مجلهٔ فیزیک زمین و فضا، دوره ۳۴، شماره ۳، ۱۳۸۷، صفحهٔ ۵۷- ۷۸

بررسی روش‌های تعیین پارامتر پایدارسازی در مسئله انتقال به سمت پایین

علیرضا آزموده اردلان[۱*]، عبدالرضا صفری[۲] و یحیی الله‌توکلی[۳]

[۱] دانشیار گروه مهندسی نقشه‌برداری، قطب علمی مهندسی نقشه‌برداری و مقابلهٔ با سوانح طبیعی، پردیس دانشکده‌های فنی دانشگاه تهران، ایران
[۲] استادیار گروه مهندسی نقشه‌برداری، قطب علمی مهندسی نقشه‌برداری و مقابلهٔ با سوانح طبیعی، پردیس دانشکده‌های فنی دانشگاه تهران، ایران
[۳] فارغ‌التحصیل کارشناسی ارشد ژئودزی، گروه مهندسی نقشه‌برداری، قطب علمی مهندسی نقشه‌برداری و مقابلهٔ با سوانح طبیعی، پردیس دانشکده‌های فنی دانشگاه تهران، ایران

(دریافت: ۸۵/۵/۲۴ ، پذیرش نهایی: ۸۷/۴/۳)

چکیده

یکی از مراحل اصلی در محاسبه ژئوئید بدون استفاده از فرمول استوکس، انتقال به‌سمت پایین مشاهدات جاذبه به سطح بیضوی مبنا است. انتقال به‌سمت پایین مشاهدات پس از هارمونیک‌سازی، از طریق انتگرال آبل- پواسون و مشتقات آن صورت می‌گیرد. این انتگرال یک انتگرال فردهولم نوع اول است که مجهول (پتانسیل جاذبه هارمونیک روی بیضوی مبنا) در زیر علامت انتگرال قرار دارد. تعیین این مجهول از راه معادله انتگرالی یاد شده، یک مسئله ناپایدار است و نظیر هر مسئله ناپایدار دیگر، یافتن جواب، نیازمند پایدارسازی است. یکی از مهم‌ترین مراحل در هر روش پایدارسازی، تعیین پارامتر پایدارسازی است. در این مقاله به بررسی روش‌های متفاوت تعیین پارامتر پایدارسازی برای مسئله انتقال به‌سمت پایین مشاهدات از نوع شتاب جاذبه تفاضلی در محاسبه تعیین ژئوئید بدون استفاده از فرمول استوکس پرداخته شده است. براساس نتایج حاصل، روش "منحنی اِل (L-curve)" بهترین روش برای تعیین پارامتر پایدارسازی در مسئله پیش‌گفته است.

واژه‌های کلیدی: پارامتر پایدارسازی (Regularization)، معادلات انتگرالی، مسئله‌های معکوس، مسئله‌های بدطرح (Ill-posed problems)، منحنی ال (L-curve)

On the optimum method for estimation of regularization parameter of downward continuation in the problem of geoid computation without Stokes formula

Ardalan, A. A[1]., Safari, A[2]. and Allahtavakoli, Y[3].

[1]*Associate Professor, Department of Surveying and Geomatics Engineering, Center of Excellence in Surveying Engineering and Disaster Prevention, University of Tehran, Iran*
[2]*Assistant Professor, Department of Surveying and Geomatics Engineering, Center of Excellence in Surveying Engineering and Disaster Prevention, University of Tehran, Iran*
[3]*Gradulate student of Geodesy, Department of Surveying and Geomatics Engineering, Center of Excellence in Surveying Engineering and Disaster Prevention, University of Tehran, Iran*

(Received: 15 Aug 2006 , Accepted: 23 Jun 2008)

Abstract

One of the main steps within the geoid computation methodology without applying the Stokes formula is downward continuation of the harmonic residual observables from the surface of the Earth down to the surface of the reference ellipsoid. This downward continuation is done via the Abel-Poisson integral and its derivatives. This integral in which the unknowns, i.e. harmonic residual potential values on the surface of the

*نگارنده رابط: تلفن: ۰۲۱-۶۱۱۱۴۳۸۳ دورنگار: ۰۲۱-۸۸۳۳۷۶۴۲ E-mail: ardalan@ut.ac.ir

reference ellipsoid, are under integral sign, is a Fredholm integral equation of the first kind. Solution of the aforementioned integral equation is an unstable problem and like any unstable problem requires regularization. One of the most important issues of every regularization method is estimation of the regularization parameter.

The aim of this paper is the comparison of different methods for estimation of the regularization parameter of the Tikhonov regularization method when applied to the downward continuation of incremental gravity observables for the geoid computation without applying the Stokes formula. For this purpose, the following regularization parameter selection methods, which are free from the knowledge of norm of vector of observation errors, are considered: (i) Discrepancy Principle (DP), (ii) Generalized Cross-Validation (GCV), (iii) L-Curve (LC), and (iv) Flattest Slope (FS). Each regularization parameter estimation method has its own concept for identification of optimum regularization parameter and as such they can result in different regularization parameters for the same problem. For example, in the DP method, the optimum regularization parameter is selected in a way that the estimated factor variance is less sensitive to the variations of the regularization parameters. In the GCV method, the optimum regularization parameter is the one that is less sensitive to the reduction of input information. LC makes a balance between regularization of the solution and the introduced error by the regularization. In FS, the estimation of optimum regularization parameter is based on having the least changes in the solution of the problem vs. changes of the regularization parameter.

The aforementioned methods are applied to: (i) the real data for geoid computation without applying the Stokes formula in a geographical region of Iran (43.5ºE< λ <64.5ºE, 23.5ºN< φ <40.5ºN) based on a methodology, which algorithmically consists of remove, downward continuation using ellipsoidal Abel-Poisson integral, restore, and application of ellipsoidal Bruns formula, and (ii) a simulation which is designed for the same geographical area.

According to the simulation study the LC method results in (i) least relative error, (ii) Largest Effective Number of Degree of Freedom and (iii) closest regularization parameter to the actual one. Therefore, it can be concluded that LC amongst the tested methods for the estimation of regularization parameter, is the most efficient one and its application is recommended for the geoid computation methodology without applying the Stokes formula.

Key words: Regularization parameter, Integral equations, Inverse problems, Ill-posed problems, L-Curve

۱ مقدمه

امروزه بسیاری از علوم کاربردی از راه معادلات انتگرالی به حل مسائل خود می‌پردازند. یک معادله انتگرالی، معادله‌ای است که در آن تابع مجهول، زیر علامت انتگرال قرار دارد. یکی از انواع معادلات انتگرالی، معادله انتگرالی خطی است که آن را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\lambda \int_a^b k(x,y) f(y)\, dy + g(x) = h(x) f(x) \qquad (۱)$$

در رابطه (۱)، h و g توابع معلوم، f تابع مجهول و λ پارامتر ثابت (با نقش یک مقدار ویژه به‌طور معمول) و k هسته (Kernel) معادلهٔ انتگرالی است. در رابطه (۱) اگر $h(x) = 0$ باشد، معادله انتگرال را معادله انتگرال فردهولم نوع اول و اگر $h(x) = 1$ باشد معادله انتگرال از نوع فردهولم نوع دوم و در هر حالت اگر $g(x) = 0$

باشد، معادله انتگرالی را همگن می‌خوانند بیکر (۱۹۷۷). انتگرال فردهولم نوع اول را می‌توان به شکل عمومی زیر نوشت:

$$g = Kf, \qquad K: H_1 \to H_2 \tag{۲}$$

که در آن H_1 و H_2 فضاهای هیلبرت، f تابع مجهول، g تابع معلوم و K عملگر انتگرالی است. عملگر $K: H_1 \to H_2$ را خوش‌طرح (well-posed or properly posed) گوییم، چنانچه شرایط زیر برقرار باشد هانسن (۱۹۹۶)، تیخونف و آرسنین (۱۹۷۷):

۱. جواب وجود داشته باشد یعنی $g \in R(K)$ (g متعلق به برد K باشد).

۲. جواب یکتا باشد (یکتایی جواب).

۳. جواب تابع پیوسته‌ای از مشاهدات باشد یعنی $K^{-1}: H_2 \to H_1$ پیوسته باشد (پایداری جواب).

چنانچه هر کدام از این شرایط نقض شود مسئله را بدطرح گوییم. مفهوم مسائل بدطرح (Ill-posed problems) به کارهای آدامار (Hadamard) برمی‌گردد آدامار (۱۹۲۳). چنانچه تابع هسته $k(x,y)$ در معادله انتگرال فردهولم نوع اول یک تابع مربع- انتگرال‌پذیر (square-integrable) باشد یا به‌عبارت دیگر در شرطی موسوم به شرط هیلبرت- اشمیت صدق کند عملگر K عملگری فشرده خواهد بود هانسن (۱۹۹۶)، اشتاکگولد (۱۹۷۹). در مسئله انتقال به‌سمت پایین، هسته آبل-پواسون مربع-انتگرال‌پذیر و متقارن است (اردلان، ۱۹۹۹). بنابراین انتگرال آبل-پواسون یک معادله انتگرال فردهولم نوع اول با عملگر فشرده است. در مورد عملگرهای فشرده قضیه مشهور زیر وجود دارد اشتاکگولد (۱۹۷۹):

قضیه: اگر K یک عملگر کراندار فشرده و وارون‌پذیر باشد و روی فضایی با بعد نامتناهی تعریف شده باشد، در آن صورت وارون آن، یعنی K^{-1}، ناپیوسته است.

یک مسئله فیزیکی از سه جزء ورودی (مشاهدات)، دستگاه و مجهولات تشکیل یافته است. به‌دست آوردن خروجی بر مبنای اطلاعات ورودی و مشخصات دستگاه را "مدل‌سازی"، "شبیه‌سازی"، و یا "حل مسئله مستقیم" نام‌گذاری کرده‌اند. در مقابل استفاده از نتایج و مشاهدات برای یافتن پارامترهای مشخص کننده دستگاه را مسئله وارون می‌نامند راسموسن (۲۰۰۱). با این دید کلیه معادلات انتگرالی، مسائلی وارون محسوب می‌شوند.

مسئله مرزی دیریخله از نوع بیضوی که به‌صورت زیر قابل تعریف است را می‌توان به مثابه مثالی از "مسائل انتگرالی" یا "مسائل وارون" به‌شمار آورد:

روی سطح بیضوی $\mathbf{E}^2_{\eta_0}$، تابع پیوسته $f(\lambda,\phi)$ برای همهٔ مقادیر $\lambda \in [0,2\pi)$ و $\phi \in [-\pi/2, \pi/2]$ داده شده است، تابع مجهول $U(\lambda,\phi,\eta)$ در خارج از مرز $\mathbf{E}^2_{\eta_0}$ را چنان بیابید که شروط زیر برقرار شوند:

$$\begin{array}{ll} (a) & \Delta U = 0, \\ (b) & \lim\limits_{\eta\to\infty} U = 0, \\ (c) & \lim\limits_{\eta\to\eta_0} U = f(\lambda,\phi) \end{array} \tag{۳}$$

جواب مسئله مقدار مرزی دیریخله به شکل زیر است اردلان (۱۹۹۹):

$$\begin{aligned} & U(\lambda,\phi,\eta) = \\ & \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{p}\Bigg[\iint_{E^2_{\eta_0}} \frac{w(\phi')}{S}.Y^c_{pq}(\lambda,\phi)\cdot \\ & f(\lambda',\phi')\,d\sigma\frac{Q_{pq}(i\sinh\eta)}{Q_{pq}(i\sinh\eta_0)}\cdot \\ & P_{pq}(\sin\phi')\cos q\lambda' + \iint_{E^2_{\eta_0}}\frac{w(\phi')}{S}\cdot \\ & Y^s_{pq}(\lambda,\phi) f(\lambda',\phi')\,d\sigma\frac{Q_{pq}(i\sinh\eta)}{Q_{pq}(i\sinh\eta_0)}\cdot \\ & P_{pq}(\sin\phi')\sin q\lambda'\Bigg] \end{aligned} \tag{۴}$$

