فیزیک زمین و فضا، دوره ۴۴، شماره ۳، پاییز ۱۳۹۷، صفحهٔ ۵۹۵- ۶۰۶
DOI: 10.22059/jesphys.2018.256945.1007004

بررسی کارایی روش‌های مبتنی بر تسرویید در محاسبه اثر جاذبی توپوگرافی

مهدی گلی*

استادیار، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی شاهرود، ایران

(دریافت: ۹۷/۲/۱۶، پذیرش نهایی: ۹۷/۷/۳)

چکیده

اثر جاذبی توپوگرافی یکی از مؤلفه‌های مهم میدان گرانی است که سهم مهمی در مطالعات ژئوفیزیک و ژئودتیکی را ایفا می‌کند. برای تفاسیر ژئوفیزیکی لازم است اثر توپوگرافی به‌عنوان عامل مزاحم از داده‌های جاذبی اندازه‌گیری شده حذف شود. در حل مسائل مقدار مرزی ژئودتیکی توپوگرافی مانعی برای هارمونیک بودن فضا است. این مطالعه به نحوه محاسبه اثر توپوگرافی اجرام نزدیک تا فاصله ۱٫۵ درجه (برابر ۱۶۷ کیلومتر) موسوم به زون هایفورد-بووی می‌پردازد. رابطه ریاضی برای این منظور مشتق ارتفاعی انتگرال نیوتن و داده‌های مورد استفاده مدل‌های رقومی ارتفاعی است. کارایی چهار روش مبتنی بر المان تسرویید با روش منشور مقایسه می‌شود. این روش‌ها شامل: انتگرال‌گیری عددی با قاعده نمایی مضاعف موسوم به روش فوکوشیما، انتگرال‌گیری عددی بروش مارتینک-ونیچک، بسط سری تیلور موسوم به هک-سویتز و روش نقطه مادی همگی دارای تقریب کروی هستند. برای آزمون صحت نتایج روشهای مختلف، از یک مدل تحلیلی (توپوگرافی مصنوعی حاصل از یک کلاهک کروی با ارتفاع ۱۰۰۰متر) با اثر توپوگرافی معلوم استفاده شده است. گسسته‌سازی این مدل تحلیلی با شبکه‌های با ابعاد مختلف و در نواحی بسیار نزدیک، نزدیک و دور انجام شد. نتایج عددی حاکی از موفقیت روش منشور برای مدل‌سازی اثر توپوگرافی برای اجرام نزدیک (ناحیه تا شعاع ۱۸ کیلومتر) نسبت به روش‌های بر مبنای تسرویید است. در این ناحیه، انتگرال‌گیری با مدل ارتفاعی با گام بهتر از ۳۰ متر برای تأمین دقت ۱۰ میکروگال لازم است. در نواحی ۱۸ کیلومتر تا ۱۶۷ کیلومتر نتایج عددی همه روش‌های تعیین اثر توپوگرافی یکسان است.

واژه‌های کلیدی: اثر توپوگرافی، آنومالی جاذبه، تسرویید، انتگرال‌گیری عددی، منشور.

۱. مقدمه

اثر توپوگرافی، شتاب جاذبی اجرام بالای ژئویید (سطح متوسط دریا) روی داده‌های گرانی زمینی، هوابرد و یا ماهواره‌ای است. این مؤلفه به‌تناوب در کاربردهای مختلف ژئودتیکی به‌منظور مدل‌سازی محلی میدان گرانی (سانسو و رومل، ۱۹۹۷؛ مارتینک، ۱۹۹۸) و مدل‌سازی ژئوفیزیکی به‌منظور تفسیر گرانی و حل مسائل معکوس ژئوفیزیک (لافر، ۱۹۹۱؛ نول، ۱۹۹۹) بررسی شده است. مدل ریاضی برای محاسبه اثر توپوگرافی، مشتق (ارتفاعی) انتگرال نیوتن و داده‌های موردنیاز برای محاسبه آن مدل‌های رقومی ارتفاعی (DEM) است. این مدل‌های ارتفاعی به‌لطف پیشرفت در مهندسی سنجش‌ازدور و فتوگرامتری در اغلب مناطق زمین با دقت و تفکیک مکانی کافی وجود دارند.

محاسبه اثر توپوگرافی از جنبه‌های مختلف در مطالعات ژئودتیک و ژئوفیزیک بررسی‌شده است. برای مثال برای تقریبات مختلف اثر توپوگرافی ازجمله صفحه‌ای، کروی و بیضوی به مطالعات (نواک و گرافارند، ۲۰۰۵؛ گلی و نجفی علمداری، ۱۳۹۳) می‌توان اشاره کرد. در این مطالعات نشان داده شده است که اثر تقریب بیضوی از حدود ۱ درصد مقدار کل اثر کمتر است. از منظر به‌کارگیری روش‌های انتگرال‌گیری عددی نظیر گوس-لژاندر می‌توان به مطالعات (ونگ، ۲۰۰۳؛ اصغرزاده وهمکاران، ۲۰۰۷؛ ییلدا، ۲۰۱۶؛ فوکوشیما ۲۰۱۷) اشاره نمود. همچنین تأثیر المان‌های مختلف انتگرال‌گیری نظیر منشور، نقطه مادی و تسرویید در اثر توپوگرافی در مطالعات (ویلد-پیفر، ۲۰۰۸؛ هک و سویتز، ۲۰۰۷؛ سولیس و همکاران، ۲۰۰۹؛ گرامبین و همکاران، ۲۰۱۳) بررسی‌شده است. در مطالعه هک و سویتز (۲۰۰۷) نشان داده شده است که روش منشور دقت کافی برای تعیین پتانسیل جاذبی توپوگرافی و مشتق ارتفاعی آن را تأمین

*نگارنده رابط: goli@shahroodut.ac.ir

نمی‌کند. ازنقطه‌نظر اثر تفکیک مکانی DEM به مطالعات (اسمیت، ۲۰۰۱؛ کرینسکی وهمکاران، ۲۰۰۵؛ سولیس و همکاران، ۲۰۰۹) می‌توان اشاره کرد. در این مطالعات نشان داده شده است که بزرگ بودن گام DEM (برای مثال استفاده از مدل ارتفاعی با گام یک کیلومتر) منجر به محاسبه اثر توپوگرافی کوچک می‌شود. همین‌طور در مطالعه سولیس و همکاران (۲۰۰۹) نشان داده شد که در منطقه کوهستانی در اتریش اختلاف روش‌های منشور و تسرویید در شتاب جاذبه توپوگرافی می‌تواند به چندین میلی‌گال برسد.

در مطالعه سولیس و همکاران (۲۰۰۹) فاصله اجرام مؤثر (شعاع انتگرال‌گیری در انتگرال نیوتن) و ترکیب روش‌های مختلف در اثر توپوگرافی بررسی‌شده است. همین‌طور درباره نحوه مدل‌سازی اجرام بسیار نزدیک و خیلی دور به یاماموتو (۲۰۰۲) و زاهورک (۲۰۱۵)، مراجعه کنید. در پایان، مطالعات زیادی نیز بر استفاده از روش‌های طیفی برای حل انتگرال نیوتن (نظیر فوریه و هارمونیک‌های کروی و بیضوی) متمرکزشده‌اند، برای مثال ببینید (فرسبرگ؛ ۱۹۸۵؛ سون، ۲۰۰۲؛ کلایسن و هرت، ۲۰۱۳). همان‌طور که مشهود است محاسبه اثر توپوگرافی یکی از زمینه‌های وسیع مطالعات در ژئودزی و ژئوفیزیک است.

