مجلهٔ فیزیک زمین و فضا، دوره ۳۷، شماره ۲، ۱۳۹۰، صفحهٔ ۱۷۱- ۱۹۱

حل عددی شکل پایستار معادلات تراکم‌پذیر دوبُعدی و غیرهیدروستاتیک جو با استفاده از روش مک‌کورمک مرتبه دوم

سرمد قادر[1*]، عباسعلی علی‌اکبری بیدختی[2] و سعید فلاحت[3]

[1] دانشیار، گروه فیزیک فضا، مؤسسهٔ ژئوفیزیک دانشگاه تهران، ایران
[2] استاد، گروه فیزیک فضا، مؤسسهٔ ژئوفیزیک دانشگاه تهران، ایران
[3] دانش‌آموخته کارشناسی‌ارشد، گروه فیزیک فضا، مؤسسهٔ ژئوفیزیک دانشگاه تهران، ایران

(دریافت: ۸۸/۹/۸ ، پذیرش نهایی: ۸۹/۷/۲۸)

چکیده

در پاره‌ای از پدیده‌های جوی اثرات تراکم‌پذیری دارای اهمیت است و همچنین گرادیان‌های شدید همراه با این پدیده‌ها، بررسی دقیق آنها را با درنظر گرفتن حالت غیرهیدروستاتیک امکان‌پذیر می‌کند. کار حاضر به حل عددی شکل پایستار معادلات دوبُعدی، غیرهیدروستاتیک و تراکم‌پذیر جو با استفاده از روش مک‌کورمک مرتبه دوم می‌پردازد. جزئیات مربوط به نحوه گسسته‌سازی معادلات، اعمال شرایط مرزی نابازتابی و مرز سخت و نحوه آغازگری معادلات عرضه شده است. به‌علاوه در کار حاضر یک روش کلی برای گسسته‌سازی بخش‌های دربرگیرنده جملات توازن هیدروستاتیک در معادلات با تعریف یک ضریب جدید آورده شده است. با به‌کارگیری آزمون‌های موردی موجود نتایج حل عددی برای شبیه‌سازی تکامل حباب سرد و گرم و همچنین شبیه‌سازی یک جریان گرانی عرضه می‌شود. نتایج عددی به‌دست آمده و مقایسه کیفی آنها با نتایج موجود مربوط به سایر محققان گویای این مطلب است که روش مک‌کورمک مرتبه دوم، عملکرد مناسبی در شبیه‌سازی معادلات دوبُعدی و تراکم‌پذیر جو، همانند پدیده‌های همرفت عمیق دارد.

واژه‌های کلیدی: روش مک‌کورمک مرتبه دوم، معادلات غیرهیدروستاتیک و تراکم‌پذیر، تکامل یک ترمال در جو خنثی

Numerical solution of conservative form of two-dimensional compressible and non-hydrostatic equations of the atmosphere using second-order MacCormack method

Ghader, S.[1], Aliakbari-Bidokhti, A.[2] and Falahat, S.[3]

[1] Associate Professor, Space Physics Department, Institute of Geophysics, University of Tehran, Iran
[2] Professor, Space Physics Department, Institute of Geophysics, University of Tehran, Iran
[3] Graduate Student, Space Physics Department, Institute of Geophysics, University of Tehran, Iran

(Received: 29 Nov 2009 , Accepted: 20 Oct 2010)

Abstract

This work reports the results of the application of the second-order MacCormack method for numerical solution of the conservative form of two-dimensional non-hydrostatic and fully compressible Navier-Stokes equations governing an inviscid and adiabatic atmosphere.

Various aspects of the computational approach such as discretization of the governing equations for the interior and boundary points, the details of implementation of boundary conditions for different boundary types, i.e., rigid and open boundaries, time step, grid resolution and dissipation are presented.

*نگارنده رابط: تلفن: ۰۲۱-۶۱۱۱۸۳۷۳ دورنگار: ۰۲۱-۸۸۰۰۹۵۶۰ E-mail: sghader@ut.ac.ir

In addition, it is shown that application of the second-order MacCormack scheme to spatial discretization of the source term in the vertical momentum equation of two-dimensional non-hydrostatic and fully compressible Navier-Stokes equations needs special treatment. In other words, the spatial discretization of this source term should be consistent with the hydrostatic equation and must not degrade its balance. The details of the procedure to reach the discretized version of the vertical momentum equation are also presented.

Several well known test cases including evolution of a warm bubble in a neutral atmosphere (in domains with rigid and open boundary conditions), evolution of a cold bubble in a neutral atmosphere (density current benchmark proposed by Straka et al. (1993)) and a gravity current, are used for numerical experiments.

Qualitative and quantitative comparisons indicate the validity of the results and show that the results of the second-order MacCormack scheme are in good agreement with the published results for the evolution of the warm bubble and the reference solution presented by Straka et al.

Key words: MacCormack Scheme, Finite difference, Compressible, Non-hydrostatic, Atmosphere

۱ مقدمه

معمولاً به‌منظور ساده‌سازی دینامیک حرکت‌های جوی مقیاس‌های مورد بررسی در دینامیک شاره‌های ژئوفیزیکی به شاخه‌هایی مانند بزرگ‌مقیاس، میان‌مقیاس و خردمقیاس تقسیم می‌شوند. در مقیاس‌های ذکرشده برای حرکت‌های جوی مناطقی با گرادیان‌های شدید برای متغیرهای دینامیکی حاکم بر شارش‌های جوی وجود دارند که این مناطق در بررسی‌های میان‌مقیاس از اهمیت زیادی برخوردارند. از پدیده‌های مهمی که در میان‌مقیاس با خاصیت گرادیان شدید رخ می‌دهد می‌توان به پدیده‌هایی مانند جبهه‌ها، همرفت، توفان‌های تندری، جریان‌های گرانی مانند جبهه‌های جستی توفان‌های همرفتی اشاره کرد. این پدیده‌ها معمولاً با یک افزایش و یا کاهش شدید در کمیت‌های دینامیکی حاکم بر شاره‌ها مانند افزایش فشار و یا کاهش دما و حرکات بالاسو و پایین‌سو شدید همراه هستند (مثلاً بیدختی و همکاران، ۱۳۸۳). چنین شارش‌هایی با توجه به اهمیت و بزرگی حرکات قائم در آنها برخلاف شارش‌های بزرگ‌مقیاس، معمولاً غیرهیدروستاتیک درنظر گرفته می‌شوند. امکان حل تحلیلی معادلات حاکم بر این شارش‌ها به‌جز در موارد اندک و با درنظر گرفتن فرضیات ساده‌کننده فراوان، امکان‌پذیر نیست و بنابراین برای پیش‌بینی رفتار آینده جو و شبیه‌سازی شارش‌های جوی اغلب از روش‌های عددی استفاده می‌شود.

روش مک‌کورمک که شخصی به‌همین نام در ۱۹۶۹ آن را ابداع کرد (هافمن، ۲۰۰۱)، یکی از روش‌های مناسب برای حل عددی شکل پایستار معادلات حاکم بر شاره‌ها است. این روش در آیرودینامیک و دینامیک گازها کاربردهای فراوان دارد. در تحقیق حاضر حل عددی شکل پایستار معادلات تراکم‌پذیر دوبُعدی و غیرهیدروستاتیک بی‌درو با استفاده از روش تفاضل متناهی مک‌کورمک مرتبه دوم عرضه می‌شود. روش پیش‌گفته، با درگیرکردن تنها دو نقطه در فرمول‌بندی روش، توانایی مناسبی در شبیه‌سازی میدان‌های شارش همراه با ناپیوستگی و گرادیان شدید دارد. همچنین ماهیت دونقطه‌ای این روش باعث ایجاد عملکردی مناسب از لحاظ حجم محاسبات نسبت به سایر روش‌های تفاضل متناهی مرکزی می‌شود که معمولاً از سه نقطه در فرمول‌بندی بهره می‌برند.

تحقیق حاضر با تحقیق صوت گرفته منذز–نونز و کرول (۱۹۹۴) دارای نکات مشترکی است. بااین‌حال چند تفاوت اساسی، کار حاضر را از تحقیق ذکر شده متمایز می‌سازد که از جمله آنها می‌توان به موارد زیر اشاره کرد. در این تحقیق به جزئیات نحوه اعمال شرایط مرزی در مرزهای متفاوت به‌صورت مشروح پرداخته شده است. تعدادی از آزمون‌های مورد استفاده در کار منذز–نونز و کرول (۱۹۹۴) تنها برای تفکیک‌های کم عرضه شده‌اند. در تحقیق حاضر یک روش کلی برای گسسته‌سازی بخش‌های دربرگیرنده جملات توازن هیدروستاتیک با تعریف یک ضریب جدید آورده شده است. نحوه محاسبه ضریب پیش‌گفته در بخش آغازگری معادلات تشریح شده است. همچنین در کار حاضر از آزمون موردی پیشنهاد شدهٔ استراکا و همکاران (۱۹۹۳)، نیز استفاده و نتایج مربوط به آن نیز آورده شده است.

در ادامه ابتدا فرمول‌بندی روش مک‌کورمک دوم به‌طور خلاصه عرضه می‌شود. سپس نتایج مربوط به نحوه اِعمال و چگونگی حل عددی شکل پایستار معادلات تراکم‌پذیر دوبُعدی و غیرهیدروستاتیک جو بی‌دررو با استفاده از روش مک‌کورمک مرتبه دوم آورده می‌شود. همچنین جزئیات مربوط به نحوه به‌دست آوردن و اِعمال شرایط مرزی نابازتابی برای فرمول‌بندی روش مک‌کورمک مرتبه دوم نیز عرضه خواهد شد.

۲ روش مک‌کورمک مرتبه دوم

جزئیات مربوط به نحوه به‌دست آوردن فرمول‌بندی روش مک‌کورمک مرتبه دوم را فلاحت (۱۳۸۷) به‌صورت مشروح ذکر کرده و در اینجا فقط فرمول‌بندی آن به‌صورت خلاصه ذکر می‌شود. برای معرفی این روش صورت کلی شکل پایستار معادلات به‌صورت زیر درنظر گرفته می‌شود:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + F(u) = 0 \qquad (۱)$$

در رابطه بالا u متغیر پیش‌یابی و F تابعی از u است و بسته به اینکه مسئله یک‌بُعدی، دوبُعدی و یا سه‌بُعدی باشد، شامل مشتق اول تابع در راستای محورهای مختصات خواهد بود. شکل گسسته معادله بالا در زمان با استفاده از روش مک‌کورمک به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$u^{*} = u^{n} - \Delta t F(u^{n})\Big|^{F}, \qquad u^{n+1} = \frac{1}{2}(u^{n} + u^{*} - \Delta t F(u^{*})\Big|^{B}) \qquad (۲)$$

همان‌طور که از رابطه پیدا است، روش مک‌کورمک دومرحله‌ای است که در مرحله اول آن یک مقدار موقتی برای کمیت u پیش‌بینی می‌شود (یعنی u^*) و در مرحله دوم مقدار کمیت u در زمان $n+1$ به‌دست آورده می‌شود. در رابطه (۲) n نشان‌دهنده گام زمانی و بالانویس‌های F و B به‌ترتیب نمایانگر عملگرهای پیش‌رو و پس‌رو برای برآورد مشتق مکانی مرتبه اول هستند. در روش مک‌کورمک مرتبه دوم عملگرهای ذکر شده از روش تفاضل متناهی دونقطه‌ای مرتبه اول یک‌سویه به‌دست می‌آیند. برای مثال در مسئله یک‌بُعدی که شامل مشتق اول تابع در راستای محور x است، عملگرهای پیش‌رو و پس‌رو به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$F(u^{n})\Big|_{i}^{F} = \frac{F_{i+1}^{n} - F_{i}^{n}}{\Delta x}, \qquad F(u^{*})\Big|_{i}^{B} = \frac{F_{i}^{*} - F_{i-1}^{*}}{\Delta x} \qquad (۳)$$

که در رابطه بالا از تعاریف $F^{n} = F(u^{n})$ و $F^{*} = F(u^{*})$ استفاده شده است.

