فیزیک زمین و فضا، دوره ۴۵، شماره ۲، تابستان ۱۳۹۸، صفحهٔ ۲۶۹- ۲۸۱
DOI: 10.22059/jesphys.2019.257996.1007006

استفاده از الگوریتم POCS برای بازسازی داده‌های لرزه‌ای سه‌مؤلفه‌ای در حوزه فوریه کواترنیون

امین افتخاری[1] و حمیدرضا سیاهکوهی[2*]

۱. دانش‌آموخته کارشناسی ارشد، گروه ژئوفیزیک، واحد علوم و تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران
۲. استاد، گروه فیزیک زمین، مؤسسه ژئوفیزیک، دانشگاه تهران، تهران، ایران

(دریافت: ۹۷/۳/۱، پذیرش نهایی: ۹۸/۲/۲۴)

چکیده

لرزه‌نگاری سه‌مؤلفه‌ای از امواج لرزه‌ای در هر ایستگاه در سه راستا نمونه‌برداری کرده و اطلاعات امواج P و S را به‌صورت همزمان برداشت می‌کند. در برخی کاربردها استفاده از اطلاعات موج S به همراه اطلاعات موج P برآورد درستی از خصوصیات مخزن به‌دست می‌دهد. چون در برداشت‌های لرزه‌ای گاهی به‌علت شرایط منطقه یا خرابی دستگاه‌ها، نمونه‌برداری مکانی یکنواخت از امواج لرزه‌ای میسر نیست، باید از روش‌های درون‌یابی استفاده کرد تا ردلرزه‌های برداشت نشده بازسازی شوند. روش‌های مرسوم بازسازی ردلرزه‌های گم‌شده در لرزه‌نگاری سه‌مؤلفه‌ای، معمولاً با اجرای روش روی هر مؤلفه به‌طور جداگانه انجام می‌شود، که می‌تواند به ویژگی‌های ظریف در رکورد صدمه بزند. در این تحقیق روشی برای بازسازی همزمان هرسه مؤلفه به یک‌باره ارائه می‌شود (برگرفته از ایده استنتون و ساشی) که با استفاده از تبدیل فوریه کواترنیون و الگوریتم تصویر بر روی مجموعه‌های محدب (QPOCS)، انجام می‌شود. نمایش برداری داده مختلط در حوزه فرکانس می‌تواند به‌وسیله قراردادن بخش‌های حقیقی و موهومی هر مؤلفه در آرگومان‌های یک کواترنیون، به‌دست آید. این روش اجازه می‌دهد تا عملگرها بر روی هر دو مؤلفه به‌طور همزمان اعمال شوند. مزیت این روش به‌خاطر همپوشانی طیفی مؤلفه‌ها در حوزه فرکانس–عددموج می‌باشد. نتیجه حاصل از کاربرد این روش بر داده‌های سه‌مؤلفه‌ای مصنوعی و واقعی، با نتیجه حاصل از کاربرد الگوریتم POCS بر روی هر مؤلفه به‌تنهایی، مقایسه شده که نتایج بازسازی با استفاده از الگوریتم QPOCS دارای کیفیت بازسازی بهتری می‌باشند.

واژه‌های کلیدی: درون‌یابی سه‌بعدی، لرزه‌نگاری سه‌مؤلفه‌ای، تبدیل فوریه، کواترنیون، مجموعه محدب.

۱. مقدمه

برداشت داده‌های لرزه‌ای سه‌مؤلفه‌ای، در هر ایستگاه از امواج لرزه‌ای بازتابی در امتداد سه محور مختصات نمونه‌برداری می‌کند. اطلاعات بسیاری از داده‌های سه مؤلفه‌ای می‌تواند به‌دست آید اما نیازمند این است که پردازش‌های اعمالی ویژگی سه مؤلفه‌ای بودن داده‌ها را در نظر بگیرد تا ارتباط ظریفی که بین ابعاد مختلف داده است، حفظ شود. بازسازی داده معمولاً بر روی مؤلفه‌های افقی داده لرزه‌ای چندمؤلفه‌ای انجام نمی‌شود، و به‌طور معمول فقط بر روی مؤلفه شعاعی انجام می‌شود که به این ترتیب ارتباط بین مؤلفه‌های افقی نادیده گرفته می‌شود. این مقاله روشی برای بازسازی دو مؤلفه به‌طور همزمان با استفاده از تبدیل فوریه کواترنیون (QFT) و تصویر بر روی مجموعه‌های محدب (POCS) ارائه می‌دهد.