همان‌طور که در فوق اشاره شد، تاکنون مطالعات مبسوطی در خصوص محاسبه اثر توپوگرافی انجام شده است. اما کمتر کارایی روش‌های پیشنهادی برای تعیین اثر توپوگرافی در ایستگاه‌های گرانی مورد آزمون قرار نگرفته است. برای مثال در مطالعه جامع سولیس و همکاران (۲۰۰۹) جنبه‌های زیادی از محاسبه اثر توپوگرافی بررسی شده است. اما روش‌های مورد اشاره در این مطالعه بدون مقایسه با یک روش تحلیلی (جواب صحیح) تنها با یکدیگر مقایسه شده‌اند. همین‌طور در مطالعه هک و سویتز (۲۰۰۷) به‌صراحت اشاره شده است که دقت روش منشور از روش المان تسرویید کمتر است. اما مقایسه این دو روش تنها در فواصل دور (چند صد کیلومتر) انجام می‌شود و بدیهی است که روش منشور که از تقریب صفحه‌ای استفاده می‌کند حتی با اعمال تقریب کروی، نمی‌تواند به‌خوبی روش‌های مبتنی بر تسرویید که از هندسه کروی سود می‌برند، عمل کند. ازسوی‌دیگر همان‌طور که می‌دانیم اثر توپوگرافی در ایستگاه‌های گرانی نهایتاً تا ۱۶۷ کیلومتر (زون هایفورد) محاسبه می‌شود.

یکی از اهداف این مطالعه جستجو برای یافتن یک الگوریتم کارا برای محاسبه اثر توپوگرافی بر آنومالی‌های جاذبه بوگه در ایستگاه‌های گرانی است. در بررسی کارایی دو پارامتر دقت و سرعت محاسبات مورد توجه قرار می‌گیرد. توجه اصلی این مطالعه بررسی روش‌های مبتنی بر تسرویید است که نقش پررنگی در مطالعات اخیر نظیر (هک و سویتز، ۲۰۰۷؛ گرامبین و همکاران، ۲۰۱۳؛ بیلدا و همکاران، ۲۰۱۶؛ فوکوشیما، ۲۰۱۷) دارد. لذا هدف اصلی این مطالعه معطوف به کاربرد تسرویید در محاسبه اثر توپوگرافی بر شتاب جاذبی در زون هایفورد-بووی است.

۲. اثر توپوگرافی بروش اجزای محدود

طبق تعریف، توپوگرافی محدود به اجرام ژئویید (با شعاع ژئوسنتریک r_g) تا سطح زمین با شعاع ژئوسنتریک $r_g + H$است. اثر شتاب جاذبی این اجرام در سیستم مختصات کروی عبارت است از (مارتینک، ۱۹۹۸):

$$A(r,\varphi,\lambda) = G\int_{\varphi=-\pi/2}^{\pi/2}\int_{\lambda=0}^{2\pi}\int_{r'=r_g}^{r_g+H'} \rho(r',\varphi',\lambda')\,\frac{r'^2(r-r't)}{l^3(r,t,r')}\cos\varphi'\,\mathrm{d}\varphi'\mathrm{d}\lambda'\mathrm{d}r' \qquad (۱)$$

در این رابطه، (r,φ,λ) مختصات کروی نقطه محاسبه شامل r فاصله ژئوسنتریک و φ و λ عرض و طول ژئوسنتریک نقطه محاسباتی، (r',φ',λ') مختصات نقطه انتگرال‌گیری، G ثابت گرانش و ρ چگالی توپوگرافی است. r_g شعاع ژئوسنتریک ژئویید و H' ارتفاع سطح توپوگرافی است. همچنین= $l(r,t,r')$

$\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr't}$ فاصله فضایی و t کسینوس زاویه کروی بین دو نقطه محاسباتی و انتگرال‌گیری است.

همان‌طور که در قبل اشاره شد با توجه به بیضوی بودن زمین، استفاده از تقریب کروی برای محاسبه اثر توپوگرافی خطایی تا ۱ درصد را ایجاد می‌کند که به‌جز مطالعات معدودی نظیر (نواک و گرافارند، ۲۰۰۵) و گلی و نجفی علمداری (۱۳۹۳) در سایر مطالعات از تقریب کروی یا صفحه‌ای استفاده می‌شود. اگر R شعاع متوسط ژئويید باشد، در تقریب کروی، شعاع ژئوسنتریک نقطه محاسبه و انتگرال‌گیری برابر $r = R + H$ و $r' = R + H'$ است. فرض اساسی دیگر در این مطالعه ثابت بودن دانسیته توپوگرافی است. این فرض اگرچه نتایج مدل‌سازی میدان گرانی را تحت تأثیر قرار می‌دهد (هیوانگ، ۲۰۰۲؛ مارتینک و همکاران، ۲۰۰۵). اما در این مطالعه از اثر آن صرف‌نظر می‌شود. علاوه براین فرض ثابت بودن چگالی برای مطالعات ژئوفیزیک ضروری است (هاینزه، ۲۰۰۳).

دامنه انتگرال (۱) تمام اجرام توپوگرافی روی سطح زمین است. در مطالعات ژئودتیکی برای هارمونیک کردن میدان در حل مسائل مقادیر مرزی لازم است دامنه انتگرال‌گیری شامل تمام محدوده زمین باشد؛ اما اغلب در مطالعات ژئوفیزیک انتگرال‌گیری تا شعاع محدودی مثلاً زون هایفورد–بووی برابر۱٫۵ درجه کمانی معادل تقریبی ۱۶۷ کیلومتر محدود می‌شود (لافر، ۱۹۹۱). با توجه به اهمیت بالای اجرام نزدیک، در این مطالعه به اثر زون‌های خارج از زون هایفورد–بووی و روش‌های آن پرداخته نمی‌شود. یکی از تفاوت‌های این مطالعه با مطالعات قبلی نظیر (هک و سویتز، ۲۰۰۷) مقایسه کارایی روش‌های مختلف در زون هایفورد است. با اعمال این فرضیات در رابطه (۱)، داریم

$$A(r,\varphi,\lambda) = G\rho_0 \iint_{S_0} \int_{r'=R}^{R+H'} K \mathrm{d}\varphi' \mathrm{d}\lambda' \mathrm{d}r' \qquad (۲)$$

که ρ_0 چگالی متوسط توپوگرافی برابر $2670\ kg/m^3$، S_0 زون هایفورد–بووی و $K = \frac{r'^2(r-r't)}{l^3(r,t,r')}\cos\varphi'$ است.

در محاسبه اثر توپوگرافی دو پارامتر المان انتگرال‌گیری و تقریب هندسه توپوگرافی اعم از مسطح، کروی و بیضوی تأثیرگذارند که کارکردهای مشابه آنها موجب پیچیدگی درک موضوع می‌شود. روش اجزای محدود یک روش عمومی و استاندارد برای تخمین مقدار عددی انتگرال (۲) است. در این روش اثر جاذبی توپوگرافی مجموع اثر جاذبی المان‌های کوچک‌تر Ω_i است:

$$A(r,\varphi,\lambda) = \sum_i G\rho_0 \iint_{\Omega_i} \int_{r'=R}^{R+H'} K \mathrm{d}\varphi' \mathrm{d}\lambda' \mathrm{d}r' \qquad (۳)$$

هندسه المان Ω_i می‌تواند نقطه مادی، خط و صفحه و یا المان‌های سه‌بعدی نظیر منشور چهاروجهی، منشور کروی (تسروييد) و یا اشکال پیچیده‌تر باشد. وجود جواب تحلیلی برای المان انتگرال سه‌بعدی در رابطه فوق، بستگی به هندسه المان Ω_i دارد. برای مثال برای همه المان‌ها جز تسروييد، جواب تحلیلی برای انتگرال سه‌گانه داخلی وجود دارد. در حالی برای المان تسروييد، جواب تحلیلی تنها روی مؤلفه شعاعی وجود دارد. انتخاب نوع المان ممکن است مستلزم استفاده از یک هندسه خاصی از توپوگرافی باشد. به‌عنوان مثال زمانی که از المان منشور استفاده می‌شود، زمین مسطح فرض می‌شود. همچنین المان تسروييد بر مبنای کروی بودن زمین است. انتخاب نوع المان و هندسه می‌توانند مستقل باشند. برای مثال المان نقطه مادی می‌توان زمین مسطح، کروی و بیضوی باشد.

