فیزیک زمین و فضا، دوره ۴۳، شماره ۱، بهار ۱۳۹۶، صفحهٔ ۲۰۹-۲۲۸

حل عددی معادلات آب کم‌عمق با روش مک‌کورمک فشردهٔ مرتبهٔ چهارم

رسول میرزائی شیری[۱]، سرمد قادر[۲*]، مجید مزرعه فراهانی[۲] و عباسعلی علی‌اکبری بیدختی[۳]

۱. دانشجوی دکتری هواشناسی، مؤسسهٔ ژئوفیزیک دانشگاه تهران، ایران
۲. دانشیار، گروه فیزیک فضا، مؤسسهٔ ژئوفیزیک دانشگاه تهران، ایران
۳. استاد، گروه فیزیک فضا، مؤسسهٔ ژئوفیزیک دانشگاه تهران، ایران

(دریافت: ۹۴/۱۱/۱۳، پذیرش نهایی: ۹۵/۷/۲۷)

چکیده

کار حاضر، به اعمال روش مک‌کورمک فشرده مرتبهٔ چهارم برای حل عددی شکل پایستار معادلات آب کم‌عمق می‌پردازد. گسسته‌سازی مکانی روش مک‌کورمک فشردهٔ مرتبهٔ چهارم با دو طرحواره به نام‌های ۴/۲ و ۴/۴ و پیمایش زمانی این روش نیز، با روش‌های اصلی و رونگ–کوتا معرفی می‌شوند. یک معادلهٔ سادهٔ خطی، یعنی، معادلهٔ فرارفت یک‌بعدی که دارای حل تحلیلی است، با استفاده از روش‌های مک‌کورمک مرتبهٔ دوم و مک‌کورمک فشردهٔ مرتبهٔ چهارم با طرحواره‌های ۴/۲ و ۴/۴، با پیمایش‌های زمانی اصلی و رونگ–کوتا حل شده و مقادیر خطای کلی آن‌ها، با استفاده از نُرم‌های قدرمطلق، مربع و بی‌نهایت، با یکدیگر مقایسه می‌شود. این مقایسه، برتری روش‌های فشردهٔ مرتبهٔ چهارم را، از نظر دقت عددی، به روش مرتبهٔ دوم نشان می‌دهد. در ادامه شکل پایستار معادلات آب کم‌عمق در حالت دوبعدی و غیرخطی، با استفاده از این روش‌ها، حل شده و نتایج آن نیز برای دو آزمون موردی که توسط محققان دیگر، با روش‌های دیگر و به‌طور عددی حل شده‌اند، مقایسه می‌شود. مقایسهٔ کمی و کیفی نتایج به‌دست‌آمده نشان از عملکرد مناسب روش مک‌کورمک فشردهٔ مرتبهٔ چهارم دارد. همچنین نتایج نشان می‌دهند که پیمایش زمانی رونگ–کوتای مرتبهٔ چهارم در طرحوارهٔ ۴/۴ روش مک‌کورمک فشردهٔ مرتبهٔ چهارم، در مقایسه با بقیهٔ روش‌های اعمال‌شده در این کار، پاسخ‌های مناسب‌تری دارد.

واژه‌های کلیدی: روش مک‌کورمک فشرده، دقت عددی، رونگ–کوتا، معادلات آب کم‌عمق.

۱. مقدمه

معادلات آب کم‌عمق بیان‌کنندهٔ حرکت یک شارهٔ یک‌لایه‌ای با چگالی ثابت است که ترازمندی هیدروستاتیک با تقریب خوبی در آن برقرار است. این معادلات در مباحث هواشناسی و اقیانوس‌شناسی کاربرد دارند. معادلات آب کم‌عمق در مورد جو خشک و بدون اصطکاک، با چگالی ثابت، معادلات تکانه و معادلهٔ پیوستگی را شامل می‌شوند که با استفاده از آن‌ها می‌توان سرعت باد، ارتفاع ژئوپتانسیلی و کمیت‌هایی مانند تاوایی و تابع جریان را در زمان‌های بعد پیش‌بینی کرد. یکی از کاربردهای این معادلات برای حل عددی و توسعه و مقایسهٔ الگوریتم‌های جدید می‌باشد؛ البته در کار حاضر از شکل پایستار این معادلات برای حل عددی استفاده می‌شود. برای حل عددی شکل پایستار این معادلات، روش‌های مختلف عددی به کار گرفته شده است (به‌عنوان مثال گوستافسون، ۱۹۷۱؛ هوگتون و همکاران، ۱۹۶۶؛ ناون و ریفاگن، ۱۹۷۹؛ قادر و اصفهانیان، ۱۳۸۵).

معادلات آب کم‌عمق و به‌ویژه شکل پایستار آن‌ها توسط محققان بسیاری به روش‌های مختلف عددی حل شده است. مثلا هوگتون و همکاران (۱۹۶۶) با روش لکس–وندروف این معادلات را حل کرده‌اند. گوستافسون (۱۹۷۱) با روش ADI (Alternating Direction Implicit)، این معادلات را حل نمود و ناون و ریفاگن (۱۹۷۹) با استفاده از روش مرتبهٔ چهارم فشردهٔ ضمنی، شکل پایستار این معادلات را حل کرده‌اند. در سطح ملی

*نگارنده رابط: E-mail: sghader@ut.ac.ir

نیز قادر و اصفهانیان (۱۳۸۵) این معادلات را با استفاده از روش ابرفشردهٔ مرتبهٔ ششم روی صفحهٔ β حل کرده‌اند.

در سال‌های اخیر گرایش به‌سمت افزایش دقت در شبیه‌سازی عددی شارش‌های جوی و اقیانوسی با توجه به پیچیدگی‌های فراوانی که در این شارش‌ها وجود دارد، افزایش یافته است. روش‌های فشرده با توجه به کارایی مناسبی که در شبیه‌سازی عددی حرکت شاره‌ها در سایر شاخه‌های دینامیک شاره‌ها از خود نشان داده‌اند، در تحقیقات سال‌های اخیر مورد توجه قرار گرفته‌اند (از جمله اصفهانیان و همکاران، ۲۰۰۵؛ محب‌الحجه و دریچل، ۲۰۰۷؛ قادر و همکاران، ۲۰۰۹؛ قادر و نوردشتروم، ۲۰۱۵). البته اغلب روش‌های فشرده از نوع روش‌های مرکزی هستند.

روش مک‌کورمک نیز برای اولین بار توسط شخصی به همین نام در سال ۱۹۶۹ ابداع شد (به‌عنوان مثال هافمن، ۲۰۰۱). هیکسون و ترکل (۲۰۰۰) روش مک‌کورمک فشردهٔ مرتبهٔ چهارم را معرفی کردند و عملکرد آن را برای چند مسئله مدل نشان دادند. فلاحت (۱۳۸۷)، با این روش شکل پایستار معادلات غیرهیدروستاتیک و تراکم‌پذیر جو بی‌دررو را حل کرده است. مسئلهٔ تنظیم راسبی غیرخطی ناپایای دوبعدی نیز توسط قادر و همکاران (۱۳۸۹) با استفاده از این روش حل شده است. جوان‌نژاد و همکاران (۱۳۹۵) نیز شکل پایستار معادلات تراکم‌پذیر دوبُعدی و ناآب‌ایستایی جو را با استفاده از روش مک‌کورمک فشردهٔ مرتبهٔ چهارم، حل کرده‌اند.

هدف کار حاضر، به‌کارگیری روش مک کورمک فشردهٔ مرتبهٔ چهارم برای حل عددی شکل پایستار معادلات آب کم‌عمق دوبعدی است. فرمول‌بندی روش فشردهٔ مک‌کورمک مرتبهٔ چهارم به‌صورت دونقطه‌ای است که همزمان با افزایش دقت روش می‌تواند در کاهش حجم محاسبات نیز مؤثر باشد؛ چراکه مانند روش‌های فشردهٔ مرکزی نیازی به وارون کردن یک دستگاه معادلات سه‌قطری (یا با تعداد قطرهای بیشتر) نیست.

۲. معادلات آب کم‌عمق

شکل بسیط معادلات آب کم‌عمق دوبعدی به‌صورت رابطه (۱) نوشته می‌شود (به‌عنوان مثال ولیس، ۲۰۰۶):

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}-fv+g\frac{\partial h}{\partial x}=0\\
&\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+fu+g\frac{\partial h}{\partial y}=0\\
&\frac{\partial h}{\partial t}+u\frac{\partial h}{\partial x}+v\frac{\partial h}{\partial y}+h\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0
\end{aligned}
\qquad (۱)
$$

شکل پایستار معادلات آب کم‌عمق دوبعدی را می‌توان به صورت برداری (رابطه ۲) نوشت (هُگتون و همکاران، ۱۹۶۶):

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t}+\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x}+\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial y}=f\mathbf{W};\quad \mathbf{Q}=\left(h,hu,hv\right)^T;\\
&\mathbf{R}=\left(hu,hu^2+\frac{1}{2}gh^2,huv\right)^T;\\
&\mathbf{S}=\left(hv,hvu,hv^2+\frac{1}{2}gh^2\right)^T;\quad \mathbf{W}=\left(0,hv,-hu\right)^T
\end{aligned}
\qquad (۲)
$$

که در آن g، شتاب گرانی است و بالانویس T، نشانگر ترانهاده است. h، بیانگر ارتفاع است و u و v، به‌ترتیب نشان‌دهندهٔ سرعت‌های مداری و نصف‌النهاری می‌باشند. همچنین، f، پارامتر کوریولیس را نشان می‌دهد. شکل پایستار معادلات آب کم‌عمق یک‌بعدی را نیز می‌توان به‌شکل برداری (رابطه ۳) نوشت:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t}+\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x}=0;\quad \mathbf{Q}=\left(h,hu\right)^T;\\
&\mathbf{R}=\left(hu,hu^2+\frac{1}{2}gh^2\right)^T
\end{aligned}
\qquad (۳)
$$

۳. روش مک‌کورمک

۳. ۱. پیمایش زمانی روش مک‌کورمک

معادلهٔ موج یک‌بعدی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$
\frac{\partial \phi}{\partial t}+\frac{\partial F(\phi)}{\partial x}=0 \qquad (۴)
$$

برای گسسته‌سازی این معادله، با استفاده از پیمایش زمانی اصلی روش مک‌کورمک در دو مرحلهٔ پیشگو و

اصلاحگر، به‌ترتیب از رابطه‌های (۵) و (۶) استفاده می‌شود:

$$\phi_j^* = \phi_j^n - \Delta t D^F \left[F\left(\phi_j^n\right) \right] \tag{۵}$$

$$\phi_j^{n+1} = \frac{1}{2}\left[\phi_j^n + \phi_j^* - \Delta t D^B \left[F\left(\phi_j^*\right) \right] \right] \tag{۶}$$

در این رابطه‌ها نماد D نشان‌دهندهٔ شکل گسستهٔ مشتق اول مکانی است و بالانویس F پیش‌سوبودن روش و بالانویس B پس‌سوبودن آن را نشان می‌دهد. همچنین، بالانویس n تراز زمانی و زیرنویس j اندیس نقاط روی شبکه را مشخص می‌کند. بالانویس * مقدار موقتی کمیت ϕ در تراز زمانی $n+1$ حاصل از مرحلهٔ پیشگو است که در مرحلهٔ اصلاحگر، تصحیح می‌شود.

برای حل عددی معادلهٔ ۴ با استفاده از روش مک‌کورمک و با استفاده از پیمایش زمانی رونگ-کوتا از معادلات (۷ تا ۱۳) استفاده می‌شود (هیکسون و ترکل، ۲۰۰۰).

$$H^{(1)} = -\Delta t D^F \left[F\left(\phi^n\right) \right] \tag{۷}$$

$$H^{(2)} = -\Delta t D^B \left[F\left(\phi^n + \alpha_2 H^{(1)}\right) \right] \tag{۸}$$

$$H^{(3)} = -\Delta t D^F \left[F\left(\phi^n + \alpha_3 H^{(2)}\right) \right] \tag{۹}$$

$$H^{(4)} = -\Delta t D^B \left[F\left(\phi^n + \alpha_4 H^{(3)}\right) \right] \tag{۱۰}$$

$$H^{(5)} = -\Delta t D^F \left[F\left(\phi^n + \alpha_5 H^{(4)}\right) \right] \tag{۱۱}$$

$$H^{(6)} = -\Delta t D^B \left[F\left(\phi^n + \alpha_6 H^{(5)}\right) \right] \tag{۱۲}$$

$$\phi^{n+1} = \phi^n + \beta_1 H^{(1)} + \beta_2 H^{(2)} + \beta_3 H^{(3)} + \beta_4 H^{(4)} + \beta_5 H^{(5)} + \beta_6 H^{(6)} \tag{۱۳}$$

مقادیر ضرایب این معادلات در جدول ۱ ارائه شده است. در رابطه‌های ۷ تا ۱۳ نمادها مشابه با قبل هستند. در روش LDDRK4-6 از یک چرخهٔ دو مرحله‌ای با کمک ضرایب این روش در جدول ۱ استفاده می‌شود؛ به این صورت که در یک گام زمانی، مرحلهٔ اول این پیمایش زمانی و در گام زمانی بعدی، مرحلهٔ دوم آن به‌کار گرفته می‌شود.

شکل پایستار معادلات دوبعدی را می‌توان به صورت رابطه (۱۴) نمایش داد:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial F(\phi)}{\partial x} + \frac{\partial E(\phi)}{\partial y} = G(\phi) \tag{۱۴}$$

برای گسسته‌سازی این معادله، با استفاده از پیمایش زمانی اصلی روش‌های مک‌کورمک در دو مرحلهٔ پیشگو و اصلاحگر، از رابطه‌های (۱۵) و (۱۶) استفاده می‌شود:

جدول ۱. ضرایب پیمایش زمانی رونگ-کوتا مربوط به روش‌های مک‌کورمک (هیکسون و ترکل، ۲۰۰۰).