اعداد حقیقی را می‌توان به‌صورت اعداد اَبَرمختلطِ یک‌بعدی در نظر گرفت. اعداد مختلط نیز اعداد دوبعدی از اَبَرمختلط‌ها می‌باشند. ویلیام همیلتون از سال ۱۸۳۰ روی اعداد مختلط کار کرد و توانست جبر اعداد مختلط را به‌طور کامل تعریف کند. سپس برای توسعه این اعداد، روی مجموعه سه‌تایی از اعداد به‌صورت $q = a_0 + a_1\vec{\imath} + a_2\vec{\jmath}$ کار کرد. همیلتون می‌دانست که اعداد مختلط را می‌توان به‌صورت نقاطی در یک صفحه دید و به‌دنبال راهی مشابه برای نقاط در فضا بود. نقاط در فضا به‌کمک مختصاتشان مشخص می‌شوند، که دسته‌های سه‌تایی از اعداد می‌باشند. همیلتون سال‌ها می‌دانست

*نگارنده رابط: hamid@ut.ac.ir

چگونه سه‌تایی‌ها را در هم ضرب یا با هم جمع کند. اما او همواره با مشکل تقسیم مواجه بود. او نمی‌توانست سه‌تایی‌ها را بر هم تقسیم کند، ولی می‌توانست چهارتایی‌ها را بر هم تقسیم کند. با استفاده از سه عدد در چهارتایی به‌عنوان مختصات یک نقطه در فضا، او می‌توانست نقاط فضایی را با این سیستم جدید اعداد مشخص کند (همیلتون، ۱۸۶۶). همیلتون این چهارتایی را کواترنیون (Quaternion) نامید. کواترنیون‌ها (اَبَر مختلط‌های ۴ بعدی) در ریاضیات، یک سیستم اعداد جابه‌جایی ناپذیر می‌باشند که سیستم اعداد مختلط را گسترش می‌دهند. همان‌طور که اعداد مختلط معمولی را می‌توان در صفحه دوبعدی نمایش داد، این اعداد را نیز می‌توان در صفحه چهاربعدی نمایش داد. کواترنیون‌ها را به راحتی می‌توان با یکدیگر جمع و تفریق کرد، کافی است ضرایب پایه‌های دو کواترنیون را جمع یا تفریق کنیم، ولی در مورد ضرب و یا تقسیم، کار بسیار پیچیده‌تر می‌باشد. کواترنیون‌ها کاربردهایی در ریاضیات کاربردی و محض پیدا کردند، به‌خصوص در محاسباتی که شامل دَوَران‌های سه‌بعدی می‌شوند و از جمله در گرافیک سه‌بعدی رایانه‌ای. با این وجود در بسیاری از کاربردها با بردارها و ماتریس‌ها جایگزین می‌شوند. جبر چهارتایی‌ها اغلب با **H** (به احترام همیلتون) نشان داده می‌شود. از مکانیک کلاسیک نیوتن تا فیزیک کوانتوم، از کاربرد در حرکت ربات تا علم نجوم و حتی در رمزگشایی، سیستم کنترل وضعیت ماهواره از کواترنیون‌ها استفاده می‌شود.