در رابطه فوق λ' و ϕ' متغیرهای انتگرال‌گیری هستند. با تعریف عبارات زیر:

$$\begin{aligned} Y^c_{pq}(\lambda',\phi') &= P_{pq}(\sin\phi')\cos q\lambda' \\ Y^s_{pq}(\lambda',\phi') &= P_{pq}(\sin\phi')\sin q\lambda' \end{aligned} \tag{۵}$$

رابطه (۴) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$
\begin{aligned}
U\left(\lambda,\phi,\eta\right) = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{p}\Bigg\{ & \frac{Q_{pq}\left(i\sinh\eta\right)}{Q_{pq}\left(i\sinh\eta_0\right)} \\
& \times\Bigg[\iint_{E_{\eta_0}^2}\frac{w(\phi')}{S}.\,Y_{pq}^{c}\left(\lambda,\phi\right)Y_{pq}^{c}\left(\lambda',\phi'\right) \\
& \times f\left(\lambda',\phi'\right)d\sigma + \iint_{E_{\eta_0}^2}\frac{w(\phi')}{S}.Y_{pq}^{s}\left(\lambda,\phi\right) \\
& \times Y_{pq}^{s}\left(\lambda',\phi'\right)f\left(\lambda',\phi'\right)d\sigma\Bigg]\Bigg\}
\end{aligned}
\tag{۶}
$$

با تعویض علامت سیگما و انتگرال خواهیم داشت:

$$
\begin{aligned}
U\left(\lambda,\phi,\eta\right) = \iint_{E_{\eta_0}^2}\Bigg\{ & \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{p}\frac{Q_{pq}\left(i\sinh\eta\right)}{Q_{pq}\left(i\sinh\eta_0\right)} \\
& \times\frac{w(\phi')}{S}\Big[Y_{pq}^{c}\left(\lambda,\phi\right)Y_{pq}^{c}\left(\lambda',\phi'\right) \\
& + Y_{pq}^{c}\left(\lambda,\phi\right)Y_{pq}^{c}\left(\lambda',\phi'\right)\Big]f\left(\lambda',\phi'\right)\Bigg\}d\sigma
\end{aligned}
\tag{۷}
$$

رابطه فوق جواب مسئله مقدار مرزی دیریخله در مختصات بیضوی $\left\{\lambda,\phi,\eta\right\}$ است، که می‌توان آن‌را به شکل زیر نیز نوشت:

$$
\begin{aligned}
U(\lambda,\phi,\eta) &= \iint_{E_{\eta_0}^2}\frac{w(\phi')}{S}\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=-p}^{p}\frac{Q_{p|q|}(i\sinh\eta)}{Q_{p|q|}(i\sinh\eta_0)}d\sigma \\
&\quad\times e_{pq}(\lambda',\phi')e_{pq}(\lambda,\phi)f(\lambda',\phi') \\
&= \iint_{E_{\eta_0}^2}K(\lambda,\phi,\eta;\lambda',\phi',\eta_0)f(\lambda',\phi')d\sigma
\end{aligned}
\tag{۸}
$$

رابطه انتگرالی به‌دست آمده را انتگرال آبل- پواسون می‌نامند، که در آن هسته به شکل زیر است:

$$
\begin{aligned}
K(\lambda,\phi,\eta;\lambda',\phi',\eta_0) &= \frac{w(\phi')}{S}\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=-p}^{p}\frac{Q_{p|q|}(i\sinh\eta)}{Q_{p|q|}(i\sinh\eta_0)} \\
&\quad\times e_{pq}(\lambda',\phi')e_{pq}(\lambda,\phi)
\end{aligned}
\tag{۹}
$$

تعیین ژئوئید به روش ارائه شده اردلان و گرافارند (۲۰۰۴) و بسط داده شده آن توسط صفری و همکاران (۲۰۰۵) شامل مراحل زیر است:

(۱) خطی کردن مشاهدات جاذبه از انواع گوناگون (اختلاف پتانسیل از شبکه‌های ترازیابی درجه ۱)، نرم شتاب جاذبه از گرانی‌سنجی با حذف اثرات جرم‌های خارج بیضوی مبنا (۲) تشکیل معادلات انتگرالی از نوع فردهولم نوع اول از راه انتگرال آبل-پواسون و مشتقات آن (۳) حل معادله انتگرالی تشکیل داده شده (۴) افزودن اثرات حذف شده به پتانسیل تفاضلی حاصل روی بیضوی (۵) استفاده از فرمول برونز بیضوی و (۶) تعیین ژئوئید است. از آنجایی که معادله‌های انتگرالی تشکیل داده شده ناپایدار است، یافتن جواب آنها مستلزم پایدارسازی است. پایدارسازی مسائل بدطرح را می‌توان به روش‌های گوناگون به انجام رساند. موفقیت هر کدام از روش‌های پایدارسازی بستگی مستقیم به برآورد پارامتر پایدارسازی دارد. در این مقاله، هدف یافتن بهترین روش برآورد پارامتر پایدارسازی در حل معادله انتگرالی موجود در تعیین ژئوئید بدون استفاده از فرمول استوکس است.

تاکنون مسئله انتقال به‌سمت پایین به‌صورت گسترده‌ای از سوی جامعه ژئودزی، در حل مسائل معکوس مربوطه، بررسی شده است، از جملهٔ این فعالیت‌ها می‌توان به هوانگ (۲۰۰۲)، ایلک (۱۹۹۳)، کوشه و کلس (۲۰۰۲)، مارتینک (۱۹۹۶)، نواک و هک (۲۰۰۲)، نواک و همکاران (۲۰۰۱)، روت (۱۹۹۲)، رومل و همکاران (۱۹۷۹)، اشنایدر (۱۹۹۷)، شوارتز (۱۹۷۹، ۱۹۷۳)، ونیچک و همکاران (۱۹۹۶) و ونگ (۲۰۰۰) اشاره کرد.

با توجه به این واقعیت که در عمل، اطلاع از اندازهٔ خطای مشاهدات $\left\|e\right\|_2$ ممکن است در اختیار نباشد، در این مقاله به ارائهٔ چهار روش تعیین پارامتر پایدارسازی پرداخته شده که مستقل از آگاهی از نرم خطای مشاهدات ($\left\|e\right\|_2$) هستند. این روش‌ها عبارت‌اند از: اصل اختلاف (discrepancy principle (DP))، تأیید- متقابلِ تعمیم‌یافته (generalized cross-validation (GCV)) و منحنی اِل (L-curve (LC)) و هموارترین

شیب ((flattest slope (FS)).

یکی از ابزارهای رفتار با مسائل بدطرح تجزیه به مقادیر منفرد است که در بخش بعد بدان پرداخته خواهد شد.

۱-۱ تجزیه مقادیر منفرد (singular value decomposition)

اگر معادله گسسته شده مسئله بدطرح $g = Kf$ به‌صورت زیر باشد:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}\ ,\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n}\ ,\ \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{m} \qquad (۱۰)$$

آنگاه یکی از ابزارهای کار با این مسئله، روش "تجزیه مقادیر منفرد" ماتریس $\mathbf{A}$ است. روش تجزیه مقادیر منفرد همهٔ مشکلات مربوط به ماتریس بدطرح گسسته $\mathbf{A}$ را آشکار خواهد ساخت. ماتریس مستطیلی یا مربعی $\mathbf{A}_{mn}$ را در نظر بگیرید. برای سهولت فرض کنید که $m \geq n$ باشد. در این صورت تجزیه مقادیر منفرد ماتریس $\mathbf{A}$ به صورت زیر خواهد بود:

$$\mathbf{A}_{mn} = \mathbf{U}_{mm}\Sigma_{mn}\mathbf{V}_{nn}{}^{T} = \sum_{i=1}^{n}\mathbf{u}_i\sigma_i\mathbf{v}_i^{T} \qquad (۱۱)$$

در معادله فوق $\mathbf{U}_{mm} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m)$ و $\mathbf{V}_{nn} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ ماتریس‌های با ستون‌های یکامتعامد (ارتونرمال) هستند،

$$\begin{aligned} \mathbf{V}^{T}\mathbf{V} &= \mathbf{I}_{nn} \\ \mathbf{U}^{T}\mathbf{U} &= \mathbf{I}_{mm} \end{aligned} \qquad (۱۲)$$

ستون‌های ماتریس‌های $\mathbf{U}$ و $\mathbf{V}$ را به ترتیب بردارهای منفرد چپ و راست ماتریس $\mathbf{A}$ می‌نامند هانسن (۱۹۹۸). ماتریس $\Sigma_{mn} = \left[\delta_{ij}\sigma_i\right]$ که در آن δ_{ij} تابع کرونکر و $1 \leq i \leq m$ و $1 \leq j \leq n$ است، یک ماتریس قطری با عضوهای قطر اصلی غیر منفی است و عضوهای آن دارای ترتیب زیرند:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_n \geq 0 \qquad (۱۳)$$

مقادیر قطر اصلی Σ، مقادیر منفرد ماتریس $\mathbf{A}$ و نسبت σ_1/σ_n عدد شرط ماتریس نامیده می‌شود. از روابط $\mathbf{A}^{T}\mathbf{A} = \mathbf{V}\Sigma^{T}\Sigma\mathbf{V}^{T}$ و $\mathbf{AA}^{T} = \mathbf{U}\Sigma\Sigma^{T}\mathbf{U}^{T}$ می‌توان نتیجه گرفت که ماتریس $\mathbf{A}$ به شدت به تجزیه مقادیر ویژه ماتریس‌های $\mathbf{A}^{T}\mathbf{A}$ و $\mathbf{AA}^{T}$ وابسته است. این وابستگی، یکتایی تجزیه مقادیر منفرد را نشان می‌دهد که از یکتایی تجزیه مقادیر ویژه ماتریس‌های متقارن قابل استنتاج است.

مسائل بدطرح گسسته عموماً دارای دو مشخصه اصلی در ارتباط با تجزیه مقادیر منفرد زیرند:

۱. مقادیر منفرد به تدریج بدون گسستگی به سمت صفر میل می‌کنند و افزایش ابعاد $\mathbf{A}$، تعداد مقادیر منفرد کوچک را افزایش می‌دهد.
۲. در حالی که σ_i با افزایش اندیس کاهش می‌یابد بردارهای منفرد $\mathbf{v}_i, \mathbf{u}_i$ با افزایش i مرتباً تغییر علامت می‌دهند.

همچنین با توجه به روابط (۱۱) و (۱۲) روابط زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{cases} \mathbf{Av}_i = \sigma_i\mathbf{u}_i & \left\|\mathbf{Av}_i\right\|_2 = \sigma_i \\ \mathbf{A}^{T}\mathbf{u}_i = \sigma_i\mathbf{v}_i & \left\|\mathbf{A}^{T}\mathbf{u}_i\right\|_2 = \sigma_i \end{cases} \qquad i = 1,2,\ldots n \qquad (۱۴)$$

با توجه به مطالب ذکر شده، در بخش بعدی تجزیه مقادیر منفرد در حل مسائل بدطرح را مرور خواهیم کرد.