	RK2	RK4	LDDRK4-6 مرحلهٔ اول	LDDRK4-6 مرحلهٔ دوم
α_2	۱	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰/۳۵۳۳۲۳
α_3	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰/۹۹۹۵۹۷
α_4	۰	۱	۱	۰/۱۵۲۱۸۸
α_5	۰	۰	۰	۰/۵۳۴۲۱۶
α_6	۰	۰	۰	۰/۶۰۳۹۰۷
β_1	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$	۰/۰۴۶۷۶۲۱
β_2	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۳}$	۰/۱۳۷۲۸۶
β_3	۰	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۳}$	۰/۱۷۰۹۷۵
β_4	۰	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$	۰/۱۹۷۵۷۲
β_5	۰	۰	۰	۰/۲۸۲۲۶۳
β_6	۰	۰	۰	۰/۱۶۵۱۴۲

$$\phi^{*}_{i,j}=\phi^{n}_{i,j}-\Delta t D^{F}_{x}\left[F\left(\phi^{n}_{i,j}\right)\right]-\Delta t D^{B}_{y}\left[E\left(\phi^{n}_{i,j}\right)\right]+\Delta t G\left(\phi^{n}_{i,j}\right) \qquad (۱۵)$$

$$\phi^{n+1}_{i,j}=\frac{۱}{۲}\left\{\phi^{n}_{i,j}+\phi^{*}_{i,j}-\Delta t D^{B}_{x}\left[F\left(\phi^{*}_{i,j}\right)\right]-\Delta t D^{F}_{y}\left[E\left(\phi^{*}_{i,j}\right)\right]+\Delta t G\left(\phi^{*}_{i,j}\right)\right\} \qquad (۱۶)$$

در این رابطه‌ها، نمادها مشابه با قبل هستند و زیرنویس‌های i و j اندیس نقاط شبکه در راستای محورهای x و y را مشخص می‌کنند.

برای حل عددی معادلهٔ (۱۴) با استفاده از روش مک‌کورمک با پیمایش زمانی رونگ-کوتا از معادلات (۱۷ تا ۲۳) استفاده می‌شود:

$$H^{(1)}=-\Delta t\left\{D^{F}_{x}\left[F\left(\phi^{n}\right)\right]+D^{B}_{y}\left[E\left(\phi^{n}\right)\right]\right\}+\Delta t G\left(\phi^{n}\right) \qquad (۱۷)$$

$$H^{(2)}=-\Delta t\left\{D^{B}_{x}\left[F\left(\phi^{n}+\alpha_2 H^{(1)}\right)\right]+D^{F}_{y}\left[E\left(\phi^{n}+\alpha_2 H^{(1)}\right)\right]\right\}+\Delta t G\left(\phi^{n}+\alpha_2 H^{(1)}\right) \qquad (۱۸)$$

$$H^{(3)}=-\Delta t\left\{D^{F}_{x}\left[F\left(\phi^{n}+\alpha_3 H^{(2)}\right)\right]+D^{B}_{y}\left[E\left(\phi^{n}+\alpha_3 H^{(2)}\right)\right]\right\}+\Delta t G\left(\phi^{n}+\alpha_3 H^{(2)}\right) \qquad (۱۹)$$

$$H^{(4)}=-\Delta t\left\{D^{B}_{x}\left[F\left(\phi^{n}+\alpha_4 H^{(3)}\right)\right]+D^{F}_{y}\left[E\left(\phi^{n}+\alpha_4 H^{(3)}\right)\right]\right\}+\Delta t G\left(\phi^{n}+\alpha_4 H^{(3)}\right) \qquad (۲۰)$$

$$H^{(5)}=-\Delta t\left\{D^{F}_{x}\left[F\left(\phi^{n}+\alpha_5 H^{(4)}\right)\right]+D^{B}_{y}\left[E\left(\phi^{n}+\alpha_5 H^{(4)}\right)\right]\right\}+\Delta t G\left(\phi^{n}+\alpha_5 H^{(4)}\right) \qquad (۲۱)$$

$$H^{(6)}=-\Delta t\left\{D^{B}_{x}\left[F\left(\phi^{n}+\alpha_6 H^{(5)}\right)\right]+D^{F}_{y}\left[E\left(\phi^{n}+\alpha_6 H^{(5)}\right)\right]\right\}+\Delta t G\left(\phi^{n}+\alpha_6 H^{(5)}\right) \qquad (۲۲)$$

$$\phi^{n+1}=\phi^{n}+\beta_1 H^{(1)}+\beta_2 H^{(2)}+\beta_3 H^{(3)}+\beta_4 H^{(4)}+\beta_5 H^{(5)}+\beta_6 H^{(6)} \qquad (۲۳)$$

در رابطه‌های (۱۷ تا ۲۳) نیز نمادها مشابه با قبل هستند. همچنین، زیرنویس‌های x و y محورهایی را که مشتق مکانی در آن راستاست، مشخص می‌کنند.

۳. ۲. عملگرهای مشتق پیش‌سو و پس‌سو، در روش مک‌کورمک

در روش مک‌کورمک مرتبهٔ دوم، مشتقات اول مکانی پیش‌سو و پس‌سو از مرتبهٔ اول هستند و به‌صورت رابطه‌های (۲۴) و (۲۵) بیان می‌شوند:

$$D^{F}\left(\phi\right)=\frac{\phi_{j+۱}-\phi_{j}}{\Delta x} \qquad (۲۴)$$

$$D^{B}\left(\phi\right)=\frac{\phi_{j}-\phi_{j-۱}}{\Delta x} \qquad (۲۵)$$

شکل گسستهٔ مشتق اول مکانی یک‌سویهٔ پیش‌سو و پس‌سو، در روش مک‌کورمک فشردهٔ مرتبهٔ چهارم، در طرحوارهٔ ۴/۲، که توسط هیکسون و ترکل (۲۰۰۰) معرفی شده‌است، به صورت رابطه‌های (۲۶) و (۲۷) بیان می‌شود:

$$\left(۱-a\right)D^{F}_{j}+aD^{F}_{j+۱}=\frac{۱}{\Delta x}\left(F_{j+۱}-F_{j}\right) \qquad (۲۶)$$

$$\left(۱-a\right)D^{B}_{j}+aD^{B}_{j-۱}=\frac{۱}{\Delta x}\left(F_{j}-F_{j-۱}\right) \qquad (۲۷)$$

در این رابطه‌ها، نماد a برابر مقدار ثابتی است و از رابطهٔ (۲۸) به‌دست می‌آید:

$$a=\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲\sqrt{۳}} \qquad (۲۸)$$

اگر در مسئله‌ای، شرایط مرزی غیردوره‌ای حاکم باشد، شرایط مرزی برای مرزهای راست و چپ مربوط به عملگرهای D^{F} و D^{B} مطابق روابط (۲۹ تا ۳۲) خواهدبود:

$$D^{F}_{1}=\frac{۱}{\Delta x}\left[-\left(\frac{۲۵}{۱۲}-\frac{۱۷\sqrt{۳}}{۳۶}\right)F_1+\left(۴-\frac{۲۵\sqrt{۳}}{۱۸}\right)F_2-\left(۳-\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}\right)F_3+\left(\frac{۴}{۳}-\frac{۱۳\sqrt{۳}}{۱۸}\right)F_4-\left(\frac{۱}{۴}-\frac{۵\sqrt{۳}}{۳۶}\right)F_5\right] \qquad (۲۹)$$

$$D^{F}_{m}=\frac{۱}{\Delta x}\left[\left(\frac{۲۵}{۱۲}+\frac{۱۷\sqrt{۳}}{۳۶}\right)F_m-\left(۴+\frac{۲۵\sqrt{۳}}{۱۸}\right)F_{m-1}+\left(۳+\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}\right)F_{m-2}-\left(\frac{۴}{۳}+\frac{۱۳\sqrt{۳}}{۱۸}\right)F_{m-3}+\left(\frac{۱}{۴}+\frac{۵\sqrt{۳}}{۳۶}\right)F_{m-4}\right] \qquad (۳۰)$$

$$D^{B}_{1}=\frac{۱}{\Delta x}\left[-\left(\frac{۲۵}{۱۲}+\frac{۱۷\sqrt{۳}}{۳۶}\right)F_1+\left(۴+\frac{۲۵\sqrt{۳}}{۱۸}\right)F_2-_5\left(۳+\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}\right)F_3+\left(\frac{۴}{۳}+\frac{۱۳\sqrt{۳}}{۱۸}\right)F_4-\left(\frac{۱}{۴}+\frac{۵\sqrt{۳}}{۳۶}\right)F\right] \qquad (۳۱)$$

$$D^{B}_{m}=\frac{۱}{\Delta x}\left[\left(\frac{۲۵}{۱۲}-\frac{۱۷\sqrt{۳}}{۳۶}\right)F_m-\left(۴-\frac{۲۵\sqrt{۳}}{۱۸}\right)F_{m-1}+\left(۳-\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}\right)F_{m-2}-\left(\frac{۴}{۳}-\frac{۱۳\sqrt{۳}}{۱۸}\right)F_{m-3}+\left(\frac{۱}{۴}-\frac{۵\sqrt{۳}}{۳۶}\right)F_{m-4}\right] \qquad (۳۲)$$

در این رابطه‌ها، زیرنویس 1، نقطهٔ روی مرز سمت چپ

شبکه و زیرنویس m، نقطهٔ روی مرز سمت راست شبکه را نشان می‌دهند.

شکل گسستهٔ مشتق اول مکانی یک‌سویهٔ پیش‌سو و پس‌سو، در روش مک‌کورمک فشردهٔ مرتبهٔ چهارم، در طرحوارهٔ ۴/۴ (هیکسون و ترکل، ۲۰۰۰) نیز در رابطه‌های (۳۳) و (۳۴) آمده است:

$$\frac{۲}{۳}D_j^F+\frac{۱}{۳}D_{j+1}^F=\frac{1}{\Delta x}\left(\frac{۵}{۶}F_{j+1}-\frac{۲}{۳}F_j-\frac{1}{۶}F_{j-1}\right) \quad (۳۳)$$

$$\frac{۲}{۳}D_j^B+\frac{۱}{۳}D_{j-1}^B=\frac{1}{\Delta x}\left(\frac{۱}{۶}F_{j+1}+\frac{۲}{۳}F_j-\frac{۵}{۶}F_{j-1}\right) \quad (۳۴)$$

اگر در مسئله‌ای، شرایط مرزی غیردوره‌ای حاکم باشد، شرایط مرزی برای مرزهای راست و چپ مربوط به عملگرهای D^F و D^B مطابق روابط (۳۵ تا ۳۸) خواهدبود:

$$D_1^F=\frac{۱}{\Delta x}\left[-\left(\frac{۱۹}{۹}\right)F_1+\left(\frac{۳۷}{۹}\right)F_2-\left(\frac{۱۹}{۶}\right)F_3+\left(\frac{۱۳}{۹}\right)F_4-\left(\frac{۵}{۱۸}\right)F_5\right] \quad (۳۵)$$

$$D_m^F=\frac{۱}{\Delta x}\left[\left(\frac{۳۷}{۱۸}\right)F_m-\left(\frac{۳۵}{۹}\right)F_{m-1}+\left(\frac{۱۷}{۶}\right)F_{m-2}-\left(\frac{۱۱}{۹}\right)F_{m-3}+\left(\frac{۲}{۹}\right)F_{m-4}\right] \quad (۳۶)$$

$$D_1^B=\frac{۱}{\Delta x}\left[-\left(\frac{۳۷}{۱۸}\right)F_1+\left(\frac{۳۵}{۹}\right)F_2-\left(\frac{۱۷}{۶}\right)F_3+\left(\frac{۱۱}{۹}\right)F_4-\left(\frac{۲}{۹}\right)F_5\right] \quad (۳۷)$$

$$D_m^B=\frac{۱}{\Delta x}\left[\left(\frac{۱۹}{۹}\right)F_m-\left(\frac{۳۷}{۹}\right)F_{m-1}+\left(\frac{۱۹}{۶}\right)F_{m-2}-\left(\frac{۱۳}{۹}\right)F_{m-3}+\left(\frac{۵}{۱۸}\right)F_{m-4}\right] \quad (۳۸)$$

۴. نتایج و بحث

برای آنکه بتوانیم دقت روش مک‌کورمک فشردهٔ مرتبهٔ چهارم، در حل عددی معادلات خطی و غیرخطی را بررسی کنیم، ابتدا از این روش‌ها برای حل عددی معادلات فرارفت یک‌بعدی و برگرز یک‌بعدی استفاده کردیم که این معادلات دارای حل تحلیلی هستند. باتوجه به اینکه موضوع این مقاله، حل عددی معادلات آب کم‌عمق است از آوردن نتایج حل معادلات دیگر مانند فرارفت و برگرز، در اینجا خودداری می‌شود. فقط برخی از نتایج حل معادلهٔ فرارفت یک‌بعدی در پیوست الف آورده شده‌است. با توجه به نتایج به‌دست‌آمده، در ادامهٔ کار، شکل پایستار معادلات آب کم‌عمق دوبعدی با استفاده از چهار روش عددی مک‌کورمک مرتبهٔ دوم با پیمایش زمانی اصلی، مک‌کورمک فشردهٔ مرتبهٔ چهارم طرحوارهٔ ۴/۲ با پیمایش زمانی اصلی، مک‌کورمک فشردهٔ مرتبهٔ چهارم طرحوارهٔ ۴/۲ با پیمایش زمانی RK4 و مک‌کورمک فشردهٔ مرتبهٔ چهارم طرحوارهٔ ۴/۴ با پیمایش زمانی RK4 حل می‌شوند و نتایج آن‌ها با نتایج به‌دست‌آمده از کار سایر محققان، مقایسه می‌شوند.