ریاضیدان‌هایی همچون کِیلی، کلیفورد و فیزیکدانانی مانند ماکسول و تایت، در کاربرد و گسترش کواترنیون‌ها نقش مهمی داشته‌اند. کواترنیون‌ها از طرف فیزیکدان‌هایی مانند شرودینگر، هایزنبرگ و دیراک و همچنین تعداد زیادی از دانشمندان مشهور در فیزیک کوانتوم به‌کار رفته است. کواترنیون‌ها کاربردهای دیگری در پردازش داده‌های لرزه‌ای مانند محاسبه نشانگرهای طیفی (بیهان و مارس، ۲۰۰۱)، آنالیز گذر زمان و تشخیص مرز (ویتن و شراگ، ۲۰۰۶)، آنالیز سرعت چند مؤلفه‌ای (گراندی و همکاران، ۲۰۰۷)، دی‌کانولوشن چندمؤلفه‌ای (منانو و مازوتی، ۲۰۱۲) دارند. لارس کریگر و همکاران (۲۰۱۵)، از کواترنیون برای ارائه راه‌حلی برای جهت‌یابی بهینه گیرنده‌های ژئوفیزیکی استفاده کردند.

نمایش برداری داده دو مؤلفه‌ای در حوزه فرکانس می‌تواند به‌وسیله قراردادن بخش‌های حقیقی و موهومی هر مؤلفه در آرگومان‌های یک کواترنیون، به‌دست آید. این روش اجازه می‌دهد تا عملگرها بر روی هر دو مؤلفه به‌طور همزمان اِعمال شوند. کواترنیون‌ها با استفاده از تبدیل فوریه کواترنیون (QFT) به حوزه فرکانس-عددموج تبدیل می‌شوند و یک طیف دامنه منفرد برای هر دو مؤلفه با استفاده از نمایش قطبی کواترنیون‌ها تعریف می‌شود (سنگوین و اِل، ۲۰۰۰). بازسازی ردلرزه‌های مفقودشده یا نوفه‌دار با استفاده از تصویر بر روی مجموعه‌های محدب (POCS) انجام می‌شود. تصویر بر روی مجموعه‌های محدب (Projection Onto Convex Sets)، روش بازسازی براساس الگوریتم تکرارپذیر گِرچ برِگ و ساکستون (۱۹۷۲) است، که به‌طور گسترده‌ای در بازسازی تصاویر و سیگنال استفاده می‌شود آبما و کبیر (۲۰۰۶) این روش را برای درون‌یابی مشاهدات لرزه‌ای مفقودشده به‌کار بردند. گالووی و ساشی (۲۰۰۷) وگااُ و همکاران (۲۰۱۰)، طراحی یک آستانه نمایی را برای بهبود همگرایی بازسازی POCS بررسی کردند. وانگ و همکاران (۲۰۱۰) واحدهای پردازش گرافیکی (GPU) را برای شتاب بخشیدن به درون‌یابی POCS به‌کار بردند. گااُ و همکاران (۲۰۱۳) روشی برای بهبود همگرایی و تضعیف نویز داده‌های لرزه‌ای با استفاده از این الگوریتم ارائه دادند. پینیلا و همکاران (۲۰۱۶) یک مدل آستانه‌گذاری خطی را برای درون‌یابی پنج‌بعدی داده‌های لرزه‌ای با استفاده از روش POCS تعریف کردند. ژیانگ (۲۰۱۷) الگوریتم POCS را برای بازسازی داده‌های لرزه‌ای متراکم در برداشت‌های نامنظم استفاده کردند. مزیت این روش در این است که تعامد مؤلفه‌های ورودی حفظ می‌شود (سیگنال‌ها در هم آمیخته نمی‌شوند) و

شباهت‌های بین مؤلفه‌ها حفظ می‌شود که به بهبود کیفیت بازسازی کمک می‌کند.

۲. کواترنیون

۲-۱. تعریف کواترنیون

یک کواترنیون به شکل خطی به‌صورت:

$$q = a + bi + cj + dk \quad (۱)$$

تعریف می‌شود. در اینجا a، b، c، d اعداد حقیقی هستند و سه بردار i، j، k از ضرب زیر پیروی می‌کنند (جدول ۱):

$$\begin{aligned} &i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 \\ &ij = k = -ji \quad , \quad jk = i = -kj \quad , \\ &ki = j = -ik \end{aligned} \quad (۲)$$

هر کواترنیون را می‌توان یک عنصر از فضای ۴ بعدی $\mathbb{R}^4$ در نظر گرفت. مجموعه تمام کواترنیون‌ها را به‌صورت زیر نمایش می‌دهند:

$$\boldsymbol{H} = \begin{Bmatrix} q = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k : \\ a_0 , a_1 , a_2 , a_3 \in \mathbb{R} \end{Bmatrix} \quad (۳)$$

همچنین $\{i, j, k\}$ را می‌توان یک سیستم مختصاتی متعامد در فضای سه‌بعدی حقیقی، در نظر گرفت.

