یک مسئله به این معنی نیست که یک جواب تقریبی قابل قبول برای مسئله قابل محاسبه نیست، بلکه بدطرح بودن به این معنی است که روش‌های معمولی عددی در جبر خطی مانند Cholesky, Lu و یا QR factorization نمی‌توانند به طور مستقیم یک جواب تقریبی قابل قبول را برای مسئله به‌دست دهند. بنابراین باید روش‌هایی را برای به دست آوردن یک جواب تقریبی قابل قبول به کار برد که این موضوع هدف اصلی روش‌های پایدارسازی است. اگر ماتریس ضرایب یک مسئله کمترین مربعات دارای دو شرط فوق باشد، باید روشی برای پایدارسازی مسئله اتخاذ شود که این روش عبارت است از تزریق مجموعه‌ای از اطلاعات جانبی به مسئله تا یک جواب قابل اعتماد برای مسئله به‌دست آید. اطلاعات جانبی زیادی در مورد جواب مورد نظر مسئله یعنی x، قابل استفاده است امّا به‌منظور پایدارسازی یک مسئله بدطرح گسسته معمولاً کمینه شدن قید زیر را در نظر می‌گیرند:

$$\Omega(x) = \left\|(x - x^*)\right\|_2 \tag{۲۴}$$

که در آن x^* مقدار اولیه مجهولات است.

جدول ۲. بازآرایی معادلات گویا به‌منظور مدل ریاضی به مدل ترکیبی.

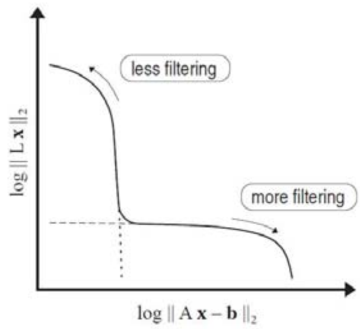
$$x + b_1 xX + b_2 xY + b_3 xZ + b_4 xXY + b_5 xXZ + b_6 xYZ + \ldots + b_{19} xZ^3 - (a_0 + a_1 X + a_2 Y + a_3 Z + a_4 XY + a_5 XZ + a_6 YZ + \ldots + a_{19} Z^3) = 0$$
$$y + d_1 yX + d_2 yY + d_3 yZ + d_4 yXY + d_5 yXZ + d_6 yYZ + \ldots + d_{19} yZ^3 - (c_0 + c_1 X + c_2 Y + c_3 Z + c_4 XY + c_5 XZ + c_6 YZ + \ldots + c_{19} Z^3) = 0$$

با اعمال این شرط، جواب مسئله کمترین مربعات به ازای کمینه شدن دو تابع هدف تعیین می‌شود. معمول‌ترین روشی که برای حل این مسئله وجود دارد و ما نیز از همین روش برای پایدار سازی مسئله برآورد ضرایب توابع گویا استفاده می‌کنیم، روش پایدار سازی تیخونوف است که از جمله روش‌های مستقیم در پایدارسازی مسائل بدطرح است. در این روش پایدارسازی، تابع هدف به صورت یک ترکیب خطی از توابع هدف ذکر شده به شکل زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\|Ax-b\|_2^2 + \lambda^2 \left\|(x-x^*)\right\|_2^2 \rightarrow Min \qquad (۲۵)$$

درعبارت بالا λ پارامتر پایدارسازی نامیده می‌شود که وزن بین کمینه شدن باقی‌مانده‌ها و قید جانبی را کنترل می‌کند. اصولاً روش‌های پایدارسازی، روش‌هایی هستند که با فرضیات خاصی و با در نظر گرفتن یک پارامتر اسکالر معلوم، موسوم به پارامتر پایدارسازی یک جواب پایدار را به مسئله نسبت می‌دهند و پس از آن به جای یافتن جواب از همهٔ فضای جواب‌ها، توجه بحث را به یافتن یک پارامتر اسکالر(یک عدد) معطوف می‌کنند و بحث روش‌های تعیین پارامتر مطرح می‌سازند (ولدان زوج و همکاران، ۲۰۰۷).