۲-۱. المان تسروييد با انتگرال‌گیری عددی دوبعدی

تسروييد (منشور کروی) حجم محصور بین دو کره هم‌مرکز است (هک و سویتز، ۲۰۰۷). انتگرال (۲) دارای جواب تحلیلی روی مؤلفه شعاعی است (مارتینک، ۱۹۹۸):

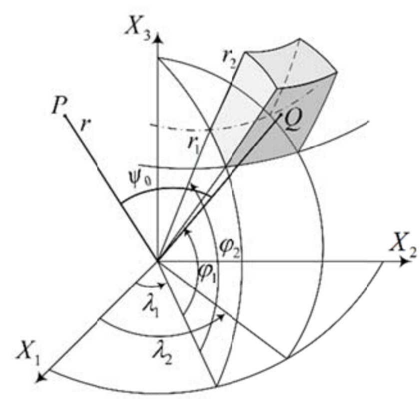
$$A(r,\varphi,\lambda) = G\rho_0 \iint_{S_0} P(r,t,r')\big|_{r'=R}^{R+H'} \mathrm{d}\varphi' \mathrm{d}\lambda' \qquad (۴)$$

که کرنل $K = \mathrm{d}P/\mathrm{d}r$ است. برای رابطه آن به مطالعه (مارتینک، ۱۹۹۸) مراجعه کنید. انتگرال سطحی فوق، یک انتگرال بیضوی بوده که نسبت به مؤلفه‌های طول و عرض جغرافیایی دارای جواب تحلیلی نیست. یک روش

برای محاسبه مقدار عددی این انتگرال (۴) گسسته‌سازی آن روی سلول‌های جغرافیایی به فرم زیر است:

$$A(r,\varphi,\lambda) = G\rho_0 \sum_{j=1}^{N^{\phi}} \sum_{k=1}^{N^{\lambda}} P_{j,k}\, \Delta\varphi\Delta\lambda \qquad (۵)$$

که در این رابطه $\Delta\varphi$ و $\Delta\lambda$ گام DEM در راستای عرض و طول جغرافیایی و N^{ϕ} و N^{λ} تعداد سلول‌های محاسباتی در راستای به‌ترتیب عرض و طول جغرافیایی است. این روش که به‌نوعی از هندسه تسرویید استفاده می‌کند، در اینجا مارتینک–ونیچک (MV) نامیده می‌شود. این روش برای محاسبات اثرات توپوگرافی در مطالعات (مارتینکو ونیچک، ۱۹۹۴؛ مارتینک و همکاران، ۱۹۹۵؛ هیوانگ، ۲۰۰۲؛ نواک و همکاران، ۲۰۰۱؛ ونیچک و همکاران، ۲۰۰۴؛ گلی و نجفی علمداری، ۲۰۱۴) بکار گرفته‌شده است. همچنین اثرات توپوگرافی در نرم‌افزار تعیین ژئویید SHGeo دانشگاه نیوبرانزویک از این روش محاسبه می‌شود (تنزر و همکاران، ۲۰۰۳؛ ونیچک و همکاران، ۲۰۱۳).



شکل ۱. هندسه تسرویید، نقطه محاسباتی P و نقطه انتگرال‌گیری Q.

۲-۲. المان تسرویید با بسط تیلور

هک و سویتز (۲۰۰۷) از بسط سری تیلور کرنل $P(r,t,r')$ تا جملات مرتبه دوم حول مرکز تسروییدبه‌مختصات (r_0,ϕ_0,λ_0) استفاده کردند. در اینجا

$$r_0 = \frac{r_1+r_2}{2}, \phi_0 = \frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}, \lambda_0 = \frac{\lambda_1+\lambda_2}{2} \qquad (۶)$$

و r_1، r_2 ، φ_1، φ_2، λ_1، λ_2 حدود هر تسرویید هستند. استفاده از بسط مرتبه دوم امکان استفاده از جواب تحلیلی برای انتگرال (۲)را فراهم می‌کند. فرمولاسیون این روش که اینجا هک- سویتز (HS) نامیده می‌شود، عبارت است از:

$$A(r,\varphi,\lambda) = G\rho_0 \Delta r \Delta\varphi\Delta\lambda \sum_{j=1}^{N^{\phi}} \sum_{k=1}^{N^{\lambda}} \left[\begin{array}{l} L_{000} + \frac{1}{24}(L_{200}\Delta r^2 \\ + L_{020}\Delta\varphi^2 + L_{002}\Delta\lambda^2 \\ + \mathcal{O}\left(\Delta^4\right) \end{array} \right] \qquad (۷)$$

ضرایب L_{000}، L_{200}، L_{020} و L_{002} در مطالعه (هک و سویتز، ۲۰۰۷) آمده است. در این رابطه، $\Delta r = H' = r' - R$، ارتفاع تسرویید برای هر سلول است. همچنین علامت لاندا $\mathcal{O}(\Delta^4)$ نیز بیانگر صرف‌نظر کردن از ترم مرتبه چهارم و بالاتر از آن است.

۳-۲. المان نقطه مادی

چنانچه اثر جاذبی تسرویید با اثر جاذبی یک نقطه مادی که جرم آن با جرم تسرویید جایگزین کنیم، روش ساده نقطه مادی PM به‌دست می‌آید. نقطه مادی در حقیقت ترم مرتبه صفر در رابطه HS است (همان مرجع):

$$A(r,\varphi,\lambda) = G\rho_0 \Delta\varphi\Delta\lambda \sum_{j=1}^{N^{\phi}} \sum_{k=1}^{N^{\lambda}} L_{000} = G\rho_0 \Delta\varphi\Delta\lambda \sum_{j=1}^{N^{\phi}} \sum_{k=1}^{N^{\lambda}} \frac{r - r_0 t}{l_0^3\left(r,t,r_0\right)} \qquad (۸)$$

که در این رابطه t و l_0 به‌ترتیب زاویه کروی و فاصله بین نقطه محاسبه و مرکز تسرویید است.

۴-۲. المان تسرویید با انتگرال‌گیری عددی سه‌بعدی

برخی از محققین از انتگرال‌گیری عددی سه‌بعدی برای برآورد انتگرال سه‌گانه (۲) استفاده کرده‌اند. برای مثال (اصغرزاده و همکاران، ۲۰۰۷؛ بیلدا و همکاران، ۲۰۱۶) هر دو از روش عددی گوس–لژاندر برای تعیین اثر پتانسیل، شتاب و گرادیان‌های توپوگرافی سود بردند. در

این روش انتگرال سه‌گانه (۲) با رابطه زیر تقریب زده می‌شود:

$$A(r,\varphi,\lambda) = G\rho_0 \frac{\Delta r \Delta\varphi \Delta\lambda}{8} \sum_{i=1}^{N^r}\sum_{j=1}^{N^\varphi}\sum_{k=1}^{N^\lambda} \omega_i \omega_j \omega_k K(r_i,\varphi_j,\lambda_k) \tag{۹}$$

برای نحوه محاسبه ضرایب ω_i، ω_j و ω_k برای مثال به بیلدا و همکاران (۲۰۱۶)، مراجعه کنید. اخیراً فوکوشیما (۲۰۱۷) پتانسیل یک تسرویید را با قاعده انتگرال‌گیری نمایی مضاعف (تاکاشی و موری، ۱۹۷۴) با ۱۴–۱۵ رقم معنی‌دار محاسبه کرد. در روش فوکوشیما شتاب جاذبی نه از انتگرال‌گیری عددی بلکه با مشتق‌گیری عددی بروش تفاضل محدود مرکزی محاسبه می‌شود. او نشان داد که بردار شتاب گرانی و گرادیان‌های آن را به‌ترتیب با ۹–۱۱ و ۵–۶ رقم معنی دارد، محاسبه می‌شوند.