در ادامهٔ مقالهٔ حاضر، روش مک‌کورمک مرتبهٔ دوم با پیمایش زمانی اصلی با نماد MC2، و روش‌های مک‌کورمک فشردهٔ مرتبهٔ چهارم طرح‌وارهٔ ۴/۲ با پیمایش‌های زمانی اصلی و رونگ-کوتای RK4 و روش مک‌کورمک فشردهٔ مرتبهٔ چهارم طرح‌وارهٔ ۴/۴ با پیمایش زمانی رونگ-کوتای RK4 به‌ترتیب با نمادهای CMC4/2-original، CMC4/2-RK4 و CMC4/4-RK4 نمایش داده شده‌اند. جزئیات حل عددی معادلات آب کم‌عمق یک‌بعدی با استفاده از روش‌های مذکور توسط میرزائی شیری (۱۳۹۳) ارائه شده‌است. بنابراین در ادامه ارائهٔ نتایج حل عددی به معادلات آب کم‌عمق دوبعدی اختصاص داده شده‌است.

۴. ۱. حل عددی معادلات آب کم‌عمق دوبعدی (آزمون موردی اول)

در این آزمون که توسط ناون و ریفاگن (۱۹۷۹) معرفی شده است، شرایط اولیه برای میدان ارتفاع، به صورت رابطه (۳۹) بیان می‌شود:

$$h(x,y)=H_0+H_1\tanh\left(\frac{۹\left(\frac{D}{۲}-y\right)}{۲D}\right)+H_2\,\mathrm{sech}^{۲}\left(\frac{۹\left(\frac{D}{۲}-y\right)}{D}\right)\sin\left(\frac{۲\pi x}{l}\right) \quad (۳۹)$$

که در آن ثابت‌های H_0، H_1 و H_2 به صورت رابطه (۴۰) تعریف شده‌اند:

$$H_0 = ۲۰۰۰m, \qquad H_1 = ۲۲۰m, \qquad H_2 = ۱۳۳m \tag{۴۰}$$

مؤلفه‌های مداری و نصف‌النهاری میدان سرعت، از تقریب زمینگرد، به صورت رابطه (۴۱) به‌دست می‌آیند:

$$u = -\frac{g}{f}\frac{\partial h}{\partial y}, \qquad v = \frac{g}{f}\frac{\partial h}{\partial x} \tag{۴۱}$$

این معادلات در یک ناحیهٔ مستطیل‌شکل، به طول $L = ۶۰۰۰km$ و عرض $D = ۴۴۰۰km$ حل می‌شوند که شتاب گرانی برابر $g = ۱۰\frac{m}{S^۲}$ است و برای پارامتر کوریولیس، از تقریب صفحهٔ β به صورت رابطه (۴۲) استفاده می‌شود:

$$f = f_0 + \beta\left(y - \frac{D}{۲}\right) \tag{۴۲}$$

که مقادیر مربوط به ثابت‌های f_0 و β به صورت رابطه (۴۳) است:

$$f_0 = ۱۰^{-۴}s^{-۱}, \qquad \beta = ۱/۵\times۱۰^{-۱۱}m^{-۱}s^{-۱} \tag{۴۳}$$

همچنین مؤلفهٔ نصف‌النهاری سرعت در مرزهای شمالی و جنوبی مطابق رابطهٔ زیر، همواره برابر صفر فرض شده است.

$$v(x,۰,t) = v(x,D,t) = ۰ \tag{۴۴}$$

در حل عددی این معادلات، شرایط مرزی حاکم بر مرزهای شرقی و غربی، شرایط مرزی دوره‌ای است و شرایط مرزی در مرزهای شمالی و جنوبی غیردوره‌ای می‌باشد. برای مؤلفهٔ مداری سرعت و ارتفاع، در این مرزها از یک میان‌یابی خطی از یک تراز زمانی پیشین استفاده می‌شود. در حل این معادلات، از فواصل شبکه‌ای مداری و نصف‌النهاری مساوی، برابر با ۵۰، ۱۰۰ و ۲۰۰ کیلومتر استفاده شده است. همچنین هر گام زمانی برای هرکدام از این فواصل، برای حفظ پایداری همهٔ روش‌ها به‌ترتیب برابر ۱۵، ۳۰ و ۶۰ ثانیه در نظر گرفته شده است. برای غلبه بر خطای دگرنامیدن حاصل از جملات غیرخطی در این مثال، یک جملهٔ پخش عددی مطابق رابطهٔ زیر، به سمت راست معادلات آب کم‌عمق داده‌شده در رابطهٔ (۲) اضافه می‌کنیم:

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial y} = f\mathbf{W} + \upsilon\nabla^۲\mathbf{Q} \tag{۴۵}$$

برای گسسته‌سازی این جملهٔ پخش عددی در هر روش، باید از مشتق دوم مکانی تعریف‌شده برای آن روش یا یک روش هم‌مرتبه با آن روش استفاده شود. ضریب υ مقدار ثابتی است که با آزمایش عددی به‌دست می‌آید. همچنین در گسسته‌سازی این جمله، برای مقدار تابع برداری $\mathbf{Q}$ در هر مرحله، مقدار آن در تراز زمانی قبلی جاگذاری شده‌است.

نتایج حاصل از حل عددی معادلات آب کم‌عمق دوبعدی، با استفاده از شرایط اولیه و مرزی ذکرشده و با فاصلهٔ شبکه‌ای ۱۰۰ کیلومتر و گام زمانی ۳۰ ثانیه و با ضریب υ برابر $۱/۵\times۱۰^۵$ در جملهٔ پخش عددی، با استفاده از روش‌های مک‌کورمک مرتبهٔ دوم با پیمایش زمانی اصلی، مک‌کورمک فشردهٔ مرتبهٔ چهارم ۴/۲ با پیمایش‌های زمانی اصلی و RK4 و مک‌کورمک فشردهٔ مرتبهٔ چهارم ۴/۴ با پیمایش زمانی RK4 و نتایج حاصل از حل عددی این معادلات، با استفاده از روش فشردهٔ مرتبهٔ چهارم ضمنی، توسط ناون و ریفاگن (۱۹۷۹) برای میدان ارتفاع، در زمان‌های $t = ۴۸h$ و $t = ۷۲h$ به‌ترتیب، در شکل‌های ۱ و ۲ آمده است. همچنین، شرایط اولیه، برای میدان ارتفاع، در شکل ۱-الف نشان داده‌شده‌است.

این شکل‌ها به‌خوبی توانایی روش‌های مختلف مک‌کورمک، در حل معادلات آب کم‌عمق دوبعدی را نشان می‌دهند. در این شکل‌ها، پربندهای میدان ارتفاع بین ۱۸۰۰ تا ۲۲۰۰ متر، با فاصله بین پربندی ۵۰ متر نشان داده‌شده‌است. از مقایسهٔ این شکل‌ها باهمدیگر مشخص می‌شود که روش‌های مک‌کورمک فشردهٔ مرتبهٔ چهارم، جزئیات متفاوتی از میزان انحنای پربندها را، در مقایسه با روش مک‌کورمک مرتبهٔ دوم در زمان‌های پیش‌بینی ذکرشده، نمایش داده‌است. در هر حال، با این مقایسه نمی‌توان قضاوتی از برتری یک روش به روش دیگر داشت.

یکی از راه‌های بررسی دقت یک روش عددی، در گسسته‌سازی و حل معادلات مختلف، محاسبه و بررسی مقدار

تغییرات کمیت‌های پایستار مانند انرژی، انستروفی، جرم و ... است. در این آزمون نیز، این بررسی در مورد انرژی کل و انستروفی صورت گرفته است. انرژی کل و انستروفی به‌ترتیب از رابطه‌های (۴۶) و (۴۷) به‌دست می‌آیند:

$$E=\frac{1}{2}\int_0^L\int_0^D\left(u^2+v^2+gh\right)h\,dy\,dx \qquad (۴۶)$$

$$Z=\int_0^L\int_0^D\left(\frac{\zeta_a^2}{h}\right)dy\,dx \qquad (۴۷)$$

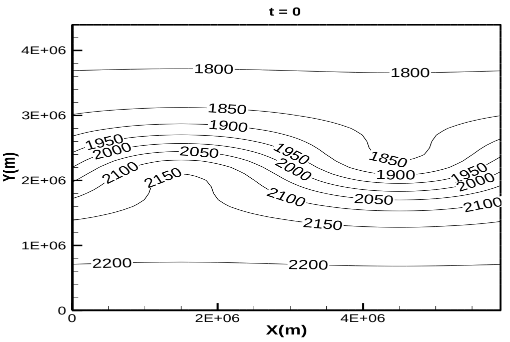
در این رابطه ζ_a بیانگر تاوایی مطلق است که به صورت رابطه (۴۸) به‌دست می‌آید:

$$\zeta_a=\zeta+f=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}+f \qquad (۴۸)$$

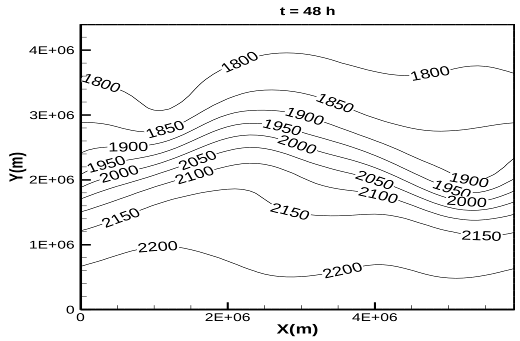
برای آنکه مقدار تغییرات این کمیت‌های پایستار مشخص شود، در هر مرحله از انتگرال‌گیری مقدار این کمیت‌ها را محاسبه می‌کنیم و درصد تغییرات هر کمیت را با استفاده از رابطهٔ (۴۹) به‌دست می‌آوریم:

$$\eta=\frac{c(t)-c(0)}{c(0)}\times 100 \qquad (۴۹)$$

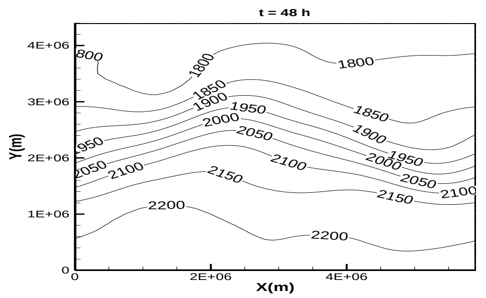
در این رابطه $c(t)$ بیانگر مقدار کمیت پایستار، در زمان t و $c(0)$ بیانگر مقدار آن در زمان صفر است. نمودارهای مربوط به تغییرات درصد تغییرات انرژی و انستروفی بر حسب زمان، در حل عددی این آزمون، با استفاده از روش‌های عددی گفته‌شده در شکل ۳ آمده است.