روش‌های متفاوتی برای تعیین این پارامتر وجود دارد که ما در این مقاله از روش مبتنی بر منحنی L برای یافتن پارامتر بهینه پایدارسازی استفاده خواهیم کرد. روش منحنی L یکی از روش‌های انتخاب پارامتر پایدارسازی است که در آن نیاز به شناخت نرم خطای مشاهدات $\|e\|_2$ وجود ندارد. این روش مناسب‌ترین ابزار گرافیکی برای تجزیه و تحلیل مسائل بدطرح گسسته با استفاده از تغییرات نرم جواب پایدار شده $\|x\|_2$ در مقابل نرم خطای متناظر به آن $\|Ax-b\|_2$ است. لازم به توضیح است که پایه کلیه روش‌های پایدارسازی برقراری تعادل میان پایداری جواب و خطا(بایاس) به‌وجودآمده تحت تأثیر پارامتر پایدارسازی است، که در این روش به صورت گرافیکی مطرح می‌شود. فرض بنیادی در روش منحنی L آن است که، نرم بردار جواب و نرم بردار باقیمانده، تابعی از پارامتر پایدارسازی‌اند (ولدان زوج و همکاران، ۲۰۰۷). منحنی L شامل یک قسمت قائم، یک قسمت با شیب کم در همسایگی قسمت قائم و یک قسمت افقی است. قسمت افقی متناظر با جواب‌هایی است که پارامتر پایدارسازی بزرگی دارد و جواب تحت‌الشعاع اغتشاش(بایاس) ناشی از پایدارسازی است. قسمت قائم متناظر با جواب‌هایی است که پارامتر پایدارسازی کوچک دارند و در نتیجه جواب تحت‌الشعاع اغتشاش ناشی از خطای مشاهدات e قرار دارد. هنگامی که تغییرات نرم بردار جواب $\|x\|_2$ را در مقابل $\|Ax-b\|_2$ در مقیاس لگاریتمی رسم کنیم، منحنی حاصل غالباً دارای شکلی L گونه است با بخشی که قسمت‌های افقی و قائم آن را از هم جدا می‌سازد. پارامتر بهینه پایدارسازی در این روش، نقطه‌ای از گراف $(\rho(\lambda),\eta(\lambda)) = (\log\|Ax-b\|_2\ ,\ \log\|x\|_2)$ است که منحنی در آن نقطه حداکثر انحنا را دارد. علت انتخاب این نقطه برقراری تعادل بین اغتشاش ناشی از پایدارسازی و اغتشاش ناشی از خطای مشاهدات e در آن نقطه است (ولدان زوج و همکاران، ۲۰۰۷). در شکل ۱ حالت کلی منحنی L به نمایش گذاشته شده است.



شکل ۱. حالت کلی منحنی L (هانسن، ۱۹۹۸).

۶ نتایج عددی

در این قسمت به منظور بررسی موردی از یک عکس ماهواره‌ای که دارای ۷۷ نقطه کنترل است، استفاده کرده‌ایم. ۱۹ نقطه از این ۷۷ نقطه را در حکم نقاط چک در نظر گرفته‌ایم و از بقیه نقاط به‌منظور برآورد پارامترها استفاده کرده‌ایم. توزیع نقاط کنترل و چک براساس مختصات زمینی نقاط در شکل ۲ آورده شده است.

همان‌طور که در قسمت قبل گفته شد یک مسئله کمترین مربعات، مسئله‌ای بدطرح نامیده می‌شود اگر دارای دو خصوصیت ذکر شده باشد. شکل ۳ نشان‌دهنده سیر نزولی مقادیر منفرد ماتریس A به سمت صفر است. بنابراین مسئله ما دارای خصوصیت اول است. همچنین با توجه به اینکه نسبت بزرگ‌ترین به کوچک‌ترین مقدار منفرد غیرصفر ماتریس A مقدار بزرگی است، می‌توانیم نتیجه بگیریم که مسئله ما یک مسئله بدطرح است. همان‌طور که در قسمت‌های قبل ذکر شد یکی از روش‌های تعیین پارامتر بهینه پایدارسازی روش مبتنی بر منحنی L است که در شکل ۴ درحکم نمونه نحوه تعیین پارامتر بهینه پایدارسازی به روش تیخونوف براساس منحنی L به نمایش گذاشته شده است. (منحنی شکل ۴ مربوط به حل مدل با استفاده از رابطه (۱۴) است).

در این قسمت مسئله تعیین ضرایب توابع گویا به روش‌های متفاوت که تاکنون ذکر شد، برآورد می‌شوند. این روش‌ها عبارت‌انداز:

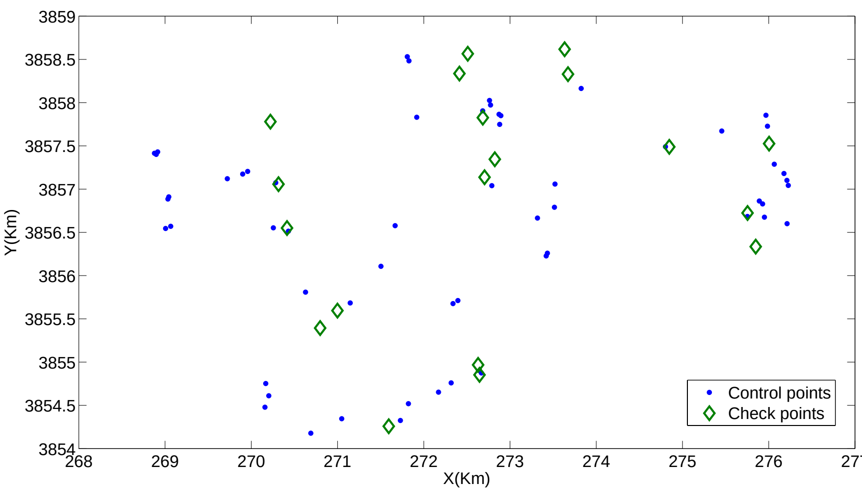
۱. حل مدل به صورت پارامتری خطی بدون پایدارسازی