۵-۲. اثر توپوگرافی با المان منشوری

یکی از المان‌های پرکاربرد در محاسبه اثر توپوگرافی، منشور (چهاروجهی منتظم) است. از این المان در محاسبه اثر توپوگرافی در مطالعات (مادر، ۱۹۵۱ ؛ ناگی، ۱۹۶۶؛ فرسبرگ، ۱۹۸۴ ؛ فرسبرگ و سیدریس، ۱۹۸۹ ؛ سانسو و رومل، ۱۹۹۷ ؛ ناگی و همکاران، ۲۰۰۰ ؛ اسمیت، ۲۰۰۰؛ سولیس، ۱۹۹۸، ۲۰۰۳؛ سولیس و همکاران، ۲۰۰۹) استفاده‌شده است. المان منشور در سیستم مختصات کارتزین محلی توپوسنتریک تعریف می‌شود. شتاب جاذبی ناشی از یک منشور از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$A(x,y,z) = G\rho_0 \int_{x'=x_1}^{x_2}\int_{y'=y_1}^{y_2}\int_{z'=z_1}^{z_2} \frac{z-z'}{l^3(x,y,z,x',y',z')} dx'dy'dz' \tag{۱۰}$$

که $l=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}$ فاصله بین نقطه محاسباتی و انتگرال‌گیری است.

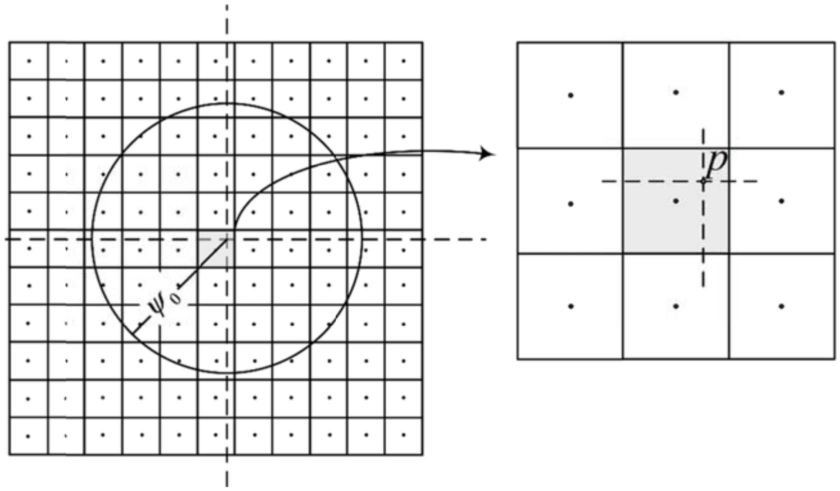
همچنین $\Delta x = x - x'$, $\Delta y = y - y'$, $\Delta z = z - z'$. جواب تحلیلی برای انتگرال سه‌گانه فوق وجود دارد و این مهم‌ترین ویژگی المان منشور است (مادر، ۱۹۵۱):

$$A(x,y,z) = G\rho_0 \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}(-1)^{i+j+k}\left[\begin{array}{l}\Delta y_j \ln|\Delta x_k + l_{ijk}| + \\ \Delta x_i \ln|\Delta y_j + l_{ijk}| - \\ \Delta z_k \operatorname{atan}\left|\frac{\Delta x_i \Delta y_j}{\Delta z_k l_{ijk}}\right|\end{array}\right] \tag{۱۱}$$

که در این رابطه $l_{i,j,k}=\sqrt{\Delta x_i^2+\Delta y_j^2+\Delta z_k^2}$ هندسه توپوگرافی در روش منشوری بر اساس مسطح بودن زمین است. لذا خطای استفاده از منشور برای محاسبه اثر توپوگرافی اجرام دوردست، تحت تأثیر انحنای زمین افزایش می‌یابد. برای رفع این خطا باید ارتباط بین دو سیستم مختصات کارتزین تعریف شده در نقطه محاسباتی و نقطه انتگرال‌گیری را برقرار کرد. یک روش عملی برای در نظر گرفتن انحنای زمین شیفت ارتفاع نقاط انتگرال‌گیری با رابطه تقریبی $\frac{s^2}{2R}$ است که در این رابطه s فاصله بین نقطه انتگرال‌گیری و محاسباتی است (سولیس و همکاران، ۲۰۰۹). ازآنجاکه در این مقاله تنها به اثر توپوگرافی تا زون هایفورد می‌پردازیم؛ این روش نتایج قابل قبولی در کم کردن فرض مسطح بودن زمین در روش منشوری دارد.

۳. سهم اپی سنتر

کرنل‌های K و P وقتی $\psi = 0$ (یکی شدن نقطه محاسبه به نقطه انتگرال‌گیری) دارای تکینگی ضعیف هستند (ماترینکو همکاران، ۱۹۹۵). برای رفع این تکینگی معمولاً از دو تکنیک بسط کرنل به سری تیلور و تکنیک کوشی استفاده می‌شود. در این مطالعه از روش کوشی برای رفع تکینگی استفاده می‌شود. مارتینک و همکاران (۱۹۹۵) نشان دادند که درصورتی‌که تغییرات دانسیته را به‌صورت جانبی باشد، می‌توان از روش کوشی برای سهم تکینگی و رفع آن استفاده کرد. همان‌طور که قبلاً اشاره شد، در این مقاله از تغییرات شعاعی و جانبی دانسیته صرف‌نظر می‌شود. لذا شرط استفاده از روش کوشی مهیاست.



شکل۲. موقعیت دوبعدی نقطه محاسبه p و نقاط انتگرال‌گیری اطراف.

در عمل، محاسبه اثر توپوگرافی در نقطه‌ای مانند p با یک DEM انجام می‌شود که ارتفاع هر سلول میانگین ارتفاع آن سلول است و به مرکز آن منتسب می‌شود (ناگی، ۱۹۶۶). در محاسبه اثر توپوگرافی چنانچه نقطه p در مرکز سلول قرار داشته باشد، وقتی سلول انتگرال‌گیری به سلول محاسبه منطبق شود، تکینگی رخ می‌دهد. اما چنانچه نقطه p در مرکز سلول قرار نداشته باشد، با منطبق شدن سلول انتگرال‌گیری بر محاسباتی، تکینگی رخ نمی‌دهد. اما در این حالت بسته به فاصله بین نقطه p و مرکز سلول، ممکن است محاسبات همراه با مشکلات عددی باشد. اگرچه که روش‌های عددی انتگرال‌گیری نظیر نمایی مضاعف (فوکوشیما، ۲۰۱۷) وجود دارند که تکینگی‌های کرنل نیوتن را در نظر می‌گیرند، اما روش کوشی با سهولت بالاتری تکینگی و مشکلات عددی احتمالی را رفع می‌کند.