جدول ۱. قوانین ضرب کواترنیون‌ها.

×	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	-j
j	j	-k	-1	i
k	k	j	-i	-1

۲-۲. بخش‌های اسکالر و برداری

یک عدد کواترنیون به شکل $a + 0i + 0j + 0k$، که a یک عدد حقیقی است، یک کواترنیون حقیقی نامیده می‌شود و یک عدد کواترنیون به شکل $0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$، به‌طوری که a_1, a_2, a_3 اعداد حقیقی باشند، و حداقل یکی از اعداد a_1, a_2, a_3 غیرصفر باشند، یک کواترنیون موهومی محض نامیده می‌شود. اگر $a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$ یک عدد کواترنیون باشد، آنگاه a بخش اسکالر کواترنیون و $a_1 i + a_2 j + a_3 k$ بخش برداری کواترنیون نامیده می‌شوند. بخش اسکالر یک کواترنیون همیشه حقیقی و بخش برداری آن همیشه موهومی محض می‌باشد. اگر تصور کنیم که هر کواترنیون، یک بردار در فضای برداری ۴ بعدی می‌باشد، می‌توانیم تعریف کنیم که یک بردار به معنیِ بخشِ موهومی محض کواترنیون است. با این قرارداد، یک بردار در فضای ۴-بعدی مشابه یک عنصر برداری در فضای $\mathbb{R}^3$ است.

۲-۳. شکل قطبی کواترنیون

هر کواترنیون $q = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$ را می‌توان به شکل قطبی نوشت:

$$q = |q|\{cos(\phi) + \mu \, sin(\phi)\} = |q|e^{\mu\phi} \quad (۴)$$

به‌طوری که:

$$\mu \, \epsilon \, \boldsymbol{H} \, , S(\mu) = 0 \, , |\mu| = 1, \mu = \frac{a_1 i + a_2 j + a_3 k}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}},$$

$$cos(\phi) = \frac{a_0}{|q|} \quad (۵)$$

μ یک کواترنیون واحد محض است، ($|\mu| = 1$).

توجه شود که ضرب کواترنیون‌های نمایی، جابه‌جایی‌پذیر نمی‌باشد مگر اینکه هر دو کواترنیون نمایی دارای محورهای یکسان باشند. بنابراین:

$$e^{\mu\alpha} e^{\mu\beta} = e^{\mu(\alpha+\beta)} = e^{\mu\beta} e^{\mu\alpha} \quad (۶)$$

چون هر دو نمایی معادله (۶)، دارای محور μ یکسان می‌باشند. ولی:

$$e^{\mu_1\alpha} e^{\mu_2\beta} \neq e^{\mu_2\beta} e^{\mu_1\alpha} \quad (۷)$$

چون ضرب کواترنیون‌ها جابه‌جایی‌پذیر نیست، و در معادله (۷) هر دو کواترنیون نمایی دارای محورهای موهومی متفاوتی هستند.

۲-۴. تبدیل فوریه کواترنیون

تبدیل فوریه کواترنیون پیوسته مستقیم و معکوس به‌وسیله روابط زیر نمایش داده می‌شوند (اِل، ۱۹۹۲، ۱۹۹۳):

$$Q(\omega,\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t}\, q(t,x) e^{-k\nu x}\, dt\, dx \quad (۸)$$

$$q(t,x) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t}\, Q(\omega,\nu) e^{k\nu x}\, dt\, dx \quad (۹)$$