۲–۱ بررسی دقت

بررسی دقت روش مک‌کورمک مرتبه دوم در مقایسه با روش‌های مرتبه دوم مرکزی همراه با روش‌های گوناگون گسسته‌سازی زمانی مانند لیپ‌فراگ را فلاحت (۱۳۸۷)

عملی ساخته است. در این بررسی از روش‌های پیش‌گفته برای حل دو معادله مدل یک‌بُعدی یعنی معادلات فرارفت و برگرز ناوُشکسان که دارای حل تحلیلی هستند، استفاده شده است. بررسی صورت گرفته برای مسائل مدل با حل تحلیلی نشان می‌دهد که هنگام حضور ناپیوستگی در میدان حل روش مک‌کورمک مرتبه دوم نسبت به روش‌های تفاضل متناهی مرکزی عملکرد بهتری دارد. البته برای میدان‌های شارش هموار (بدون حضور ناپیوستگی) نیز روش پیش‌گفته با توجه به ماهیت دونقطه‌ای خود، علاوه بر تأمین دقت مناسب، از لحاظ حجم محاسبات نیز عملکرد بسیار مناسبی دارد.

۳ گسسته‌سازی معادلات حاکم

در این بخش به نحوه گسسته‌سازی شکل پایستار معادلات تراکم‌پذیر دوبُعدی و غیرهیدروستاتیک جو بی‌درروی خشک با استفاده از روش تفاضل متناهی مک‌کورمک مرتبه دوم پرداخته می‌شود.

۳-۱ معادلات حاکم

در تحقیق حاضر از معادلات ناویر–استوکس در دو بُعد و در صفحه $x-z$ که در آنها از تغییرات متغیرها در راستای محور y صرف‌نظر می‌شود، بدون درنظر گرفتن اثر چرخش برای شرایط ناوُشکسان، بی‌درروی خشک و تراکم‌پذیر استفاده شده است. دستگاه معادلات ذکر شده در چنین حالتی که به معادلات اویلر معروف است (دورن ۱۹۹۹) از چهار معادله به نام‌های معادلات تکانه در راستاهای افقی و قائم، معادله پیوستگی و پایستگی دمای پتانسیلی تشکیل شده است. این چهار معادله به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+w\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}-g$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\vec{U})=0$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t}+u\frac{\partial \theta}{\partial x}+w\frac{\partial \theta}{\partial z}=0$$

(۴)

در این معادلات ρ معرف چگالی، u مولفه افقی سرعت، w مولفه قائم سرعت، $\vec{U}=(u,w)^T$ بُردار سرعت که در آن T معرف ترانهاده، p فشار، g شتاب گرانی و θ معرف دمای پتانسیلی هستند. دمای پتانسیلی برای یک بسته هوا با فشار p و دمای T با رابطه زیر بیان می‌شود:

$$\theta=T\left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{R_d}{C_P}} \tag{۵}$$

در رابطه بالا، $p_0(=1000\,\text{hPa})$ معرف فشار در تراز مرجع، C_P ظرفیت گرمایی ویژه گاز در فشار ثابت و R_d ثابت گاز برای هوای خشک است. همان‌طور که در معادلات (۴) مشاهده می‌شود تعداد متغیرهای وابسته که همان p، θ، ρ، u و w هستند از تعداد معادلات بیشترند. برای رسیدن به یک دستگاه معادلات بسته به یک رابطه کمکی نیاز است. این رابطه همان رابطه دمای پتانسیلی (۵) است که با استفاده از معادله حالت گاز کامل $p=\rho R_d T$ به شکل زیر بازنویسی می‌شود:

$$p=p_0\left(\frac{\rho\theta R_d}{p_0}\right)^{\frac{C_P}{C_V}} \tag{۶}$$

در رابطه بالا C_v ظرفیت گرمایی گاز در حجم ثابت است.

برای حل عددی معادلات (۴) به کمک روش مک‌کورمک می‌باید از شکل پایستار معادلات ذکر شده استفاده کرد. شکل پایستار این معادلات را می‌توان به‌صورت بُرداری زیر نوشت:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}+\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x}+\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z}=\mathbf{H} \tag{۷}$$

که در رابطه بالا بُردارهای مربوط به‌صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$\mathbf{V}=(\rho,\rho u,\rho w,\rho\theta)^T$$
$$\mathbf{E}=(u\rho,u\rho u+p,u\rho w,u\rho\theta)^T$$
$$\mathbf{F}=(w\rho,w\rho u,w\rho w+p,w\rho\theta)^T$$
$$\mathbf{H}=(0,0,-\rho g,0)^T \qquad (۸)$$

کـه در روابـط بـالا T معـرف ترانهـاده یـک مـاتریس می‌باشد.

۳-۲ گسسته‌سازی معادلات حاکم به کمک روش مک‌کورمک مرتبه دوم

اگر از روش مک‌کورمک بـرای حـل عـددی معادلـه (۷) استفاده شود، شکل گسسته رابطه فوق مشتمل بر دو مرحله پیشگو و مصحح به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\mathrm{V}^*_{i,k}=\mathrm{V}^n_{i,k}-\Delta t\left.\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial x}\right|^F_{i,k}-\Delta t\left.\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z}\right|^B_{i,k}+\Delta t\left[\alpha_{k,k-۱}\mathrm{H}^n_{i,k}+(۱-\alpha_{k,k-۱})\mathrm{H}^n_{i,k-۱}\right]$$

(۹) مرحله پیشگو

$$\mathrm{V}^{n+۱}_{i,k}=\frac{۱}{۲}\left[\mathrm{V}^n_{i,k}+\mathrm{V}^*_{i,k}-\Delta t\left.\frac{\partial \mathrm{E}^*}{\partial x}\right|^B_{i,k}-\Delta t\left.\frac{\partial \mathrm{F}^*}{\partial z}\right|^F_{i,k}+\Delta t\left(\alpha_{k,k+۱}\mathrm{H}^*_{i,k}+(۱-\alpha_{k,k+۱})\mathrm{H}^*_{i,k+۱}\right)\right]$$

(۱۰) مرحله مصحح

که در روابط بالا ضرایب $\alpha_{k,k-1}$ و $\alpha_{k,k+1}$ برای تعیین چگالی یک لایه از چگالی دو تراز متوالی تشکیل‌دهنده آن لایه، مورد استفاده قرار گرفته‌اند. این ضرایب در تحقیق حاضر برای حل عددی معادلات تراکم‌پذیر و غیرهیدروستاتیک که از عملگرهای ضمنی پیش‌رو و پس‌رو در حل عددی بهره می‌برند، معرفی می‌شوند. فلسفه انتخاب این ضرایب و جزئیات دقیق ریاضی مربوط به محاسبه این ضرایب به‌طور مشروح در مبحث مربوط به آغازگری مدل آمده است. با وجود این ذکر این نکته در اینجا ضرورت دارد که جمله دربردارنده چگالی در معادلات حاکم و یا به‌عبارتِ‌دیگر متغیر بُرداری H، یکی از جمله‌های کلیدی در حل عددی معادلات غیرهیدروستاتیک و تراکم‌پذیر است. این جمله که از نظر دینامیکی، جفت‌شدگی با عبارت $\frac{\partial p}{\partial z}$ و یا به عبارت دیگر همان گرادیان فشار در راستای قائم دارد، در واقع گذار بین حالت هیدروستاتیک و غیرهیدروستاتیک را بیان می‌کند.

همان‌گونه که در رابطه (۹) مربوط به مرحله پیشگو روش مک‌کورمک مشاهده می‌شود، برای برآورد مشتق مرتبه اول متغیرهای بُرداری E و F به‌ترتیب از عملگرهای پیش‌رو و پس‌رو استفاده شده است. در مقابل برخلاف مرحله پیشگو در مرحله مصحح در رابطه (۱۰) برای برآورد مشتق متغیرهای بُرداری E^* و F^* به‌ترتیب از عملگرهای پس‌رو و پیش‌رو استفاده شده است. چنین ترکیب جایگشتی از عملگرها که بدان اشاره شد، با نماد FB/BF نام‌گذاری می‌شود. در اینجا باید به یکی از مهم‌ترین نکاتی که در هنگام استفاده از طرحواره مک‌کورمک می‌باید رعایت شود، اشاره کرد. چون عملگرهای پیش‌رو و پس‌رو عملگرهای یک‌سویه‌اند، بنابراین برای حفظ تقارن در میدان حل عددی در عمل بهتر است که هنگام حل عددی علاوه بر جای‌گشت FB/BF از جای‌گشت‌های BF/FB، FF/BB و BB/FF برای گام‌های زمانی متوالی استفاده شود که این نکته در هنگام حل عددی معادلات در تحقیق حاضر رعایت شده است.

با توجه به اینکه هنگام انتگرال‌گیری شکل اویلری معادلات حاکم بر شاره ناپایداری غیرخطی به‌دلیل خطای دگرنامیدن ناشی از اندرکنش‌های غیرخطی به‌وجود می‌آید، می‌باید این ناپایداری غیرخطی به‌وجود آمده با

استفاده یک ابزار مناسب عددی مانند پالایه یا اتلاف مصنوعی کنترل شود. در کار حاضر برای جلوگیری از ناپایداری غیرخطی در حل عددی معادلات تراکم‌پذیر دوبُعدی و غیرهیدروستاتیک جو بی‌درروی خشک از اتلاف مصنوعی استفاده شده است. اگرچه طرحواره مک‌کورمک دارای یک میرایی ذاتی است و این میرایی می‌تواند بخشی از اندرکنش‌های غیرخطی را کنترل کند، باوجوداین با توجه به پیچیدگی میدان شاره در شارش‌های غیرهیدروستاتیک و تراکم‌پذیر دوبُعدی، استفاده از عبارت‌های اتلافی برای جلوگیری از ناپایداری غیرخطی لازم و ضروری است. جمله اتلافی که در تحقیق حاضر برای حل عددی مسئله معادلات تراکم‌پذیر دوبُعدی و غیرهیدروستاتیک جو بی‌درروی خشک به‌کار رفته است، با متغیر بُرداری زیر نمایش داده می‌شود:

$$\mathbf{D} = (0, \nu\nabla \cdot \rho\nabla u, \nu\nabla \cdot \rho\nabla w, \nu\nabla \cdot \rho\nabla \theta)^T \tag{11}$$

که در آن ν پارامتری است که با آزمایش عددی به‌دست می‌آید و همچنین مقدار آن به تفکیک انتخاب شده در حل عددی نیز بستگی دارد. در حل عددی معادلات تراکم‌پذیر دوبُعدی و غیرهیدروستاتیک جو بی‌درروی خشک با استفاده از روش مک‌کورمک، متغیر بُرداری D به‌سمت راست رابطه (۷) اضافه می‌شود.

۴ حل عددی معادلات

در این قسمت به نتایج حل عددی شکل پایستار معادلات حاکم با استفاده از روش مک‌کورمک مرتبه دوم پرداخته می‌شود. برای حل عددی از چند آزمون موردی (test case) که اغلب از سوی محققان مورد استفاده قرار می‌گیرند، استفاده شده است. ابتدا پیش از ورود به بحث اصلی نکاتی در مورد شرایط مرزی و نحوه آغازگری معادلات ذکر می‌شود و در ادامه به نتایج حل عددی پرداخته خواهد شد.