با استفاده از تکنیک کوشی برای مثال برای انتگرال (۲)، دامنه انتگرال‌گیری در دو بخش بوگه و ناهمواری انجام می‌شود:

$$A(r,\varphi,\lambda) = G\rho_0 \iint\limits_{S_0} \int\limits_{r'=R}^{R+H} K\mathrm{d}\varphi'\mathrm{d}\lambda'\mathrm{d}r' + G\rho_0 \iint\limits_{S_0} \int\limits_{r'=R+H}^{R+H'} K\mathrm{d}\varphi'\mathrm{d}\lambda'\mathrm{d}r'$$

(۱۲)

در این رابطه H و H' ارتفاع نقاط محاسباتی و انتگرال‌گیری است. انتگرال اول سمت راست رابطه فوق، یعنی بخش بوگه، اثر توپوگرافی یک کلاهک کروی تا شعاع کروی $\psi \le \psi_0$ است. مقدار این انتگرال از رابطه

$$A^B(r,\varphi,\lambda) = G\rho_0 \iint_{S_0} \int_{r'=R}^{R+H} K\mathrm{d}\varphi'\mathrm{d}\lambda'\mathrm{d}r' = 2\pi G\rho_0 \{-\frac{1}{3r^2} l_0^3 + \frac{1}{r} l_0(r - r't_0) - \frac{1}{2} l_0 t_0^2 + \frac{1}{2} t_0 (r' - rt_0) \frac{(r - r't_0)}{l_0} + rt_0(1 - t_0^2)\ln(l_0 + r' - rt_0) + \frac{1}{2} r^2 t_0 (1 - t_0^2) \frac{r - (l_0 + r')t_0}{l_0(l_0 + r' - rt_0)}\} \Big|_{r'=R}^{R+H} + 2\pi G\rho_0 \left(-\frac{1}{3r^2} r'^3\right)\Big|_{r'=R}^{R+H} \begin{cases} +1 & r \ge R+H \\ -1 & r \le R \end{cases}$$

(۱۳)

به‌دست می‌آید (هک و سویتز، ۲۰۰۷). در این رابطه $t_0 = \cos\psi_0$ شعاع کلاهک کروی است. چنانچه $\psi_0 = \pi$، این انتگرال اثر توپوگرافی پوسته کروی را نشان می‌دهد:

$$A^B(r,\varphi,\lambda) = 2\pi G\rho_0 \begin{bmatrix} (R+H)^2 - \\ \frac{2}{3}\frac{R^3}{r} - \\ \frac{1}{3} r^2 \end{bmatrix} \approx 4\pi G\rho_0 H$$

(۱۴)

بخش دوم انتگرال به ازای $\psi = 0$ برابر صفر است و نیاز به محاسبه آن نیست.

در حالت کلی حتی اگر موقعیت نقطه p منطبق بر مرکز

سلول نباشد، با توجه به یکسان بودن ارتفاع نقطه p و مرکز سلول اثر توپوگرافی این سلول صفر خواهد بود و اساساً نیاز به محاسبه اثر اپی سنتر با تکنیک کوشی نیست. شایان ذکر است که فرض اصلی در به‌کارگیری یک DEM این است که ارتفاع هر سلول میانگین همه ارتفاعات آن سلول است. علاوه بر این نقطه محاسباتی ممکن است از روش‌های دیگری نظیر ترازیابی خود دارای ارتفاع نقطه‌ای باشد. این ارتفاع و ارتفاعی که از DEM برای نقطه به‌دست می‌آید، به‌دلایل متعدد یکی نیستند. زیرا این دو ماهیت متفاوت دارند و هریک دارای خطای سیستماتیک و اتفاقی مختلفی هستند که مهم‌ترین آن شیفت در DEM است. لذا بهتر است برای جلوگیری از ایجاد یک توپوگرافی کاذب تمام اطلاعات ارتفاعی منتسب به DEM باشد. روش دیگر برای این مسأله تعیین ارتفاع نقطه p با استفاده از درون‌یابی نقاط DEM است. این روش توسط زاهورک (۲۰۱۵) مورد استفاده قرار گرفت. این روش نیز نمی‌تواند روش مناسبی برای تعیین ارتفاع نقاط باشد. اگر بپذیریم ارتفاع هر سلول DEM میانگین و نماینده ارتفاع در آن سلول است عملاً استفاده از درون‌یابی برای تعیین ارتفاع منتفی است.

۴. نتایج عددی

در این بخش نتایج عددی مربوط به روش‌های ذکرشده در بخش قبل برای محاسبه اثر توپوگرافی مقایسه می‌شود. این روش‌ها عبارت‌اند از: المان تسرویید به‌روش MV، المان تسرویید به‌روش HS، المان تسرویید با انتگرال‌گیری عددی سه‌بعدی بروش فوکوشیما، المان PM کروی و المان منشوری. برای مقایسه صحت نتایج انتگرال‌گیری نیاز به یک مدل با شتاب گرانی تحلیلی داریم. برای این منظور از یک کلاهک کروی با شعاعی به اندازه ۱/۵ درجه معادل زون هایفورد–بووی استفاده می‌شود. رابطه تحلیلی شتاب ناشی از این مدل در رابطه (۱۳) آمده است.

برای بررسی صحت روش‌های مختلف انتگرال‌گیری از یک کلاهک کروی با شعاع ۱/۵ درجه و ضخامت ۱۰۰۰ متر استفاده می‌کنیم. دقت روش‌های مختلف در سه زون مختلف داخلی‌ترین، داخلی و خارجی با روش تحلیلی مقایسه می‌شود. شعاع انتگرال‌گیری در زون داخلی‌ترین، داخلی و خارجی به‌ترتیب ۱۰ دقیقه کمانی، ۳۰ دقیقه کمانی و ۱/۵ درجه کمانی معادل با تقریباً ۱۸، ۵۵ و ۱۶۷ کیلومتر انتخاب شد. موقعیت ژئودتیکی نقطه محاسبه برابر $(\varphi=0,\lambda=0,H=1000m)$ در نظر گرفته شد. در هر زون در فواصل شعاعی و با گام‌های گسسته‌سازی مختلف نتایج هر روش با روش تحلیلی مقایسه شده است. جداول ۱ تا ۳ نتایج عددی را ارائه می‌دهد.

جدول ۱. اندازه خطای روش‌های مختلف محاسبه اثر توپوگرافی در زون خیلی نزدیک، $0 \le \psi \le 10'$. واحد میلی‌گال.

step	ψ	A^T	Error of A^T (mGal)				
			Fukushima	HS	PM	MV	Prism
$0.5''$	$0 \le \psi \le 1'$	83.668	0.027	0.039	0.880	0.444	0.000
$1''$	$0 \le \psi \le 1'$	83.668	0.035	0.032	0.889	0.896	0.008
	$1' \le \psi \le 5'$	22.281	0.007	0.031	0.880	0.007	0.009
	$5' \le \psi \le 10'$	3.081	0.000	0.000	0.007	0.000	0.000
$3''$	$0 \le \psi \le 1'$	83.668	0.038	0.110	0.802	2.596	0.065
	$1' \le \psi \le 5'$	22.281	0.065	0.109	0.794	0.072	0.064
	$5' \le \psi \le 10'$	3.081	0.001	0.001	0.007	0.001	0.001

جدول۲. اندازه خطای روش‌های مختلف محاسبه اثر توپوگرافی در زون نزدیک، $10' \leq \psi \leq 30'$. واحد میلی‌گال.

step	ψ	A^T	Error of A^T (mGal)				
			Fukushima	HS	PM	MV	Prism
$1'$	$10' \leq \psi \leq 30'$	2.333	0.006	0.010	0.008	0.010	0.005
$2'$		2.333	0.008	0.022	0.021	0.022	0.006

جدول۳. اندازه خطای روش‌های مختلف محاسبه اثر توپوگرافی در زون بیرونی، $0.5° \leq \psi \leq 1.5°$. واحد میلی‌گال.

step	ψ	A^T	Error of A^T (mGal)				
			Fukushima	HS	PM	MV	Prism
$2'$	$0.5° \leq \psi \leq 1.5°$	1.646	0.007	0.008	0.008	0.008	0.007
$5'$		1.646	0.012	0.008	0.008	0.008	0.015