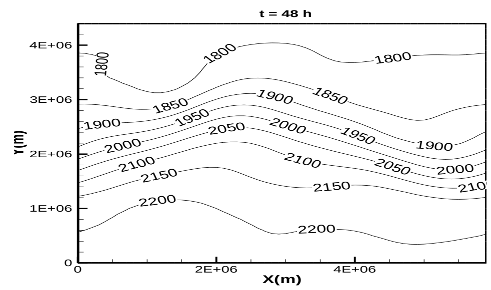
(الف) شرایط اولیه



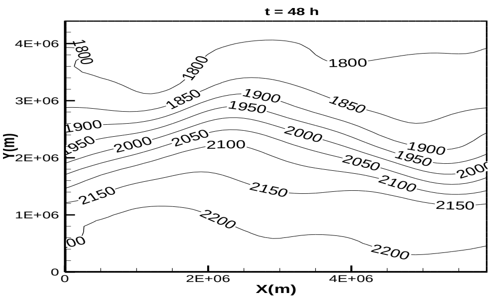
(ب) MC2



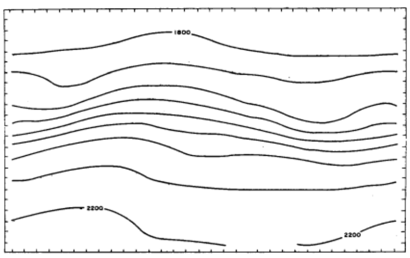
(پ) CMC4/2-original



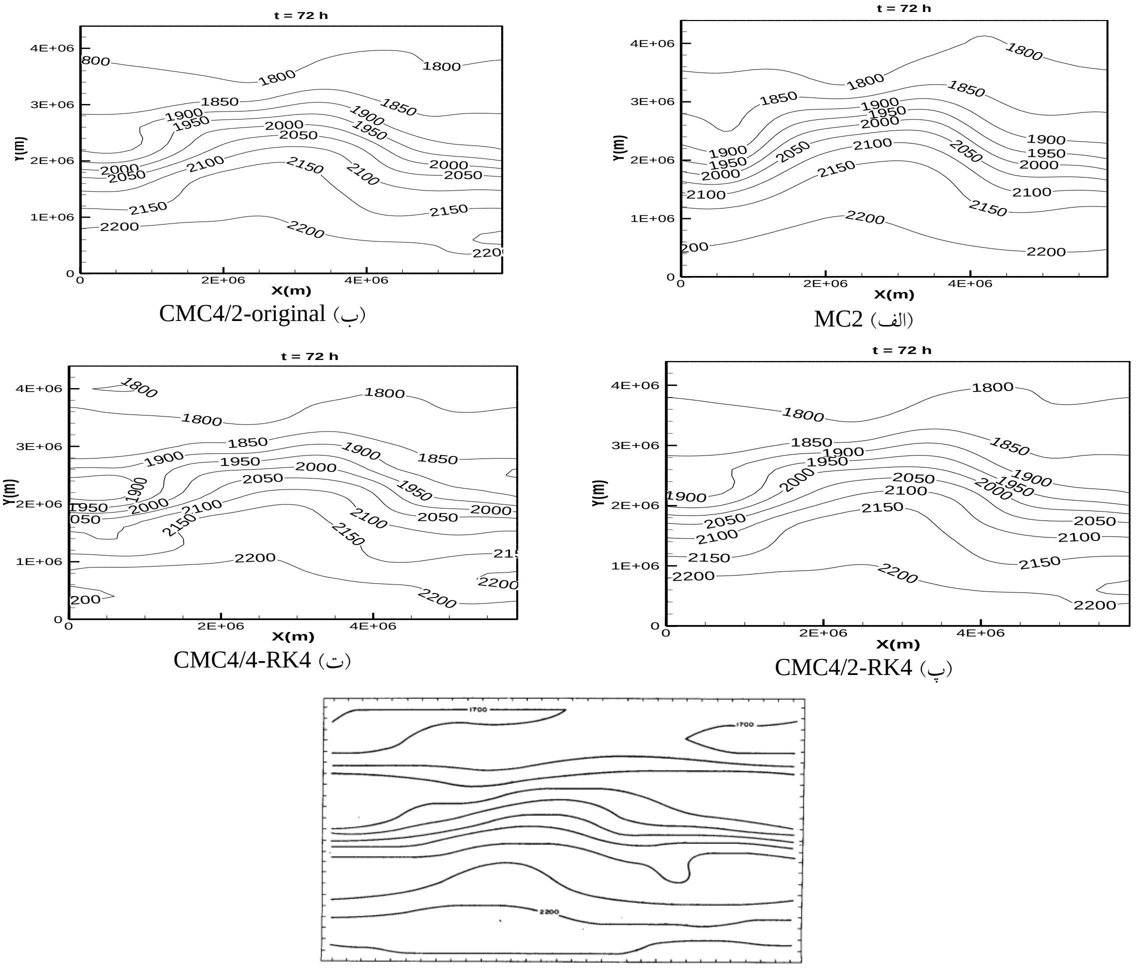
(ت) CMC4/2-RK4



(ث) CMC4/4-RK4


(ج) روش فشردهٔ مرتبهٔ چهارم ضمنی (ناون و ریفاگن، ۱۹۷۹)

شکل ۱. (الف) شرایط اولیهٔ میدان ارتفاع، (ب) تا (ث) پاسخ حل عددی معادلات آب کم‌عمق دوبعدی برای میدان ارتفاع با استفاده از روش‌های عددی مختلف مک‌کورمک و (ج) روش فشردهٔ مرتبهٔ چهارم ضمنی (ناون و ریفاگن، ۱۹۷۹) پس از ۴۸ ساعت.



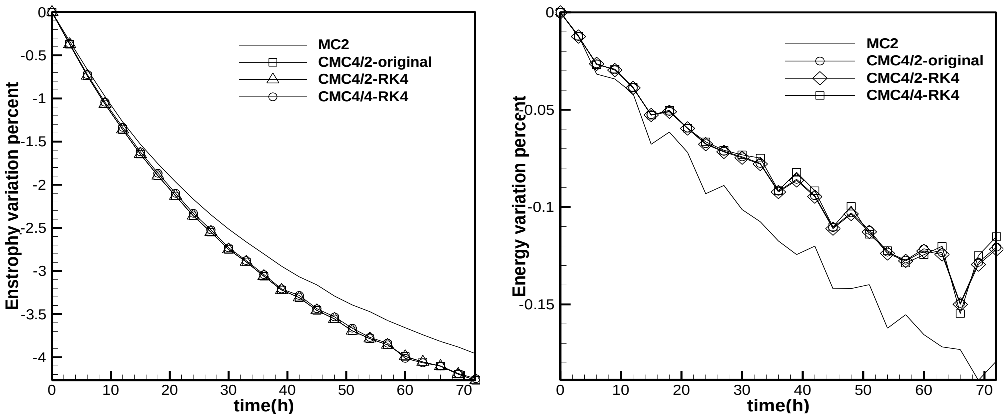
(ث) روش فشردهٔ مرتبهٔ چهارم ضمنی (ناون و ریفاگن، ۱۹۷۹)

شکل۲. (الف) تا (ت) پاسخ حل عددی معادلات آب کم‌عمق دوبعدی برای میدان ارتفاع با استفاده از روش‌های عددی مختلف مک‌کورمک و (ث) روش فشردهٔ مرتبهٔ چهارم ضمنی (ناون و ریفاگن، ۱۹۷۹) پس از ۷۲ ساعت.

در شکل ۳- الف به‌وضوح برتری روش‌های فشردهٔ مرتبهٔ چهارم در حفظ پایستاری انرژی کل، در مقایسه با روش مرتبهٔ دوم دیده می‌شود، اما در قسمت ب مربوط به این شکل، پایستاری انستروفی در روش مرتبهٔ دوم بهتر از روش‌های مرتبهٔ چهارم است. دلیل این امر این است که مقادیر ضریب پخش عددی به‌کاررفته در روش‌های مختلف باهم متفاوت است. برای نشان‌دادن این موضوع، مقادیر ضریب پخش عددی به‌کاررفته در روش‌های مختلف را باهم یکسان می‌گیریم و دوباره نمودارها را رسم می‌کنیم که نتیجه در شکل ۴ نمایش داده شده است.

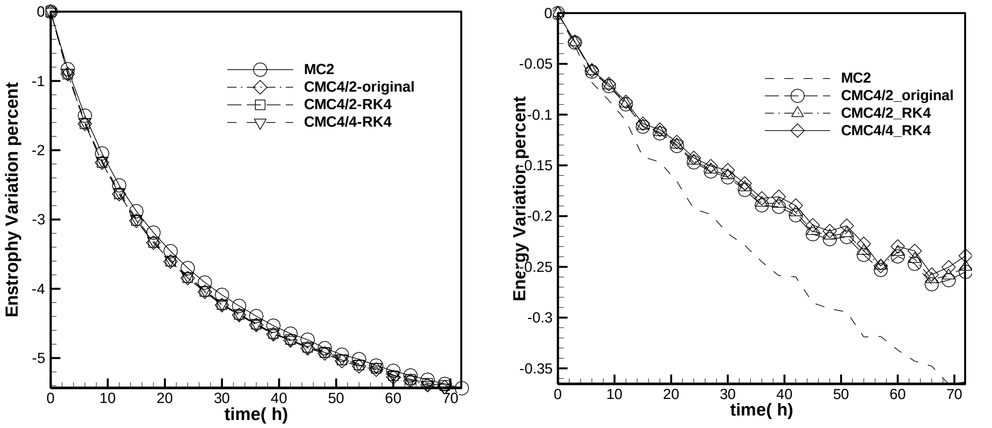
۴. ۲. حل عددی معادلات آب کم‌عمق دوبعدی (آزمون موردی دوم)

به عنوان آزمون موردی دوم از آزمون ارائه‌شده توسط دریچل و همکاران (۱۹۹۹) استفاده می‌کنیم. جزئیات مربوط به شرایط اولیهٔ این آزمون توسط دریچل و همکاران (۱۹۹۹) تشریح شده است. در این آزمون موردی معادلات آب کم‌عمق دوبعدی در یک ناحیهٔ مربع شکل در مختصات دکارتی با ابعاد $(-\pi,\pi)\times(-\pi,\pi)$ که شرایط مرزی دوره‌ای در هر دو راستای مداری و نصف‌النهاری آن حاکم است، حل می‌شوند.



(ب) تغییرات درصد انستروفی (الف) تغییرات درصد انرژی کل

شکل ۳. نمودارهای تحول زمانی؛ (الف) درصد تغییرات انرژی کل و (ب) انستروفی در حل عددی معادلات آب کم‌عمق دوبعدی با استفاده از روش‌های مختلف مک‌کورمک و با ضرایب پخش عددی مناسب هر روش.



(ب) تغییرات درصد انستروفی (الف) تغییرات درصد انرژی کل

شکل ۴. نمودارهای تحول زمانی؛ (الف) درصد تغییرات انرژی کل و (ب) انستروفی در حل عددی معادلات آب کم‌عمق دوبعدی با استفاده از روش‌های مختلف مک‌کورمک و با ضرایب پخش عددی یکسان.

با توجه به اینکه در آزمون فوق، داده‌های اولیه برای مقادیر مربوط به ارتفاع بی‌بعدشده، واگرایی و تاوایی در دسترس هستند، برای کار حاضر نیاز است تا داده‌ها را به ارتفاع، سرعت مداری و سرعت نصف‌النهاری تبدیل کنیم. ابتدا ارتفاع را از رابطهٔ زیر برای هر یک از نقاط شبکه محاسبه می‌کنیم:

$$h = H(1+h') \qquad (۵۰)$$

در این رابطه، h' ارتفاع بی‌بعدشدهٔ تعریف‌شده در آزمون فوق، H ارتفاع حالت پایه دارای مقدار ثابت برابر یک واحد و نیز ارتفاع می‌باشد. همچنین در ادامه باید از حل عددی دو معادلهٔ پواسون زیر تابع جریان و پتانسیل سرعت را به‌دست‌آوریم:

$$\zeta = \nabla^2\psi, \qquad \delta = \nabla^2\chi \qquad (۵۱)$$

در این رابطه، ζ، δ، ψ و χ به‌ترتیب نشان‌دهندهٔ تاوایی‌نسبی، واگرایی، تابع‌جریان و پتانسیل‌سرعت هستند. پس از به‌دست‌آمدن تابع‌جریان و پتانسیل‌سرعت، می‌توانیم از حل عددی روابط (۵۲)، مقادیر سرعت‌های مداری و نصف‌النهاری را محاسبه کنیم:

$$u=\frac{\partial\chi}{\partial x}-\frac{\partial\psi}{\partial y},\qquad v=\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\chi}{\partial y} \tag{۵۲}$$

بنابراین، اطلاعات اولیهٔ مورد نیاز برای حل عددی معادلات داده‌شده در رابطهٔ ۲ را در اختیار داریم. همان‌گونه که قبلاً اشاره شد، شرایط مرزی حاکم بر مرزهای غربی و شرقی و همین‌طور مرزهای شمالی و جنوبی، شرایط دوره‌ای است. مقادیر مربوط به پارامتر کوریولیس و شتاب گرانی نیز از روابط (۵۳) به‌دست می‌آیند (دریچل و همکاران، ۱۹۹۹):

$$f=۴\pi,\qquad g=۴\pi^{۲} \tag{۵۳}$$

این معادلات با این شرایط اولیه و مرزی ذکرشده، با تعداد نقاط شبکه‌ای متفاوت ۶۴×۶۴، ۱۲۸×۱۲۸ و ۲۵۶×۲۵۶ به ترتیب با گام‌های زمانی ۰/۰۰۲۵، ۰/۰۰۰۵ و ۰/۰۰۰۱ روز حل شده است که در ادامه نتایج آن آمده است. علت انتخاب این گام‌های زمانی، حفظ پایداری همهٔ روش‌هاست. یکی از روش‌هایی که برای مهار ناپایداری غیرخطی در روش‌های شبکه‌مبنا استفاده می‌شود، به‌کارگیری یک عبارت پخش یا فراپخش‌عددی است. این عبارت به‌صورت $-\upsilon\left(-\nabla^{۲}\mathbf{Q}\right)^{n}$ به سمت راست رابطهٔ ۲ اضافه می‌شود (به‌عنوان مثال دریچل و همکاران، ۱۹۹۹). این جمله به‌ازای مقادیر n برابر ۱، ۲ و ۳ به‌ترتیب Harmonic، Biharmonic و Triharmonic نامیده می‌شود که استفاده از پخش به‌صورت Harmonic برای مهار دگرنامی و آبشار به مقیاس‌های ریز برای بخش ناواگرای شارش، چندان متداول نیست و معمولاً از فراپخش با n برابر ۲ یا ۳ استفاده می‌شود. با توجه به نتایجی که به‌دست آمد در اینجا از فراپخش Triharmonic استفاده شده‌است. این معادلات به شکل برداری (رابطه ۵۴) نوشته می‌شوند:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\mathbf{Q}}{\partial t}+\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial x}+\frac{\partial\mathbf{S}}{\partial y}=f\mathbf{W}+\upsilon\nabla^{۶}\mathbf{Q}\ ;\\&\upsilon=\frac{CHZ}{k_{\max}{}^{۶}}\ ;\quad k_{\max}=\frac{n_g}{۲}\ ;\quad Z=Max_{x,y}\left|\frac{\zeta-fh'}{h}\right|\end{aligned} \tag{۵۴}$$