۲-۱ بسط مقادیر منفرد (singular value expansion)

یک مثال کلاسیک از مسائل بدطرح معادله انتگرال فردهولم (Fredholm) نوع اول با هسته مربع- انتگرال‌پذیر است که قبلاً با فرمول (۱) بیان شد. این فرمول را مجدداً به شکل زیر می‌نویسیم تا به این طریق انتگرال (۱) به

صورت کلی‌تر در ناحیه Ω با متغیرهای "$\circ$" و"$\bullet$" تعریف شود:

$$\int_{\Omega} k(\bullet,\circ)f(\circ)d\Omega = g(\bullet) \qquad \bullet,\circ \in \Omega \tag{۱۵}$$

یا به صورت کلی‌تر می‌توان تابع $\mathbf{g}$ را حاصل اعمال عملگر K روی تابع $\mathbf{f}$ به شکل زیر در نظر گرفت:

$$K(\mathbf{f}) = \mathbf{g} \tag{۱۵/۱}$$

که در آن

$$\begin{aligned} &K : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega) \\ &K(\mathbf{f}) = \left\langle k(\bullet,\circ) \middle| \mathbf{f} \right\rangle \end{aligned} \tag{۱۵/۲}$$

تابع $\mathbf{g}$ و هسته k توابعی معلوم‌اند، در حالتی که $\mathbf{f}$ مجهول و هدف نیز یافتن آن است. اگر برای هسته k، داشته باشیم:

$$k \in L_2(\Omega \times \Omega) \tag{۱۶}$$

آنگاه عملگر K یک عملگر هیلبرت- اشمیت و در پی آن یک عملگر فشرده خواهد بود. در عمل در بسیاری از مواقع هسته K به طور دقیق با یک مدل ریاضی مشخص می‌شود در حالی که تابع $\mathbf{g}$ با یک دقت معلوم و به طور منفصل در ناحیه محدودی در دست است. برای حل معادلات انتگرالی فردهولم نوع اول روش بسط مقادیر منفرد ممتازترین ابزار تحلیلی است (هانسن، ۱۹۹۸). با استفاده از بسط مقادیر منفرد هر هسته هیلبرت اشمیت به صورت مجموع زیر نوشته شود (هانسن، ۱۹۹۸):

$$k(\bullet,\circ) = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i \mathbf{u}_i(\bullet)\mathbf{v}_i(\circ) \tag{۱۷}$$

توابع $\mathbf{u}_i$ و $\mathbf{v}_i$ توابع منفرد و همچنین ضرایب σ_i را مقادیر منفرد عملگر K اند. این مقادیر، غیر منفی بوده و به‌طور غیر صعودی مرتب شده‌اند. دوتایی $\left\{\sigma_i^2, \mathbf{v}_i\right\}$ تجزیه مقادیر ویژه عملگر متقارن K^*K و دوتایی $\left\{\sigma_i^2, \mathbf{u}_i\right\}$ تجزیه مقادیر ویژه عملگر متقارن KK^* است. از این ارتباط بین مقادیر ویژه و تجزیهٔ مقادیر منفرد در می‌یابیم که سه‌تایی $\left\{\sigma_i, \mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i\right\}$ مشخصه یکتا و لاینفک هسته داده شده k است. از طرفی مهم‌ترین رابطه بین مقادیر منفرد و توابع منفرد به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned} &K(\mathbf{v}_i) = \sigma_i \mathbf{u}_i \\ &K^*(\mathbf{u}_i) = \sigma_i \mathbf{v}_i \end{aligned} \tag{۱۸}$$

این رابطه نشان می‌دهد که توابع منفرد $\mathbf{v}_i$ و $\mathbf{u}_i$ با عملگرهای K و K^* به یکدیگر نگاشته شده و مقادیر منفرد σ_i مقیاس این نگاشت‌ها است. پس با توجه به روابط (۱۵/۱) و (۱۸) و "نظریهٔ طیفی برای عملگرهای متقارن فشرده (spectral theorem for compact self-adjoint operators)" راسوسن (۲۰۰۱) و فرض $\mathbf{g} \in R(K)$ داریم:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{\infty} \left(\sigma_i \left\langle \mathbf{v}_i \middle| \mathbf{f} \right\rangle - \left\langle \mathbf{u}_i \middle| \mathbf{g} \right\rangle\right)\mathbf{u}_i = \mathbf{0} \\ &\Rightarrow \left\langle \mathbf{v}_i \middle| \mathbf{f} \right\rangle = \frac{\left\langle \mathbf{u}_i \middle| \mathbf{g} \right\rangle}{\sigma_i} \\ &\Rightarrow \mathbf{f} \approx \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\left\langle \mathbf{u}_i \middle| \mathbf{g} \right\rangle}{\sigma_i}\mathbf{v}_i \end{aligned} \tag{۱۹}$$

با تحلیل ضرایب $\sigma_i^{-1}\left\langle \mathbf{u}_i \middle| \mathbf{g} \right\rangle$ می‌توان به طور کامل جواب $\mathbf{f}$ را بررسی کرد. بدین منظور در ادامه، شرط پیکار (Picard) را که امکان بررسی وجود جواب مسئله بدطرح ارائه شده را فراهم می‌آورد، معرفی خواهیم کرد.

۳-۱ شرط پیکار

با توجه به مبحث قبل و نامساوی بسل داریم:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left| \frac{\left\langle \mathbf{u}_i \middle| \mathbf{g} \right\rangle}{\sigma_i} \right|^2 \leq \left\| \mathbf{f} \right\|_2^2 \tag{۲۰}$$

از آنجا که $\mathbf{f} \in L_2(\Omega)$، پس بایستی تابع $\mathbf{g}$ در رابطه زیر صدق کند:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \sigma_n^{-1} \left\langle \mathbf{u}_n \middle| \mathbf{g} \right\rangle \right| = 0 \tag{۲۱}$$

در اصطلاح به این شرط که معادل شرط $\mathbf{g} \in \mathrm{R}(\mathrm{K})$ است، شرط پیکار اطلاق می‌شود. چنانچه معادله انتگرال را به شکل گسسته در آوریم، هیچ شرط پیکاری وجود نخواهد داشت، چرا که در حالت گسسته نرم جواب، همواره متناهی است. در این حالت می‌توان شرط پیکار را به‌صورت دیگری تعریف کرد که بدان خواهیم پرداخت. همچنین در مسائل واقعی سمت راست معادله با خطای اندازه‌گیری همراه است. از این رو بردار مشاهدات $\mathbf{b}$ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}^{\mathrm{exact}} + \mathbf{e} \qquad (۲۲)$$

که در آن $\mathbf{b}^{\mathrm{exact}}$ مقدار بدون خطای $\mathbf{b}$ و $\mathbf{e}$ بردار خطا است. می‌توان نشان داد که اگر معادله انتگرال پیوسته در شرط پیکارد صدق کند، در این صورت شکل گسسته آن نیز در شرط پیکار صدق خواهد کرد. بنابراین چنانچه ضرایب فوریه $\left|\mathbf{u}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{b}^{\mathbf{exact}}\right|$ به‌طور متوسط سریع‌تر از مقادیر منفرد σ_i به‌سمت صفر میل کند، بردار $\mathbf{b}^{\mathbf{exact}}$ در شرط پیکار صدق خواهد کرد. مشکل اساسی در مسائل بدطرح گسسته آن است که بردار خطای $\mathbf{e}$ دارای مؤلفه‌های در امتداد بردارهای منفرد چپ $\mathbf{u}_i$ است. مقدار مورد انتظار برای مؤلفه‌های $\mathbf{e}$ با فرض نااریبی و استقلال آن برابر است با:

$$\mathrm{E}\left(\left|\mathbf{u}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{e}\right|\right) = \mathrm{m}^{-\frac{1}{2}}\mathrm{E}\left(\left\|\mathbf{e}\right\|_2^2\right) \qquad \mathrm{i} = 1, \dots, \mathrm{n} \qquad (۲۳)$$

در رابطه فوق m تعداد مشاهدات است که در رابطه (۱۰) معرفی شد.

بنابراین حتی اگر بردار $\mathbf{b}^{\mathbf{exact}}$ در شرط پیکار صدق کند، از آنجا که ضرایب فوریه $\left|\mathbf{u}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{b}\right|$ تحت تأثیر ضرایب فوریه بردار خطا هستند، لذا برای مقادیر بزرگ i ضرایب $\left|\mathbf{u}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{b}\right|$ با سرعت کمتری نسبت به مقادیر منفرد σ_i به‌سمت صفر میل کرده و از شرط پیکار تبعیت نخواهد کرد.

۲ نظریهٔ پایدارسازی

همان‌گونه که در بخش قبل مشاهده شد، مشکل حل مسائل بدطرح، همچون معادلات انتگرالی نوع اول، تأمین نشدن شرط پیکار است. لذا چنین فرض می‌شود که برقرار نشدن شرط پیکار در معادله $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ به دلیل وجود اغتشاشی همچون $\mathbf{e}$ در مشاهدات است و لذا اگر $\mathbf{b}^{\mathbf{exact}}$ ($\mathbf{b}^{\mathbf{exact}} \in \mathrm{R}(\mathbf{A})$) مقدار دقیق و بدون اغتشاش در طرف راست معادله قرار گیرد، آنگاه مسئله دارای جوابی یکتا به صورت زیر خواهد بود:

$$\mathbf{x}^{\mathbf{exact}} = \mathbf{A}^{\dagger}(\mathbf{b}^{\mathbf{exact}}) = \sum_i \frac{\left\langle \mathbf{u}_i \middle| \mathbf{b}^{\mathbf{exact}} \right\rangle}{\sigma_i}\mathbf{v}_i \qquad (۲۴)$$

اگر $\mathbf{b}$ مقدار مشاهدات آلوده به اغتشاش $\mathbf{e}$ باشد، آنگاه رابطه زیر برقرار است:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{b} = \mathbf{b}^{\mathrm{exact}} + \mathbf{e} \\
&\Rightarrow \left\langle \mathbf{u}_i \middle| \mathbf{b} \right\rangle = \left\langle \mathbf{u}_i \middle| \mathbf{b}^{\mathrm{exact}} \right\rangle + \left\langle \mathbf{u}_i \middle| \mathbf{e} \right\rangle \\
&\Rightarrow \left\langle \mathbf{u}_i \middle| \mathbf{b} \right\rangle = \left(1 + \frac{\left\langle \mathbf{u}_i \middle| \mathbf{e} \right\rangle}{\left\langle \mathbf{u}_i \middle| \mathbf{b}^{\mathrm{exact}} \right\rangle}\right)\left\langle \mathbf{u}_i \middle| \mathbf{b}^{\mathrm{exact}} \right\rangle \\
&\Rightarrow \left\langle \mathbf{u}_i \middle| \mathbf{b}^{\mathrm{exact}} \right\rangle = \underbrace{\left(\frac{\left\langle \mathbf{u}_i \middle| \mathbf{b}^{\mathrm{exact}} \right\rangle}{\left\langle \mathbf{u}_i \middle| \mathbf{b}^{\mathrm{exact}} \right\rangle + \left\langle \mathbf{u}_i \middle| \mathbf{e} \right\rangle}\right)}_{\mathrm{f}_i}\left\langle \mathbf{u}_i \middle| \mathbf{b} \right\rangle \\
&\Rightarrow \mathbf{x}^{\mathrm{exact}} = \sum_i \frac{\left\langle \mathbf{u}_i \middle| \mathbf{b}^{\mathrm{exact}} \right\rangle}{\sigma_i}\mathbf{v}_i = \sum_i \mathrm{f}_i \frac{\left\langle \mathbf{u}_i \middle| \mathbf{b} \right\rangle}{\sigma_i}\mathbf{v}_i
\end{aligned} \qquad (۲۵)$$

در اصطلاح به ضرایب f_i ضرایب فیلتر (filter coefficients) گفته می‌شود. تعیین ضرایب f_i و متعاقباً تعیین جواب دقیق مسئله مستلزم داشتن اطلاعاتی دقیق از مشاهدات و اغتشاشات آن است. از این رو روش‌های پایدارسازی، مجموعه‌ای از فن‌ها به شمار می‌روند که به کمک آنها با در نظر گرفتن فرضیاتی برای اغتشاشات مشاهدات، ضرایب فیلتر تعیین و جواب بهینه و پایدار برای مسائل بدطرح به‌صورت زیر تعیین می‌شود:

$$\mathbf{x}^{\mathrm{reg}} = \sum_{\mathrm{i}} \mathrm{f}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{reg}} \frac{\langle \mathbf{u}_{\mathrm{i}} | \mathbf{b} \rangle}{\sigma_{\mathrm{i}}} \mathbf{v}_{\mathrm{i}} \qquad (۲۶)$$
$$\mathbf{x}^{\mathrm{reg}} = \mathbf{A}^{\#}(\mathbf{b})$$

ضرایب $\mathrm{f}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{reg}}$ ضرایب فیلتر پایدارسازی و $\mathbf{A}^{\#}$ را استراتژی پایدارسازی نامند.