۴-۱ شرایط مرزی

هندسه انتخاب شده برای حل عددی معادلات تراکم‌پذیر و غیرهیدروستاتیک جو حوزه‌ای مستطیل‌شکل در صفحه $\mathrm{x-z}$ است. فرض می‌شود که مانند جو واقعی مرز پایین حوزه محاسباتی ذکر شده، زمین و یا به‌عبارتِ‌دیگر مرز سخت باشد که مولفه عمودی سرعت در این مرز یعنی سرعت قائم، صفر خواهد بود. سه مرز دیگر یعنی مرزهای کناری و بالا، مرز باز (نابازتابی) انتخاب می‌شوند. مرز باز به این معنی است که امواج به وجود آمده در حوزه، مانند موج صوتی بتوانند حوزه را بدون اینکه اثری بر شرایط داخل آن بگذارند، ترک کنند. چنین تعریف و دیدگاهی از مرز باز در جو واقعی می‌تواند درست باشد ولی باید این نکته را درنظر گرفت که در هنگام حل عددی معادلات حاکم این مرزهای فیزیکی می‌باید به مرزهای محاسباتی تبدیل شوند و یا به‌عبارتِ‌دیگر از نظر عددی و محاسباتی محدود می‌شوند. شبیه‌سازی مرزهای باز و اثرات بازتاب و عبور امواج از این مرزها مسئله بسیار مهمی است که در تحقیق حاضر به آن پرداخته شده است. در مدل‌هایی که در آنها از معادلات تراکم‌پذیر برای شبیه‌سازی جو استفاده می‌شود، امواج صوتی سریع‌ترین امواجی هستند که در زمان کوتاهی، در حدود یک دقیقه، مسافت زیادی در حدود $18\ \mathrm{km}$ را می‌پیمایند. برای جلوگیری از به وجود آمدن مشکلاتی مانند بازتاب امواج صوتی از مرزهای کناری و بالا در حل عددی، شرایط مرزی باید به‌گونه‌ای انتخاب شود که بازتاب امواج در مرزها به حداقل خود برسد. توجه به تجارب عددی که در تحقیق حاضر و همچنین تحقیق مندز–نونز و کرول (۱۹۹۴) به‌دست آمده است، نشان می‌دهد که در طرحواره مک‌کورمک با درنظر گرفتن شرایط گرادیان شار صفر برای مرزهای کناری و بالا، مشکل بازتاب امواج صوتی از مرزها از بین می‌رود و به‌عبارتِ‌دیگر مرزها نابازتابی می‌شوند.

اکنون با توجه نکات ذکر شده، روابط مرزی برای مرزهای کناری و بالا برای مرحله پیشگو و مصحح روش مک‌کورمک نوشته می‌شود. شرایط مرزی گرادیان شار صفر به‌معنی صفر بودن مشتق متغیرهای بُرداری در جهت عمود به بیرون مرزها است. به‌عبارتِ‌دیگر عملگر پیش‌رو در مرز سمت راست و عملگر پس‌رو در مرز سمت چپ برای برآورد مشتق مرتبه اول در راستای x و عملگر پیش‌رو در مرز بالا برای برآورد مشتق مرتبه اول در راستای z برابر صفر است. در ادامه نحوه اِعمال این شرایط مرزی به‌صورت خلاصه برای هریک از متغیرهای بُرداری درگیر تشریح می‌شود. برای مثال مرز سمت راست یعنی ($i = m$ که m تعداد نقاط شبکه در راستای محور x است) درنظر گرفته می‌شود. شکل گسسته معادلات در رابطه (۷) در این مرز به‌صورت زیر است:

$$\mathrm{V}^{*}_{\mathrm{m,k}} = \mathrm{V}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{m,k}} - \Delta\mathrm{t}\left.\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{z}}\right|^{\mathrm{B}}_{\mathrm{m,k}} + \Delta\mathrm{t}\begin{bmatrix}\alpha_{\mathrm{k,k-۱}}\mathrm{H}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{m,k}} + \\ (۱-\alpha_{\mathrm{k,k-۱}})\mathrm{H}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{m,k-۱}}\end{bmatrix}$$

(۱۲) مرحله پیشگو

$$\mathbf{V}^{n+1}_{m,k} = \frac{1}{2}\left[\mathbf{V}^{n}_{m,k} + \mathbf{V}^{*}_{m,k} - \Delta t\left.\frac{\partial \mathbf{E}^{*}}{\partial x}\right|^{B}_{m,k} - \Delta t\left.\frac{\partial \mathbf{F}^{*}}{\partial z}\right|^{F}_{m,k} + \Delta t\left(\alpha_{k,k+1}\mathbf{H}^{*}_{m,k} + (1-\alpha_{k,k+1})\mathbf{H}^{*}_{m,k+1}\right)\right]$$

(۱۳) مرحله مصحح

همان‌گونه که در رابطه (۱۲) مشاهده می‌شود، برای عبارت $\left.\frac{\partial \mathbf{E}^{n}}{\partial x}\right|^{n}_{m,k}$ در مرحله پیشگو به‌علت شرط گرادیان شار صفر مقدار صفر درنظر گرفته شده است. روابط مرزی برای مرز سمت چپ (i=1) مشابه مراحل محاسبه‌ای صورت گرفته برای مرز سمت راست به‌دست می‌آید. برای اِعمال شرط گرادیان صفر برای مرز بالا $(k = N)$ که مشابه با مرزهای کناری است، ابتدا شکل گسسته معادلات در رابطه (۷) در این مرز به‌صورت زیر درنظر گرفته می‌شود:

$$\mathrm{V}^{*}_{\mathrm{i,N}} = \mathrm{V}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{i,N}} - \Delta\mathrm{t}\left.\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial \mathrm{x}}\right|^{\mathrm{F}}_{\mathrm{i,N}} - \Delta\mathrm{t}\left.\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{z}}\right|^{\mathrm{B}}_{\mathrm{i,N}} + \Delta\mathrm{t}\begin{bmatrix}\alpha_{\mathrm{N,N-۱}}\mathrm{H}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{i,N}} + \\ (۱-\alpha_{\mathrm{N,N-۱}})\mathrm{H}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{i,N-۱}}\end{bmatrix}$$

(۱۴) مرحله پیشگو

$$\mathrm{V}^{\mathrm{n+۱}}_{\mathrm{i,N}} = \frac{۱}{۲}\left[\mathrm{V}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{i,N}} + \mathrm{V}^{*}_{\mathrm{i,N}} - \Delta\mathrm{t}\left.\frac{\partial \mathrm{E}^{*}}{\partial \mathrm{x}}\right|^{\mathrm{B}}_{\mathrm{i,N}} - \Delta\mathrm{t}\left.\frac{\partial \mathrm{F}^{*}}{\partial \mathrm{z}}\right|^{\mathrm{F}}_{\mathrm{i,N}} + \Delta\mathrm{t}\begin{pmatrix}\alpha_{\mathrm{N,N+۱}}\mathrm{H}^{*}_{\mathrm{i,N}} + \\ (۱-\alpha_{\mathrm{N,N+۱}})\mathrm{H}^{*}_{\mathrm{i,N+۱}}\end{pmatrix}\right]$$

(۱۵) مرحله مصحح

شرایط مرزی در مرز بالا را می‌توان به‌گونه‌ای انتخاب کرد که توازن هیدروستاتیک بین مرز بالا $(k = N)$ و فضای خارج حوزه $(k > N)$ همواره برقرار باشد و یا به‌عبارتِ‌دیگر رابطه زیر همواره در مرز بالا برقرار باشد:

$$\left.\frac{\partial p}{\partial z}\right|^{F}_{i,N} = -\rho g \qquad (۱۶)$$

ذکر این نکته ضرورت دارد که چگالی به‌کار رفته در رابطه بالا، چگالی یک لایه از شاره است و نباید این مفهوم با چگالی یک نقطه در طرحواره تفاضل متناهی اشتباه شود. همچنین هر لایه شاره از دو تراز تشکیل شده است. بنابراین در ساده‌ترین شکل ممکن می‌توان چگالی یک لایه را به صورت ترکیب خطی از چگالی دو تراز تشکیل‌دهنده آن تقریب زد و این موضوعی است که در بخش آغازگری بیشتر به‌آن پرداخته خواهد شد. برای اِعمال شرط گرادیان صفر در مرز بالا، بُردار شار F^{*} در مرحله مصحح که شامل جمله فشار p است به صورت زیر به دو متغیر بُرداری تجزیه می‌شود:

$$\mathbf{F}^{*} = \mathbf{F}^{*}_{1} + \mathbf{F}^{*}_{2} \qquad (۱۷)$$

که در روابط بالا متغیرهای بُرداری F^{*}_{1} و F^{*}_{2} به‌صورت زیر هستند:

$$\mathbf{F}^{*}_{1} = (w^{*}\rho^{*}, w^{*}\rho^{*}u^{*}, w^{*}\rho^{*}w^{*}, w^{*}\rho^{*}\theta^{*})^{T}$$
$$\mathbf{F}^{*}_{2} = (0, 0, p^{*}, 0)^{T}$$

(۱۸)

اگر از تجزیه بُرداری فوق در رابطه (۱۵) استفاده شود، رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$\mathbf{V}_{i,N}^{n+1} = \frac{1}{2}\left[\mathbf{V}_{i,N}^{n} + \mathbf{V}_{i,N}^{*} - \Delta t \left.\frac{\partial \mathbf{E}^*}{\partial x}\right|_{i,N}^{B} - \Delta t \left.\frac{\partial \mathbf{F}_1{}^*}{\partial z}\right|_{i,N}^{F} - \Delta t \left.\frac{\partial \mathbf{F}_2{}^*}{\partial z}\right|_{i,N}^{F} + \Delta t\left(\alpha_{N,N+1}\mathbf{H}_{i,N}^{*} + (1-\alpha_{N,N+1})\mathbf{H}_{i,N+1}^{*}\right)\right]$$

(۱۹) مرحله مصحح

در این مرحله از دو شرط مرزی زیر که به ترتیب شرایط مرزی گرادیان صفر برای متغیر بُرداری F_1^* و توازن هیدروستاتیک برای متغیر بُرداری F_2^* استفاده می‌شود.

$$\left.\frac{\partial \mathbf{F}_1{}^*}{\partial z}\right|_{i,N}^{F} = 0$$

$$\left.\frac{\partial \mathbf{F}_2{}^*}{\partial z}\right|_{i,N}^{F} = \Delta t\left(\alpha_{N,N+1}\mathbf{H}_{i,N}^{*} + (1-\alpha_{N,N+1})\mathbf{H}_{i,N+1}^{*}\right)$$

(۲۰)

با اِعمال دو رابطه بالا به روابط (۱۴) و (۱۵) مربوط به مرز بالا، شکل گسسته معادلات در این مرز به‌دست می‌آید. اکنون نوبت آن می‌رسد که در مورد مرز پایین مطالبی آورده شود. مهم‌ترین ویژگی مرز پایین که همان زمین و از نوع مرز سخت است، صفر بودن مولفه عمودی سرعت بر آن است. علاوه بر قید ذکر شده از دو قید زیر مطابق با آنچه که للی (۱۹۶۲) بیان کرده است و به‌ترتیب معرف قید وُشکسان و عایق برای مرز سخت است، برای مرز پایین (k=1) استفاده می‌شود:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{i,1} = 0$$

$$\left.\frac{\partial \theta}{\partial z}\right|_{i,1} = 0 \qquad (۲۱)$$

تجارب عددی که فلاحت (۱۳۸۷) و همچنین گاتلیب و ترکل (۱۹۸۷) به‌دست آورده‌اند، نشان می‌دهد که از رابطه زیر که در واقع برون‌یابی خطی از نقاط داخلی حوزه است، می‌توان برای محاسبه کمیت‌های میدان در مرز پایین استفاده کرد.

$$\mathbf{V}_{i,1}^{n} = 2\mathbf{V}_{i,2}^{n} - \mathbf{V}_{i,3}^{n} \qquad (۲۲)$$

ذکر این نکته ضرورت دارد که در کار حاضر از رابطه بالا برای همهٔ مرزهای سخت استفاده شده است.