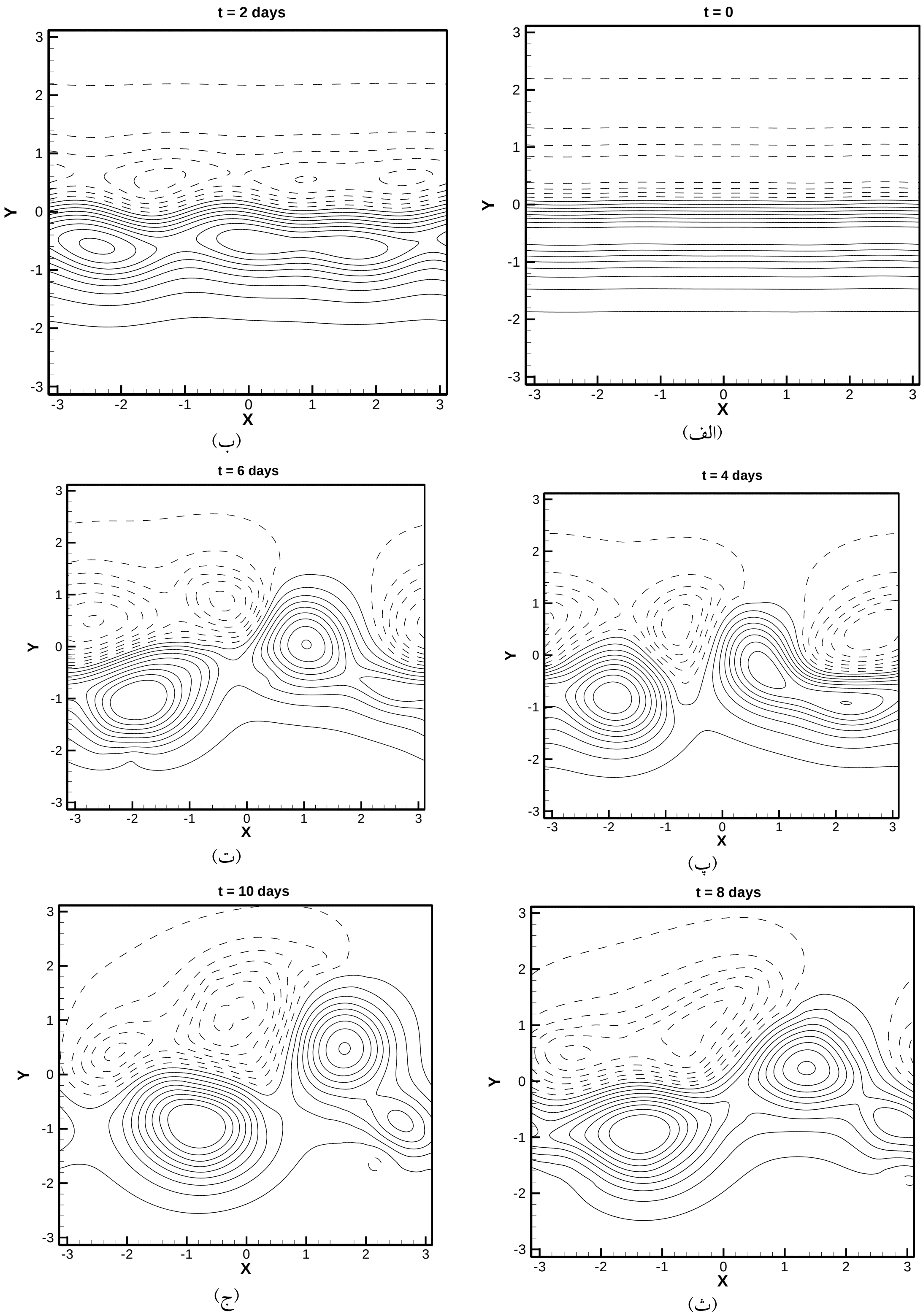
در رابطهٔ بالا، n_g، تعداد نقاط شبکه در راستای هر یک از محورهای مختصات می‌باشد و مقدار H نیز برابر عدد یک است. ضریب ثابت C، نیز یک مقدار ثابت است که با آزمایش عددی به‌دست می‌آید و در مورد روش‌های مک‌کورمک فشردهٔ مرتبهٔ چهارم، برابر ۰/۲۵ برای همهٔ فاصله‌های شبکه‌ای در نظر گرفته شده است. در مورد روش مک‌کورمک مرتبهٔ دوم مقادیر این ضریب برای تعداد نقاط شبکهٔ ۶۴×۶۴ برابر ۲۰، برای تعداد نقاط شبکهٔ ۱۲۸×۱۲۸ برابر ۱۰ و برای تعداد نقاط شبکهٔ ۲۵۶×۲۵۶ برابر ۸ فرض شده است.

نتایج حاصل از حل عددی معادلات آب کم‌عمق دوبعدی، با استفاده از شرایط اولیه و مرزی گفته شده در آزمون موردی دوم و با تعداد نقاط شبکه‌ای ۲۵۶×۲۵۶، با استفاده از روش مک‌کورمک فشردهٔ مرتبهٔ چهارم ۴/۴ با پیمایش زمانی RK4 به‌عنوان نمونه، برای تحول زمانی میدان‌های ارتفاع بی‌بعدشده و تاوایی‌پتانسیلی، به‌ترتیب در شکل‌های ۵ و ۶ آمده است. مقدار تاوایی پتانسیلی نیز از رابطهٔ (۵۵) به دست می‌آید:

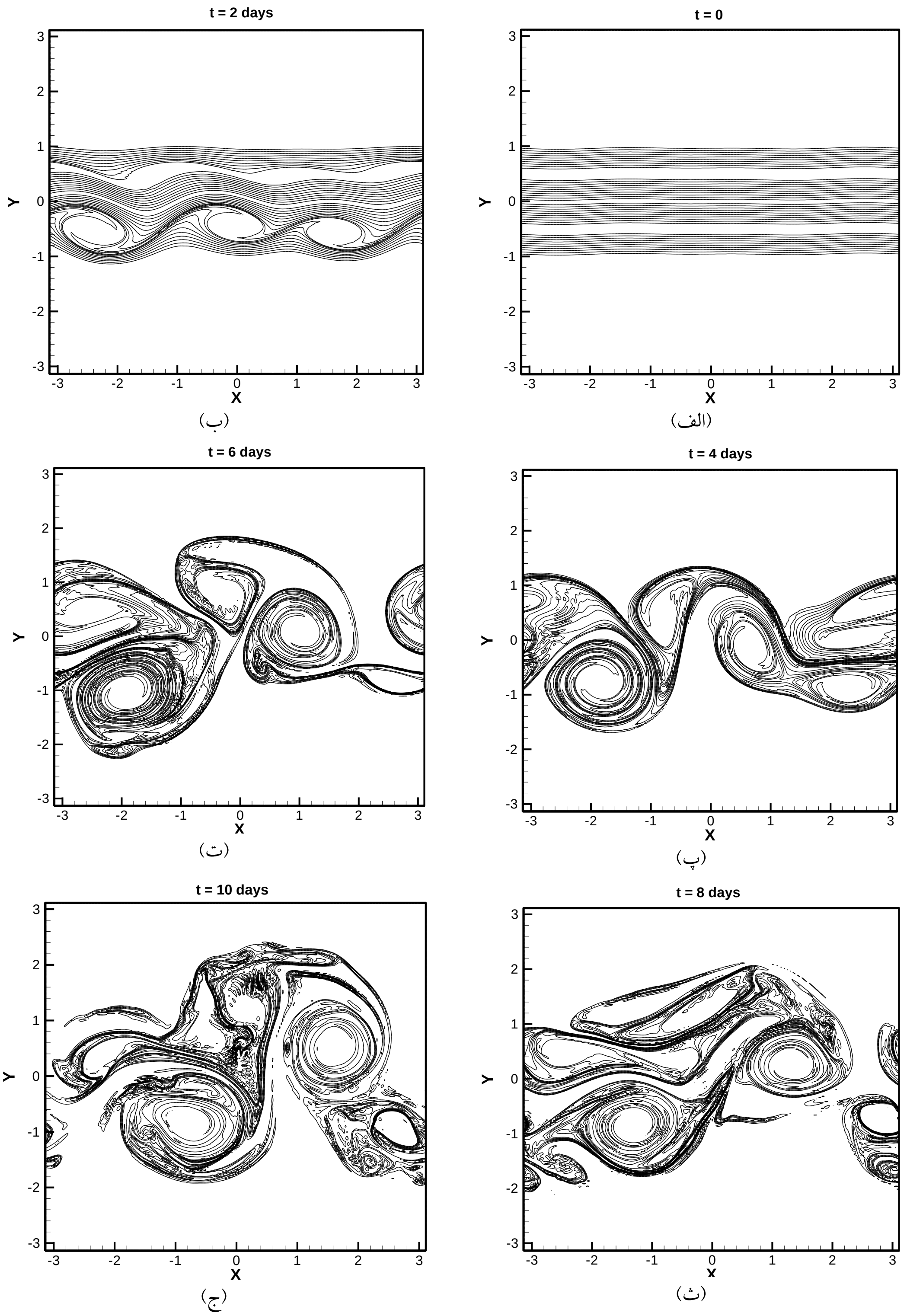
$$PV=\frac{\zeta+f}{h} \tag{۵۵}$$

در این رابطه، PV تاوایی پتانسیلی را نشان می‌دهد.

در شکل ۵، ابتدا خطوط ارتفاع با هم موازی هستند که با گذشت زمان، تا پایان روز دهم، ملاحظه می‌شود که دو تاوه از پربندهای مثبت و دو تاوه از پربندهای منفی در اثر ناپایداری فشارورد (با $\frac{\partial(PV)}{\partial y}=0$) ایجاد می‌شود و به‌تدریج رشد می‌یابد که یکی از این تاوه‌های مثبت، به دو قسمت تقسیم می‌شود. شکل ۶ نیز نشان می‌دهد که در ابتدا، خطوط تاوایی پتانسیلی، باهم موازی هستند و رفته‌رفته سه تاوه در امتداد مداری در روز دوم تشکیل یافته است که دو تاوهٔ سمت راست به‌هم نزدیک‌ترند. با گذشت زمان، تاوهٔ سمت چپ با جابه‌جایی اندک در راستای محور x، رشد کرده و دو تاوهٔ سمت راستی نیز همزمان با رشد، جابه‌جایی در راستای محور y نیز دارند.

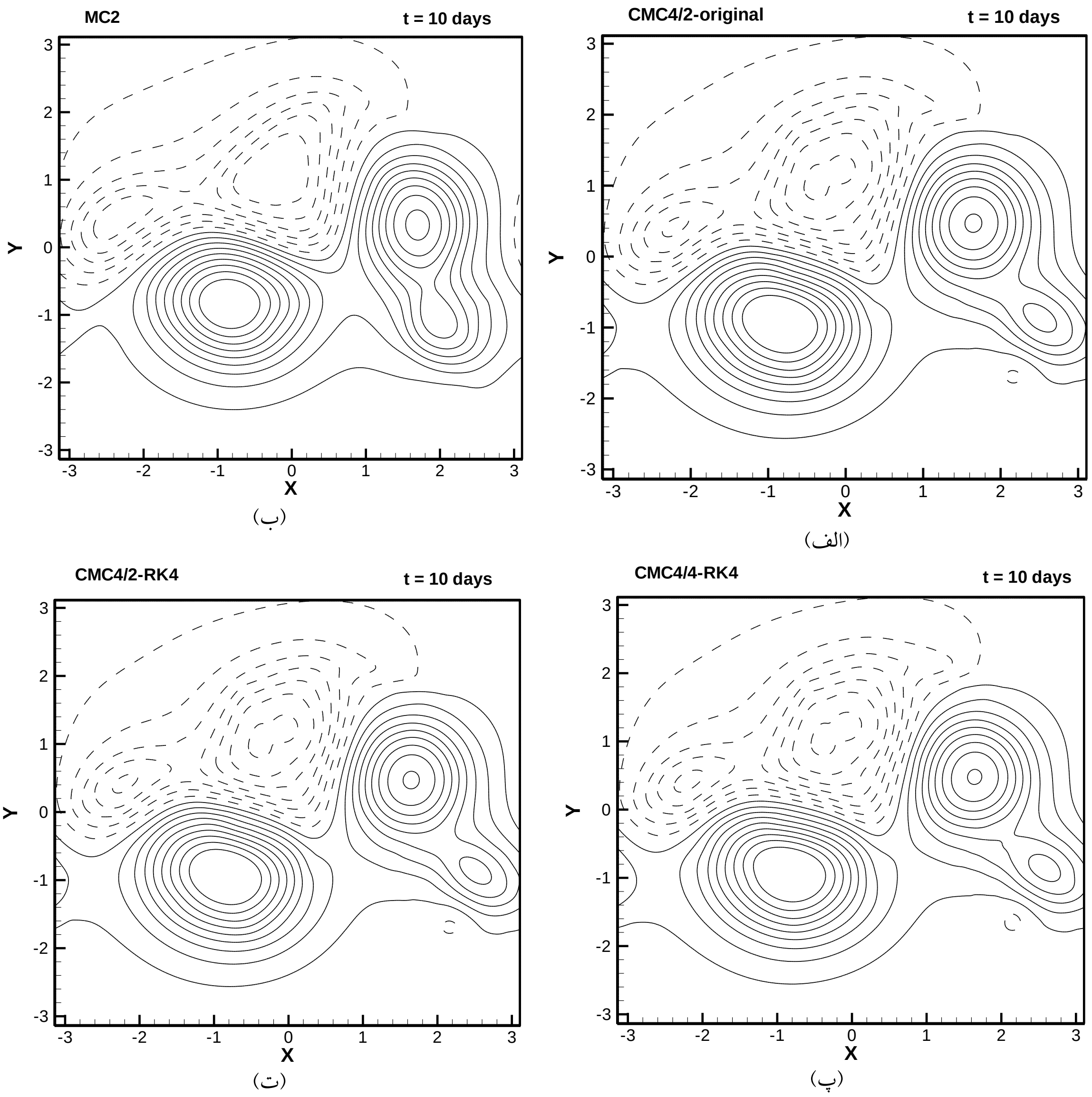


شکل ۵. حل عددی معادلات آب کم‌عمق دوبعدی برای تحول زمانی ارتفاع بی‌بعدشده در زمان‌های (الف) صفر، (ب) ۲، (پ) ۴، (ت) ۶، (ث) ۸ و (ج) ۱۰ روز پس از شروع انتگرال‌گیری با استفاده از روش مک‌کورمک فشردهٔ مرتبهٔ چهارم، طرحوارهٔ ۴/۴ با پیمایش زمانی RK4 در شبکهٔ ۲۵۶×۲۵۶. در این شکل پربندهای منفی با نقطه‌چین مشخص شده‌اند و فاصلهٔ بین پربندها ۰/۰۵ است.