اگر ضرایب فیلتر پایدارسازی $\mathrm{f}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{reg}}$ به صورت زیر در نظر گرفته شود:

$$\mathrm{f}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{reg}} = \frac{\sigma_{\mathrm{i}}^2}{\sigma_{\mathrm{i}}^2 + \lambda^2} \qquad (۲۷)$$

آنگاه جواب پایدارشده $\mathbf{x}^{\mathrm{reg}}$ با ضرایب فوق، جوابی است که تابع زیر را مینیموم می‌کند.

$$\mathrm{J}_{\lambda}(\mathbf{x}) = \left\| \mathrm{A}(\mathbf{x}) - \mathbf{b} \right\|_2^2 + \lambda^2 \left\| \mathbf{x} \right\|_2^2 \qquad (۲۸)$$
$$\mathbf{x} \in \mathrm{H}_1, \lambda > 0$$

به این روش پایدارسازی، "روش پایدارسازی تیخونوف (Tikhonov)" و به پارمتر λ "پارامتر پایدارسازی تیخونوف" اطلاق می‌شود. این فکر اولین بار از سوی فیلیپس (۱۹۶۲) و تقریباً همزمان از سوی تیخونوف (۱۹۶۳) پیشنهاد شد.

۳ پارامتر پایدارسازی

هدف از بهینه‌یابی پارامتر پایدارسازی، یافتن پارامتری است، که بین بایاس (bias) و واریانس جواب تعادل برقرار کند، یعنی با کمترین بایاس، کوچک‌ترین واریانس را به‌دست دهد. این مطلب را می‌توان از روابط زیر نیز نتیجه گرفت.

با فرض $\mathbf{x}^{\mathrm{exact}} = \mathbf{A}^{\dagger}(\mathbf{b}^{\mathrm{exact}})$ و کرانداری بردار خطاها $\|\mathbf{e}\| \le \delta$ داریم:

$$\begin{aligned} \left\| \mathbf{x}^{\mathrm{exact}} - \mathbf{x}_{\mathrm{reg}} \right\| &= \left\| \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{b}^{\mathrm{exact}} - \mathbf{A}^{\#}\mathbf{b} \right\| \\ &= \left\| (\mathbf{A}^{\dagger} - \mathbf{A}^{\#})\mathbf{b}^{\mathrm{exact}} - \mathrm{A}^{\#}\mathbf{e} \right\| \\ &\le \left\| (\mathbf{A}^{\dagger} - \mathbf{A}^{\#})\mathbf{b}^{\mathrm{exact}} \right\| + \left\| \mathrm{A}^{\#}\mathbf{e} \right\| \\ &\le \left\| (\mathbf{A}^{\dagger} - \mathbf{A}^{\#})\mathbf{b}^{\mathrm{exact}} \right\| + \left\| \mathrm{A}^{\#} \right\| \delta \\ &= \mathrm{Term}\ 1 + \mathrm{Term}\ 2 \end{aligned} \qquad (۲۹)$$

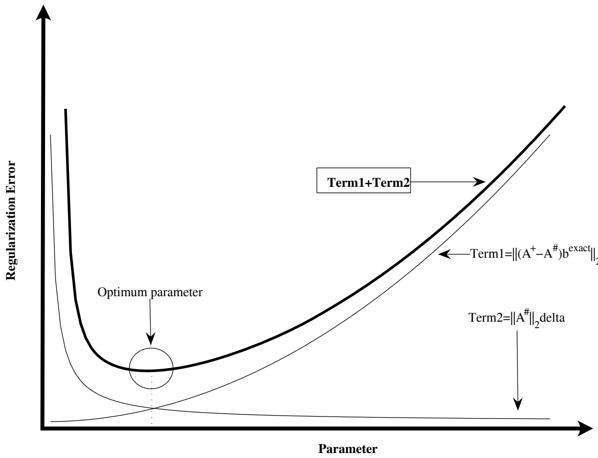
همان‌طور که در روابط فوق دیده می‌شود، خطای مجهول‌های برآورد شده متشکل بر دو جمله است. جمله اول، خطای ناشی از روش پایدارسازی، و جمله دوم ناشی از وجود اغتشاش در داده‌های به‌کار رفته در برآورد مجهول‌ها است. بنابراین پارامتر بهینه λ^*، پارامتری خواهد بود که باعث تعادل بین جمله‌های اول و دوم شود. شکل ۱ این موضوع را به صورت اجمالی نشان می‌دهد.

تعیین پارامتر پایدارسازی برای مسائل بدطرح کار بسیار پیچیده‌ای است چرا که خطاهای پایدارسازی و اغتشاش داده‌ها توابعی تغییرات کند از پارامتر پایدارسازی‌اند. لذا در عمل با بررسی تغییرات خطای پایدارسازی و اغتشاش مشاهدات تشخیص پارامتر پایدارسازی بهینه دشوار است (هانسن، ۱۹۹۸). این موضوع در شکل ۱ از مسطح بودن بخشی از نمودار که پارامتر پایدارسازی در آن قرار دارد به خوبی نمایان است.

روش‌های تعیین پارامتر پایدارسازی بسته به اطلاعات موجود از نرم خطا $\|\mathbf{e}\|_2$، به دو دسته تقسیم می‌شوند:

۱. روش‌های مبتنی بر برآوردی خوب از نرم خطا $\|\mathbf{e}\|_2$.
۲. روش‌هایی که نیازی به آگاهی از نرم خطا $\|\mathbf{e}\|_2$ ندارند، و در عوض در آنها سعی در استخراج اطلاعات لازم فقط از مشاهدات است.

هنگامی که اطلاعات قابل اطمینان از نرم خطا $\|\mathbf{e}\|_2$ در اختیار باشد، مسلماً می‌بایست از آن اطلاعات استفاده کرد، امّا اگر اطلاعی از نرم خطا $\|\mathbf{e}\|_2$ در دست نباشد، آنگاه اختیار کردن یک پارامتر پایدارسازی قابل اطمینان کاری بسیار دشوار خواهد بود. در این مقاله چهار روش تعیین پارامتر پایدارسازی بدون در اختیار داشتن اطلاعاتی از نرم خطا مورد بررسی قرار گرفته است. این روش‌ها عبارت‌اند از: اصل اختلاف (DP)، تأیید- متقابل تعمیم‌یافته (GCV)، منحنی ال (LC) و هموارترین شیب (FS).



شکل ۱. پارامتر بهینه پایدارسازی، در نقش پارامتری که بین بایاس و واریانس تعادل برقرار می‌کند.

۳-۱ روش "اصل اختلاف (DP)"

از جمله روش‌هایی که می‌تواند هم بر پایه اطلاعاتی از نرم خطا $\|\mathbf{e}\|_2$ و هم مستقل از آن عمل کند، روش اصل اختلاف یا DP است. اگر رابطهٔ $\mathbf{Ax}^{\text{exact}} = \mathbf{b}^{\text{exact}}$ بین مشاهدات بدون خطا $\mathbf{b}^{\text{exact}}$ و جواب واقعی مجهول‌ها $\mathbf{x}^{\text{exact}}$ به‌صورت یک دستگاه معادلات سازگار برقرار و δ_e خطای مشاهدات از رابطهٔ زیر در اختیار باشد:

$$\left\|\mathbf{b} - \mathbf{b}^{\text{exact}}\right\|_2 = \delta_e \qquad (۳۰)$$

آنگاه می‌توان پارامتر پایدارسازی بهینه‌ای چون λ یافته به‌طوری که مجهول‌های برآورد شده $\mathbf{x}_\lambda$ در رابطهٔ زیر صدق کنند:

$$\left\|\mathbf{Ax}_\lambda - \mathbf{b}\right\|_2 = \delta_e \qquad (۳۱)$$

روش‌های متفاوتی برای تعیین این پارامتر پایدارسازی وجود دارد. یکی از این روش‌ها، روش منحنی ال است که در صورت استفادهٔ از آن، این پارامتر را می‌توان در نزدیکی خط عمودی منحنی در جایی که بیشترین تغییر انحنا صورت می‌گیرد، یافت. در مورد روش منحنی ال در ادامه به تفصیل توضیح داده خواهد شد. در صورت استفاده از روش تکرار برای پایدارسازی، پارامتر پایدارسازی متناظر با کوچک‌ترین تعداد تکرار k است، برای آن رابطه زیر برای مرحلهٔ تکرار k برقرار می‌شود:

$$\left\|\mathbf{Ax}_k - \mathbf{b}\right\|_2 \le \delta_e \qquad (۳۲)$$

حال اگر فرض شود که دستگاه معادلات $\mathbf{Ax}^{\text{exact}} = \mathbf{b}^{\text{exact}}$ سازگار، و بردار خطای مشاهدات $\mathbf{e}$ دارای امید صفر و ماتریس واریانس-کوواریانس $\sigma_0^2\mathbf{I}_m$ است، نامساوی $\|\mathbf{e}\|_2 < \left\|\mathbf{b}^{\text{exact}}\right\|_2$ برقرار باشد، آنگاه امید نرم بردار خطای مشاهدات $\|\mathbf{e}\|_2$ برابر با $\sigma_0\sqrt{m}$ می‌شود و در حالت جامع‌تر، در پایدارسازی "تعمیم یافته تیخونوف (generalized Tikhonov)" امید $\|\mathbf{e}\|_2$ برابر $\sigma_0\sqrt{m-n+p}$ و جواب به‌دست آمده از رابطه (۳۱) در منحنی ال کمی از محل نقطهٔ با ماکزیموم انحناء منحرف و در نقطه $\left(\sigma_0\sqrt{m-n+p}, \left\|\mathbf{Lx}^{\text{exact}}\right\|_2\right)$ ظاهر می‌شود (هانسن، ۱۹۹۸). اگر نرم خطای مشاهدات $\|\mathbf{e}\|_2$ از پیش مشخص نباشد، آنگاه با فرض مساوی صفر بودن امید برداری خطای مشاهدات $\mathbf{e}$ و مساوی $\sigma_0^2\mathbf{I}_m$ بودن ماتریس واریانس-کوواریانس آن، می‌توان با استفاده از کنترل رفتار تابع $\nu(\lambda)$ با تعریف زیر، مقدار σ_0 را برآورد کرد:

$$\begin{aligned}\nu(\lambda) &= \frac{\left\|\mathbf{Ax}_\lambda - \mathbf{b}\right\|_2^2}{\tau(\lambda)}\\ \tau(\lambda) &= \mathrm{trace}(\mathbf{I}_m - \mathbf{AA}^{\#})\\ &= m - \sum_{i=1}^{n} f_i\end{aligned} \tag{۳۳}$$

در رابطه (۳۳) $\tau(\lambda)$ درجه آزادی مؤثر (effective number of degree of freedom) دستگاه معادلات بدطرح نامیده می‌شود. اگر تابع $\nu(\lambda)$ نسبت به λ^{-1} رسم شود، نمودار ترسیمی ابتدا یک روند رو به کاهش را دنبال، در یک ناحیه بحرانی، روندی ثابت را آغاز و پس از آن، در اکثر موارد دوباره یک روند رو به کاهش را طی می‌کند. ناحیهٔ بحرانی را برآوردی برای σ_0 در نظر می‌گیریم. این نقطه همان نقطهٔ برآورد پارامتر بهینه است. به‌علاوه بدین ترتیب برآوردی از نرم بردار خطای مشاهدات $\|\mathbf{e}\|_2$، نیز تحت مقدار $m \times \nu(\lambda)$ در ناحیه ثابت منحنی به‌دست خواهد آمد.