۲. حل مدل به صورت پارامتری خطی همراه با پایدارسازی

۳. حل مدل به صورت ترکیبی، بدون پایدارسازی

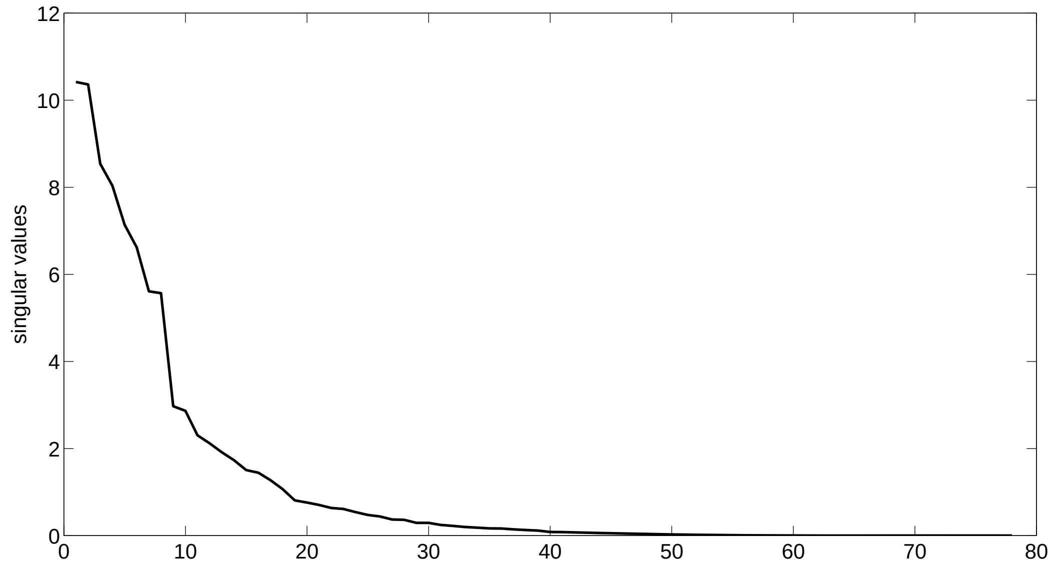
۴. حل مدل به صورت پارامتری خطی به روش تکراری همراه با پایدار سازی

۵. حل مدل به صورت ترکیبی همراه با پایدارسازی (روش پیشنهادی مقاله)

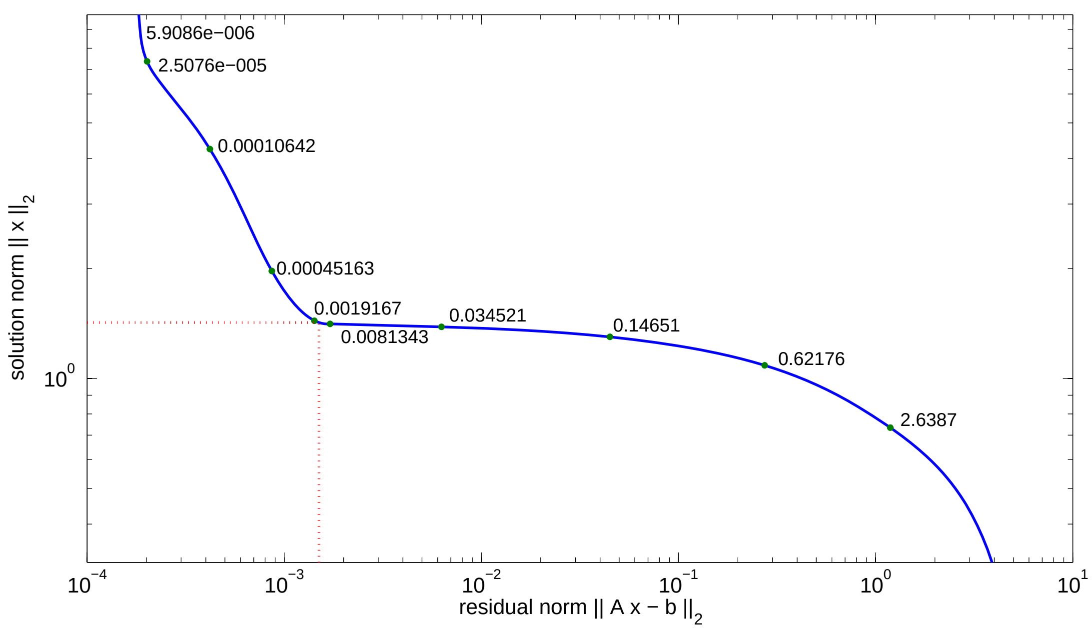


شکل ۲. پراکندگی نقاط کنترل و چک در منطقه مورد بررسی برحسب مختصات زمینی نقاط.