که در آن ω فرکانس زمانی و ν عددموج فضایی می‌باشد. فرمول تبدیل فوریه پیوسته کواترنیون می‌تواند به تبدیل فوریه گسسته کواترنیون (سنگوین و اِل، ۲۰۰۰) تعمیم داده شود:

$$Q(\omega,\nu) = \frac{1}{\sqrt{MN}}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{t=0}^{N-1} e^{-\mu 2\pi\left(\frac{x\nu}{M}+\frac{t\omega}{N}\right)}\, q(t,x) \quad (۱۰)$$

که در آن μ هرکواترنیون محض واحد است. تبدیل فوریه مختلط استاندارد یک حالت خاص از این تبدیل است و وقتی رخ می‌دهد که $\mu = i$ باشد و تابع در حال تبدیل، مختلط باشد (اِل و سنگوین، ۲۰۰۷).

۳. روش پژوهش

هر داده دو مؤلفه‌ای در حوزه فرکانس به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$D1(\omega,\overrightarrow{x}) = D1_{real}(\omega,\overrightarrow{x}) + D1_{image}(\omega,\overrightarrow{x})i,$$
$$D2(\omega,\overrightarrow{x}) = D2_{real}(\omega,\overrightarrow{x}) + D2_{image}(\omega,\overrightarrow{x})i. \quad (۱۱)$$

کواترنیون‌ها می‌توانند هر دو مؤلفه معادله (۱۱) را به‌صورت زیر بیان کنند (استنتون و ساشی، ۲۰۱۳):

$$Q(\omega,\overrightarrow{x}) = D1_{real}(\omega,\overrightarrow{x}) + D1_{image}(\omega,\overrightarrow{x})i + D2_{real}(\omega,\overrightarrow{x})j + D2_{image}(\omega,\overrightarrow{x})k. \quad (۱۲)$$

ابتدا یک کواترنیون محض واحد به‌عنوان μ_1 انتخاب می‌کنیم. سپس یک کواترنیون محض دیگر به‌صورت اختیاری که با نماد p نمایش می‌دهیم، انتخاب می‌کنیم، به‌طوری که با μ_1 موازی نباشد. (نیازی نیست که p دارای مدول واحد باشد) ضرب خارجی بین کواترنیون اختیاری p و μ_1، هم بر p و هم بر μ_1 عمود است، با بهنجارکردن ضرب خارجی p و μ_1، کواترنیون μ_2 را به‌دست می‌آوریم:

$$\mu_2 = U[\mu_1 \times p] = U[\tfrac{1}{2}(\mu_1 p - p\mu_1)] \quad (۱۳)$$

به‌طوری‌که $U[q] = \frac{q}{|q|}$ است. در این‌صورت می‌توانیم یک کواترنیون دلخواه $q = a + bi + cj + dk$ را به شکل یک کمیت مختلط تعمیم‌یافته به فرم زیر نمایش دهیم:

$$q = A' + B'\mu_2 \quad (۱۴)$$

که $A' = a' + b'\mu_1$ و $B' = c' + d'\mu_1$ می‌باشد، بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$q = (a' + b'\mu_1) + (c' + d'\mu_1)\mu_2 \quad (۱۵)$$

A'، بخش ساده و B' بخش پیچیده کواترنیون نامیده می‌شوند، چون آنها دارای پایه فضایی مختلط تعمیم‌یافته یکسانی هستند. با ساده کردن رابطه بالا داریم:

$$q = a' + b'\mu_1 + c'\mu_2 + d'\mu_3 \quad (۱۶)$$

در اینجا $\mu_3 = \mu_1\mu_2$ و $\mu_3 \perp \mu_1$ و $\mu_3 \perp \mu_2$ است. d', c', b' می‌توانند به‌وسیله استفاده از تغییر مبنا به‌دست آیند:

$$\begin{pmatrix} b' \\ c' \\ d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots\mu_1 \dots \\ \dots\mu_2 \dots \\ \dots\mu_3 \dots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & \mu_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b \\ c \\ d \end{pmatrix} \quad (۱۷)$$