۳-۲ روش "تأیید- متقابل تعمیم یافته (GCV)"

در این روش برای انتخاب پارامتر نیازی به دانستن نرم خطای مشاهدات $\|\mathbf{e}\|_2$ نیست. این روش دارای این خاصیت است که در صورت حذف عضو دلخواه $\mathbf{b}_i$ از بردار مشاهدات $\mathbf{b}$، جواب پایدار شده براساس پارامتر پایدارسازی می‌تواند عضو $\mathbf{b}_i$ را بخوبی پیش‌بینی کند. پارامتر پایدارسازی بهینه λ در این روش طوری انتخاب می‌شود که تابع G با تعریف زیر را مینیموم سازد:

$$\begin{aligned}G(\lambda) &= \frac{\left\|\mathbf{Ax}_\lambda - \mathbf{b}\right\|_2^2}{\left[\mathrm{trace}\left[\mathbf{I}_m - \mathbf{A}\left(\mathbf{A}^T\mathbf{A} + \lambda^2\mathbf{I}_m\right)^{-1}\mathbf{A}^T\right]\right]^2}\\ &= \frac{\nu(\lambda)}{\tau(\lambda)}\end{aligned} \tag{۳۴}$$

که در رابطه فوق توابع $\nu(\lambda)$ و $\tau(\lambda)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\nu(\lambda) = \frac{\left\|\mathbf{Ax}_\lambda - \mathbf{b}\right\|_2^2}{\tau(\lambda)} \tag{۳۵}$$

$$\tau(\lambda) = \mathrm{trace}\left[\mathbf{I}_m - \mathbf{A}\left(\mathbf{A}^T\mathbf{A} + \lambda^2\mathbf{I}_m\right)^{-1}\mathbf{A}^T\right] \tag{۳۶}$$

۳-۳ روش "منحنیِ ال (LC)"

روش منحنی-ال، یکی از روش‌های انتخاب پارامتر پایدارسازی است که در آن نیازی به شناخت $\|\mathbf{e}\|_2$ وجود ندارد. این روش مناسب‌ترین ابزار گرافیکی برای تجزیه و تحلیل مسائل بدطرح گسسته با استفاده از تغییرات نرم جواب پایدار شده $\|\mathbf{x}_\lambda\|_2$ در مقابل نرم خطای متناظر به آن $\|\mathbf{Ax}_\lambda - \mathbf{b}\|_2$ است. لازم به توضیح است که پایهٔ همهٔ روش‌های پایدارسازی، برقراری تعادل بین پایداری جواب و خطا (بایاس) به‌وجود آمده تحت تأثیر پارامتر پایدارسازی است، که در این روش به‌صورت گرافیکی مطرح می‌شود. فرض بنیادی در روش منحنی ال آن است که نرم بردار جواب و نرم بردار باقی‌مانده، تابعی از پارامتر پایدارسازی‌اند. این مسئله در مورد همهٔ روش‌هایی که برای پایدارسازی ذکر خواهند شد نیز صادق است.

منحنی ال شامل یک قسمت قائم، یک قسمت با شیب کم در همسایگی این قسمت قائم و یک قسمت افقی است. قسمت افقی متناظر با جواب‌هایی است که پارامتر پایدارسازی بزرگی داشته و جواب تحت‌الشعاع اغتشاش (بایاس) ناشی از پایدارسازی است. قسمت قائم متناظر به جواب‌هایی است که پارامتر پایدارسازی کوچکی دارد و در نتیجه جواب تحت‌الشعاع اغتشاش ناشی از خطای مشاهدات $\mathbf{e}$ قرار دارد. هنگامی‌که تغییرات نرم بردار جواب $\|\mathbf{x}_\lambda\|_2$ را در مقابل $\|\mathbf{Ax}_\lambda - \mathbf{b}\|_2$ در مقیاس لگاریتمی رسم کنیم، منحنی حاصل غالباً دارای شکلی L گونه با

بخشی است که قسمت‌های افقی و قائم آن را از هم جدا می‌سازد. پارامتر بهینه پایدارسازی در این منحنی نقطهٔ $\left(\rho\left(\lambda\right),\eta\left(\lambda\right)\right)=\left(\log\left\|\mathbf{Ax}_\lambda-\mathbf{b}\right\|_2,\log\left\|\mathbf{x}_\lambda\right\|_2\right)$ است که منحنی در آن نقطه دارای حداکثر انحناء است. علت انتخاب این نقطه، برقراری تعادل بین اغتشاش ناشی از پایدارسازی و اغتشاش ناشی از خطای مشاهدات $\mathbf{e}$ در آن نقطه است. انحناء κ منحنی ال را می‌توان از رابطهٔ زیر به‌دست آورد:

$$\kappa\left(\lambda\right)=\frac{\rho'\eta''-\rho''\eta'}{\left(\left(\rho'\right)^2+\left(\eta'\right)^2\right)^{3/2}} \qquad (۳۷)$$

در رابطه فوق مشتق‌گیری نسبت به پارامتر پایدارسازی λ صورت می‌گیرد.

۳-۴ روش "هموارترین شیب (FS)"

روش نسبتاً جدیدتر در تعیین پارامتر پایدارسازی، مسائل بدطرح گسسته به روش تیخونوف، روش هموارترین شیب است که اولین اول بار از سوی "وو WU" ارائه شده است (وو، ۲۰۰۳). در هر مسئلهٔ بدطرح تعدادی از جواب‌ها، حساسیت کمتری نسبت به تغییرات پارامتر پایدارسازی دارند. روش هموارترین شیب این موضوع را از راه تحلیل منحنی تغییرات $\|\mathbf{x}\|_2$ نسبت $\log(1/\lambda)$ را ملاک تعیین برآورد پارامتر بهینه پایدارسازی قرار می‌دهد. بدین صورت که در گراف یادشده، نقطهٔ دارای شیب صفر، درحکم پارامتر بهینه انتخاب می‌شود. اگر روی این منحنی بیش از یک نقطه دارای کم‌ترین شیب باشد، در آن صورت حل مسئله نیاز به اطلاعات اضافی خواهد داشت.

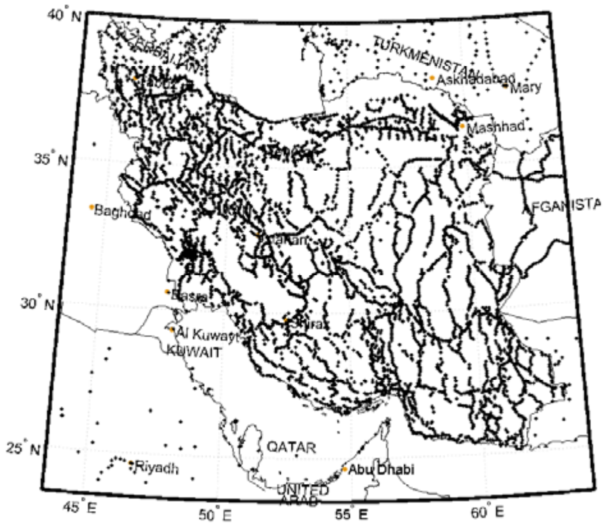
۴ بررسی موردی براساس داده‌های واقعی

در این بخش تجربهٔ یافتن پارامتر بهینهٔ پایدارسازی در تعیین ژئوئید بدون استفاده از فرمول استوکس در منطقهٔ جغرافیایی ایران ارائه خواهد شد. در تعیین ژئوئید بدون استفاده از فرمول استوکس، به‌منظور هارمونیک کردن مشاهده شتاب جاذبه اثر میدان مرجع بیضوی تا درجه و مرتبه ۳۶۰ و اثر میدان گریز و اثر جرم‌های در فاصله نزدیک از روی مشاهده شتاب ثقل حذف می‌شود. بعد از حذف این اثرات شتاب جاذبه تقاضلی حاصل می‌شود. کمیت شتاب جاذبه تفاضلی در خارج بیضوی مرجع یک کمیت هارمونیک است که از طریق انتگرال آبل-پواسون بیضوی به پتانسیل جاذبه تفاضلی در سطح بیضوی مرجع تبدیل می‌شود. مسئله انتقال شتاب جاذبه تفاضلی از طریق انتگرال آبل-پواسون بیضوی به سطح بیضوی مرجع یک مسئله ناپایدار است که بایستی پایدار شود (اردلان و گرافارند، ۲۰۰۴). موفقیت هر کدام از روش‌های پایدارسازی بستگی به برآورد پارامتر پایدارسازی دارد. در این بررسی از ۸۴۸۳ داده جاذبه از بانک داده BGI استفاده شده است (شکل ۲). با هدف تعیین پتانسیل جاذبه تفاضلی در یک شبکه‌ای $20'\times 20'$ روی بیضوی مرجع، تأثیر پارامتر پایدارسازی حاصل از روش‌های متفاوت با یکدیگر مقایسه شده است. ابعاد ماتریس ضرایب مجهول‌ها با توجه به تعداد مشاهدات و مجهول‌ها 8483×3100 است. از آنجایی که در این بررسی اطلاعاتی از خطای مشاهدات $\mathbf{e}$ در دست نبود، فقط روش‌های پایدارسازی غیر وابسته به این اطلاع مورد ارزیابی قرار گرفت. روش‌های مورد بررسی عبارت‌اند از: DP،GCV، LC و FS. در ابتدا لازم است که بدطرح بودن مسئله و برقراری شرط پیکار مورد بررسی قرار گیرد. می‌توان نشان داد که مسئله فوق بدطرح (Ill-posed) است و در شرط پیکار صدق می‌کند (صفری و الله‌توکلی، ۱۳۸۷). لذا این مسئله (از راه حل وارون انتگرال آبل-پواسون) دارای جواب است.

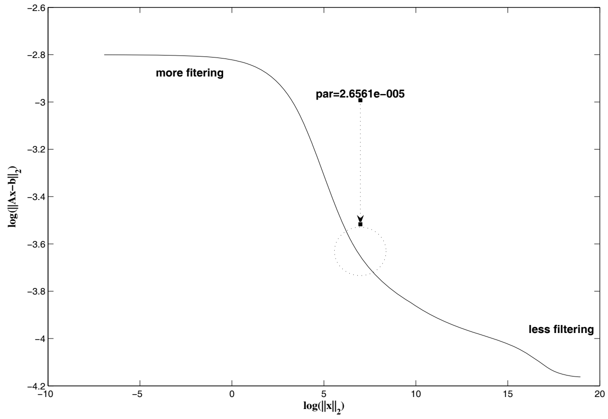
۱-۴ پایدارسازی و تعیین پارامتر پایدارسازی در بررسی موردی

در ابتدا برای تعیین پارامتر بهینه پایدارسازی از منحنی ال

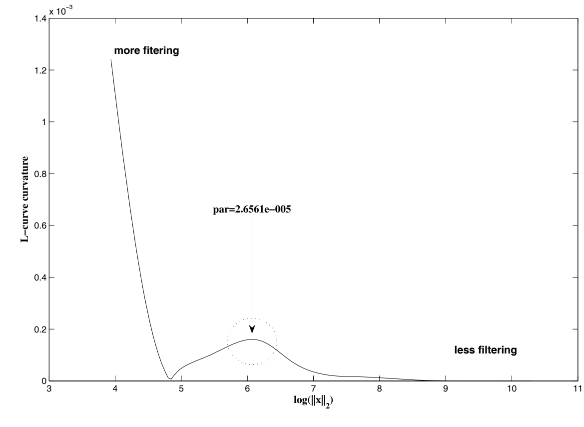
استفاده شد، که نتیجهٔ آن در شکل ۳ ملاحظه می‌شود. شکل ۴، نمودار تغییرات انحنای منحنی ال است. پارامتر پایدارسازی بهینه براساس این روش در جدول (۱) درج شده است.



شکل ۲. موقعیت ایستگاه‌های BGI در منطقه ایران.

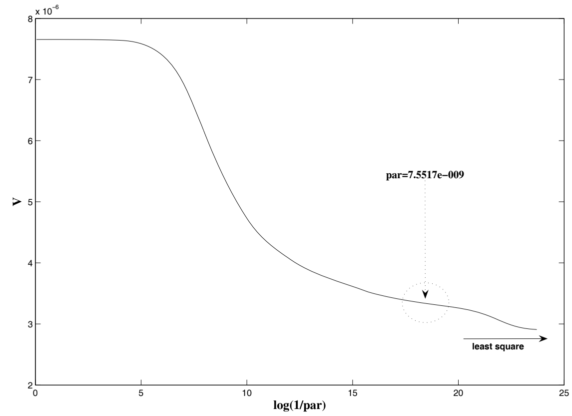


شکل ۳. گراف $\left(\log\left\|\mathbf{x}\right\|_2, \log\left\|\mathrm{A}\mathbf{x}-\mathbf{b}\right\|_2\right)$.