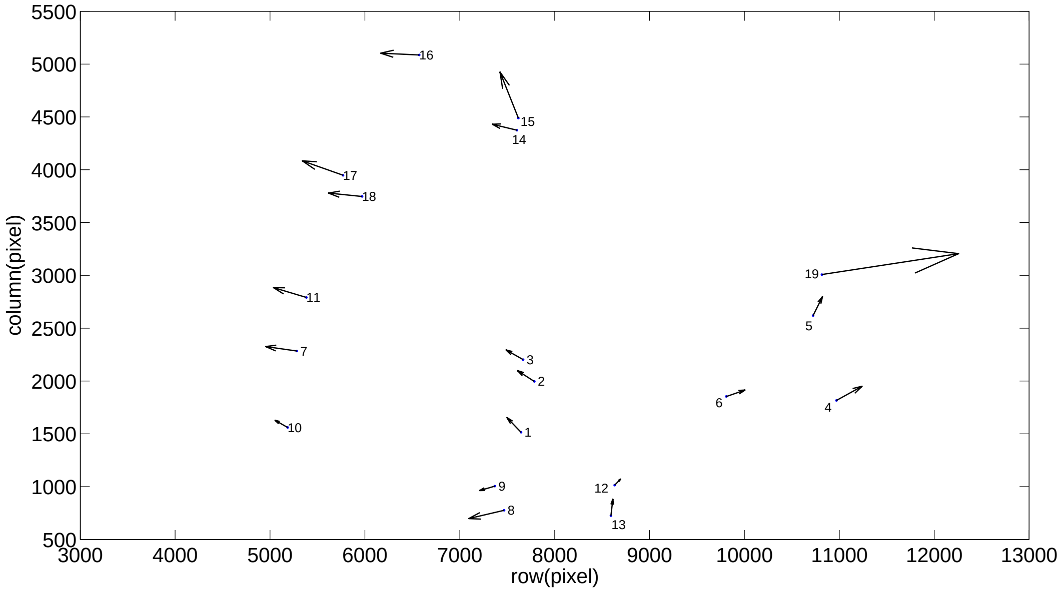
لازم به ذکر است که در حل مدل به صورت ترکیبی یعنی در حالت‌های ۳ و ۵، راه حل ما به صورت تکراری خواهدبود و در حالت ۵ در هر مرحله از تکرار مسئله را پایدار می‌کنیم. نتایج روش‌های متفاوت سرشکنی به‌منظور برآورد ضرایب معادلات گویا در شکل‌های ۵ تا ۱۲ آمده است.



شکل۳. تغییرات مقادیر منفرد ماتریس ضرایب ($\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} = \mathbf{1763123.189}$).

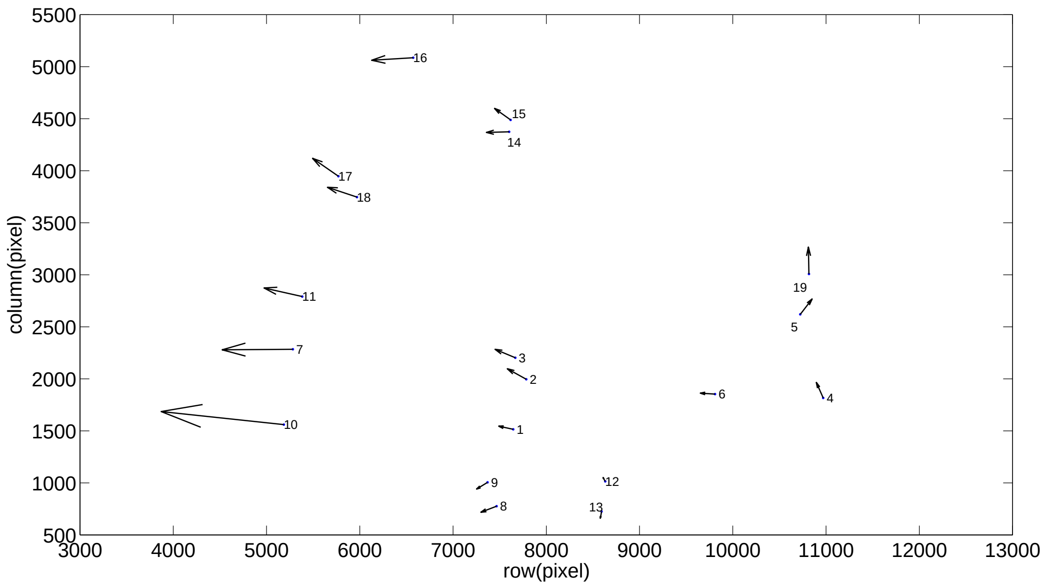


شکل ٤. منحنی L به‌منظور تعیین پارامتر بهینه پایدارسازی در مدل پارامتری خطی $(\lambda_{opt} = 0.0026532)$.