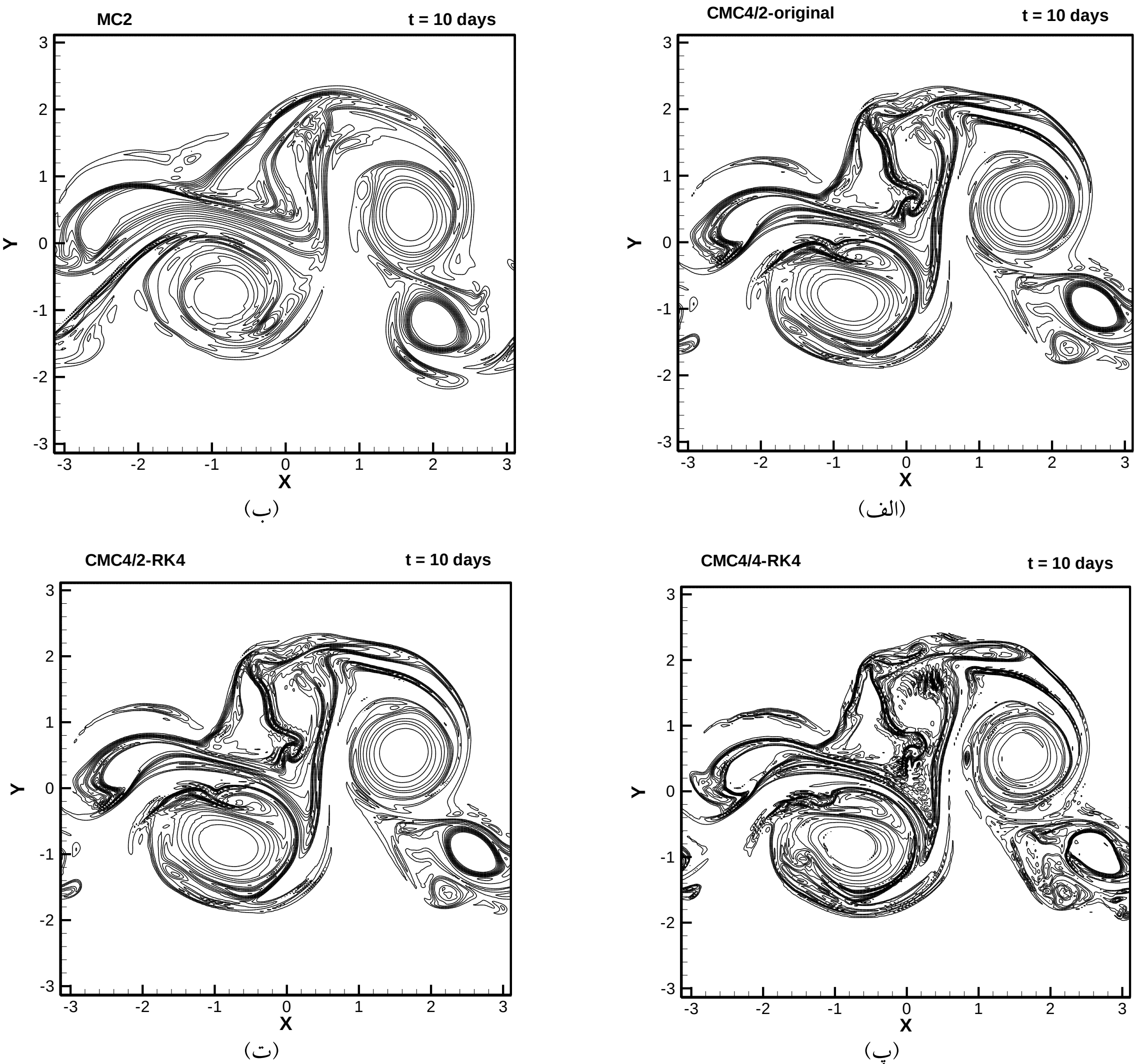


شکل ۶. حل عددی معادلات آب کم‌عمق دوبعدی برای تحول زمانی تاوایی‌پتانسیلی در زمان‌های (الف) صفر، (ب) ۲، (پ) ۴، (ت) ۶، (ث) ۸ و (ج) ۱۰ روز پس از شروع انتگرال‌گیری با استفاده از روش مک‌کورمک فشردهٔ مرتبهٔ چهارم، طرحوارهٔ ۴/۴ با پیمایش زمانی RK4 در شبکه ۲۵۶×۲۵۶.

نتایج مربوط به ارتفاع بی‌بعد شده و تاوایی پتانسیلی از حل عددی معادلات آب کم‌عمق دوبعدی در این آزمون موردی، برای شبکهٔ ۲۵۶×۲۵۶ نیز پس از ۱۰ روز از زمان انتگرال‌گیری با استفاده از روش‌های عددی مک‌کورمک مرتبهٔ دوم با پیمایش زمانی اصلی و فشردهٔ مرتبهٔ چهارم ۴/۲ با پیمایش‌های زمانی اصلی و RK4 و فشردهٔ مرتبهٔ چهارم ۴/۴ با پیمایش زمانی RK4 به طور مقایسه‌ای به‌ترتیب، در شکل‌های ۷ و ۸ آمده است. از مقایسهٔ کیفی این نتایج نیز وجود تفاوت بین نتایج حاصل از روش‌های فشردهٔ مرتبهٔ چهارم و نتایج حاصل از روش مرتبهٔ دوم دیده می‌شود.



شکل ۷. حل عددی معادلات آب کم‌عمق دوبعدی برای ارتفاع بی‌بعدشده، با استفاده از روش‌های (الف) CMC4/2-original، (ب) MC2، (پ) CMC4/4-RK4 و (ت) CMC4/2-RK4، پس از ۱۰ روز در شبکهٔ ۲۵۶×۲۵۶. در این شکل پربندهای منفی با نقطه‌چین مشخص شده‌اند و فاصلهٔ بین پربندها ۰/۰۵ است.



شکل ۸. حل عددی معادلات آب کم‌عمق دوبعدی برای تاوایی پتانسیلی، با استفاده از روش‌های (الف) CMC4/2-original، (ب) MC2، (پ) CMC4/4-RK4، ت: CMC4/2-RK4 پس از ۱۰ روز در شبکهٔ ۲۵۶×۲۵۶.

برای تحلیل و بررسی بیشتر دقت روش‌های عددی استفاده شده در مورد این آزمون، از پایستاری کمیت جرم استفاده شده است. مقدار جرم در مورد معادلات آب کم‌عمق دوبعدی، با توجه به ثابت‌بودن چگالی، از رابطهٔ (۵۶) به‌دست می‌آید:

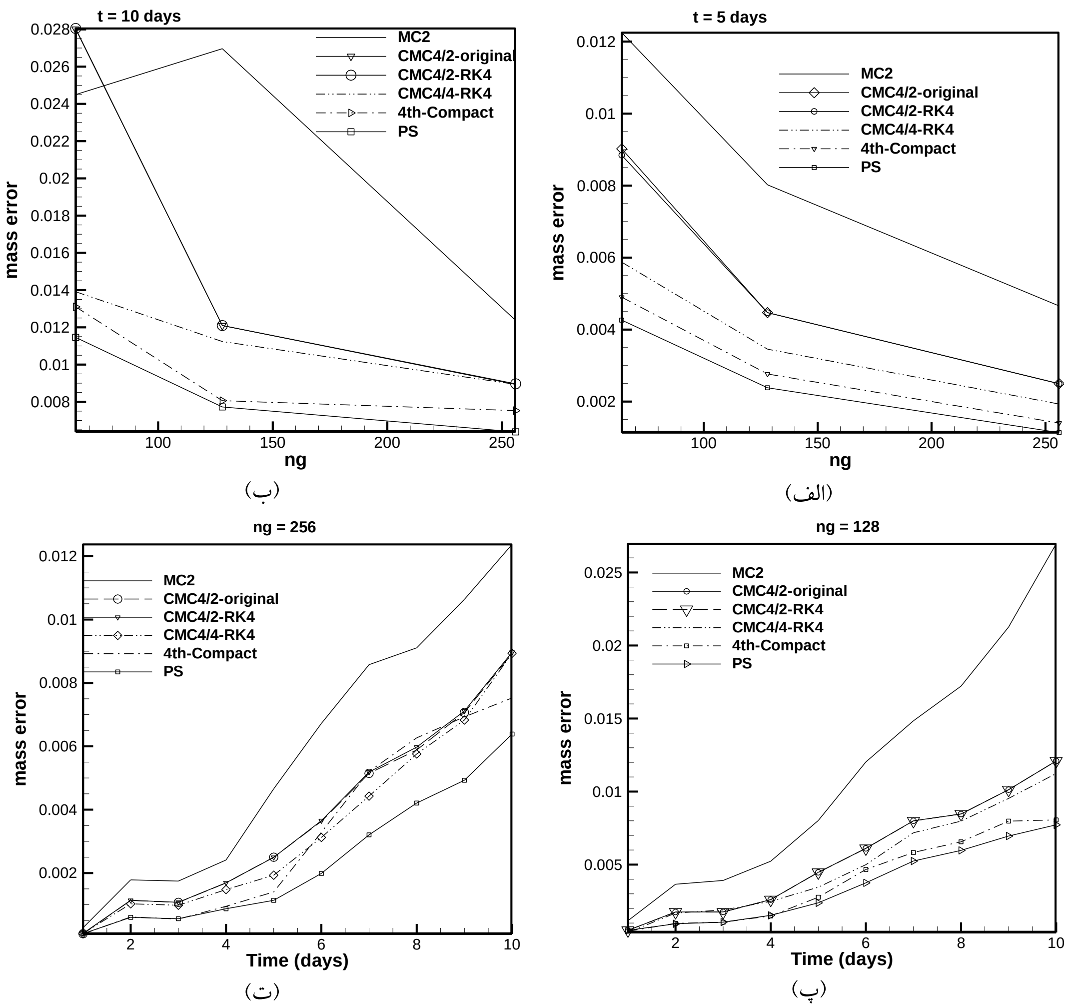
$$m=\int_0^L\int_0^D h\,dy\,dx \qquad (۵۶)$$

برای بررسی پایستاری جرم در روش‌های عددی، معمولاً مقدار خطا را با استفاده از محاسبهٔ یک کمیت بی‌بعدشده با عنوان خطای جرم مشخص می‌کنند. این کمیت، توسط دریچل و همکاران (۱۹۹۹) تعریف شده است. در این آزمون، میدان تاوایی پتانسیلی در ناحیهٔ R_j برای $(j=-N,...,N)$ داده شده است.

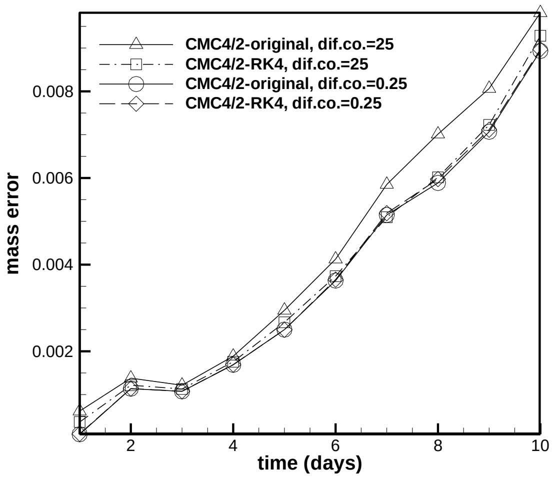
خطای جرم، در زمان t از مجموع مربع‌های تفاضل بین $m_j(0)$ و $m_j(t)$ برای همهٔ نقاط j غیر از $j=0$ محاسبه می‌شود که در نهایت بر مساحت کل ناحیه و مقدار H تقسیم می‌شود و از رابطهٔ (۵۷) به‌دست می‌آید:

$$\varepsilon(t)=\frac{1}{4\pi^{2}H}\left\{\frac{1}{2N}\sum_{j}\left[m_j(t)-m_j(0)\right]^{2}\right\}^{\frac{1}{2}} \qquad (۵۷)$$

مقادیر خطای جرم در حل عددی این آزمون، برای روش‌های مختلف بر حسب تعداد نقاط شبکه، در زمان‌های $t=5\,days$ و $t=10\,days$ و مقادیر تحول زمانی ۱۰ روزهٔ آن برای تفکیک‌های ۱۲۸ و ۲۵۶ در شکل ۹ آمده است؛ البته در این شکل‌ها، مقادیر خطای جرم مربوط به حل عددی این آزمون موردی، توسط قادر و همکاران (۲۰۰۹) با استفاده از دو روش عددی فشردهٔ مرتبهٔ چهارم مرکزی (4th-Compact) و طیفی‌وار (PS)، برای مقایسه، آمده است. بررسی شکل ۹ نشان می‌دهد که روش‌های مک‌کورمک فشردهٔ مرتبهٔ چهارم به‌ویژه طرحوارهٔ ۴/۴ با پیمایش زمانی RK4 پایستاری جرم را در مقایسه با روش مرتبهٔ دوم بیشتر حفظ کرده‌اند؛ البته شکل ۹ برتری نسبی روش فشردهٔ مرتبهٔ چهارم مرکزی را نیز در مقایسه با روش‌های مک‌کورمک فشردهٔ مرتبهٔ چهارم در حفظ پایستاری جرم نشان می‌دهد. در حل عددی این آزمون موردی، اثر ضریب جملهٔ فراپخش عددی، با افزایش آن در روش‌های مک‌کورمک فشردهٔ مرتبهٔ چهارم ۴/۲ با پیمایش‌های زمانی اصلی و RK4 تا حدود صد برابر مقدار آن در شبکهٔ ۲۵۶×۲۵۶ بررسی شد.