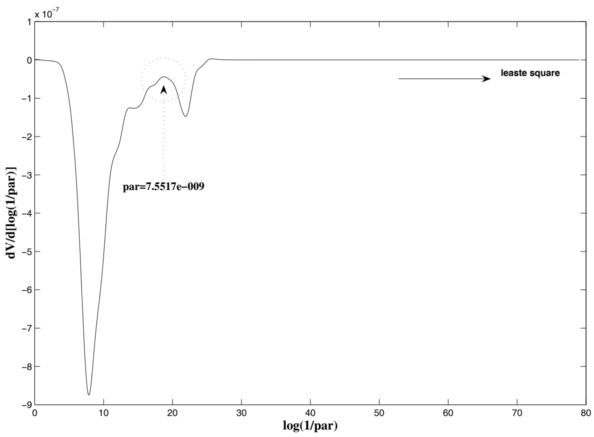


شکل ٤. نمودار انحنای منحنی ال.

روش دوم در این بررسی موردی، در تعیین پارامتر پایدارسازی، روش DP است. برای این منظور ابتدا نمودار تغییرات $\left(\log(\lambda^{-1}), \upsilon(\lambda)\right)$ مطابق (شکل ۵) و سپس نمودار تغییرات $\upsilon(\lambda)$ برحسب $\log(\lambda^{-1})$ مطابق شکل ۶ رسم شد. محل مشخص شده در این شکل نشان‌دهندهٔ نقطه‌ای از منحنی یاد شده است که دارای حساسیت کمتری نسبت به تغییرات λ است. از این راه پارامتر پایدارسازی بهینه در روش DP به‌دست می‌آید. مقدار این پارامتر نیز در جدول (۱) آورده شده است.



شکل ۵. روش DP. نمودار تغییرات $\left(\log(\lambda^{-1}), \upsilon(\lambda)\right)$.

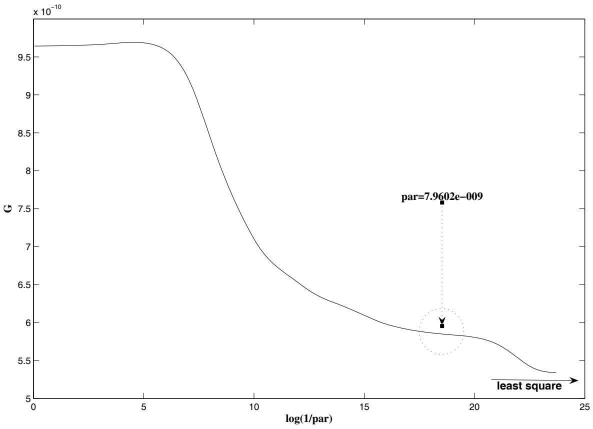


شکل ٦. نمودار تغییرات $\left(\log(\lambda^{-1}), \dfrac{d\upsilon}{d(\log(\lambda^{-1}))}\right)$.

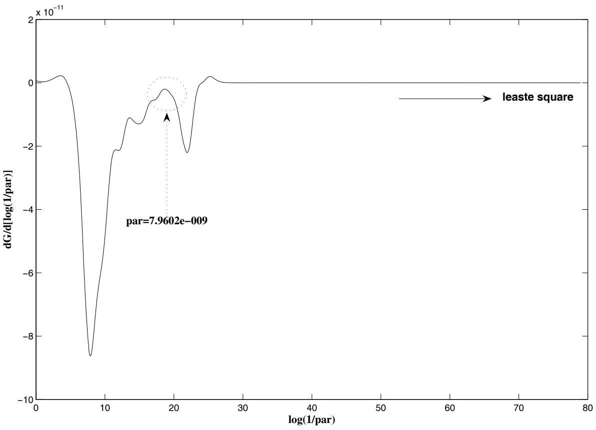
جدول ۱. خلاصه نتایج تعیین پارامتر بهینهٔ پایدارسازی به روش‌های متفاوت در مسئلهٔ موردی.

روش	λ	درجه آزادی مؤثر	$\|\mathbf{x}\|_2$
Least Square	0	5383	1.69×10^{8}
FS	1.77×10^{-11}	5929.5	1.01×10^{8}
DP	7.55×10^{-9}	6214.6	4.03×10^{5}
GCV	7.96×10^{-9}	6217.6	3.84×10^{5}
LC	2.66×10^{-5}	7050.5	456.33

روش سوم مورد آزمایش در تعیین پارامتر پایدارسازی روش GCV است. در این روش ابتدا نمودار تغییرات $\left(\log(\lambda^{-1}), \mathrm{G}(\lambda)\right)$ مطابق شکل ۷ رسم شد و نقطهٔ مینیموم نسبی این منحنی درحکم پارامتر پایدارسازی با استفاده از نمودار مشتق G برحسب $\log(\lambda^{-1})$ (شیب منحنی) مطابق شکل ۸ تعیین شد.

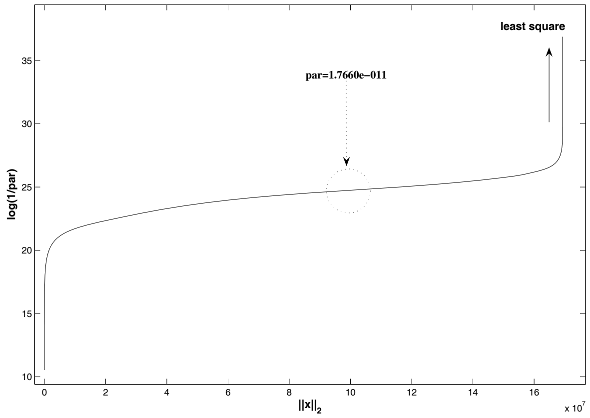


شکل ۷. روش GCV: تغییرات $\left(\log(\lambda^{-1}), \mathrm{G}(\lambda)\right)$.

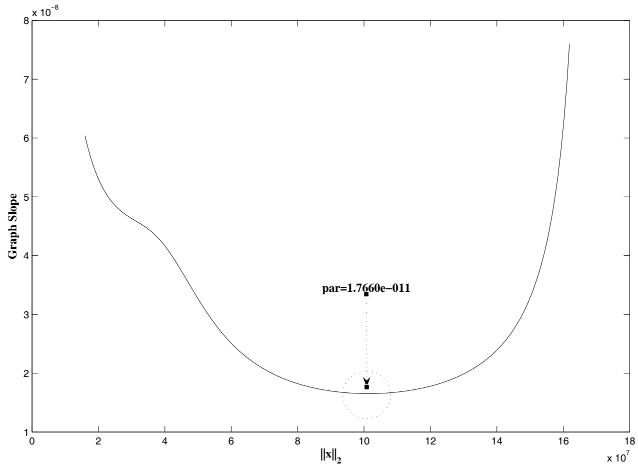


شکل ۸. نمودار تغییرات شیب منحنی $\left(\log(\lambda^{-1}), \mathrm{G}(\lambda)\right)$.

روش چهارم مورد بررسی برای تعیین پارامتر پایدارسازی بهینه روش FS است. بدین منظور نمودار تغییرات $\left(\|\mathbf{x}\|_2, \log(\lambda^{-1})\right)$ در شکل ۹ رسم شد. برای یافتن جواب با کمترین حساسیت نسبت به پارامتر پایدارسازی، منحنی تغییرات شیب نمودار $\left(\|\mathbf{x}\|_2, \log(\lambda^{-1})\right)$ برحسب $\|\mathbf{x}\|$ در شکل ۱۰ رسم شد و پارامتر بهینه استخراج و در جدول (۱) قرار داده شد.



شکل ۹. روش FS: گراف $\left(\|\mathbf{x}\|_2, \log(\lambda^{-1})\right)$.



شکل ۱۰. شیب گراف $\left(\|\mathbf{x}\|_2, \log(\lambda^{-1})\right)$ در روشFS.

همان‌طور که پیش‌تر نیز ذکر شد، هر یک از این روش‌ها یافتن پارامتر پایدارسازی ملاک خاص خود را به‌کار می‌برند و بدین لحاظ نمی‌توان در عمل بر اساس روش‌های متفاوت جواب‌های یکسانی را انتظار داشت. برای مثال روش منحنی ال بر پایهٔ ایجاد تعادل بین پایداری جواب و ایجاد بایاس بر اثر پارامتر پایدارسازی استوار است. در روش DP پارامتر بهینه به نحوی اختیار می‌شود که برآوردکنندهٔ فاکتور واریانس اولیهٔ مسئله، حساسیت کمتری نسبت به تغییرات پارامتر پایدارسازی از خود نشان دهد. در روش GCV پارامتر بهینه، پارامتری است که حساسیت کمتری نسبت به از دست دادن اطلاعات داشته باشد. در روش FS یافتن پارامتر بهینهٔ پایدارسازی بر اساس، ملاک کمترین تغییرات در جواب واقعی مسئله بر اساس تغییرات پارامتر پایدارسازی است.

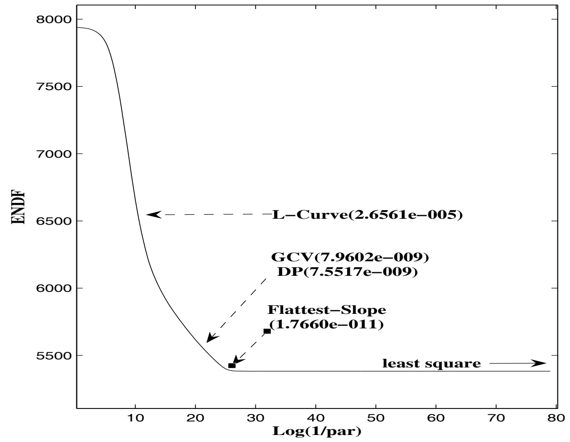
در شکل ۱۱ (نمودار سمت چپ) تغییرات درجه آزادی مؤثر ENDF نسبت به پارامتر پایدارسازی و شکل ۱۱ (نمودار سمت راست) تغییرات انحنای نمودار سمت چپ است. همان‌گونه که در شکل ۱۱ (نمودار سمت

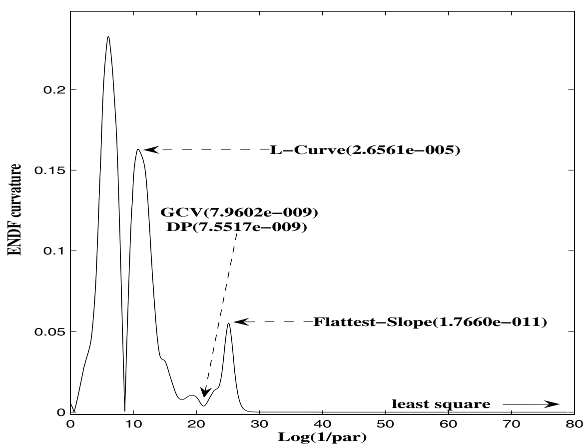
چپ) مشاهده می‌شود با افزایش یافتن پارامتر پایدارسازی، درجه آزادی مؤثر مسئله افزایش می‌یابد. به عبارت دیگر افزایش پارامتر پایدارسازی را می‌توان معادل پایدارشدن مسئله دانست. در نمودار تغییرات انحنای منحنی درجه آزادی مؤثر (شکل ۱۱ سمت راست) مشاهده می‌شود که هر یک از روش‌های تعیین پارامتر جایگاه خاصی در نمودار تغییرات انحنای دارند و در بین روش‌های مورد بررسی، روش منحنی L دارای بزرگ‌ترین و روش FS دارای کوچک‌ترین مقدار پارامتر پایدارسازی است.