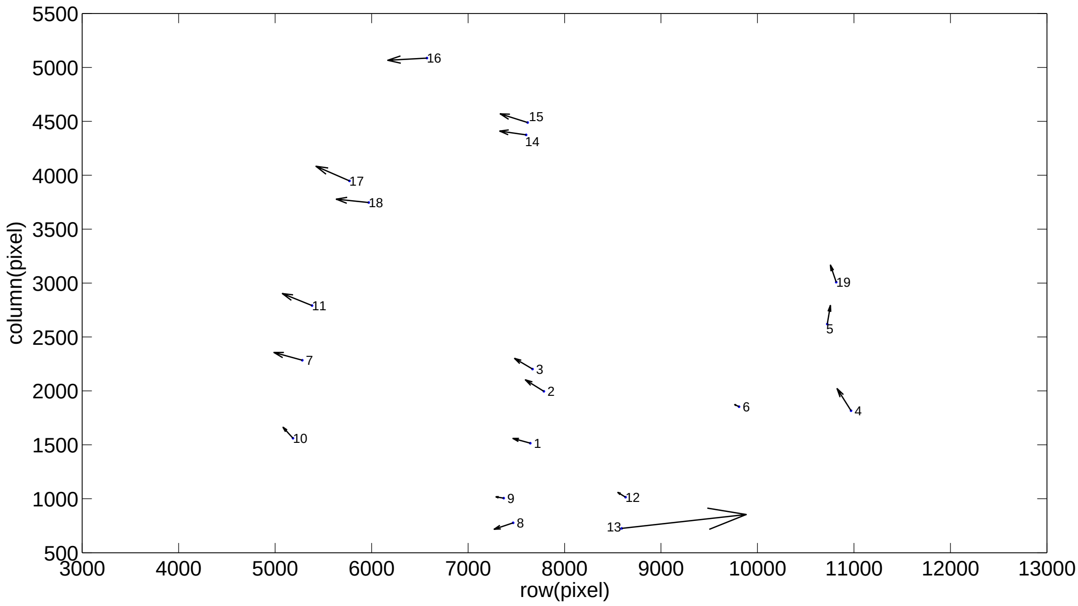
شکل ۵. مقادیر باقی‌مانده در نقاط چک با استفاده از حل مدل به صورت پارامتری خطی بدون پایدارسازی.

(مقادیر باقی‌مانده بر حسب پیکسل است و برای وضوح بیشتر، مقیاس آنها ۱۰۰ برابر شده است.)



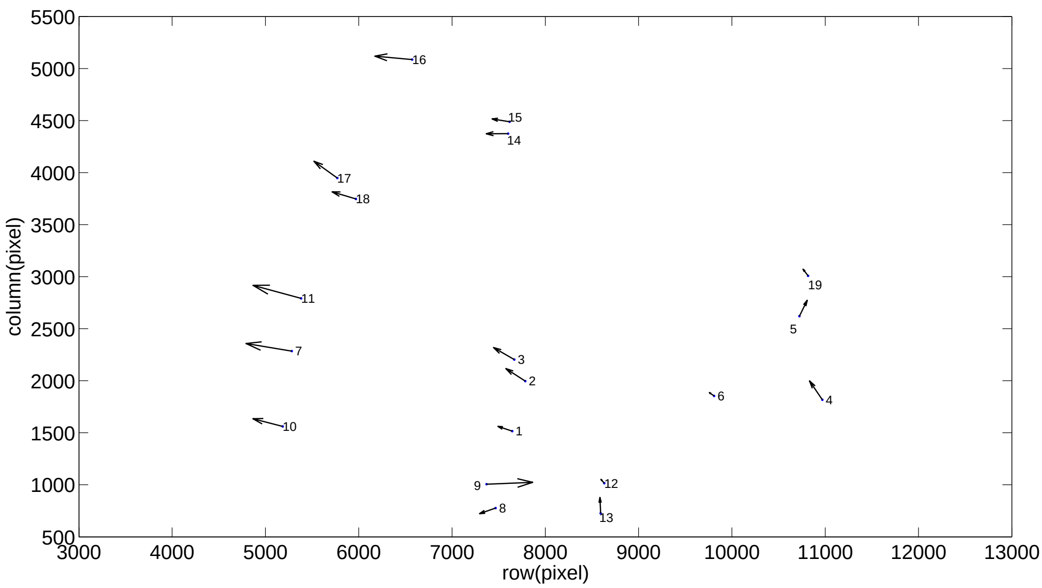
شکل ٦. مقادیر باقی‌مانده در نقاط چک با استفاده از حل مدل به صورت پارامتری خطی همراه با پایدارسازی.

(مقادیر باقی‌مانده برحسب پیکسل است و برای وضوح بیشتر، مقیاس آنها ۱۰۰ برابر شده است.)



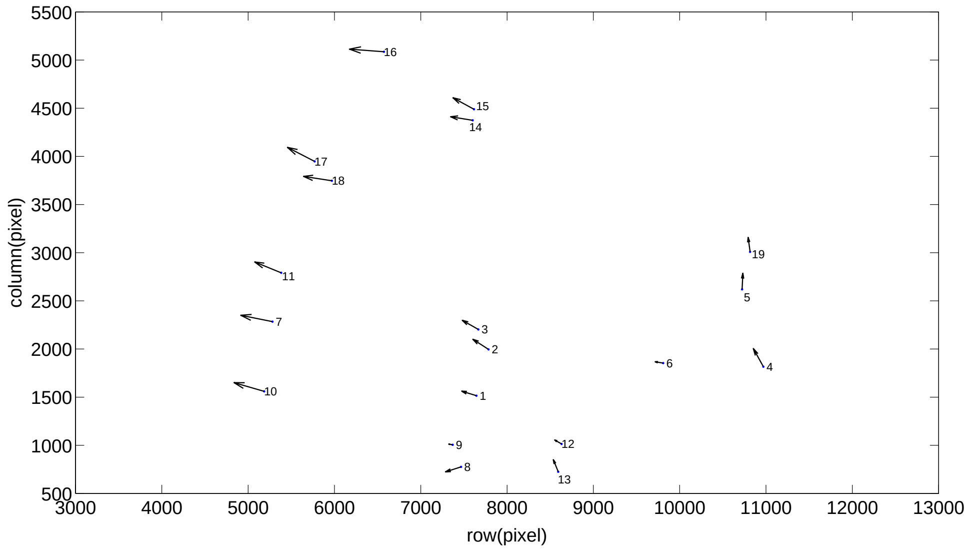
شکل ۷. مقادیر باقی‌مانده در نقاط چک با استفاده از حل مدل به‌صورت ترکیبی، بدون پایدارسازی.