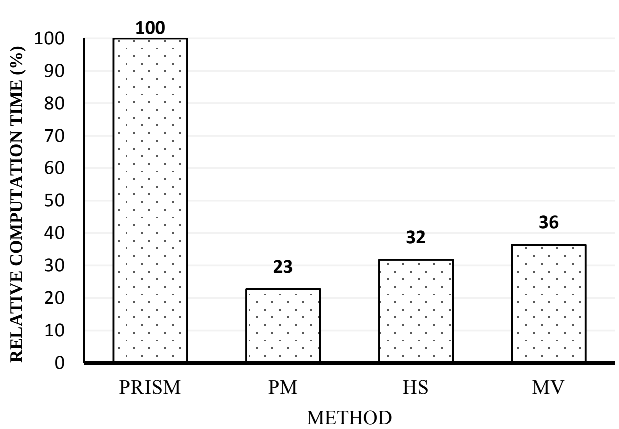
با استفاده از رابطه (۱۳) کل اثر جاذبی کلاهک کروی فوق، روی محور تقارن آن در نقطه‌ای به ارتفاع ۱۰۰۰ متر برابر ۱۱۳/۰۰۹ میلی‌گالاست. سهم اجرام ناحیه بسیار نزدیک که در فاصله کمتر از ۲ کیلومتر قرار دارند، بیش ۷۴ درصد کل اثر است. لذا اهمیت این ناحیه که در همسایگی نقطه محاسبه قرار دارد، بسیار زیاد است. در اغلب کاربردهای ژئودتیک و ژئوفیزیکی حد دقت محاسبات ۱۰ میکروگال کافی است. نتایج جدول ۱ نشان می‌دهد که برای محاسبه سهم این ناحیه با دقت مذکور نیاز به یک مدل ارتفاعی با تفکیک مکانی بهتر از ۱ ثانیه معادل ۳۰ متر است. نکته قابل‌توجه دیگر دقت روش منشور است که از همه روش‌های دیگر دقت بالاتری را تأمین می‌کند. این امر ناشی از جواب تحلیلی این المان و اثر کوچک انحنای زمین در فواصل نزدیک است. برای انتگرال‌گیری در دامنه $1' \leq \psi \leq 10'$ روش‌های منشور، مارتینک-ونیچک و فوکوشیما مناسب هستند. روش‌های تسرویید مبتنی بر بسط به سری تیلور و یا نقطه مادی دقت‌های کمتری نسبت به سایر روش‌ها دارند. به‌طورکلی در ناحیه خیلی نزدیک، برای سرعت بخشیدن به محاسبات انتگرال‌گیری می‌تواند در دو ناحیه شامل ۱-بازه ۰ تا ۵ دقیقه کمانی با DEM با گام بهتر از ۳۰ متر و با روش منشور و ۲- بازه ۵ تا ۱۰ دقیقه کمانی بروش سریع MV با DEM با گام ۳ ثانیه کمانی استفاده کرد.

اثر توپوگرافی اجرام نواحی میانی و خارجی به‌ترتیب حدود ۲ درصد و ۱٫۵ درصد است. این امر نشان می‌دهد که احتمالاً مدل‌های ساده‌تر نظیر PM برای محاسبه اثر توپوگرافی این نواحی کافی باشد. بر اساس نتایج جدول ۲ در ناحیه میانی اثر توپوگرافی را می‌توان با استفاده از مدل PM و با استفاده از یک DEM با گام ۱ دقیقه محاسبه کرد. نتایج جدول ۳) نشان می‌دهد در ناحیه خارجی نیز استفاده از همین مدل روی یک DEM با گام ۵ دقیقه کافی است.

یک عامل مهم در انتخاب روش محاسبه اثر توپوگرافی سرعت محاسبات است. اگرچه با افزایش سرعت محاسباتی در رایانه‌های جدید، سرعت محاسبات از اهمیت کمتری برخوردار است. اما توجه داریم که همزمان با افزایش سرعت محاسبات، حجم داده‌های برداشت شده نیز رو به فزونی است. برای مثال داده‌های متراکم جاذبی برای تعیین دقیق ژئویید و یا داده‌های بسیار متراکم جاذبی هوابرد که گه‌گاه ممکن است مشتمل بر چند صد هزار داده شوند. حاسبه زمان دقیق هر روش به‌خصوص در الگوریتم‌های پیچیده مشکل است. زیرا انتخاب نوع الگوریتم در زمان محاسبات تأثیرگذار است. در محاسبات این مقاله برای روش فوکوشیما از نرم‌افزار توسعه داده‌شده به زبان فرترن ۹۰ توسط او استفاده‌شده است. همین‌طور سایر روش‌ها نیز به‌همین زبان کدنویسی شده‌اند. الگوریتم گسسته‌سازی و انتگرال‌گیری در همه روش‌ها یکسان است. در روش منشور که توابع مثلثاتی و

لگاریتمی متعددی استفاده می‌شود، از تجمیع توابع لگاریتمی بر اساس راه‌حل بکار گرفته‌شده در نرم‌افزار TC استفاده‌شده است. شکل ۳ زمان نسبی محاسبه روش‌های مختلف به‌جز روش فوکوشیما نشان می‌دهد. روش فوکوشیما بسیار زمان‌بر بوده بطوریکه حدود ۵۰۰۰ برابر از روش منشور کندتر است. علت این امر انتگرال‌گیری عددی برای محاسبه پتانسیل و مشتق‌گیری عددی برای محاسبه شتاب است. ضمن اینکه نتایج جداول ۱، ۲ و ۳ نشان می‌دهد که این روش دقت بالاتری نسبت به روش منشور در اختیار قرار نمی‌دهد. لذا می‌توان گفت استفاده از انتگرال‌گیری عددی بروش فوکوشیما (۲۰۱۸) مناسب برای اثر توپوگرافی نیست.

آنالیزهای عددی ما نشان می‌دهد که حتی باوجود انتخاب گام گسسته‌سازی خیلی کوچک نمی‌توان به‌طور کامل اثر جاذبی یک کلاهک کروی را با انتگرال‌گیری روی سلول‌های جغرافیایی مدل کرد. زیرا اساساً سیستم مختصات مناسب برای این منظور سیستم مختصات قطبی است. به‌همین علت بخشی از خطاهای گزارش‌شده در جداول فوق مربوط به اثر لبه‌های انتگرال‌گیری است (شکل ۲). این اثر را می‌توان با کاهش گام انتگرال‌گیری کم نمود. همین‌طور می‌توان دید که نتایج عددی خطای مدل‌سازی روش‌های مختلف وابسته به ضخامت کلاهک کروی است. بدیهی است که با افزایش ضخامت، خطای مدل‌سازی بیشتر می‌شود. حال سؤال مهم در اینجا این است که آیا با یک کلاهک کروی شبیه‌سازی‌شده با ارتفاع ثابت ۱۰۰۰ متر که هیچ پستی و بلندی در آن وجود ندارد، می‌توان خطای روش‌های مختلف محاسبه اثر توپوگرافی و اثر گام DEM را به درستی برآورد کرد؟ درحالی‌که می‌دانیم اثر توپوگرافی به‌شدت وابسته به تغییرات ارتفاع است. در پاسخ به این سؤال باید گفت اولاً تاکنون روشی تحلیلی برای محاسبه اثر جاذبی یک توپوگرافی واقعی ارائه نشده است و در مطالعات مختلف نظیر (هک و سویتز، ۲۰۰۷) نیز از همین روش برای بررسی خطا استفاده کرده‌اند. ثانیاً ازنظر تئوری، همان‌طور که در بخش ۳ اشاره شد، با استفاده از تکنیک کوشی به‌جای انتگرال‌گیری روی ارتفاعات، انتگرال‌گیری روی اختلاف ارتفاع توپوگرافی با نقطه محاسباتی انجام می‌شود. ازآنجاکه حتی در مناطق کوهستانی به‌ندرت در فواصل نزدیک اختلاف ارتفاع نقاط به بیش از ۱۰۰۰ متر می‌رسد؛ می‌توان انتظار داشت که انتخاب ۱۰۰۰ متر می‌تواند اغلب کاربردهای ژئوفیزیکی و ژئودتیکی را پوشش دهد. برای فواصل دور نیز با توجه به کوچک شدن اثر توپوگرافی، اختلاف ارتفاع تأثیر مهمی در آنالیزها نخواهد داشت. این امر نشان می‌دهد که تکنیک کوشی علاوه بر حذف سینگولاریتی، دقت محاسبه اثر توپوگرافی را بالا می‌برد. زیرا قسمت عمده توپوگرافی (بخش بوگه) با روابط تحلیلی و بدون خطا محاسبه می‌شود.