و $a = a'$ است (اِل و سنگوین، ۲۰۰۷). به این ترتیب می‌توانیم بنویسیم:

$$a' = a$$
$$b' = b\mu_{11} + c\mu_{12} + d\mu_{13}$$
$$c' = b\mu_{21} + c\mu_{22} + d\mu_{23}$$
$$d' = b\mu_{31} + c\mu_{32} + d\mu_{33} \quad (۱۸)$$

ردیف‌های عملگر تبدیل مبنا در معادله (۱۸) به‌وسیله سه کواترنیون محض μ_1 و μ_2 و μ_3 که به‌عنوان بردارهای ردیفی نوشته می‌شوند، تعریف می‌شوند. بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$Q(\omega,\nu) = Q_1(\omega,\nu) + Q_2(\omega,\nu)\mu_2 \quad (۱۹)$$

که در اینجا:

$$Q_i(\omega,\nu)=\frac{1}{\sqrt{MN}}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{t=0}^{N-1}e^{-\mu_1 2\pi(\frac{x\nu}{M}+\frac{t\omega}{N})}q_i(t,x) \quad (۲۰)$$

$i\epsilon\{1,2\}$ این موضوع اجازه می‌دهد که کدهای تبدیل فوریه سریع (FFT) موجود، برای محاسبه تبدیل فوریه کواترنیون به‌کار روند. همچنین یک جعبه‌ابزار عالی برای کواترنیون‌ها توسط سنگوین و بیهان (۲۰۰۵) نوشته شده است. مراحلی که برای تبدیل فوریه کواترنیون دوبعدی باید انجام شود به‌صورت زیر است (استنتون و ساشی، ۲۰۱۱):

۱- ابتدا کواترنیون $q=a+bi+cj+dk$ را تشکیل می‌دهیم که مقدار a می‌تواند برابر با صفر قرار گیرد، مقادیر b, c, d به‌وسیله مقادیر یک نمونه لرزه‌ای سه مؤلفه‌ای، جایگزین می‌شوند.

۲- تغییر مبنا برای کواترنیون‌ها به‌وسیله ضرب اسکالر هر مؤلفه کواترنیون با سه کواترنیون پایه (μ_1,μ_2,μ_3) به‌کار برده می‌شود تا $q'=a'+b'i+c'j+d'k$ حاصل شود.

۳- $q_1'=a'+b'i$ و $q_2'=c'+d'i$ را تشکیل می‌دهیم.

۴- از تبدیل فوریه سریع مختلط دوبعدی (Complex FFT 2D)، Q_1' و ${Q'}_2$، را به‌دست می‌آوریم:

$$Q_1'=A'+B'i \quad , \quad {Q'}_2=C'+D'i \quad (۲۱)$$

۵- کواترنیون را در حوزه فوریه می‌سازیم که عبارت است از:

$$Q'=A'+B'i+C'j+D'k \quad (۲۲)$$

۶- به‌وسیله ضرب اسکالر هر مؤلفه Q' با $(\mu_1,\mu_2,\mu_3)^{-1}$، تغییر مبنا را معکوس می‌کنیم تا بتوانیم $Q=A+Bi+Cj+Dk$ را به‌دست آوریم.

معکوس QFT هم به روشی مشابه انجام می‌شود. کردارهای دامنه و فاز تبدیل فوریه کواترنیون دوبعدی، بسیار شبیه به تبدیل فوریه دوبعدی هر سه مؤلفه است ولی معادل با آنها نیست. یک امتیاز و برتری تبدیل فوریه کواترنیون دوبعدی (QFT 2D) این است که در تبدیل فوریه کواترنیون، عمود بودن مؤلفه‌های فرکانسی حفظ می‌شود. در شکل ۱ سه سیگنال خطی با شیب‌های متفاوت رسم شده است. در شکل ۲، طیف دامنه در حوزه $F-K$ برای هر سیگنال به‌صورت جداگانه و همچنین طیف دامنه در حوزه $F-K$ با استفاده از تبدیل فوریه کواترنیون که هر سه مؤلفه همراه با هم و در یک زمان به حوزه فوریه برده شده‌اند، رسم شده است. همان‌طور که در شکل ۲-ت، مشاهده می‌شود، اطلاعات دامنه مربوط به هر سه مؤلفه در حوزه فرکانس-عددموج موجود است.