۴-۲ آغازگری

با توجه به اینکه دستگاه معادلات دیفرانسیلی انتخاب شده در تحقیق حاضر، معادلات اویلر ناپایا است، می‌باید برای مقادیر مجهول در این دستگاه معادلات که شامل متغیرهای p ،θ ،w ،u ،ρ هستند، مقادیر اولیه انتخاب شود. در شبیه‌سازی جو غیرهیدروستاتیک در دو حالت تراکم‌پذیر و تراکم‌ناپذیر عموماً جو در زمان نخست در حالت سکون و در توازن کامل هیدروستاتیک درنظر گرفته می‌شود. بنابراین اگر شرایط اولیه و یا رفتار جو در آغاز حل عددی به‌صورت جو ساکن و در توازن هیدروستاتیک مطلق باشد، آن‌گاه کمیت‌های میدان اولیه به‌صورت زیرند:

$$u = 0,\ w = 0,\ \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \qquad (۲۳)$$

که رابطه سوم در بالا معرف توازن هیدروستاتیک است. فرایند آغازگری بدین ترتیب است که از فشار سطح زمین که با $\mathrm{p_s}$ نشان داده می‌شود درحکم ورودی اولیه در مدل استفاده می‌شود. فشار سطح زمین معمولاً در محاسبات عددی برابر با یک مقدار مانند $\mathrm{p_s}$=1000 hPa درنظر گرفته می‌شود. سپس از میدان دمای پتانسیل اولیه درحکم ورودی دوم در مدل استفاده می‌شود. هدف در آغازگری مدل این است که با دانستن میدان دمای پتانسیل و فشار سطح زمین، فشار در همهٔ حوزه محاسباتی به‌دست آید و سپس با دانستن میدان فشار در کل حوزه با استفاده از رابطه دمای پتانسیلی چگالی در کل حوزه به‌دست آید. برای تحقق این هدف، تابع اکسنر (Exner Function) بی‌بُعد که با رابطه زیر بیان می‌شود مورد استفاده قرار

می‌گیرد:

$$\pi = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{R_d}{C_P}} \qquad (۲۴)$$

که در آن فشار مرجع p_0=1000 hPa است. اگر از تابع اکسنر نسبت به ارتفاع قائم مشتق گرفته شود و از معادله هیدروستاتیک استفاده شود، رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{d\pi}{dz} = -\frac{g}{C_p\theta(z)} \qquad (۲۵)$$

در این مرحله می‌باید از رابطه بالا به‌طور عددی بین دو تراز z_1 و z_2 با دو دمای پتانسیل متناظر $\theta(z_1)$ و $\theta(z_2)$ انتگرال‌گیری شود. مطابق با روشی که کرول و همکاران (۱۹۸۷) بیان کرده‌اند، نتیجه این انتگرال‌گیری با روابط زیر بیان می‌شود:

$$\pi_2 - \pi_1 = \begin{cases} -\dfrac{g}{C_p\theta}(z_2 - z_1), & \theta(z_1) = \theta(z_2) \\ -\dfrac{g(z_2 - z_1)}{C_p(\theta(z_2) - \theta(z_1))}\ln\left(\dfrac{\theta(z_2)}{\theta(z_1)}\right), & \theta(z_1) \neq \theta(z_2) \end{cases} \qquad (۲۶)$$

که در آن π_1 و π_2 به‌ترتیب توابع اکسنر ترازهای z_1 و z_2 هستند. با معلوم بودن فشار سطح p_s از رابطه (۲۴) تابع اکسنر سطح زمین پیدا می‌شود. سپس از رابطه (۲۶) و با توجه به نیم‌رخ دمای پتانسیل در هر لایه، توابع اکسنر ترازهای بعدی از روی تابع اکسنر سطح زمین پیدا می‌شود. اکنون با توجه به اینکه تابع اکسنر در همهٔ ترازها معلوم است، فشار در همهٔ ترازها از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

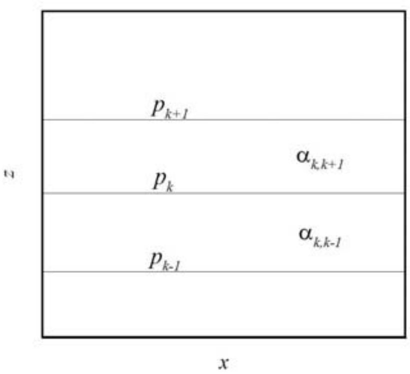
$$p = p_0\pi^{\frac{C_p}{R_d}} \qquad (۲۷)$$

اکنون میدان فشار p و دمای پتانسیل θ در همهٔ نقاط حوزه معلوم است. تنها میدان باقی‌مانده میدان چگالی ρ است که این میدان نیز به آسانی از رابطه دمای پتانسیلی با دانستن میدان دمای پتانسیلی و میدان فشار با رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$\rho = \frac{p}{R_d\theta}\left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{R_d}{C_P}} \qquad (۲۸)$$

در اینجا لازم است در ارتباط با ضرایب $\alpha_{k,k+1}$ و $\alpha_{k,k-1}$ که در بخش گسسته‌سازی معادلات حاکم با استفاده از روش مک‌کورمک به آن اشاره شد، مطالبی آورده شود. مطابق با آنچه که للی (۱۹۶۲) بیان کرده است، در حل عددی شکل پایستار معادلات تراکم‌پذیر جو، بردار شامل چگالی یعنی H در رابطه (۷) در شکل گسسته آن را می‌باید به‌صورت ترکیب خطی دو تراز و یا چند تراز متوالی نوشت. در شکل ۱ ترازهای متوالی $k+1$، k و $k-1$ با فشارهای مربوط به هر تراز نشان داده شده است. در تحقیق حاضر از ترکیب خطی دو تراز متوالی برای بیان شکل گسسته بردار H استفاده شده است به‌طوری‌که روابط زیر برای شکل گسسته رابطه توازن هیدروستاتیک برای دو تراز متوالی k و $k+1$ به‌کار می‌رود:

$$\left.\frac{\partial p}{\partial z}\right|_{i,k}^{F} = -g\left(\alpha_{k,k+1}\rho_k + (1-\alpha_{k,k+1})\rho_{k+1}\right)$$
$$\left.\frac{\partial p}{\partial z}\right|_{i,k+1}^{B} = -g\left(\alpha_{k,k+1}\rho_{k+1} + (1-\alpha_{k,k+1})\rho_k\right) \qquad (۲۹)$$



شکل ۱. ترازهای متوالی $k-1$، k و $k+1$ با فشارهای مربوطه. ضرایب $\alpha_{k,k+1}$ و $\alpha_{k,k-1}$ به‌ترتیب برای برآورد چگالی لایه‌های شامل ترازهای ذکر شده در رابطه توازن هیدروستاتیک به‌کار می‌روند.

همان‌طور که در رابطه بالا مشاهده می‌شود مجموع ضرایب چگالی دو تراز متوالی برابر با یک است که این معرف سازگاری با رابطه هیدروستاتیک یعنی رابطه (۲۳) است. اکنون می‌باید با دانستن میدان فشار و گرادیان آن در راستای محور قائم رابطه‌ای برای ضرایب $\alpha_{k,k+1}$ به‌دست آورد. با اندکی عملیات جبری روی رابطه بالا که جزییات دقیق‌تر آن را فلاحت (۱۳۸۷) بیان کرده است، عبارت زیر برای ضریب $\alpha_{k,k+1}$ به‌دست می‌آید:

$$\alpha_{k,k+1}=\frac{-\dfrac{\left.\dfrac{\partial p}{\partial z}\right|_{i,k+1}^{B}}{g}-\rho_k}{-\dfrac{\left.\dfrac{\partial p}{\partial z}\right|_{i,k}^{F}}{g}-\dfrac{\left.\dfrac{\partial p}{\partial z}\right|_{i,k+1}^{B}}{g}-2\rho_k} \qquad (۳۰)$$

برای درک بیشتر از مراحل محاسباتی ذکر شده در بالا ، برای نمونه عملگرهای پیش‌رو و پس‌رو مرتبه اول برای محاسبه گرادیان فشار در راستای قائم به‌صورت زیر درنظر گرفته می‌شود:

$$\left.\frac{\partial p}{\partial z}\right|_{i,k}^{F}=\frac{p_{i,k+1}-p_{i,k}}{\Delta z},\quad \left.\frac{\partial p}{\partial z}\right|_{i,k+1}^{B}=\frac{p_{i,k+1}-p_{i,k}}{\Delta z} \qquad (۳۱)$$

دو عمگر موجود در روابط بالا، در واقع همان عملگرهای پیش‌رو و پس‌رو هستند که در روش مک‌کورمک مرتبه دوم برای برآورد مشتق مرتبه اول مورد استفاده قرار می‌گیرند. نکته جالبی که در روابط بالا دیده می‌شود این است که عملگر پیش‌رو در تراز k برابر با عملگر پس‌رو در تراز k+1 است. با جایگذاری دو رابطه بالا در رابطه ضریب $\alpha_{k,k+1}$ که برای برآورد چگالی یک لایه به‌کار می‌رود، برابر با مقدار زیر می‌شود:

$$\alpha_{k,k+1}=\frac{1}{2} \qquad (۳۲)$$

رابطه بالا معرف این حقیقت است که هنگامی که از عملگرهای پیش‌رو و پس‌رو مرتبه اول موجود در رابطه برای به‌دست آوردن گرادیان فشار در راستای قائم استفاده می‌شود، چگالی هر لایه را می‌توان با میانگین چگالی دو تراز تشکیل دهنده آن لایه به‌دست آورد.

در ادامه به نتایج حاصل از حل عددی معادلات تراکم‌پذیر و ناوُشکسان جو با استفاده از روش مک‌کورمک مرتبه دوم پرداخته می‌شود. برای درک توانمندی روش‌های عددی مورد استفاده در حل معادلات جو غیرهیدروستاتیک معمولاً از پدیده‌های گوناگونی استفاده می‌شود. برای مثال شبیه‌سازی تکامل حباب سرد (Cold Bubble) و گرم (Warm Bubble) و همچنین شبیه‌سازی یک جریان گرانی نمونه‌هایی از پدیده‌های استاندارد مورد استفاده در شبیه‌سازی جو غیرهیدروستاتیک برای بررسی عملکرد روش عددی انتخاب شده در حل معادلات حاکم بر جو ذکر شده‌اند. از میان پدیده‌های پیش‌گفته، پدیده تکامل یک حباب گرم، یک حباب سرد و جریان گرانی در جو در شرایط خنثی با استفاده از حل عددی معادلات تراکم‌پذیر و غیرهیدروستاتیک جو به روش مک‌کورمک مرتبه دوم مورد تحلیل قرار می‌گیرد. حباب گرم یا سرد یک ترمال از نوع همرفت شناوری از چشمه آنی است، به‌طوری‌که چگالی شاره با محیط متفاوت و محیط خیلی بزرگ‌تر از ابعاد چشمه است. به‌عبارتِ‌دیگر ترمال‌ها چشمه‌های شناوری ناپیوسته‌ای هستند که به‌صورت توده‌های شناوری ناگهان آزاد می‌شوند، در محیط به‌طور قائم حرکت می‌کنند و دارای حرکتی به‌صورت ستونی و قارچی هستند. پدیده ترمال به دو صورت عددی و آزمایشگاهی سالیان دراز است که نظر دانشمندان و محققان را به خود جلب کرده است؛ از آن جمله می‌توان به کارهای للی (۱۹۶۲)، تریپلی (۱۹۹۲)، مندز-نونز و کرول (۱۹۹۴) و استراکا و همکاران (۱۹۹۳) و نشعت و لیندرمن (۲۰۰۷) اشاره کرد.