(مقادیر باقی‌مانده برحسب پیکسل است و برای وضوح بیشتر، مقیاس آنها ۱۰۰ برابر شده است.)



شکل ۸. مقادیر باقیمانده در نقاط چک با استفاده از حل مدل پارامتری خطی به صورت تکراری همراه با پایدار سازی.

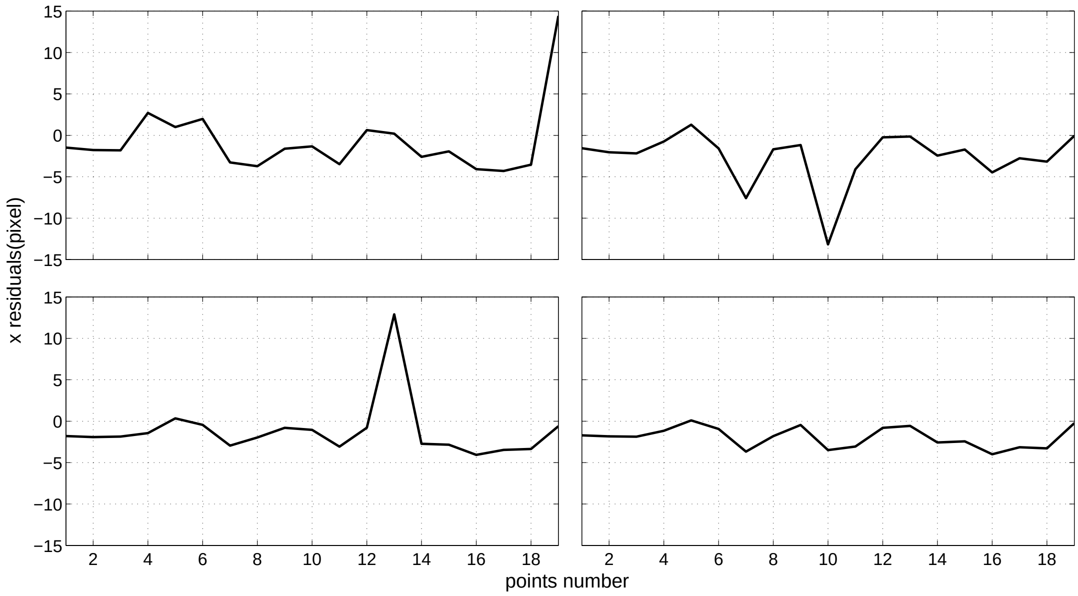
(مقادیر باقیمانده بر حسب پیکسل بوده و جهت وضوح بیشتر، مقیاس آنها ۱۰۰ برابر شده است.)



شکل ۹. مقادیر باقی‌مانده در نقاط چک با استفاده از حل مدل به صورت ترکیبی یا همراه با پایدارسازی.

(مقادیر باقی‌مانده برحسب پیکسل است و برای وضوح بیشتر، مقیاس آنها ۱۰۰ برابر شده است.)

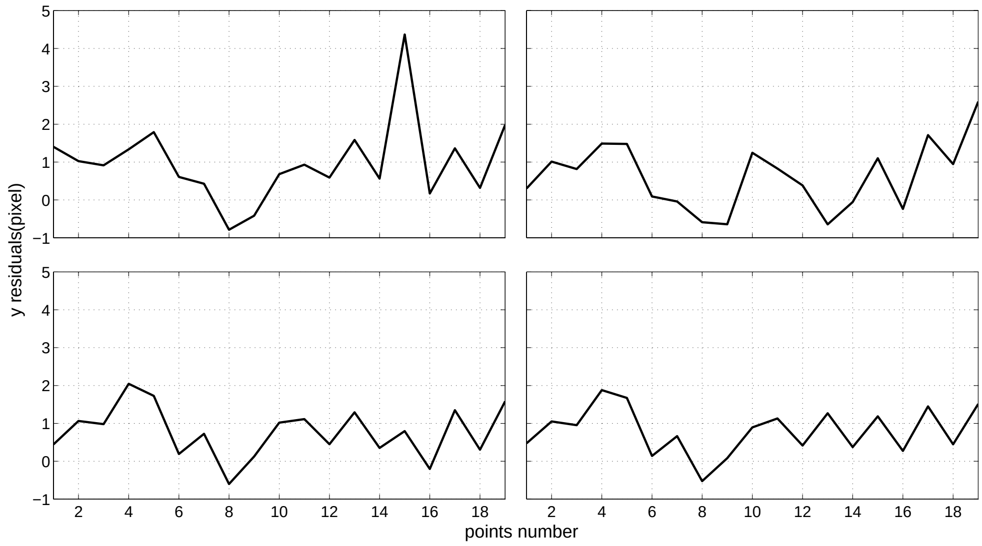
همانگونه که شکل‌های ۵ تا ۹ نشان می‌دهند، به‌کارگیری مدل ترکیبی و پایدارسازی آن به جواب به مراتب بهتری منجر می‌شود. موضوع جالب دیگر سرعت زیاد همگرایی مدل در حالت ترکیبی پایدار شده است. در شکل‌های ۱۰ تا ۱۲ مقادیر باقی‌مانده در نقاط چک به شکل دیگری با هم مقایسه شده‌اند. بهبود دقت مدل پیشنهادی در نقاط چک به وضوح در این شکل‌ها نمایان است.