شکل ۹. نتایج مربوط به خطای جرم در روش‌های عددی مختلف، بر حسب تعداد نقاط شبکه برای (الف) $t=5\,days$ و (ب) $t=10\,days$؛ تحول زمانی ۱۰ روزه خطای جرم، برای روش‌های عددی مختلف در شبکه‌های (پ) ۱۲۸×۱۲۸ و (ت) ۲۵۶×۲۵۶



شکل ۱۰. تحول زمانی خطای جرم، برای روش‌های مک‌کورمک فشردهٔ مرتبهٔ چهارم ۴/۲ با پیمایش‌های زمانی اصلی و RK4، با ضرایب پخش متفاوت.

نتایج خطای جرم محاسبه‌شده برای این روش‌ها نیز در زمان‌های ۵ و ۱۰ روز، در جدول ۲ و تحول زمانی خطای جرم برای این روش‌ها در شکل ۱۰ آورده شده است.

در حل عددی، زمان اجرای برنامه‌های حل عددی، اهمیت زیادی دارد، زیرا نتایج حاصل از شبیه‌سازی، تا زمان معینی می‌تواند مفید باشد. مدت زمان اجرای برنامه‌های روش‌های مختلف مک‌کورمک مورد بررسی، با شرایط یکسان، یک بار با گام زمانی یکسان (در این گام زمانی همهٔ روش‌ها پایدارند و با آستانهٔ پایداری محاسباتی روش CMC4/4-RK4 منطبق است) برای همه روش‌ها و یک بار دیگر با گام زمانی در آستانهٔ پایداری محاسباتی هر روش، به‌دقت اندازه‌گیری شده‌اند و در هر دو حالت، مقدار بی‌بعدشدهٔ آن‌ها با استفاده از تقسیم آن‌ها بر مدت زمان اجرای برنامه روش مک‌کورمک مرتبهٔ دوم با پیمایش زمانی اصلی و با گام زمانی در آستانهٔ پایداری این روش، در جدول ۳ آمده است. این جدول نشان می‌دهد که زمان اجرای حل عددی با استفاده از روش‌های فشردهٔ مرتبهٔ چهارم چندبرابر بیشتر از زمان لازم با استفاده از روش مرتبهٔ دوم است که با وجود افزایش شایان توجه دقت این روش‌ها در مقایسه با روش مک‌کورمک مرتبهٔ دوم، به‌نظر می‌رسد این زمان برای پیش‌بینی معقول باشد.

جدول ۲. نتایج مربوط به خطای جرم (ε)، برای روش‌های مک‌کورمک فشردهٔ مرتبهٔ چهارم ۴/۲ با پیمایش‌های زمانی اصلی و RK4 در شبکهٔ ۲۵۶×۲۵۶ در زمان‌های ۵ و ۱۰ روز به‌ازای ضرایب پخش متفاوت.

روش	ضریب پخش عددی	$t = ۵ days$	$t = ۱۰ days$
CMC4/2-original	۲۵	۲.۹۴۶۴۴۶×۱۰^{-۳}	۹.۸۱۳۶۴۷×۱۰^{-۳}
CMC4/2-original	۰/۲۵	۲.۴۹۹۵۵۰×۱۰^{-۳}	۸.۹۳۲۶۱۸×۱۰^{-۳}
CMC4/2-RK4	۲۵	۲.۶۶۸۴۸۳×۱۰^{-۳}	۹.۲۸۳۱۹۱×۱۰^{-۳}
CMC4/2-RK4	۰/۲۵	۲.۴۹۵۱۱۸×۱۰^{-۳}	۸.۹۶۸۱۶۹×۱۰^{-۳}

جدول ۳. مدت زمان بی‌بعدشدهٔ اجرای برنامهٔ حل عددی آزمون موردی دوم با شرایط یکسان، با استفاده از روش‌های مک‌کورمک اعمال‌شده.

روش	مدت زمان اجرای برنامه	
	گام زمانی یکسان	گام زمانی آستانهٔ پایداری
MC2	۱/۹۹	۱
CMC4/2-original	۶/۵۸	۴/۱۱
CMC4/2-RK4	۹/۰۳	۴/۵۱
CMC4/4-RK4	۸/۵۵	۸/۵۵

۵. نتیجه‌گیری

کار حاضر به حل عددی شکل پایستار معادلات آب کم‌عمق با استفاده از روش مک‌کورمک فشردهٔ مرتبهٔ چهارم اختصاص داشت. پس از حل عددی معادلات فرارفت یک‌بعدی و آب کم‌عمق یک و دوبعدی با استفاده از روش‌های مک‌کورمک مرتبهٔ دوم و فشردهٔ مرتبهٔ چهارم، با پیمایش‌های زمانی اصلی و رونگ-کوتا، پاسخ‌های به‌دست‌آمده بیانگر آن است که روش‌های مک‌کورمک مرتبهٔ چهارم، جواب‌های دقیق‌تری از روش مک‌کورمک مرتبهٔ دوم دارند. در مورد روش‌های مک‌کورمک فشردهٔ مرتبهٔ چهارم با پیمایش زمانی اصلی نیز طرحوارهٔ ۴/۲ عملکرد بهتری در مقایسه با طرحوارهٔ ۴/۴ دارد. اما در مورد همین روش‌ها با پیمایش زمانی رونگ-کوتا، طرحوارهٔ ۴/۴ عملکرد بهتری از طرحوارهٔ ۴/۲ دارد. در مقایسهٔ همهٔ روش‌ها، روش مک‌کورمک فشردهٔ مرتبهٔ چهارم ۴/۴ با پیمایش زمانی RK4 پاسخ‌های دقیق‌تری از سایر روش‌های اعمال‌شده در کار حاضر می‌دهد. اما محدودهٔ پایداری روش مک‌کورمک فشردهٔ مرتبهٔ چهارم ۴/۴ در مقایسه با بقیهٔ روش‌ها کمتر است (هیکسون و ترکل، ۲۰۰۰). در این مقاله، برای حل عددی معادلات آب کم‌عمق دوبعدی، از دو آزمون موردی استفاده شد. حل عددی آزمون موردی دوم این معادلات نشان می‌دهد که روش مک‌کورمک فشردهٔ مرتبهٔ چهارم ۴/۴ با پیمایش زمانی RK4 با تفکیک شبکهٔ کمتر نیز پاسخ‌های قابل قبولی ارائه می‌کند و در مورد بقیهٔ روش‌های مورد بررسی در این کار، دقت پاسخ‌ها در شبکه‌ای با تفکیک پایین‌تر، افت شایان توجهی نشان می‌دهد. از دیگر نتایج این است که ضریب جملهٔ پخش عددی، اهمیت زیادی دارد و باید با دقت و با آزمایش عددی انتخاب شود تا جواب‌های دقیق‌تری حاصل شود. همچنین باید اشاره کرد که روش‌های مک‌کورمک فشردهٔ مرتبهٔ چهارم، روش‌های توانمندی در حل عددی معادلات آب کم‌عمق هستند و با توجه به نتایج به‌دست‌آمده می‌توانند در حل عددی معادلات دیگر نیز مورد آزمایش قرار گیرند. از دیگر نتایج به‌دست‌آمده، می‌توان به زمان اجرای برنامه‌های مربوط به روش‌های مک‌کورمک فشردهٔ مرتبهٔ چهارم در رایانه اشاره کرد که با وجود افزایش قابل توجه دقت این روش‌ها در مقایسه با روش مک‌کورمک مرتبهٔ دوم، اجرای این برنامه‌ها از زمان معقولی برای شبیه‌سازی برخوردارند.

پیوست الف. حل عددی معادلهٔ فرارفت یک‌بعدی

معادلهٔ فرارفت یک‌بعدی به صورت رابطه (الف-۱) را در نظر می‌گیریم:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+c\frac{\partial u}{\partial x}=0 \qquad \text{(الف-۱)}$$

می‌دانیم حل تحلیلی این معادله، جواب زیر را در پی خواهد داشت:

$$u=Ae^{ik(x-ct)} \qquad \text{(الف-۲)}$$

اگر در لحظه $t=0$ مقدار u را با نماد u_0 نشان دهیم، یعنی:

$$u_0(x)=u(x,t=0)=Ae^{ikx} \qquad \text{(الف-۳)}$$

در این‌صورت کاملاً معلوم است که مقدار u در هر لحظهٔ t، برابر u_0 در مکان $x-ct$ خواهد بود. یعنی جواب تحلیلی معادلهٔ (الف-۱) به‌صورت زیر می‌باشد:

$$u(x,t)=u_0(x-ct) \qquad \text{(الف-۴)}$$

برای محاسبهٔ مقدار خطا در روش‌های مختلف حل عددی انجام‌یافته روی معادلهٔ (الف-۱) از نُرم‌های قدرمطلق، مربعی و بی‌نهایت که به صورت زیر تعریف می‌شوند، استفاده می‌کنیم:

$$l_1(u)=\frac{\sum_{i=1}^{m}\left(\left|\tilde{u}_i-u_i\right|\right)}{\sum_{i=1}^{m}\left(\left|u_i\right|\right)},$$

$$l_2(u)=\frac{\left\{\sum_{i=1}^{m}\left(\left|\tilde{u}_i-u_i\right|^2\right)\right\}^{\frac{1}{2}}}{\left\{\sum_{i=1}^{m}\left(\left|u_i\right|^2\right)\right\}^{\frac{1}{2}}}, \qquad \text{(الف-۵)}$$

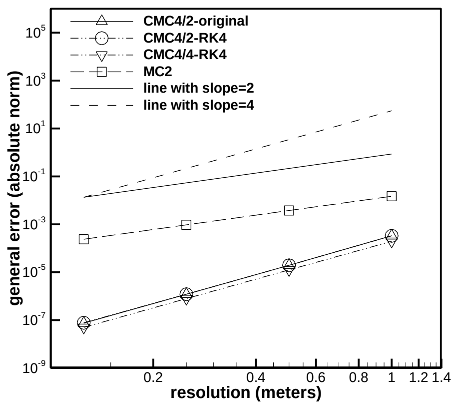
$$l_\infty(u)=\frac{Max_{all}\left(\left|\tilde{u}_i-u_i\right|\right)}{Max_{all}\left(\left|u_i\right|\right)}$$

که در آن m، تعداد نقاط شبکه و u_i، مقدار دقیق تابع (حاصل از روش حل تحلیلی) در هر نقطهٔ i روی شبکه و

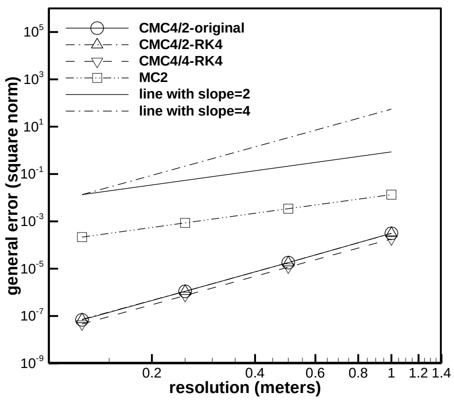
$\tilde{u}_i$، مقدار به‌دست‌آمده از روش حل عددی مورد استفاده، در هر نقطهٔ i می‌باشد. l_1، مقدار خطای کل به‌دست‌آمده با استفاده از نرم قدرمطلق، l_2، مقدار خطای کل به‌دست‌آمده با استفاده از نرم مربعی و l_∞، مقدار خطای کل به‌دست‌آمده با استفاده از نرم بی‌نهایت می‌باشد. هریک از این نُرم‌ها، معیاری برای مشخص‌کردن میزان انحراف پاسخ‌های عددی از جواب‌های تحلیلی هستند. نُرم قدرمطلق، نسبت مجموع قدرمطلق خطاهای نسبی به مجموع قدرمطلق جواب‌های دقیق در تمام نقاط شبکه است. نُرم مربعی، انحراف‌معیار پاسخ‌های عددی از جواب‌های دقیق را در نقاط شبکه و نُرم بینهایت نیز نسبت بیشینهٔ قدرمطلق خطای نسبی به بیشینهٔ جواب دقیق در بین نقاط شبکه را نشان می‌دهند. حل عددی معادلهٔ (الف-۱) را، با روش‌های مک‌کورمک مرتبهٔ دوم و فشردهٔ مرتبهٔ چهارم در یک ناحیهٔ دوره‌ای $-۲۰ \le x \le ۴۵۰$ با فرض $c = ۱\frac{m}{s}$ و با شرایط اولیهٔ زیر در نظر می‌گیریم:

$$u_0(x) = \frac{۱}{۲}\exp\left\{-\ln(۲)\left(\frac{x}{۳}\right)^{۲}\right\} \qquad \text{(الف-۶)}$$

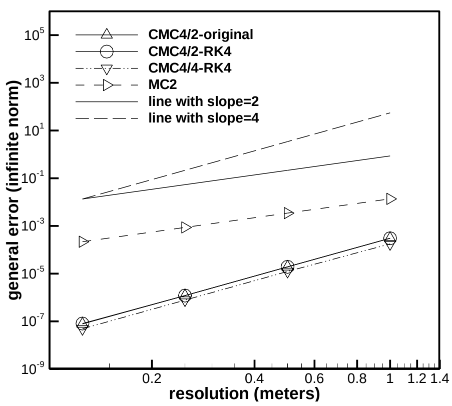
نمودار تغییرات خطای کل پس از یک ثانیه، با استفاده از نرم‌های قدرمطلق، مربع و بینهایت که در رابطهٔ (الف-۵) معرفی شده‌اند، بر حسب تغییرات فاصلهٔ شبکه‌ای، به‌ترتیب در شکل الف-۱ (الف، ب و پ) نشان داده شده است. با نصف‌شدن فاصلهٔ شبکه‌ای، یا به‌عبارت دیگر دوبرابر شدن تفکیک شبکه در این سه شکل، مقدار خطای کل با هر سه نرم ذکرشده، موازی با خط لگاریتمی با شیب معادل دقت مکانی روش کاهش می‌یابد.