۳-۴ نتایج حل عددی مربوط به حباب گـرم در جـو خنثی

حوزه انتخاب شده برای بررسی تکامل یک حباب گرم در شرایط جوی خنثی یک شبکه مستطیلی با ابعاد 40 km طول و 15 km ارتفاع است. در مورد شرایط مرزی این حوزه محاسباتی در بخش مربوط به شرایط مرزی بحث شد. منظور از شرایط خنثی برای جو این است که آهنگ کاهش دما برای محیط برابر با آهنگ کاهش دمای بی‌دررو است به‌طوری‌که بسامد شناوری برابر با صفر است. به‌عبارتِ‌دیگر گرادیان قائم دمای پتانسیل محیط برابر با صفر است. حباب گرم در چنین شرایطی می‌تواند بدون اینکه از طرف محیط محدودیتی در حرکت آن ایجاد شود، در راستای قائم حرکت کند. برای شبیه‌سازی حباب گرم از پریشیدگی میدان دمای پتانسیلی اولیه استفاده می‌شود. میدان پریشیدگی دمای پتانسیل با تابع زیر تعریف می‌شود.

$$\theta' = 6.6\cos^2\left(\frac{\pi\beta}{2}\right), \quad \beta \le 1 \tag{۳۳}$$

که در آن پارامتر β با رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$\beta = \sqrt{\left(\frac{x-x_c}{x_r}\right)^2 + \left(\frac{z-z_c}{z_r}\right)^2} \tag{۳۴}$$

در رابطه بالا x_r و z_r معرف شعاع‌های حباب در دو راستای x و z هستند و x_c و z_c معرف مختصات مرکز حباب‌اند. در تحقیق حاضر چهار کمیت ذکرشده به‌صورت زیر انتخاب شده‌اند:

$$x_r = 2.5\,\mathrm{km}, z_r = 2.5\,\mathrm{km}, x_c = 20\,\mathrm{km}, z_c = 2.75\,\mathrm{km} \tag{۳۵}$$

به‌عبارتِ‌دیگر حباب در مرکز حوزه محاسباتی قرار دارد و میدان پریشیدگی دمای پتانسیلی به‌صورت دایره است. از نظر محاسباتی پریشیدگی دمای پتانسیلی برای یک ترمال طوری اعمال می‌شود که میدان اولیه فشار دستخوش تغییر و پریشیدگی قرار نگیرد. برای تحقق این هدف می‌باید چگالی پریشیدگی به میدان اولیه طوری اعمال شود که سمت راست رابطه زیر که تابعی از فشار است ثابت بماند:

$$\rho\theta = \frac{p}{R_d}\left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{R_d}{C_P}} \tag{۳۶}$$

که در رابطه بالا میدان دمای پتانسیلی θ از دو بخش پریشیدگی و میانگین که با رابطه زیر بیان می‌شوند، تشکیل شده است:

$$\theta = \theta(z) + \theta'(x,z,t) \tag{۳۷}$$

که در آن $\theta(z)$ مربوط به حالتی است که جو در توازن هیدروستاتیک مطلق قرار دارد. تجربه عددی به‌دست آمده در تحقیق حاضر نشان می‌دهد که اگر نکاتی که در ارتباط با پریشیدگی میدان اولیه چگالی بیان شد در هنگام حل عددی رعایت نشود، یک موج شوک در هنگام حل عددی به‌وجود می‌آید که نتایج حل عددی را با به‌وجود آمدن پریشیدگی زیاد برای متغیرهای میدانی خراب می‌کند. همچنین برای شرایط جوی خنثی که در آن مقدار اولیه $\theta(z)$ با ارتفاع ثابت است، $\theta(z)$ برابر با 300 K در نظر گرفته شده است.

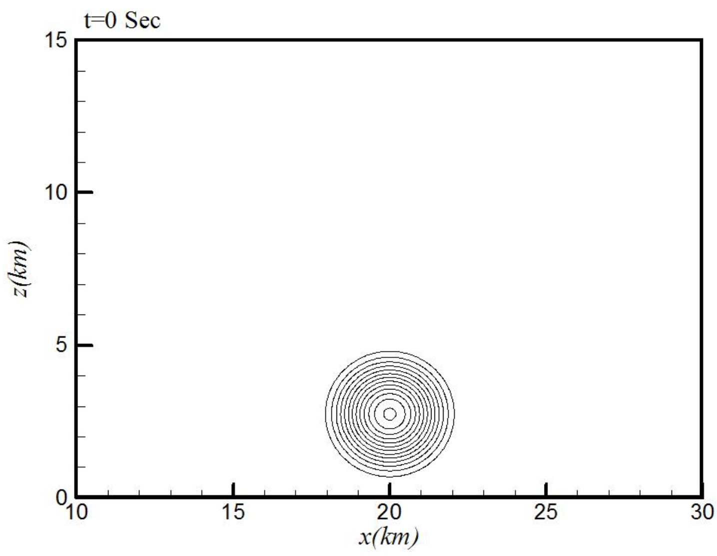
برای شبیه‌سازی عددی حرکت ترمال از تفکیک 301×801 متناظر با فاصله شبکه‌ای یکسان 50 m در دو راستای محور مختصات، استفاده شده است. گام زمانی متناظر با تفکیک ذکر شده از شرط پایداری خطی روش مک‌کورمک مرتبه دوم که فلاحت (۱۳۸۷) مورد بررسی قرار داده است، انتخاب می‌شود. با توجه به اینکه در مدل‌های تراکم‌پذیر جو بزرگ‌ترین سرعت موجود در حوزه، سرعت صوت است، شرط پایداری خطی در تحقیق حاضر برای یک شبکه یکنواخت در دو راستای محور مختصات با رابطه زیر بیان می‌شود:

$$\frac{\sqrt{2}C_s\Delta t}{\Delta x} \le 1 \tag{۳۸}$$

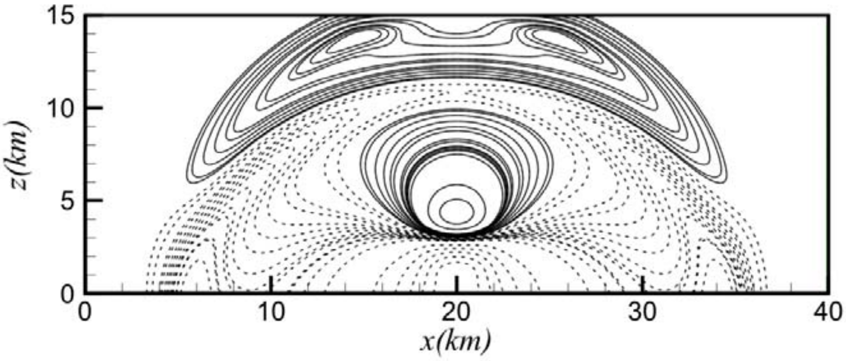
که در آن C_s سرعت صوت در جو خشک و اندازه آن حدود $330\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ است. با توجه به این نکات برای تفکیک 801×301 نقطه از گام زمانی $0.05\,\mathrm{s}$ استفاده شده است. مقدار ν برای این تفکیک در رابطه (۱۱) طبق آزمایش‌های عددی متعدد برابر با مقدار مناسب 5 درنظر گرفته شده است.

در شکل ۲ میدان اولیه پریشیدگی دمای پتانسیل نشان داده شده است. در این شکل پربندهای پریشیدگی دمای پتانسیل در بازه $[0.5\,\mathrm{K}, 6.5\,\mathrm{K}]$ قرار دارند و فاصله بین دو پربند متوالی $0.5\,\mathrm{K}$ است. به‌دلیل اینکه دمای پتانسیلی ترمال بیشتر از محیط است، طبق رابطه (۳۶) چگالی ترمال از چگالی پیرامونش کمتر است، در نتیجه ترمال دارای شناوری مثبت خواهد بود و در راستای قائم حرکت می‌کند. ظهور ناگهانی ترمال که همانند یک انبساط ناگهانی در محیط است، باعث به‌وجود آمدن موج صوتی می‌شود که این موج همان‌گونه که به آن اشاره شد سریع‌ترین امواج در مدل‌های تراکم‌پذیر است. در شکل ۳ میدان پریشیدگی فشار در زمان $45\,\mathrm{s}$ که با استفاده از روش مک‌کورمک به‌دست آمده نشان داده شده است. پریشیدگی‌های مثبت و منفی با جبهه‌های موجی بزرگ کاملاً در شکل نمایان است و این جبهه‌ها با سرعت صوت به‌سمت مرزهای کناری و بالا حرکت می‌کنند. در زمان‌های در حدود $60\,\mathrm{s}$ این امواج به مرزهای کناری و بالا می‌رسند. با رسیدن این امواج به مرزها، بازتابی از این امواج به داخل حوزه محاسباتی مشاهده نشد که بیانگر این مطلب است که شرایط مرزی انتخاب شده برای طرحواره مک‌کورمک و یا با به‌عبارتِ‌دیگر شرط مرزی گرادیان شار صفر باعث نابازتابی شدن مرزها می‌شود (مندز–نونز و کرول، ۱۹۹۴؛ فلاحت، ۱۳۸۷).

با توجه به اینکه طبق رابطه (۳۳) بیشینه پریشیدگی دمای پتانسیل در مرکز حباب قرار دارد، بنابراین مرکز حباب با بیشترین سرعت به‌سمت بالا حرکت می‌کند. بنابراین به‌علت آنکه سرعت حباب در مرکز حباب نسبت به بقیه نقاط بیشتر است، گرادیان دمای پتانسیلی با گذشت زمان افزایش می‌یابد.



شکل ۲. میدان اولیه پریشیدگی دمای پتانسیل در یک شبکه مستطیل‌شکل با تفکیک 801×301. واحدها روی هر دو محور مختصات برحسب کیلومتر هستند. پربندهای هم‌دما در بازه $[0.5\,\mathrm{K}, 6.5\,\mathrm{K}]$ قراردارند و اختلاف بین دو پربند هم‌دمای متوالی $0.5\,\mathrm{K}$ است. درونی‌ترین پربند دارای پریشیدگی دمای پتانسیل $6.5\,\mathrm{K}$ است.



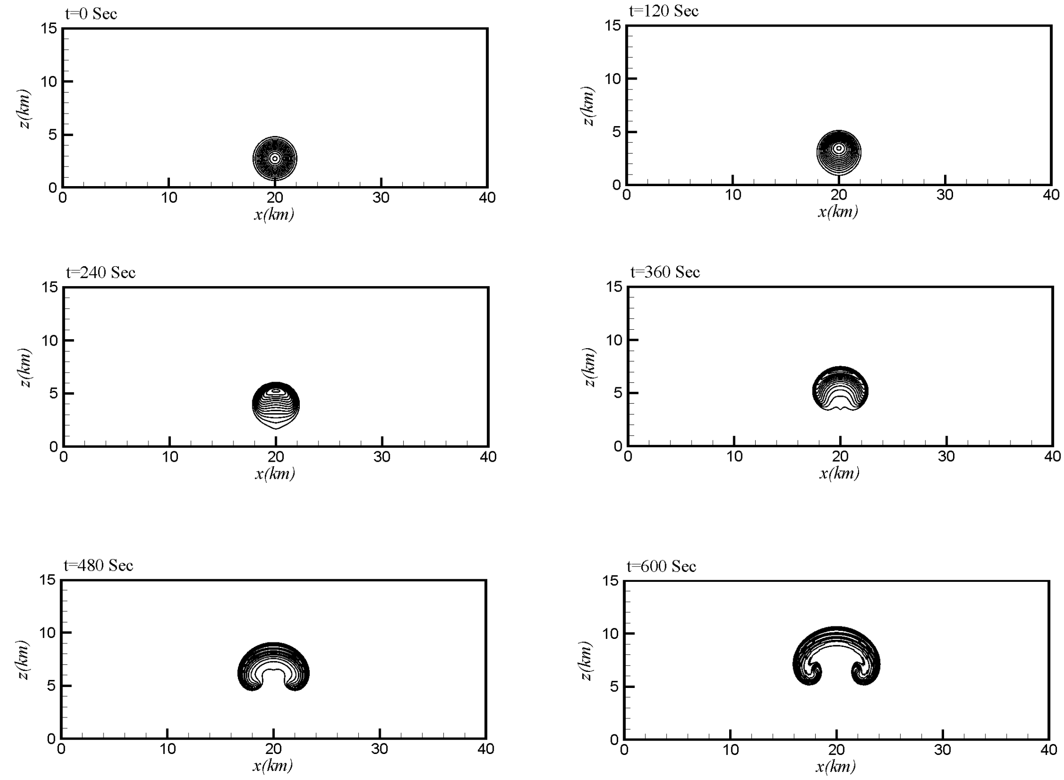
شکل۳. میدان پریشیدگی فشار در زمان $t=45$ s مربوط به روش مک‌کورمک مرتبه دوم که میدان موج صوتی انتشار یافته را نشان می‌دهد. خط‌چین‌ها معرف پریشیدگی منفی هستند.