شکل ۱۰. مقادیر باقی‌مانده مولفه x در نقاط چک.

بالا راست: حل مدل پارامتری خطی با پایدارسازی. **بالا چپ:** حل مدل پارامتری خطی بدون پایدارسازی.

پایین راست: حل مدل ترکیبی با پایدارسازی. **پایین چپ:** حل مدل ترکیبی بدون پایدارسازی.

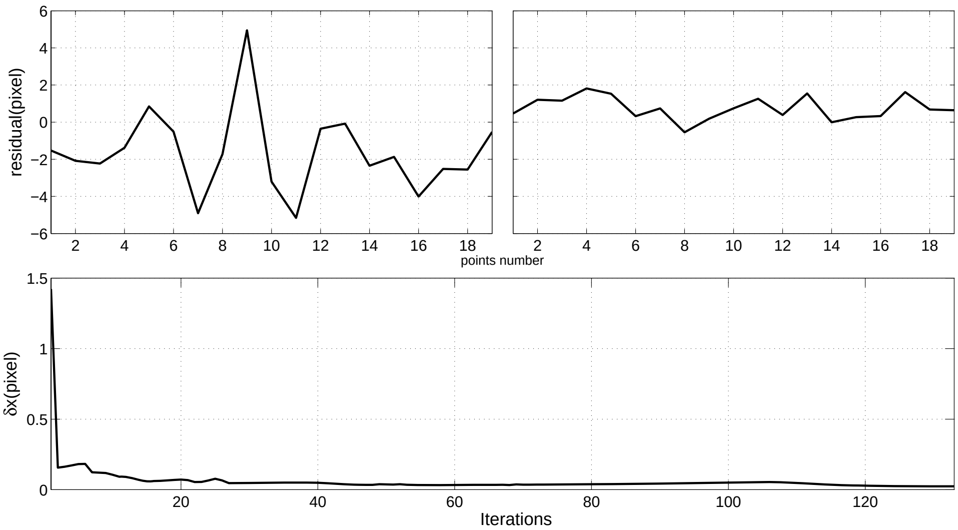


شکل ۱۱. مقادیر باقی‌مانده مولفه y در نقاط چک.

بالا راست: حل مدل پارامتری خطی با پایدارسازی. **بالا چپ:** حل مدل پارامتری خطی بدون پایدارسازی.

پایین راست: حل مدل ترکیبی با پایدارسازی. **پایین چپ:** حل مدل ترکیبی بدون پایدارسازی.

باقی‌مانده در مختصات نقاط چک برآوردشده به روش پارامتری خطی پایدار (معادله (۱۵)) همراه روند همگرایی آن در شکل ۱۲ نمایش داده شده است. همان‌طوری‌که در شکل ۱۲ و جدول ۳ آمده است باقی‌مانده‌ها مقادیری بزرگ‌تر از روش ترکیبی پایدار و کوچک‌تر از سایر روش‌ها هستند. هرچند مقدار RMSE روش پارامتری خطی که به صورت تکراری حل می‌شود، به مقدار RMSE مدل ترکیبی نزدیک است ولی روند همگرایی بسیار کند این روش در مقایسه با سرعت زیاد همگرایی مدل ترکیبی قابل تأمل است.



شکل ۱۲. مقادیر باقی‌مانده در نقاط چک و تکرارهای حل مدل به صورت پارامتری خطی همراه با پایدارسازی و تکرار.

بالا راست: مقادیر باقی‌مانده مولفه y. **بالا چپ:** مقادیر باقی‌مانده مولفه x.

پایین: روند همگرایی مدل.

جدول ۳. مقایسه RMSE نقاط چک با استفاده از روش‌های متفاوت سرشکنی (واحد اعداد پیکسل است).