با توجه به روابط (۱۳) و (۲۷) دیده می‌شود که ضرایب فیلتر برای پارامترهای $\sigma_1 \ll \lambda$ برابر صفر می‌شود و برای پارامترهای $\lambda \ll \sigma_n$ برابر یک خواهد شد. بنابراین می‌توان دو پارامتر λ_{Max} و λ_{Min} طوری یافت که:

$$\lambda_{Max} \gg \sigma_1 \geq \ldots \geq \sigma_n \gg \lambda_{Min} \geq 0 \qquad (۳۸)$$

و به این طریق بازه $(\lambda_{Min}, \lambda_{Max})$ می‌تواند ملاک جستجوی پارامتر بهینهٔ پایدارسازی قرار گیرد، چرا که با توجه به روابط (۱۳) و (۲۷) برای پارامتر خارج از بازه‌ای $(\lambda_{Min}, \lambda_{Max})$ (یعنی $\left(-\infty, \lambda_{Min}\right) \cup \left(\lambda_{Max}, +\infty\right)$) یا جوابی برابر صفر به‌دست آمده و یا جواب خارج از محدودهٔ جواب‌های مورد انتظار (مانند جواب حاصل از روش کم‌ترین مربعات در یک مسئلهٔ ناپایدار) خواهد بود. با توجه به ضرایب فیلتر به‌دست آمده و رابطه (۳۳)، درجه آزادی مؤثر برای پارامترهای $\lambda \gg \sigma_1$ برابر تعداد مشاهدات (m) و برای پارامترهای $\lambda \ll \sigma_n$، برابر درجه آزادی روش کم‌ترین مربعات ($m-n$) خواهد بود. بنابراین درجه آزادی مؤثر می‌تواند ملاکی در تعیین محدودهٔ جستجوی پارامتر پایدارسازی قرار گیرد. این موضوع (بازهٔ جستجو) که در شکل ۱۱، به خوبی مشخص است، در همهٔ روش‌های بررسی شده، ملاک جستجو قرار گرفت.

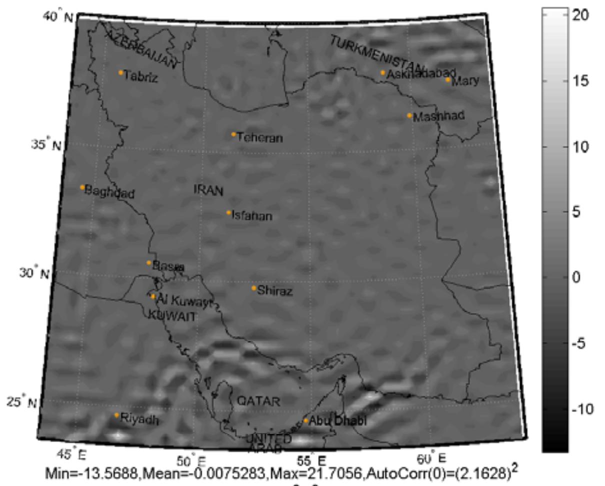




شکل ۱۱. نمودار تغییرات درجهٔ آزادی مؤثر ENDF برحسب لگاریتم عکس پارامتر پایدارسازی (نمودار سمت چپ) و تغییرات انحنای نمودار یادشده (نمودار سمت راست).

۴-۲ بررسی عددی براساس داده‌های شبیه‌سازی شده

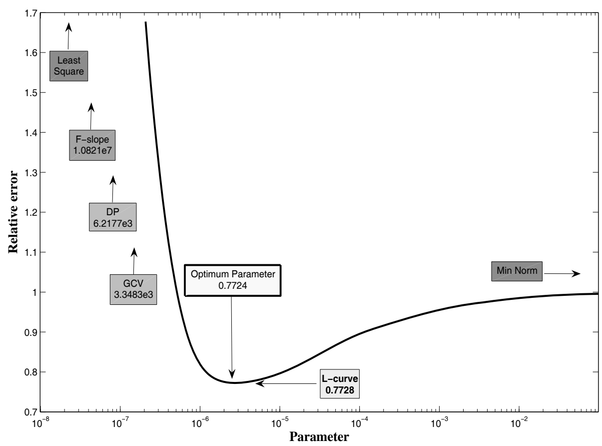
تا به اینجا چهار روش برای تعیین پارامتر بهینهٔ پایدارسازی ارائه، و انتقال به سمت پایین شتاب جاذبه تفاضلی در محدودهٔ جغرافیایی ایران برای تعیین ژئوئید بدون استفاده از فرمول استوکس مورد بررسی قرار گرفت. نکته‌ای که تا به اینجا به‌طور قاطع در مورد آن نمی‌توان تصمیم‌گیری کرد، روش برآورد پارامتر پایدارسازی بهینه، در بین چهار روش، در مسئلهٔ انتقال به سمت پایین یادشده است. لذا برای پاسخ به این پرسش دست به طراحی یک مسئلهٔ شبیه‌سازی شده زدیم. بدین صورت که با استفاده از یک مدل ژئوپتانسیل با درجه و مرتبه زیاد در محل نقاط دادهٔ BGI، شتاب جاذبه شبیه‌سازی شده تولید شد. به‌منظور تولید شتاب جاذبه تفاضلی شبیه‌سازی از روی این مشاهدات شتاب جاذبه شبیه‌سازی شده اثر میدان مرجع حذف شد. برای انتخاب بهترین پارامتر پایدارسازی، پتانسیل جاذبه تفاضلی روی سطح بیضوی مرجع به دو طریق محاسبه شد (۱) از راه به‌کارگیری مستقیم مدل ژئوپتانسیلی و (۲) از راه انتقال به سمت پایین پایدار شده به چهار روش یاد شده. بدین شکل ملاکی برای تعیین خطای چهار روش مورد بررسی به‌دست آمد. مدل GPMAR حاصل تلاش ونتسل (ونتسل، ۱۹۹۸) درحکم مدل ژئوپتانسیلی انتخاب شد. این مدل ژئوپتانسیل شامل ضرایب هارمونیک‌های کروی تا درجه و مرتبه ۷۲۰ است. از ضرایب تا درجه و مرتبهٔ ۳۶۰ این مدل درحکم مدل جاذبهٔ مرجع استفاده و از حذف این میدان از میدان ۷۲۰ این مدل، مشاهدات جاذبهٔ تفاضلی در نقاط مشاهدهٔ BGI تولید شد. ارتفاع موجود در فایل BGI به این شتاب‌های جاذبهٔ شبیه‌سازی شده نسبت داده شد. سپس مسئلهٔ انتقال به سمت پایین این مشاهدات تفاضلی شبیه‌سازی شده، بر اساس حل معکوس انتگرال آبل- پواسون گسستهٔ بیضوی با بهره‌گیری از چهار روش یاد شده برای پایدارسازی مسئله مورد استفاده قرار گرفت. در انتقال به سمت پایین مطابق بررسی موردی با مشاهدات واقعی، شبکهٔ $20' \times 20'$ روی بیضوی مرجع برای تعیین پتانسیل جاذبهٔ تفاضلی در نظر گرفته شد. سپس از راه مدل ژئوپتانسیلی و انتقال به سمت پایین پتانسیل جاذبهٔ روی نقاط شبکهٔ پیش‌گفته تعیین شد. شکل ۱۲ پتانسیل جاذبهٔ تفاضلی حاصل از مدل است.



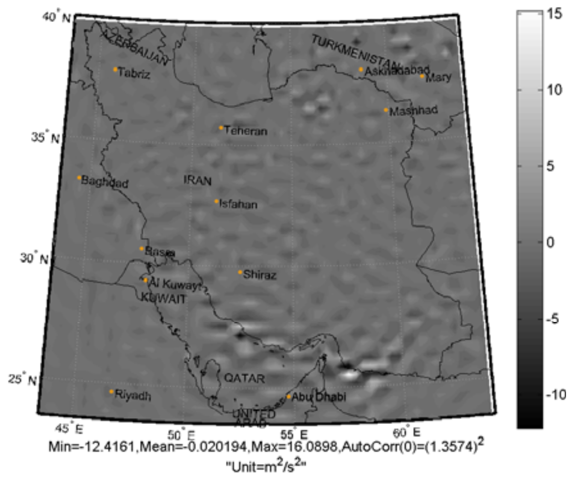
شکل ۱۲. پتانسیل جاذبهٔ تفاضلی روی بیضوی حاصل از مدل.

به این ترتیب با توجه به معلوم بودن مجهول‌ها (پتانسیل جاذبهٔ تفاضلی در شبکه $20' \times 20'$ روی بیضوی مرجع) از راه مدل، خطای نسبی ($\left\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^{\mathrm{exact}}\right\| / \left\|\mathbf{x}^{\mathrm{exact}}\right\|$) انتقال به سمت پایین با استفاده از چهار روش برآورد پارامتر پایدارسازی بهینه محاسبه شد. این خطاهای نسبی برای چهار روش، در شکل ۱۳ ارائه شده است.

به این طریق در بین روش‌های برآورد پارامتر بهینه پایدارسازی برنده روشی است، که کوچک‌ترین خطای نسبی را به‌وجود آورده باشد. این پارامتر با توجه به شکل ۱۳ مقدار 2.70×10^{-6} است، که هیچ‌کدام از روش‌های بررسی شده برای برآورد پارامتر پایدارسازی بهینه دقیقاً این مقدار را تولید نکرده‌اند، اما روش منحنی ال نزدیک‌ترین برآورد را نتیجه داده است. در جدول (۲) خلاصه نتایج مربوط به این بررسی شبیه‌سازی شده آورده شده است. همچنین نتیجهٔ انتقال به سمت پایین بر اساس روش منحنی ال در شکل ۱۴ ارائه شده است.



شکل ۱۳. نمودار خطای نسبی انتقال به سمت پایین برحسب پارامتر پایدارسازی و جایگاه هر یک از روش‌های به‌کار رفته در برآورد پارامتر پایدارسازی بهینه.



شکل ١٤: مجهول‌های تفاضلی برآورد شده را به روش تعیین پارامتر پایدارسازی با معیار منحنی ال با داده‌های شبیه‌سازی شده.

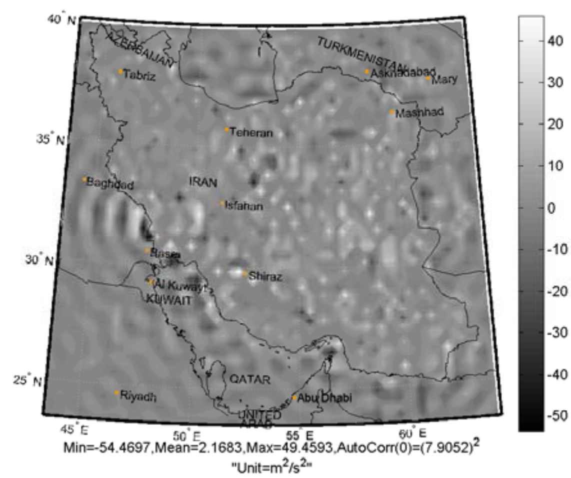
جدول ۲. خلاصه نتایج تعیین پارامتر بهینهٔ پایدارسازی به روش‌های متفاوت در مثالِ شبیه‌سازی شده.

روش	λ	درجه آزادی موثر	خطای نسبی	$\|\mathbf{x}\|_2$
کم‌ترین مربعات	0	5383	2.20×10^{7}	2.65×10^{9}
FS	2.21×10^{-14}	5562.1	1.08×10^{7}	1.30×10^{9}
DP	2.14×10^{-11}	5936.6	6.22×10^{3}	7.49×10^{5}
GCV	6.27×10^{-11}	5980.1	3.35×10^{3}	4.03×10^{5}
LC	3.15×10^{-6}	6669.5	0.773	75.57
پارامتر واقعی	2.70×10^{-6}	6651	0.772	76.77

۵ بحث و نتیجه‌گیری

از مقایسه نتایج ارائه شده در جدول ۲ برای روش‌های متفاوت پایدارسازی ملاحظه می‌شود که، در مسئلهٔ انتقال به سمت پایین تعیین ژئوئید بدون استفاده از فرمول استوکس، روش منحنی ال (LC) کوچک‌ترین خطای نسبی، بزرگ‌ترین درجه آزادی مؤثر و نزدیک‌ترین پارامتر به پارمتر پایدارسازی واقعی را برآورد کرده است.