با حرکت ترمال در راستای قائم، در زیر ترمال یک منطقه کم‌فشار به‌وجود می‌آید که باعث ایجاد یک همگرایی در سطح پایین و در زیر ترمال و همچنین یک واگرایی در بالای حباب گرم می‌شود. در جدول ۱ مقادیر کمینه و بیشینه متغیرهایی میدانی برای حباب گرم در زمان $t=600$ s نشان داده شده است. همان‌طور که در این جدول مشاهده می‌شود مقادیر مثبت و منفی برای میدان‌های سرعت افقی، قائم و پریشیدگی فشار وجود دارد که با توجه به ماهیت حرکت ترمال این مقادیر مثبت و منفی انتظار می‌رود. با وجود این، با توجه به اینکه حرکت ترمال فرایندی بی‌دررو است و در فرایند بی‌دررو دمای پتانسیل کمیتی پایستار است، محدوده تغییرات پریشیدگی دمای پتانسیل برای ترمال با توجه به رابطه (۳۳) می‌باید در بازه $[0 \text{ K}, 6.5 \text{ K}]$ قرار گیرد. همان‌گونه که در جدول ۱ مشاهده می‌شود محدوده تغییرات پریشیدگی دمای پتانسیل حل عددی در بازه $[-0.5305 \text{ K}, 8.7112 \text{ K}]$ قرار دارد که این می‌تواند به‌علت خطای پاشندگی (Dispersion Error) روش مک‌کورمک مرتبه دوم باشد.

در شکل ۴ تحول زمانی میدان پریشیدگی دمای پتانسیل با بازه‌های زمانی 120 s نشان داده شده است. همان‌گونه که در این شکل مشاهده می‌شود با گذشت زمان، گرادیان دمای پتانسیل افزایش می‌یابد و در چنین موقعیتی به‌طورکلی یک طرحواره عددی که قدرت تفکیک زیادی در شبیه‌سازی چنین مناطقی با گرادیان‌های شدید داشته باشد، می‌تواند برتری خود را نسبت به سایر طرحواره‌ها نشان دهد. به‌عبارت‌دیگر در شبیه‌سازی حرکت یک ترمال در تحول زمانی میدان پریشیدگی دمای پتانسیلی دارای اهمیت ویژه است. میدان پریشیدگی دمای پتانسیلی تحت تاثیر میدان سرعت با زمان تغییر شکل پیدا می‌کند و به‌دلیل به‌وجود آمدن گرادیان دمایی در میدان پریشیدگی دمای پتانسیلی، تحول زمانی این میدان نسبت به بقیه متغیرها بیشتر مورد توجه قرار می‌گیرد.

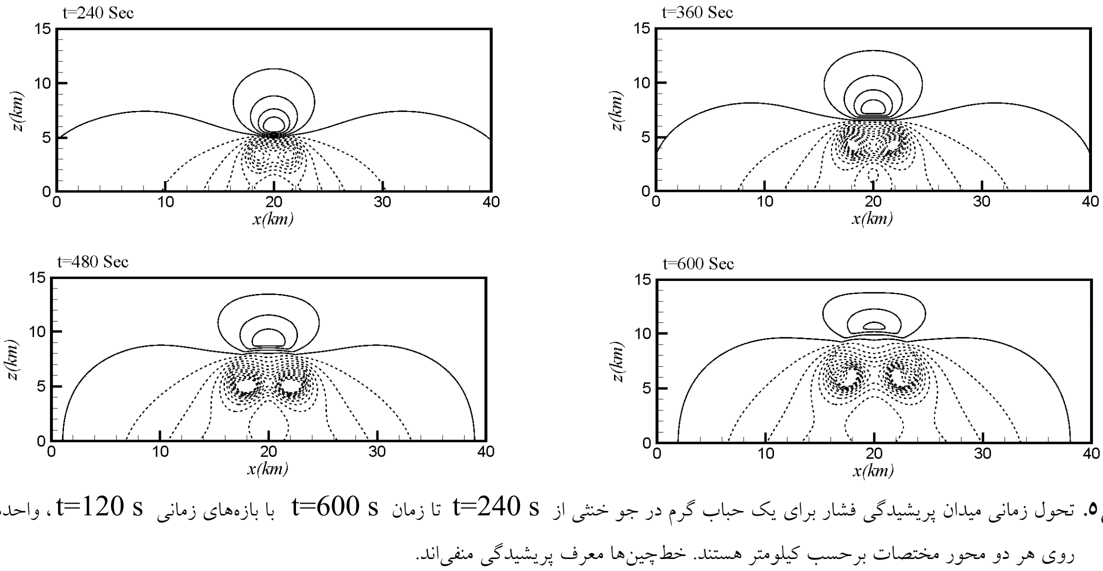
جدول۱. مقادیر بیشینه و کمینه متغیرهای میدان برای یک حباب گرم در زمان $t=600$ s برای تفکیک 801×301.

متغیرها	$u_{\max}$	$u_{\min}$	$w_{\max}$	$w_{\min}$
روش مک‌کورمک مرتبه دوم	20.1143	-20.1165	29.2161	-15.2393
متغیرها	$P_{\max}$	$p_{\min}$	$\theta_{\max}$	$\theta_{\min}$
روش مک‌کورمک مرتبه دوم	66.0019	-304.0527	8.7112	-0.5305

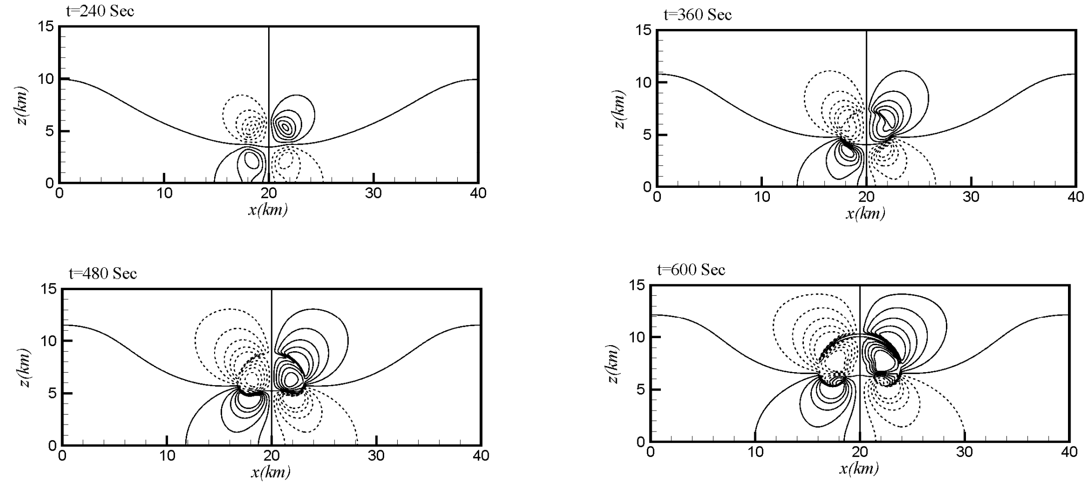


شکل ٤. تحول زمانی میدان پریشیدگی دمای پتانسیل برای یک حباب گرم در جو خنثی از $t=0$ s تا زمان $t=600$ s با بازه‌های زمانی $t=120$ s، واحدها روی هر دو محور مختصات برحسب کیلومتر هستند.

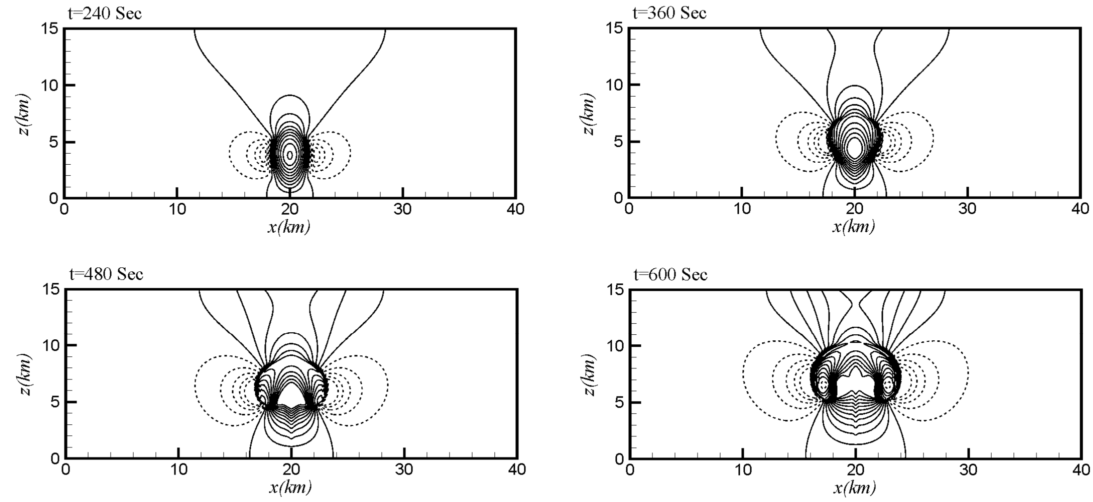
در شکل ۵ تحول زمانی میدان فشار نشان داده شده است. در این شکل خط‌چین‌ها معرف پریشیدگی فشار منفی‌اند. همچنین در شکل ۶ تحول زمانی میدان سرعت افقی و در شکل ۷ تحول زمانی میدان سرعت قائم نشان داده شده است. در این دو شکل نیز خط‌چین‌ها معرف سرعت افقی و قائم منفی هستند.



شکل ۵. تحول زمانی میدان پریشیدگی فشار برای یک حباب گرم در جو خنثی از $t=240$ s تا زمان $t=600$ s با بازه‌های زمانی $t=120$ s، واحدها روی هر دو محور مختصات برحسب کیلومتر هستند. خط‌چین‌ها معرف پریشیدگی منفی‌اند.



شکل۶. تحول زمانی میدان سرعت افقی برای یک حباب گرم در جو خنثی به ترتیب از سمت راست به چپ و از بالا به پایین از $t=240$ s تا زمان $t=600$ s با بازه‌های زمانی $t=120$ s، واحدها روی هر دو محور مختصات برحسب کیلومتر هستند.



شکل۷. تحول زمانی میدان سرعت قائم برای یک حباب گرم در جو خنثی به ترتیب از سمت راست به چپ و از بالا به پایین از $t = 240$ s تا زمان $t = 600$ s با بازه‌های زمانی $t = 120$ s، واحدها روی هر دو محور مختصات برحسب کیلومتر هستند.