حالت اول	حالت دوم	حالت سوم	حالت چهارم	حالت پنجم
مدل پارامتری خطی بدون پایدارسازی	مدل پارامتری خطی همراه با پایدارسازی	مدل ترکیبی بدون پایدارسازی	مدل پارامتری خطی همراه پایدارسازی و تکرار	مدل ترکیبی همراه با پایدارسازی
4.5218	4.3210	3.9382	2.9753	2.5848

(RMSE) (root mean square error) نقاط چک با استفاده از روش‌های پیش‌گفته در جدول ۳ آورده شده است. لازم به ذکر است که مقدار RMSE از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$RMSE=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_i^{org})^2 \ + \ \sum_{i=1}^{n}(y_i-y_i^{org})^2}{n-1}} \qquad (۲۶)$$

با توجه به نتایج به‌دست آمده می‌توانیم نتیجه بگیریم که روش پیشنهادی مقاله دقت بهتری را در نقاط چک به‌دست می‌دهد. نکته مهم قابل ذکر دیگر این است که با استفاده از روش پیشنهادی، مدل ترکیبی به سرعت همگرا می‌شود (با ۲ تکرار) در صورتی که در روش معمول برآورد ضرایب، همان‌طور که درشکل ۱۲ مشاهده می‌شود تعداد تکرارهای ما به مراتب بیشتر بوده و سرعت همگرایی مدل بسیار کم است.

موضوع جالب دیگر این که استفاده از الگوریتم پایدارسازی تیخونوف در تکرارهای متوالی حل مدل به صورت ترکیبی، تعداد تکرارها را به مقدار قابل توجهی کاهش می‌دهد؛ یعنی در مقایسه بین حالت‌های ۳ و ۵ تعداد تکرارهای مورد نیاز برای همگرایی مدل در حالت ۵ بسیار کمتر از حالت ۳ است.

۷ نتیجه گیری

در این مقاله حالت‌های متفاوت سرشکنی مدل توابع گویا برای برآورد ضرایب معادلات گویا مورد بررسی قرار گرفت و روش ترکیبی پایدارسازی‌شده علاوه بر دقت بهتر، به تکرارهای بسیار در برآورد ضرایب نیاز دارد یعنی سرعت همگرایی مدل پیشنهادی به مراتب بهتر از روش‌های موجود است.

تشکروقدردانی

از آقای دکتر سعادت سرشت به خاطر در اختیار قرار دادن نقاط کنترل و همچنین از آقای دکتر عبدالرضا صفری و آقای مهندس سجاد احدزاده به خاطر راهنمایی‌های مفید ایشان سپاس‌گزاری می‌شود.

منابع

الله توکلی، ی.، ۱۳۸۵، مطالعه مسئله انتقال به سمت پایین مشاهدات تفاضلی در تعیین ژئویید، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، گروه مهندسی نقشه‌برداری، دانشکده فنی، دانشگاه تهران.

Dowman, I. and Dolloff, J., 2000, An evaluation of rational functions for photogrammetric restitution, APRS. Photogramm Remote Sens, 254-266.

Greve, C.W., 1992, Image processing on open system. Photogramm Eng. Rem S. **58**(1), 85–89.

Hansen P .C. 1998, " Rank-deficient and discrete ill-posed problems ". SIAM lecture notes, Philadelphia, USA.

Hu Y. and Tao C V, 2001, Updating solutions of the rational function model using additional control points and enhanced photogrammetric processing. Proceedings of Joint ISPRS Workshop on High Resolution Space, 2001. Hanover, 19-21 September 2001.

Hu, Y. and Tao, V., 2002, Understanding the rational function model: methods and applications, GeoICT Lab, York University, 4700 Keele Street, Toronto M3J 1P3, Can.

Jacobsen K. and Büyüksalih G., Topan H., 2005, Geometric models for the Orientation of High Resolution Optical Satellite Sensors, ISPRS Hannover Workshop 2005: High Resolution Earth Imaging for Geospatial Information.

Madani, D., 1999, "A Review of the Role and Impact of Export Processing Zones", Policy Research Working Paper 2238, World Bank, Washington, D.C., USA.

OpenGIS Consortium (OGC), 1999, The OpenGIS Abstract Specification –Topic7: Earth Imagery.

Tao, C. V. and Hu, Y., 2001a, Use of the rational function model for image rectification. Can. J. Rem. S., **27**(6): 593–602.

Tao C. V. and Hu. Y., 2001b, A comprehensive study of the rational function model for photogrammetric processing. Photogramm Eng. Rem. S., **67**(12):1347-1357.

Tikhonov, A. N. and Arsenin, V. Y., 1977, Solutions of Ill-posed Problems. W. H. Winston, Washington, D. C.

Toutin, T. and Cheng, P., 2000, Demystification of Ikonos. Earth Obs. Mag., **9**(7), 17-21.

Valadan Zoej, M.J., Sadeghian, S., 2003, Rigorous and non-rigorous photogrammetric processing of Ikonos Geo Image. Joint Workshop of ISPRS WG I/2, I/5, IC WG II/IV: High Resolution Mapping From Space, 6–8 October 2003, Hannover, Germany.

Valadan Zoej, M.J., Mokhtarzade, M., Mansourian, A., Ebadi, H. and Sadeghian, S., 2007, Rational function optimization using genetic algorithms. Int. J. Appl. Earth Obs. Geoinf, **9**, 403–413