۳-۱. الگوریتم QPOCS

در اینجا الگوریتم POCS برای داده‌های لرزه‌ای دوبعدی سه مؤلفه‌ای بر طیف دامنه کواترنیون $F-K_x$ (حاصل از تبدیل فوریه کواترنیون) و برای داده‌های لرزه‌ای سه‌بعدی سه‌مؤلفه‌ای بر طیف دامنه کواترنیون $F-K_x-K_y$ (حاصل از تبدیل فوریه کواترنیون) اِعمال می‌شود. برای داده‌های دوبعدی سه‌مؤلفه‌ای، الگوریتم QPOCS در kاُمین تکرار به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned}Q^k(x,y)&\\=Q^{obs}(x,y)&\\+\big(I-S(x,y)\big)F_Q^{-1}T^k(\omega,k_x)F_Q Q^{k-1}(x,y)&\\ k=1,\dots,N&\end{aligned} \quad (۲۳)$$

که در آن $Q^{obs}(x,y)$ نشان‌دهنده اطلاعات هر سه مؤلفه از داده دوبعدی‌سه مؤلفه‌ای می‌باشد به‌طوری‌که هر مؤلفه از داده سه‌مؤلفه‌ای، یکی از مؤلفه‌های طیف کواترنیون را ایجاد می‌کند. F_Q و F_Q^{-1} به‌ترتیب تبدیلات فوریه دوبعدی مستقیم و معکوس کواترنیون هستند. در این علامت‌گذاری می‌توانیم بنویسیم: $Q^k(\omega,k_x)=F_Q Q^k(x,y)$.

S اپراتور نمونه‌برداری است که برای نقاطی که در آنها داده موجود است مقدارش برابر یک بوده و برای نقاطی که داده لرزه‌ای ثبت نشده است دارای مقدار صفر است.

عملگر آستانه $T^k(\omega, k_x)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$T^k(\omega, k_x) = \begin{cases} 1 & if\ |D^{k-1}(\omega, k_x)| \geq \tau^k \\ 0 & if\ |D^{k-1}(\omega, k_x)| < \tau^k \end{cases} \qquad (۲۴)$$

استراتژی برای شتاب بخشیدن به الگوریتم مستلزم کاهش تدریجی آستانه τ^k می‌باشد. در تکرارهای ابتدایی، یک آستانه بزرگ موردنیاز است تا سریع در شکاف‌های ایجادشده در نبود داده، قوی‌ترین رویدادها را پُر کند، کاهش آستانه اجازه می‌دهد که رویدادهای ضعیف‌تر که ممکن است نادیده گرفته شده اند یا به‌طور ضعیفی در طول تکرارهای اولیه بازسازی و احیاء شده‌اند، تکمیل شوند. در این تحقیق از الگوی آستانه خطی استفاده شده است. در ادامه آستانه‌های ابتدایی و نهایی را تعریف می‌کنیم:

$$\tau_i = \left(\frac{P_i}{100}\right)\ max|D^{obs}(\omega, k_x)| \qquad (۲۵)$$

$$\tau_f = \left(\frac{P_f}{100}\right) max|D^{obs}(\omega, k_x)| \qquad (۲۶)$$

P_i و P_f اعدادی هستند که توسط کاربر تعریف می‌شوند و باید $P_i \gg P_f$ باشد. N تعداد تکرارهای الگوریتم است و برای الگوی آستانه خطی معرفی شده، عبارت زیر را می‌توانیم تعریف کنیم:

$$\tau_l^k = \tau_i + [\tau_f - \tau_i](k-1)/(N-1)$$
$$k = 1, \dots, N \qquad (۲۷)$$