۴-۴ نتایج حل عددی مربوط به حباب گرم در جو خنثی با شرایط مرزی سخت

در این قسمت شبیه‌سازی یک حباب گرم در جو خنثی در حالتی که مرزهای حوزه انتخاب شده برای بررسی آن از نوع مرز سخت هستند، مورد تحقیق قرار می‌گیرد (این نوع آزمون موردی را اولین‌بار کارپنتر و همکاران (۱۹۹۰) مورد بررسی قرار دادند). به‌عبارتِ‌دیگر مرزهای کناری و بالا و پایین این حوزه از نوع مرز سخت است. حوزه انتخاب‌شده با شرایط مرزی سخت یک شبکه مستطیلی با ابعاد 3.2 km طول و 4 km ارتفاع است. میدان پریشیدگی دمای پتانسیل برای حباب گرم با تابع زیر تعریف می‌شود:

$$\theta' = -2\left(\frac{\beta}{R_b}\right) + 2, \qquad \beta \le R_b \qquad (۳۹)$$

که در آن R_b=1 km شعاع حباب گرم و پارامتر β با رابطه زیر بیان می‌شود:

$$\beta = \sqrt{\left(x - x_c\right)^2 + (z - z_c)^2} \qquad (۴۰)$$

در این رابطه x_r و z_r معرف مختصات مرکز حباب‌اند که در اینجا دارای اندازه‌های زیر هستند:

$$x_c = 0\,\mathrm{km}, \mathrm{z}_c = 1\,\mathrm{km} \qquad (۴۱)$$

برای شبیه‌سازی عددی حباب گرم از تفکیک 401×321 نقطه، متناظر با فاصله شبکه‌ای یکنواخت 10 m در دو راستای محور مختصات استفاده شده است. گام زمانی انتخاب‌شده برای این تفکیک و همچنین ν به‌ترتیب برابر با مقادیر 0.01 s و 0.01است.

در شکل ۸ تحول زمانی میدان پریشیدگی دمای پتانسیل از زمان اولیه تا زمان 960 s حاصل از حل عددی

به کمک روش مک‌کورمک مرتبه دوم نشان داده شده است. همان‌طور که در شکل مشاهده می‌شود با حرکت قائم حباب به‌سمت بالا گرادیان دمای پتانسیل افزایش می‌یابد و بعد از اینکه حباب به مرز سخت بالا نزدیک شد، ناپایداری در لبه‌های حباب اتفاق می‌افتد. مشابه این ناپایداری در مرز خارجی ابرهای همرفتی شدید در جو قابل مشاهده است. ساختارهای همدوس حاصل در مرز حباب در اثر ناپایداری قابل مشاهده‌اند. البته لازم به ذکر است که نحوه ایجاد این ساختارهای همدوس که معرف رشد سلول ابر همرفتی است در واقعیت تابعی از فرایند دررو تشکیل ابر و ایجاد گرمای نهان نیز هست (بهات و نارسیمها ۱۹۹۶).

۴-۵ تایج حل عددی مربوط به حباب سرد در جو خنثی

در این قسمت شبیه‌سازی یک حباب سرد که اولین‌بار استراکا و همکاران (۱۹۹۳) آن را مورد تحقیق قرار دادند، با استفاده از حل عددی معادلات تراکم‌پذیر و غیرهیدروستاتیک جو بررسی می‌شود. مطابق با آنچه که استراکا و همکاران (۱۹۹۳) بیان کرده‌اند، حوزه انتخاب شده برای بررسی تکامل یک حباب سرد در شرایط جوی خنثی، شبکه‌ای مستطیل‌شکل با ابعاد 25.6 km طول و 6.4 km ارتفاع است. شرایط مرزی این حوزه محاسباتی بدین ترتیب است که همهٔ مرزهای این حوزه، مرز سخت درنظر گرفته می‌شوند.

در تحقیق حاضر برای شبیه‌سازی حباب سرد برخلاف حباب گرم از پریشیدگی میدان دمای اولیه استفاده می‌شود. میدان پریشیدگی دمای اولیه برای یک حباب سرد با تابع زیر تعریف می‌شود:

$$T' = -15.0\cos^2\left(\frac{\pi\beta}{2}\right), \quad \beta \le 1 \qquad (۴۲)$$

که در آن پارامتر β با رابطه زیر بیان می‌شود:

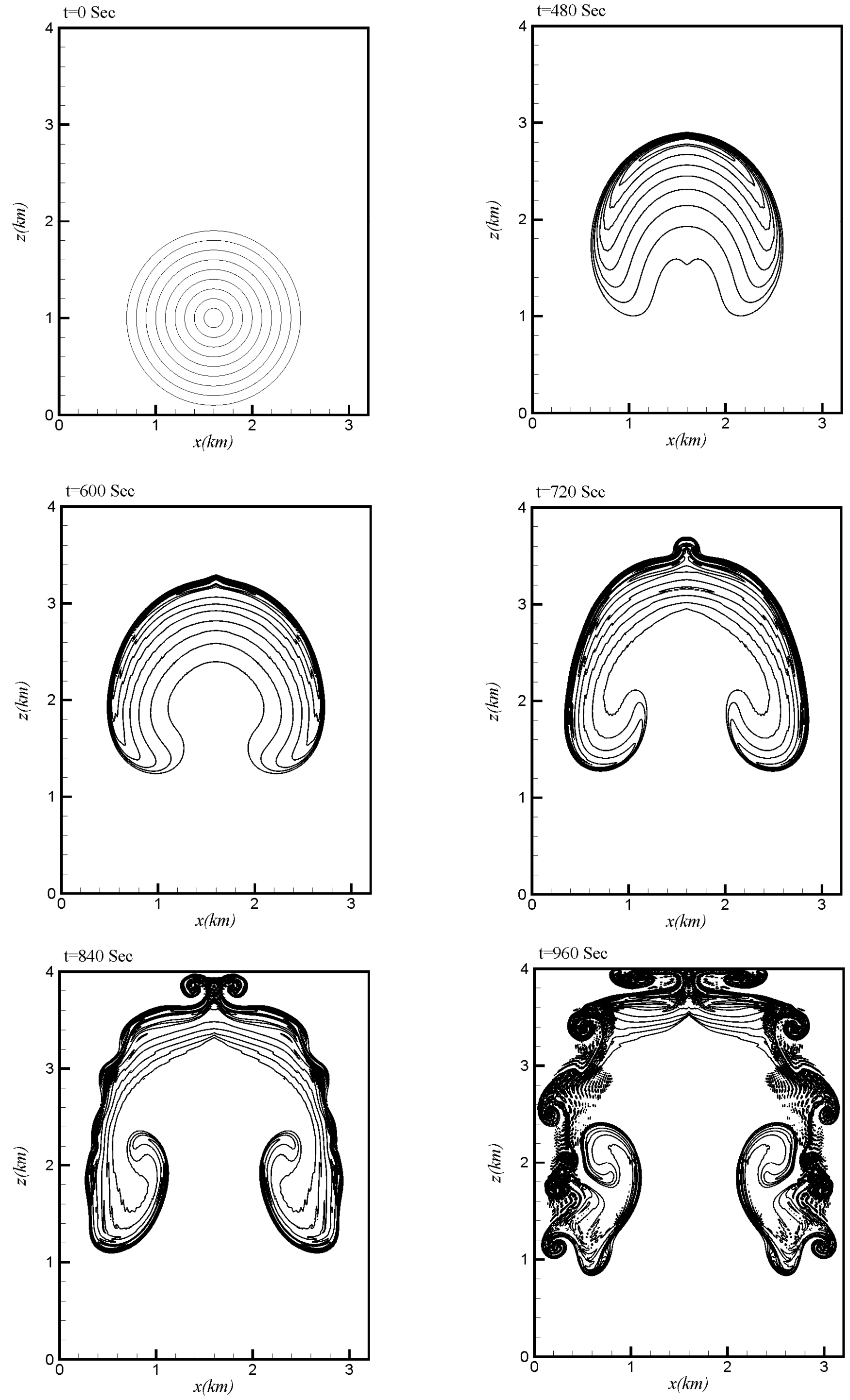
$$\beta = \sqrt{\left(\frac{x - x_c}{x_r}\right)^2 + \left(\frac{z - z_c}{z_r}\right)^2} \qquad (۴۳)$$

در رابطه بالا x_r و z_r معرف شعاع‌های حباب سرد در دو راستای x و z ، و x_c و z_c معرف مختصات مرکز حباب هستند. در تحقیق حاضر چهار کمیت ذکر شده دارای اندازه‌های زیرند:

$$x_r = 4\,\mathrm{km}, \mathrm{z}_r = 2\,\mathrm{km}, x_c = 0\,\mathrm{km}, z_c = 3.0\,\mathrm{km} \qquad (۴۴)$$

با معلوم بودن میدان اولیه دما، میدان پریشیدگی دمای پتانسیل با استفاده از رابطه (۳۷) به‌دست می‌آید. سایر مطالب مربوط به آغازگری میدان‌های فشار و چگالی مشابه با مراحل آغازگری حباب گرم است. تفکیک انتخاب شده برای شبیه‌سازی عددی حباب سرد مطابق با آنچه که استراکا و همکاران (۱۹۹۳) بیان کرده‌اند، تفکیک 257×1025است. گام زمانی انتخاب شده برای این تفکیک و همچنین ν به‌ترتیب برابر با مقادیر 0.01562 s و 75 است. در شکل ۹ تحول زمانی میدان پریشیدگی دمای پتانسیل از زمان اولیه تا زمان 900 s حاصل از حل عددی به کمک روش مک‌کورمک مرتبه

دوم و همچنین در شکل ۱۰ نتایج به‌دست آمده استراکا و همکاران (۱۹۹۳) نشان داده شده است.

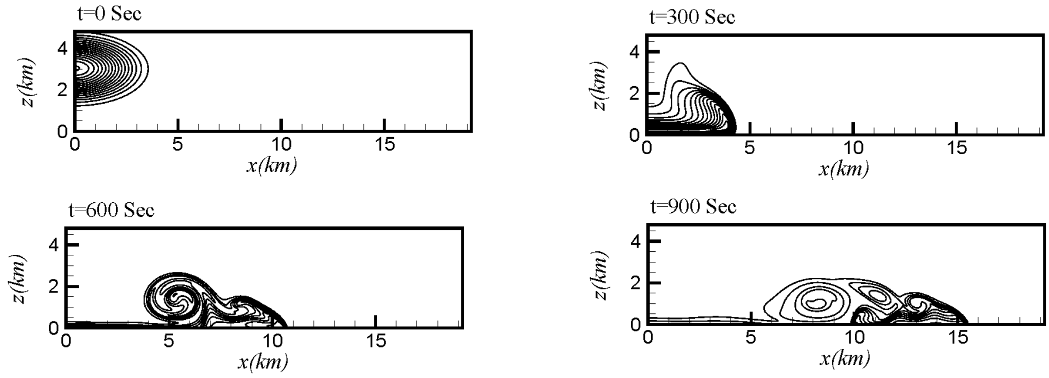


شکل ۸ تحول زمانی میدان پریشیدگی دمای پتانسیلی برای یک حباب گرم در خنثی از $t=480$ s تا زمان $t=960$ s با بازه‌های زمانی $t=120$ s، واحدها روی هر دو محور مختصات برحسب کیلومتر هستند. اولین شکل در سمت چپ برای زمان $t=0$ s است. پربندهای هم‌دما در بازه $[0.2\ \mathrm{K}, 2\ \mathrm{K}]$ قراردارند و اختلاف بین دو پربند هم‌دمای متوالی 0.2 K است. درونی‌ترین پربند دارای پریشیدگی دمای پتانسیل 2 K است.