همچنین از مقایسه شکل‌های ۱۲ و ۱۴ و اطلاعات آماری ارائه شده در این شکل‌ها بیانگر نزدیکی مجهول‌ها برآورد شده به روش LC به مقدار واقعی پارامترهای مجهول است. بنابراین، روش تعیین پارامتر بهینهٔ پایدارسازی در انتقال به سمت پایین مسئلهٔ تعیین ژئوئید، بدون استفاده از فرمول استوکس را می‌توان در مقایسه با سه روش تعیین پارامتر دیگر درحکم بهترین روش معرفی و به‌کارگیری آن را در مسئله تعیین ژئوئید به روش یاد شده توصیه کرد. بدین لحاظ در خاتمه نتیجهٔ انتقال به سمت پایین مشاهدات BGI را با استفاده از روش تعیین پارامتر پایدارسازی منحنی ال برای منطقهٔ جغرافیایی ایران ($43.5\mathrm{E}\le\lambda\le64.5\mathrm{E}, 23.5\mathrm{N}\le\phi\le40.5\mathrm{N}$) برای یک شبکه $20'\times20'$ روی بیضوی مرجع در شکل ۱۵ درحکم نتیجهٔ نهایی این تحقیق، در بررسی موردی واقعی، ارائه می‌دهیم.



شکل ۱۵. پتانسیل جاذبهٔ تفاضلی حاصل از انتقال به سمت پایین مشاهدات جاذبه BGI، واقع در منطقه جغرافیایی ایران به روش منحنی ال، درحکم نتیجهٔ نهایی بررسی موردی واقعی.

تشکر و قدردانی

بدین‌وسیله از معاونت پژوهشی دانشگاه تهران به سبب حمایت مالی از این تحقیق در قالب طرح پژوهشی شمارهٔ ۸۱۵۱۰۰۷/۱/۰۱ تشکر و قدردانی می‌شود.

منابع

صفری، ع.، الله‌توکلی، ی.، ۱۳۸۷، بررسی شرط پیکارد در مسئله انتقال به سمت پایین در تعیین ژئوئید بدون استفاده از روش استوکس، نشریه دانشکده فنی دانشگاه تهران دوره ۴۲ شماره ۳.

Ardalan, A. A., 1999, High resolution regional geoid computation in the world geodetic datum 2000, based upon collocation of linearized observational functionals of the type GPS, gravity potential and gravity intensity , Ph.D. thesis, stuttgart university.

Ardalan, A. A., and Grafarend, E.W., 2004, High-resolution regional geoid computation without applying Stokes's formula: a case study of the Iranian geoid. J. Geodesy, **78**, 138-156.

Baker, C. T. H., 1977, The numerical treatment of integral equations. Clarendon press, Oxford.

Bouman, J., 1998, Quality of regularization methods. Tech. Rep. 98.2, DEOS, Delft University Press, TU Delft, Delft.

Ditmar, P., Klees, R., and Kostenko, F., 2003, Fast and accurate computation of spherical harmonic coefficients from satellite gravity gradiometry data. J. Geodesy, **76**, 690-705.

Engl, H., Hanke, M., and Neubauer, A., 1996, Regularization of inverse problems. Kluwer Academic Press.

Freeden, W., and Pereverzev, S., 2001, Spherical Tikhonov Regularization Wavelets in Satellite Gravity Gradiometry with Random Noise, J. Geodesy, **74**, 730-736.

Grafarend, E. W., 2001, The spherical horizontal and spherical vertical boundary value problem-vertical deflections and geoidal undulations-the complete Meissl diagram. J. Geodesy, **75**, 363-390.

Grafarend, E. W., and Ardalan A. A., 1999, World Geodetic Datum 2000, J. Geodesy, **73**, 611-623.

Groetsch, C. W., 1984, The theory of Tikhonov regularization for Fredholm integral equations of the first kind. Pitman.

Hadamard, J., 1923, Lectures on Cauchy's Problem in Linear Parial Di_erential Equations. Yale University Press, New Haven.

Hanke, M., 1995, Conjugate gradient type methods for ill-posed problems. Pitman Research Notes in Mathematics Series, Longman Scientific & Technical, Harlow, Essex, UK.

Hansen, P. C., 1990, The discrete Picard condition for discrete ill-posed problems. BIT, **30**, 658-672.

Hansen, P. C., 1994, Regularization Tools Version 3.1 (for Matlab Version 6.0): A Matlabpackage for analysis and solution of discrete ill-posed problems. Department of Mathematical Modelling, Technical University of Denmark, 3.1 edn. URL http://www.imm.dtu.dk/~pch/Regutools/index.html.

Hansen, P. C., 1996, Rank-Deficient Discrete ill-posed problems. Doctoral Dissertation Department of mathematical modeling, building 305, Technigul University of Denmark, DK-2800 Lyngby Denmar.

Hansen, P. C., 1998, Rank-deficient and discrete ill-posed problems. SIAM lecture notes, Philadelphia.

Hestenes, M. R., and Stiefel, E, 1952, Methods of conjugate gradients for solving linear system, J. Res. Bur Standards, **49**, 409-436.

Hoerl, A., and Kennard, R., 1970, Ridge regression: biased estimation for nonorthogonal problems. Technometrics, **12**, 55-67.

Hofmann, B., 1993, On the ill-posedness of nonlinear problems. Tech. Rep. Preprint No. A-17, Freie Universit¨at Berlin, Fachbereich Mathematik.

Huang, J., 2002, Computational methods for the discrete downward continuation of the Earth gravity and e_ects of lateral topographical mass density variations on gravity and the geoid. Ph.D. thesis, Department of Geodesy and Geomatics Engineering The University of New Brunswick, Fredericton, New Brunswick.

Ilk, K. H., 1993, Regularization for high resolution gravity field recovery by future satellite techniques. In: Inverse Problems: Principles and Applications in Geophysics, Technology and Medicine, pp. 189-214.

Ilk, K. H., Kusche, J., and Rudolph, S., 2000, A contribution to data combination in Ill-posed downward continuation problems, IUGG 99 Joint Symposium JSA-37 (Earth's Gravity and numerical solution of certain integral equations of the first kind. J. Assoc. comput. Mach., **9**, 84-96.

Rasmussen, J. M., 2001, Compact linear operators and krylov subspace methods. Chapter 3. Thesis in the M.Sc degree.

Rauhut, A., 1992, Regularization methods for the solution of the inverse Stokes problem. Ph.D. thesis, Department of Geomatics Engineering: The University of Calgary.

Rummel, R, Schwarz, K. P., and Gerstl, M., 1979, Least squares collocation and regularization: B. Geod. **53**, 343-361. Bibliography 148.

Safari, A., 2004, Ellipsoidal boundary value problem for geoid computations via modulus of gravity, astronomical longitude, astronomical latitude, and satellite altimetry observations. Ph.D. thesis. Department of Surveying and Geomatics Engineering, University of Tehran (In Persian).

Safari, A., and Ardalan, A. A., 2004, On the solution existence of downward continuation Problem in ellipsoidal geoid computation without applying stokes formula. Geophysical research abstracts, volume 6, 2004. EGU-1st General Assembly.

Safari, A., Ardalan, A. A., and Grafarend, E. W., 2005, A new ellipsoidal gravimetric, satellite altimetry, astronomic boundary value problem; case study: geoid of Iran. Accepted for publication in J. Geodyn., **39**, 545-568.

Schneider, F., 1996, The solution of linear inverse problems in satellite geodesy by means of spherical spline approximation. J. Geodesy, **71**, 2-15.

Schneider, F., 1997, Inverse problems in satellite geodesy and their approximate solution by splines and wavelets. Ph.D Thesis, University of Kaiserslautern, Fachbereich Mathematik, No. D386, Shaker Verlag, Kaiserslautern, Germany.

Schwarz, K. P., 1973, Investigations on the downward continuation of aerial gravity data. Technical Report 204, The Ohio State University, Department of Geodetic Science, Columbus, Ohio.

Schwarz, K. P., 1979, Geodetic improperly posed problems and their regularization. Boll. Geod. Sci., **38**, 389-416.

Stakgold, I., 1979, Green’s functions and boundary value problems. John Wiley & Sons, Inc.

Tikhonov, A. N., 1963, Solution for incorrectly formulated problems and the regularization method. Sov Math Dokl, **4**, 1035-1038.

Magnetic Field from Space), J. Geodyn., **33**, 75-99.

Kern, M., Schwarz, K. P., and Sneeuw, N., 2003, A study on the combination of satellite, airborne,and terrestrial gravity data. J. Geodesy, **77**, 217-225.

Klees, R., Bouman, J., Koop, R., and Visser, P. N. A. M., 2000, Regularization and downward continuation, In: Sünkel (ed.), From Eötvös to Milligal, Final Report, ESA/ESTEC, Contract No. 13392/98/LN/GD, Graz, Austria, 2000, pages 72-101.

Kirsch, A., 1996, An introduction to the mathematical theory of inverse problems. Chapter 2, Spriger-verlag.Vol. 120, New York.

Kusche, J., 2001a, Inverse Probleme bei der Gravitationsfeldbestimmung mittels SST- und SGG-Satellitenmissionen, Habilitationsarbeit Universität Bonn.

Kusche, J., 2001b, On fast multigrid iteration techniques for the solution of normal equations in satellite gravity recovery, IUGG 99 Joint Symposium JSA-37 (Earth's Gravity and Magnetic Field from Space), erscheint in: J. Geodyn., **33**, 173-186.

Kusche, J., 2001c, Implementation of multigrid solvers for satellite gravity anomaly recovery, J. Geodesy, **74**, 773-782.

Kusche, J., and Rudolph, S., 2000, The multigrid method for satellite gravity field recovery, in: K. P. Schwarz (ed.), Geodesy beyond year 2000, Proc. IAG General Assembly, Birmingham.

Kusche, J., and Klees, R., 2002, Regularization of gravity field estimation from satellite gravity gradients, J. Geodesy, **76**, 359-368.

Lanczos, C., 1961, Linear Diffrential Oparators. Van Nostrand, New York.

Martinec, Z., 1996, Stability investigations of a discrete downward continuation problem for geoid determination in the Canadian Rocky Mountains. Journal of Geodesy, **70**, 805-828.

NIMA,2003,http://docs.lib.duke.edu/maps/guides/govt.html.

Novak, P., and Heck, B., 2002, Downward continuation and geoid determination based on band-limited airborne gravity data. J. Geodesy, **76**, 269-278.

Novak, P., Kern, M., Schwarz, K. P., and Heck, B., 2001b, The determination of the geoid from airborne gravity data. Tech. Rep. UCGE No. 30013, Department of Geomatics Engineering, Calgary.

Phillips, D. L., 1962, A technique for the

Tikhonov, A. N., and Arsenin, V. Y., 1977, Solutions of ill-posed problems. V. H. Winston and Sons; A Halsted Press Book, New York, Toronto, London, Syndey.

Vancek, P., Sun, W., and Martinec, Z., et al., 1996, Downward continuation of Helmert’s gravity. J. Geodesy, **71**, 21-34.

Vanicek, P., Sun, W., Ong, P., Martinec, Z., Najafi M., Vajda, P., ter and Horst B., 1996, Downward continuation of Helmert’s gravity. J. Geodesy, **71**, 21-34.

Wenzel, H. G., 1998, Ultra hochauflösende Kugelfunktionsmodelle GPM98A und GPM98B des Erdschwerefeldes. In: Progress in Geodetic Science, W. Freeden (ed.) pp. 323-331, Shaker Verlag, Aachen 1998.

Wong, J. C. F., 2000, On Picard criterion and the well-posed nature of harmonic downward continuation. Masterthesis, Department of Geodesy and Geomatics Engineering, The University of New Brunswick.

WU, L., 2003, A parameter choice method for tikhonov tegularization. ETNA Kent State University, Vol16, pp. 107-128.

Xu, P., and Rummel, R., 1994, Generalized ridge regression with applications in determination of potential fields. Manuscr. Geodaet., **20**, 8-20.