(الف)



(ب)



(پ)

شکل (پ-۱). (الف) نمودار لگاریتمی تغییرات خطای کل الف: نرم قدرمطلق، (ب) نرم مربع و پ: نرم بینهایت برحسب تغییرات فاصلهٔ شبکه‌ای در مقایسه با خطوط لگاریتمی با شیب ۲ و ۴.

خط لگاریتمی با شیب n، درواقع نموداری است که رابطهٔ آن با دوبرابر شدن تفکیک n، به‌صورت $y=\frac{1}{۲^n}$ می‌باشد که این نمودار در شکل لگاریتمی آن به‌صورت خط راست دیده می‌شود. این موازی بودن، به‌آن معنی است که کارکرد روش‌های عددی مورد بررسی در این تحقیق کاملاً درست و مطابق با دقت مکانی آن‌هاست. باید توجه داشت که در این مسئله، مقدار گام زمانی، بسیار کوچک انتخاب شده است تا شرط CFL برای همهٔ تفکیک‌ها برقرار باشد. در ضمن، در هر سه شکل به‌طور واضح، دیده می‌شود که خطای کل روش‌های فشردهٔ مرتبهٔ چهارم، در هر تفکیکی از مقادیر معادل آن در روش مرتبهٔ دوم با همان تفکیک کمتر است.

پیوست ب. گسسته‌سازی معادلات آب کم‌عمق یک‌بعدی در روش‌های مک‌کورمک

برای گسسته‌سازی معادلات آب کم‌عمق یک‌بعدی با استفاده از روش‌های مک‌کورمک مرتبهٔ دوم و فشردهٔ مرتبهٔ چهارم، با پیمایش زمانی اصلی، روابط پیشگو و اصلاحگر، را برای معادلهٔ برداری ۳ به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}_i^{*} &= \mathbf{Q}_i^{n} - \Delta t D^{F}\left(\mathbf{R}_i^{n}\right)\\ \mathbf{Q}_i^{n+1} &= \frac{۱}{۲}\left[\mathbf{Q}_i^{n} + \mathbf{Q}_i^{*} - \Delta t D^{B}\left(\mathbf{R}_i^{*}\right)\right]\end{aligned} \qquad (ب–۱)$$

در این رابطه‌ها نماد D، نشان‌دهندهٔ شکل گسستهٔ مشتق اول مکانی است و بالانویس F، پیش‌سو بودن روش و بالانویس B، پس‌سو بودن آن را نشان می‌دهد. همچنین بالانویس n ، تراز زمانی و زیرنویس i، اندیس نقاط روی شبکه را مشخص می‌کند. بالانویس *، مقدار موقتی کمیت $\mathbf{Q}$، در تراز زمانی n+۱، حاصل از مرحلهٔ پیشگو است که در مرحلهٔ اصلاحگر، تصحیح می‌شود.

برای گسسته‌سازی این معادلات با استفاده از روش‌های مک‌کورمک مرتبهٔ دوم و فشردهٔ مرتبهٔ چهارم، با پیمایش‌های زمانی رونگ–کوتا، رابطهٔ (۳) را به ترتیب زیر گسسته می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
H_h^{(1)} &= -\Delta t D^{F}\left[q^{n}\right]\\
H_q^{(1)} &= -\Delta t D^{F}\left[F\left(q^{n},h^{n}\right)\right]\\
H_h^{(2)} &= -\Delta t D^{B}\left[q^{n}+\alpha_2 H_q^{(1)}\right]\\
H_q^{(2)} &= -\Delta t D^{B}\left[F\left(q^{n}+\alpha_2 H_q^{(1)},h^{n}+\alpha_2 H_h^{(1)}\right)\right]\\
H_h^{(3)} &= -\Delta t D^{F}\left[q^{n}+\alpha_3 H_q^{(2)}\right]\\
H_q^{(3)} &= -\Delta t D^{F}\left[F\left(q^{n}+\alpha_3 H_q^{(2)},h^{n}+\alpha_3 H_h^{(2)}\right)\right]\\
H_h^{(4)} &= -\Delta t D^{B}\left[q^{n}+\alpha_4 H_q^{(3)}\right]\\
H_q^{(4)} &= -\Delta t D^{B}\left[F\left(q^{n}+\alpha_4 H_q^{(3)},h^{n}+\alpha_4 H_h^{(3)}\right)\right]\\
H_h^{(5)} &= -\Delta t D^{F}\left[q^{n}+\alpha_5 H_q^{(4)}\right]\\
H_q^{(5)} &= -\Delta t D^{F}\left[F\left(q^{n}+\alpha_5 H_q^{(4)},h^{n}+\alpha_5 H_h^{(4)}\right)\right]\\
H_h^{(6)} &= -\Delta t D^{B}\left[q^{n}+\alpha_6 H_q^{(5)}\right]\\
H_q^{(6)} &= -\Delta t D^{B}\left[F\left(q^{n}+\alpha_6 H_q^{(5)},h^{n}+\alpha_6 H_h^{(5)}\right)\right] \qquad (ب–۲)\\
h^{n+۱} &= h^{n}+\beta_1 H_h^{(1)}+\beta_2 H_h^{(2)}+\beta_3 H_h^{(3)}+\beta_4 H_h^{(4)}+\beta_5 H_h^{(5)}+\beta_6 H_h^{(6)}\\
q^{n+۱} &= q^{n}+\beta_1 H_q^{(1)}+\beta_2 H_q^{(2)}+\beta_3 H_q^{(3)}+\beta_4 H_q^{(4)}+\beta_5 H_q^{(5)}+\beta_6 H_q^{(6)}\\
u_i^{n+۱} &= \frac{q_i^{n+1}}{h_i^{n+1}}
\end{aligned}$$

ضرایب α و β، از جدول ۱ برای هر روش جاگذاری می‌شوند.

مراجع

جوان نژاد، ر.، مشکواتی، ا. ح.، قادر، س. و احمدی گیوی، ف.، ۱۳۹۵، حل عددی شکل پایستار معادلات تراکم‌پذیر دوبعدی و ناآب‌ایستایی جو با روش فشرده مک‌کورمک، م. ژئوفیزیک ایران، در حال چاپ.

فلاحت، س.، ۱۳۸۷، حل عددی شکل پایستار معادلات تراکم‌پذیر دوبعدی و غیرهیدروستاتیک جو بی‌دررو با استفاده از روش فشرده مرتبه چهارم، پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد هواشناسی، مؤسسه ژئوفیزیک دانشگاه تهران.

قادر، س. و اصفهانیان، و.، ۱۳۸۵، حل عددی شکل پایستار معادلات آب کم‌عمق با استفاده از روش ابرفشرده مرتبه ششم، م. فیزیک زمین و فضا، ۳۲(۲)، ۴۴-۳۱.

قادر، س.، بیدختی، ع. ع. و فلاحت، س.، ۱۳۸۹، حل عددی مسئله تنظیم راسبی غیرخطی ناپایای دوبعدی با

استفاده از روش فشرده مک‌کورمک مرتبه چهارم، م. فیزیک زمین و فضا، ۳۶(۳)، ۱۷۳-۱۵۱.

میرزائی شیری، ر.، ۱۳۹۳، حل عددی شکل پایستار معادلات آب کم‌عمق با استفاده از روش مک‌کورمک فشردهٔ مرتبهٔ چهارم، پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد هواشناسی، مؤسسهٔ ژئوفیزیک دانشگاه تهران.

Dritschel, D. G., Polvani, L. M. and Mohebalhojeh, A. R., 1999, Contour-advective semi-Lagrangian algorithm for the shallow water equations, Mon. Wea. Rev., 127, 1551-1565.

Esfahanian, V., Ghader, S. and Mohebalhojeh, A. R., 2005, On the use of super compact scheme for spatial differencing in numerical models of the atmosphere, Q. J. Roy. Meteorol. Soc., 131, 2109-2130.

Ghader, S., Mohebalhojeh, A. R. and Esfahanian, V., 2009, On the spectral convergence of supercompact finite-difference schemes for the f-plane shallow-water equations, Mon. Wea. Rev., 137, 2393-2406.

Ghader, S. and Nordström, J., 2015, High-order compact finite difference schemes for the vorticity–divergence representation of the spherical shallow water equations, Int. J. Numer. Meth. Fluids, 78, 709-738.

Gustafsson, B., 1971, An ADI method for solving the shallow water equations, J. Comput. Phys., 7, 239-253.

Hixon, R. and Turkel, E., 2000, Compact implicit MacCormack–type scheme with high accuracy, J. Comput. Phys., 158, 51-70.

Hoffman, J., D., 2001, Numerical methods for engineer and scientist, Marcel Dekker, Second Edition, 823pp.

Houghton, D., Kasahara, A. and Washington, W., 1966, Long-term integration of the barotropic equations by the Lax-Wendroff method, Mon. Wea. Rev., 94, 141-150.

Mohebalhojeh, A. R. and Dritschel, D. G., 2007, Assessing the numerical accuracy of complex spherical shallow water flows. Mon. Wea. Rev., 135, 3876-3894.

Navon, I. M. and Riphagen, H. A., 1979, An implicit compact fourth-order algorithm for solving the shallow water equations in conservative-law form, Mon.Wea. Rev., 107, 1107-1127.

Vallis, G. K., 2006, Atmospheric and Oceanic fluid dynamics: fundamentals and large-scale circulation, Cambridge University Press.

Journal of the Earth and Space Physics, Vol. 43, No. 1, Spring 2017, P. 15

Numerical solution of the shallow water equations using fourth-order compact MacCormack scheme

Mirzaei-Shiri, R.[1], Ghader, S.[2*], Mazraeh-Farahani, M.[2] and AliAkbari-Bidokhti, A.[3]

1. Ph.D. Student, Department of Space Physics Department, Institute of Geophysics, University of Tehran, Iran
2. Associate Professor, Department of Space Physics Department, Institute of Geophysics, University of Tehran, Iran
3. Professor, Department of Space Physics Department, Institute of Geophysics, University of Tehran, Iran

(Received: 02 Feb 2016, Accepted: 18 Oct 2016)

Summary

Shallow water equations are for modelixy the behavior of a single-layer of fluid with constant density, that the hydrostatic approximation applies. These equations for the motion of a dry and inviscid atmosphere with constant density include the momentum and the continuity equations. In addition, the shallow water equations are often used as a testbed to assess the performance of new numerical algorithms. In recent years, the trend toward increasing the accuracy of the numerical simulations of the atmospheric and oceanic motions has increased due to the inherent complexity in these motions. In recent researches, the compact schemes have been notable because of their remarkable performance in the numerical simulation of fluid flows in other branches of fluid dynamics. This work is devoted to the application of the fourth-order compact MacCormack scheme to the numerical solution of the conservative form of the two dimensional shallow water equations. The compact MacCormack method is formulated in form of a two-point scheme. Two versions of the fourth-order compact MacCormack scheme have been introduced and called as 4/2 and 4/4. The first order spatial derivative operators have implicit forms in both schemes (4/2 and 4/4), for one-sided forward and backward operators. The MacCormack scheme uses two time-marching methods: The first is the original two-stage method and the other one is the Runge-Kutta-type (RK2, RK4 and LDDRK4-6) method. In the present work first, we solve a simple linear (advection) equation with an analytical solution, using the second-order and the fourth-order compact MacCormack-type schemes (with the original and the Runge-Kutta time-marching methods) and compare their global errors. The results show that when the fourth-order compact MacCormack schemes with the original time-marching are used, the 4/2 formulation has better results than the 4/4 formulation, but when these schemes use the Runge-Kutta time-marching, the results of the 4/4 formulation are better than those in the 4/2 formulation. According to these results and the magnitude of the global errors, we used four MacCormack-type methods to solve the shallow water equations. The methods are the second-order scheme with the original time-marching, the 4/2 type of fourth order compact scheme with both the original and the RK4 time-marching, and the 4/4 type of fourth order compact scheme with the RK4 time-marching. In the following, we solved the conservative form of the one-dimensional shallow water equations with those four mentioned schemes. The results were compared with a test case with known analytical solution. Finally, we solved the conservative form of the two-dimensional shallow water equations. To perform the simulations two well know test cases are used. To assess the numerical accuracy, we estimated conservative quantities such as energy, enstrophy and mass along the simulation process in all time steps. The estimated results indicate that the fourth-order compact MacCormack schemes retain the conservation of these quantities better than the second-order MacCormack scheme. In comparison with the other applied schemes in this work, while the 4/4 formulation with the RK4 time-marching shows more accurate results, the numerical stability condition of this scheme is less than the other schemes. In the second test case, we point out that the computational time of the code for each numerical solution, which utilizes the fourth-order compact schemes, is longer than the computational time of the solution using second-order scheme; but their implementation is reasonable because their numerical accuracy is higher than that of the second-order scheme.

Keywords: Shallow water equations, Compact MacCormack scheme, Numerical accuracy, Runge-Kutta.

---

*Corresponding author: sghader@ut.ac.ir