شکل۳. مقایسه زمان محاسبه روش‌های مختلف.

۵. نتیجه‌گیری

در این مقاله کارایی روش‌های مبتنی بر هندسه تسرویید در مقابل روش منشور به‌منظور محاسبه اثر جاذبی توپوگرافی بررسی شد. در تمامی روش‌های تسرویید از روابط کروی استفاده و از اثر بیضویت توپوگرافی صرف‌نظر شد. انتگرال نیوتن و مشتق ارتفاعی آن، با استفاده از هندسه تسرویید دارای جواب تحلیلی به‌جز مؤلفه ارتفاعی نیست. لذا برای محاسبه اثر توپوگرافی با هندسه تسرویید باید از روش‌های عددی استفاده کرد. اما برای روش منشور که از هندسه صفحه‌ای توپوگرافی سود می‌برد، روابط تحلیلی وجود دارد. در این مطالعه، چهار روش فوکوشیما، مارتینک-ونیچک، نقطه مادی و هک-سویتز که همگی بر مبنای هندسه تسرویید هستند با روش مرسوم منشور برای محاسبه اثر توپوگرافی مقایسه شد. روش فوکوشیما مبتنی بر انتگرال‌گیری سه‌بعدی عددی بروش انتگرال‌گیری نمایی مضاعف برای تابع پتانسیل است. این روش برای محاسبه مشتقات پتانسیل از مشتق‌گیری عددی استفاده می‌کند و بسیار زمان‌بر است. روش مارتینک-ونیچک مبتنی بر حل عددی انتگرال سطحی روی سلول‌های جغرافیایی مدل رقومی ارتفاعی است. روش هک-سویتز از بسط کرنل انتگرال‌گیری به سری تیلور تا مرتبه دوم استفاده می‌کند. در روش نقطه مادی که مجموع اجرام هر المان تسرویید با یک نقطه مادی در مرکز هندسی تسرویید معادل می‌شود.

از نظر سرعت روش فوکوشیما بسیار زمان‌بر و فاقد کارایی لازم برای مدل‌سازی اثر توپوگرافی است. یکی از مهم‌ترین ویژگی‌های این روش، امکان محاسبه اثر توپوگرافی در روی، بالا و حتی درون توپوگرافی بدون تکینگی است. اما تکنیک کوشی، روشی سریع‌تر و دقیق‌تر است. به‌نظر می‌رسد روش فوکوشیما روش مناسبی برای تعیین اثرات توپوگرافی اجرام بزرگ است تا تعیین اثر توپوگرافی بر ایستگاه‌های گرانی. برای مثال این روش برای محاسبه اثر توپوگرافی یک المان توپوگرافی با ابعاد ۱۰۰ کیلومتر (نظیر المان‌های مدل Crust1.0) مناسب است. روش منشور حدود سه برابر نسبت به روش‌های MV و HS کندتر است و همان‌طور که انتظار می‌رود، روش PM سریع‌ترین روش برای محاسبه اثر توپوگرافی است.

برای آنالیز دقت و گام گسسته‌سازی موردنیاز برای اثر توپوگرافی در زون هایفورد (۱/۵ درجه کمانی)، از اثر جاذبی یک کلاهک کروی با جواب تحلیلی معلوم، استفاده شد. برای این منظور در سه ناحیه داخلی‌ترین، داخلی و خارجی اثر توپوگرافی با روش‌های مختلف و با DEM با گام های مختلف محاسبه گردید. نتایج نشان داد که در ناحیه داخلی‌ترین که سهم عمده اثر را شامل می‌شود، نیاز به DEM با گام حداقل ۱ ثانیه است. در این ناحیه روش منشور نزدیکترین جواب به جواب تحلیلی فراهم می‌کند. نتایج عددی نشان می‌دهد با افزایش فاصله تمامی روش‌ها دارای جواب یکسان هستند. بطوری که در خارج از ناحیله داخلی‌ترین (۱۸ کیلومتر) اختلاف معنی داری بین روش‌های مختلف نیست. لذا پیشنهاد می‌شود برای فواصل دورتر از ۱۸ کیلومتر از روش سریع PM استفاده شود. گام بهینه برای DEM در نواحی داخلی و خارجی به‌ترتیب حداقل ۱ دقیقه و ۵ دقیقه است. به‌عنوان نتیجه‌گیری کلی می‌توان گفت روش‌های مبتنی بر تسرویید برای محاسبه اثر توپوگرافی در زون هایفورد به‌منظور تعیین آنومالی بوگه، نسبت به روش مرسوم منشور کارایی لازم را ندارند.

مراجع

گلی، م. و نجفی علمداری، م.، ۱۳۹۳، تقریب بیضویِ اثرات توپوگرافی در مدل‌سازی میدان گرانی زمین، مجله فیزیک زمین و فضا، ۴۰(۲)، ۱۱۳-۱۲۴.

Asgharzadeh, M. F., Von Frese, R. R. B., Kim, H. R., Leftwich T. E. and Kim, J. W., 2007, Spherical prism gravity effects by Gauss-Legendre quadrature integration. Geophysical Journal International, 169, 1-11.

Claessens, S. and Hirt, C., 2013, Ellipsoidal topographic potential: New solutions for spectral forward gravity modeling of topography with respect to a reference ellipsoid, Journal of Geophysical Research: Solid Earth. 118, 5991-6002.

Forsberg, R., 1984, A study of terrain reductions, density anomalies and geophysical inversion methods in gravity field modelling, Report 355, Department of Geodetic Science. The Ohio State University, Columbus.

Forsberg, R., 1985, Gravity field terrain effect computations by FFT. Journal of Geodesy, 59: 342-360.

Sansò, F. and Rummel, R., 1997, Geodetic boundary value problems in view of the one centimeter geoid. Lecture Notes in Earth Sciences, Berlin Springer Verlag, 65.

Fukushima, T., 2017, Accurate computation of gravitational field of a tesseroid, revised.

Grombein, T., Seitz, K. and Heck, B., 2013, Optimized formulas for the gravitational field of a tesseroid. Journal of Geodesy, 877, 645-660.

Heck, B. and Seitz, K., 2007, A comparison of the tesseroid, prism and point-mass approaches for mass reductions in gravity field modelling. Journal of Geodesy, 81, 121-136.

Hinze, W. J., 2003, Bouguer reduction density, why 2.67? Geophysics, 68, 1559-1560.

Huang, J., 2002, Computational methods for the discrete downward continuation of the Earth gravity and effects of lateral topographical mass density variation of gravity and geoid, Ph.D thesis, UNB.

Hwang, C., Wang C.-G. and Hsiao, Y.-S., 2003, Terrain correction computation using Gaussian quadrature. Computers & Geosciences 29, 1259-1268.