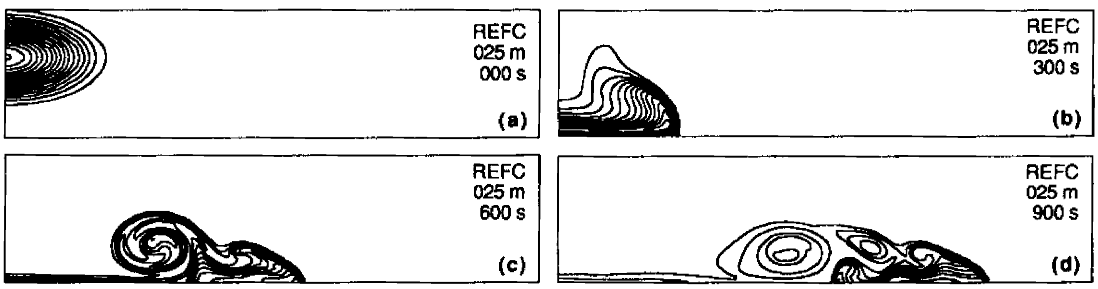
همان‌گونه که مشاهده می‌شود به‌طور کیفی مطابقت خوبی بین نتایج عددی حاصل از روش مک‌کورمک مرتبه دوم و نتایج عددی به‌دست آمده استراکا و همکاران (۱۹۹۳) وجود دارد. در ادامه برای اینکه مقایسه کمّی بین نتایج عددی حاصل از روش مک‌کورمک مرتبه دوم و نتایج عددی به‌دست آمده استراکا و همکاران (۱۹۹۳) صورت گیرد، در جدول ۲ مقادیر بیشینه و کمینه متغیرهای میدان در زمان 900 s نشان داده شده است. همان‌گونه که در این جدول مشاهده می‌شود، مطابقت خوبی بین نتایج حاصل از روش مک‌کورمک مرتبه دوم و نتایج عددی به‌دست آمده استراکا و همکاران (۱۹۹۳) وجود دارد.

جدول۲. مقایسه مقادیر بیشینه و کمینه متغیرهای میدان حاصل از حل عددی به کمک روش مک‌کورمک مرتبه دوم و استراکا و همکاران (۱۹۹۳) برای یک حباب سرد در زمان t=900 s برای تفکیک 1025×257.

متغیرها	u_{max}	u_{min}	w_{max}	w_{min}
روش مک‌کورمک مرتبه دوم	36.85	−14.92	12.49	−15.72
استراکا و همکاران (۱۹۹۳)	36.46	−15.19	12.93	−15.95
متغیرها	P_{max}	p_{min}	θ_{max}	θ_{min}
روش مک‌کورمک مرتبه دوم	198	−583	0.0	−9.65
استراکا و همکاران (۱۹۹۳)	287	−514	0.0	−9.77



شکل۹. تحول زمانی میدان پریشیدگی دمای پتانسیل برای یک حباب سرد در جو خنثی برای روش مک‌کورمک مرتبه دوم در یک شبکه مستطیل‌شکل با تفکیک 1025×257 از t=0 s تا زمان t=900 s با بازه‌های زمانی t=300 s، واحدها روی هر دو محور مختصات برحسب کیلومتر هستند. پربندهای هم‌دما در بازه [-16.5 K, -.5K] قراردارند و اختلاف بین دو پربند هم‌دمای متوالی -1 K است. درونی‌ترین پربند دارای پریشیدگی دمای پتانسیل -16.5 K است.



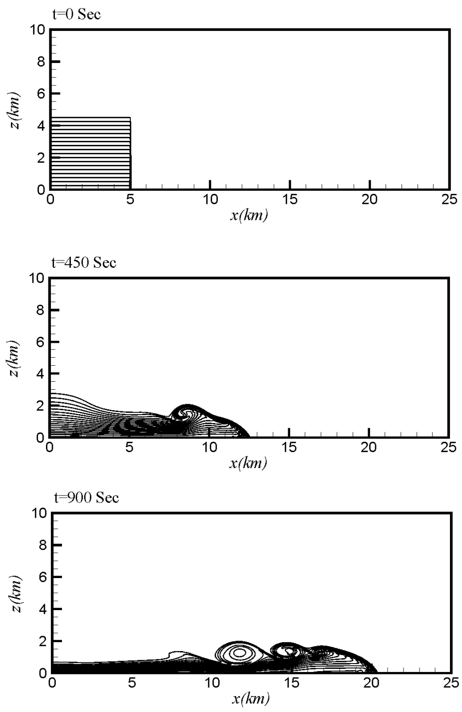
شکل ۱۰. نتایج عرضه شده استراکا و همکاران (۱۹۹۳) برای یک حباب سرد در جو خنثی.

۴-۶ نتایج حل عددی مربوط به جریان گرانی

در این قسمت شبیه‌سازی یک جریان گرانی که اولین‌بار از سوی دروگرمیر و ویلهمسون (۱۹۸۷) معرفی شده است و همچنین احمد و لیندمن (۲۰۰۷) آن را مورد تحقیق قرار داده‌اند، با استفاده از روش مک‌کورمک مرتبه دوم مورد بررسی قرار می‌گیرد. مطابق با آنچه که دروگمیر و ویلهمسون (۱۹۸۷) بیان کرده‌اند، حوزه انتخاب شده برای بررسی جریان گرانی در شرایط جوی خنثی، شبکه‌ای مستطیل‌شکل با ابعاد 25 km طول و 10 km ارتفاع است. شرایط مرزی این حوزه محاسباتی بدین ترتیب است که همهٔ مرزهای این حوزه، مرز سخت در نظر گرفته می‌شوند. برای شبیه‌سازی جریان گرانی از پریشیدگی میدان دمای پتانسیلی اولیه به‌صورت زیر استفاده می‌شود:

$$\theta' = -\frac{2}{1000} z$$
$$0 \le z \le 5\,\mathrm{km}\,, 0 \le x \le 5\,\mathrm{km} \qquad (۴۵)$$

ذکر این نکته ضروری است که مطالب مربوط به آغازگری میدان‌های فشار و چگالی جریان گرانی مشابه با مراحل آغازگری حباب گرم و سرد است. تفکیک انتخاب‌شده برای شبیه‌سازی عددی جریان گرانی مطابق با آنچه که احمد و لیندمن (۲۰۰۷) بیان کرده‌اند، تفکیک 201×501 است. گام زمانی انتخاب‌شده برای این تفکیک و همچنین ν به‌ترتیب برابر با مقادیر 0.05 s و 50 است. در شکل ۱۱ تحول زمانی میدان پریشیدگی دمای پتانسیل به‌ترتیب در زمان‌های 0 s، 450 s و 900 s حاصل از حل عددی به کمک روش مک‌کورمک مرتبه دوم نشان داده شده است. مقایسه کیفی این شکل با نتایج عددی به‌دست آمده احمد و لیندمن (۲۰۰۷) درستی جواب‌های حاصل را مورد تایید قرار می‌دهد.



شکل ۱۱. تحول زمانی میدان پریشیدگی دمای پتانسیل برای یک جریان گرانی در جو خنثی برای روش مک‌کورمک مرتبه دوم در یک شبکه مستطیل‌شکل با تفکیک 201×501 واحدها روی هر دو محور مختصات برحسب کیلومتر هستند. پربندهای هم‌دما در بازه $[-10\,\mathrm{K}, -1\mathrm{K}]$ قراردارند و اختلاف بین دو پربند هم‌دمای متوالی $-0.5\,\mathrm{K}$ است. پایین‌ترین پربند دارای پریشیدگی دمای پتانسیل $-10\,\mathrm{K}$ است.

۵ جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

حل عددی شکل پایستار معادلات تراکم‌پذیر دوبُعدی و غیرهیدروستاتیک جو با استفاده از روش فشرده مک‌کورمک مرتبه دوم مورد بررسی قرار گرفت. یکی از نکات مهمی که در فرایند حل عددی شکل پایستار معادلات تراکم‌پذیر دوبُعدی و غیرهیدروستاتیک با استفاده از این روش مشاهده شد، سادگی اِعمال شرط مرزی نابازتابی در روش مک‌کورمک مرتبه دوم است. برای شبیه‌سازی حباب‌های گرم و سرد در جو خنثی، مشاهده شد که در متغیر پریشیدگی دمای پتانسیلی با گذشت زمان گرادیان‌ها افزایش می‌یابد و عملکرد طرحواره‌های گوناگون در چنین حالتی متمایز می‌شود. همچنین مقایسه نتایج عددی عرضه شده برای شبیه‌سازی حباب سرد در جو خنثی با استفاده از روش مک‌کورمک مرتبه دوم با کار سایر محققان، گویای این مطلب است که روش مک‌کورمک مرتبه دوم در شبیه‌سازی معادلات دوبُعدی و تراکم‌پذیر است. با توجه به اینکه روش پیش‌گفته دارای میزان پخش عددی زیادی نیست مناطق جبهه‌ای همراه با گرادیان‌های شدید، گرادیان‌هایش را حفظ می‌کند و با گذشت زمان دچار ناپایداری می‌شوند. ناپایداری‌های ایجادشده اغلب باعث تولید پیچک‌ها (یا ساختارهای همدوس) می‌شوند که معرف ناپایداری جریان‌های بُرشی است. با توجه به عملکرد مناسب روش عددی مک‌کورمک، می‌توان این بررسی‌های عددی را برای جو با شرایط واقعی‌تر (جو غیرخنثی، دررو و مانند آن) نیز صورت داد تا بتوان بررسی‌های دقیق‌تری در زمینه‌های کاربردی را عملی ساخت.

تشکر و قدردانی

نویسندگان مقاله از دانشگاه تهران به‌واسطه حمایت از این کار تحقیقاتی تشکر می‌کنند.

منابع

بیدختی، ع. ع.، بیوک، ن. و ثقفی، م. ع.، ۱۳۸۳، بررسی ساختار چند جریان جستناک توفان‌های همرفتی تهران با استفاده از داده‌های سودار، م. فیزیک زمین و فضا، ۳۰(۲)، ۹۳–۱۱۳.

فلاحت، س.، ۱۳۸۷، حل عددی شکل پایستار معادلات تراکم‌پذیر دوبُعدی و غیرهیدروستاتیک جو بی‌دررو با استفاده از روش فشرده مرتبه چهارم، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، موسسه ژئوفیزیک دانشگاه تهران.

Ahmad, N., Lindeman, J., 2007, Euler Solutions Using Flux-Based Wave Decomposition, Int. J. Numer. Meth. Fluids, **54**, 47-72.

Bhat, G. S. and Narasimha, R., 1996, A Volumetrically Heated Jet: Large-Eddy Structure and Entrainment Characteristics., J. Fluid Mech., **325**, 303-330.

Carpenter, R. L., Droegemeier, K. K., Woodward, P. R. and Hane, C. E., 1990, Application of Piecewise Parabolic Method (PPM) to Meteorological Modeling, Mon. Wea. Rev., **118**, 586-612.

Carroll, J. J., Mendez-Nunez, L. R. and Tanrikulu, S., 1987, Accurate Pressure Gradient Calculation in Hydrotatic Atmospheric Models. Bound.-Layer Meteor., **41**, 149-169.

Droegemeier, K. K. and Wilhemson, R. B., 1987, Numerical simulation of thunderstorm outflow dynamics. Part I: Outflow Sensitivity Experiments and Turbulent Dynamics. J. Atmos. Sci., **44**, 1180-1210.

Durran, D. R., 1999, Numerical Methods for Wave Equations in Geophysical Fluid Dynamics, Springer, New York, 464 pp.

Gottlieb, D. and Turkel, E., 1987, Boundary Conditions for Multisteps Finite-Difference Method for Time Dependent Equations., J. Comput. Phys. **158**, 51-70.

Hoffman, Joe. D., 2001, Numerical Methods for Engineering and Scientist. Marcel Dekker, Second Edition, 823 pp.

Lilly, D. K., 1962, On the Numerical Simulation of Buoyant Convection. Tellus, **14**, 148-173.

Mendenz-Nunez, L. R. and Carrol, J. J., 1994, Application of the MacCormack Scheme to Atmospheric Nonhydrostatic Models. Mon. Wea. Rev., **122**, 984-1000.

Nash' at Ahmad and Lindeman John, 2007, Euler Solution Using Flux-Based Wave

Decomposition. Int. J. Numer. Meth. Fluids, **54**, 47-72.

Straka, J. M, Wilhelmson, R. B, Wicker, L. J, Anderson, J. R, Droegemeier, K. K, 1993, Numerical Solutions of a Non-linear Density Current: A Benchmark Solution and Comparisons. Int. J. Numer. Meth. Fluids, **17**, 1–22.

Tripoli, G. J., 1992, A Nonhydrostatic Mesoscale Model Designed to Simulate Scale Interaction. Mon. Wea. Rev., **120**, 1342-1359.