Krynski, J., Mank, M. and Grzyb, M., 2005, Evaluation of digital terrain models in Poland in view of a cm geoid modelling. Geodesy and Cartography, 54, 155-175.

LaFehr, T. R., 1991, Standardization in gravity reduction. Geophysics, 56, 1170-1178.

Mader, K., 1951, Das Newtonsche Raumpotential prismatischer Kper und seine Ableitungen bis zur dritten Ordnung. sterr Z Vermess Sonderheft.

Martinec, Z., 1998, Boundary-value problems for gravimetric determination of a precise geoid. Heidelberg, Springer.

Martinec, Z. and Vanicek, P., 1994, Direct topographical effect of Helmert's condensation for a spherical geoid. Man. Geod. 19, 257-268.

Martinec, Z., Vanicek, P., Mainville, A. and Veronneau, M., 1995, Evaluation of topographical effects in precise geoid computation from densely sampled heights. Journal of Geodesy, 20, 193-203.

Nagy, D., 1966, The gravitational attraction of a right rectangular prism. Geophysics, 31, 362-371.

Nagy, D., Papp G. and Benedek, J., 2000, The gravitational potential and its derivatives for the prism. Journal of Geodesy 74, 552-560.

Novak, P. and Grafarend, E. W., 2005, The ellipsoidal representation of the topographical potential and its vertical gradient. Journal of Geodesy, 78, 691-706.

Novák, P., Vaníček, P., Martinec, Z. and Véronneau, M., 2001, Effects of the spherical terrain on gravity and the geoid. Journal of Geodesy, 75, 491-504.

Nowell, D. A. G., 1999, Gravity terrain corrections â€ an overview. Journal of Applied Geophysics, 42, 117-134.

Smith, D. A., 2000, The gravitational attraction of any polygonally shaped vertical prism with inclined top and bottom faces. Journal of Geodesy, 74, 414-420.

Smith, D. A., Robertson, D. S. and Milbert, D. G., 2001, Gravitational attraction of local crustal masses in spherical coordinates. Journal of Geodesy, 74, 783-795.

Sun, W., 2002, A formula for gravimetric terrain corrections using powers of topographic height. Journal of Geodesy, 76, 399-406.

Takahasi, H. and Mori, M., 1974, Double exponential formulas for numerical integration. Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences, 93, 721-741.

Tenzer, R., Novac, P., Janak, J., Huang, J., Najafi-Almadari, M., Vajda, P. and Santos, M., 2003, A review of the UNB Stokes-Helmert approach for precise geoid determination In Honoring The Academic Life Of Petr Vanicek.

Tsoulis, D., 2003, Terrain modeling in forward gravimetric problems, a case study on local terrain effects. Journal of Applied Geophysics, 54, 145-160.

Tsoulis, D., Novák, P. and Kadlec, M., 2009, Evaluation of precise terrain effects using high-resolution digital elevation models. J. Geophys. Res., 114, B02404.

Tsoulis, D. V., 1998, A combination method for computing terrain corrections. Physics and Chemistry of The Earth 23, 53-58.

Uieda, L., Barbosa, V. and Braitenberg, C., 2016, Tesseroids: Forward-modeling gravitational fields in spherical coordinates. GEOPHYSICS, 815, F41-F48.

Vaníček, P., Kingdon, R., Kuhn, M., Ellmann, A., Featherstone, W. E., Santos, M. C., Martinec, Z., Hirt, C. and Avalos-Naranjo, D., 2013, Testing Stokes-Helmert geoid model computation on a synthetic gravity field: experiences and shortcomings, Studia Geophysica et Geodaetica, 573, 369-400.

Vanícek, P., Tenzer, R., Sjoberg, L., Martinec, Z. and Featherstone, W., 2004, New views of the spherical Bouguer gravity anomaly. Geophysical Journal International, 13, 460-472.

Wild-Pfeiffer, F., 2008, A comparison of different mass elements for use in gravity gradiometry. Journal of Geodesy, 82, 637-653.

Yamamoto, A., 2002, Spherical terrain corrections for gravity anomaly using a digital elevation model gridded with nodes at every 50 m. Journal of the Faculty of Science, Hokkaido University. Series 7, Geophysics, 11, 845-880.

Zahorec, P., 2015, Inner zone terrain correction calculation using interpolated heights. Contributions to Geophysics and Geodesy. 45, 219.

Journal of the Earth and Space Physics, Vol. 44, No. 3, Autumn 2018, P. 8

Efficiency investigation of tesseroid based methods for computing gravimetric terrain correction

Goli, M.*

Assistant Professor, Civil Engineering Faculty, Shahrood University of Technology, Iran

(Received: 6 May 2018, Accepted: 25 Sep 2018)

Summary

The gravitational effect of topographical masses is one of the important component of the gravity field, which plays a key role in geophysical and geodetic studies. For geophysical interpretations, it is necessary to eliminate the effect of topography as a disturbing factor from the observed gravity data. In geodetic applications, the solution of geodetic boundary problem such as Stokes requires mass free space above the geoid. In present study efficiency of different tesseroid based methods are compared with well-known rectangular prism to evaluate the gravimetric terrain corrections up to distance of 1.5 arc-degree known as the Hayford-Bowie zone. For this purpose, the mathematical formula: the vertical derivative of Newton integral and the digital elevation model (DEM) are used as data. In computing the topographic effect, we are involved with the two factors: 1- the integral element (point, line, plane, rectangular prism, tesseroid, etc.) and 2- geometry of topography (planar, spherical and ellipsoidal), which causes some difficulties to understand the subject. Finite element method is a general and standard method for estimating the terrain correction. In this method, the gravitational topographic effect is evaluated as the total gravitational effect of the smaller elements.

Tesseroid is the geometrical body bounded by two concentric spheres. This element uses the spherical geometry of topography which introduces relative error of about 1% (Novak and Grafarend, 2005). By choosing this element, the Newton integral and its radial derivatives do not have an analytic solution, and numerical integration must be applied. The rectangular prism element, has been used frequently to compute terrain correction in various studies. It uses planar geometry and has an analytical solution for Newton's integral and its derivatives. Recently many studies investigated tesseroid based method to compute the potential and attraction of topographic masses, see, [Fukushima, 2017; Grombein et al., 2013; Heck and Seitz, 2007; Uieda et al., 2016]. Fukushima's method utilizes the 3D numerical double-exponential integration method, HS's method uses the Tylor series up to term 2 and the PM method is the zero term approximation of HS method. The simulation studies demonstrated the higher accuracy of tesseroid based methods compared to the method of prism in the literature. However, their performance is not tested for gravimetric terrain correction. The main goal of this study is the investigation of efficiency, in terms of speed and accuracy, of four tesseroid methods: Fukushima, Martinec-Vanicek (MV), Heck-Seitz (HS), point mass (PM) compared with prism in Hayford-Bowie zone.

To investigate the computation accuracy, we used bounded spherical shell with constant thinness and density for which the analytical exact solution exists. The thinness of the shell have been chosen 1000 meter and the computation point is located on the origin of bounded spherical shell on the equator in the spherical coordinate (0,0,1000). The computation of terrain correction are discretized in different zones: innermost, inner and outer correspond respectively to $0 < \psi < 10'$, $10' < \psi < 30'$ and $30' < \psi < 90'$ and with different sizes. The contribution of innermost zone is over 75% of total effect. Numerical results indicate the success of the prism for topographic effect in all three zones, especially for masses in neighborhoods of computation points, than those methods based on tesseroid. To overcome the effect of Earth's curvature, the elevation of computation point is corrected using a simple formula. Also, our calculations show that, in innermost zone, the topography should be discretized in 30 meter elements to achieve 10 μGal level of accuracy.

Keywords: terrain correction, gravity anomaly, tesseroid, numeric integration, prism.

* Corresponding author: goli@shahroodut.ac.ir