برای داده‌های سه‌بعدی سه مؤلفه‌ای، الگوریتم $QPOCS$ برای یک مقطع فرکانس ثابت ω در حوزه $f-x-y$، در kاُمین تکرار به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$Q^k(\omega, x, y)$$
$$= Q^{obs}(\omega, x, y) + \big(I - S(x, y)\big)$$
$$F_Q^{-1} T^k\big(\omega, k_x, k_y\big) F_Q Q^{k-1}(\omega, x, y)$$
$$k = 1, \dots, N \qquad (۲۸)$$

که در آن $Q^{obs}(\omega, x, y)$ نشان‌دهنده اطلاعات هر سه مؤلفه از داده سه‌بعدی سه‌مؤلفه‌ای بوده و هرکدام یکی از مؤلفه‌های طیف کواترنیون را تشکیل می‌دهند. F_Q و F_Q^{-1} به‌ترتیب تبدیلات فوریه دوبعدی مستقیم و معکوس کواترنیون هستند. در این علامت‌گذاری می‌توانیم بنویسیم:

$$Q^k\big(\omega, k_x, k_y\big) = F_Q Q^k(\omega, x, y) \qquad (۲۹)$$

عملگر آستانه $T^k\big(\omega, k_x, k_y\big)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$T^k\big(\omega, k_x, k_y\big)$$
$$= \begin{cases} 1 & if\ \big|D^{k-1}\big(\omega, k_x, k_y\big)\big| \geq \tau^k(\omega) \\ 0 & if\ \big|D^{k-1}\big(\omega, k_x, k_y\big)\big| < \tau^k(\omega) \end{cases} \qquad (۳۰)$$

آستانه‌های ابتدایی و نهایی به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\tau_i(\omega) = \left(\frac{P_i}{100}\right)\ max\big|D^{obs}\big(\omega, k_x, k_y\big)\big| \qquad (۳۱)$$

$$\tau_f(\omega) = \left(\frac{P_f}{100}\right) max\big|D^{obs}\big(\omega, k_x, k_y\big)\big| \qquad (۳۲)$$

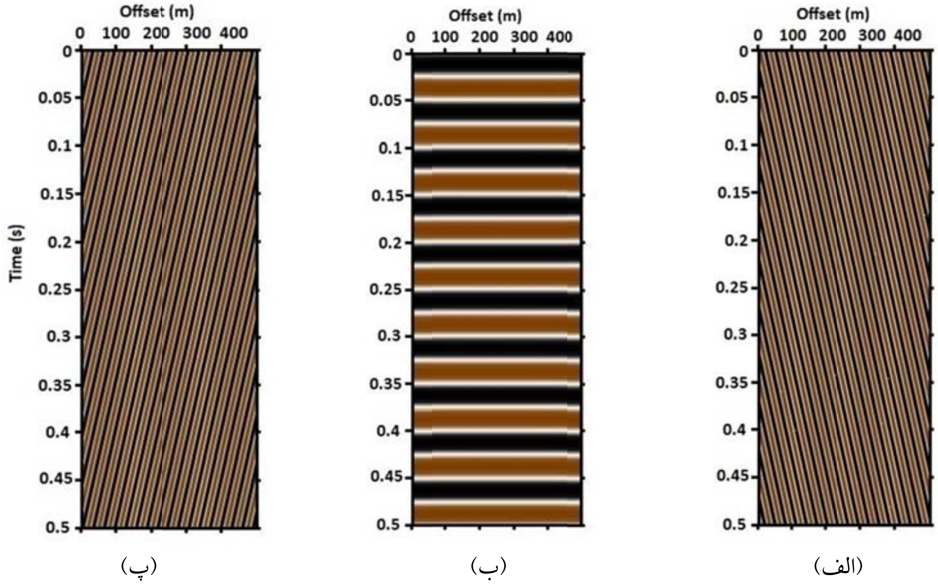
به این ترتیب الگوی آستانه خطی که قبلاً تعریف شد، برای هر فرکانس ثابت ω به‌صورت زیر برای الگوریتم در سه بعد، دوباره‌نویسی می‌شوند:

$$\tau_l^k(\omega) =$$
$$\tau_i(\omega) + [\tau_f(\omega) - \tau_i(\omega)](k-1)/(N-1)$$
$$k = 1, \dots, N \qquad (۳۳)$$

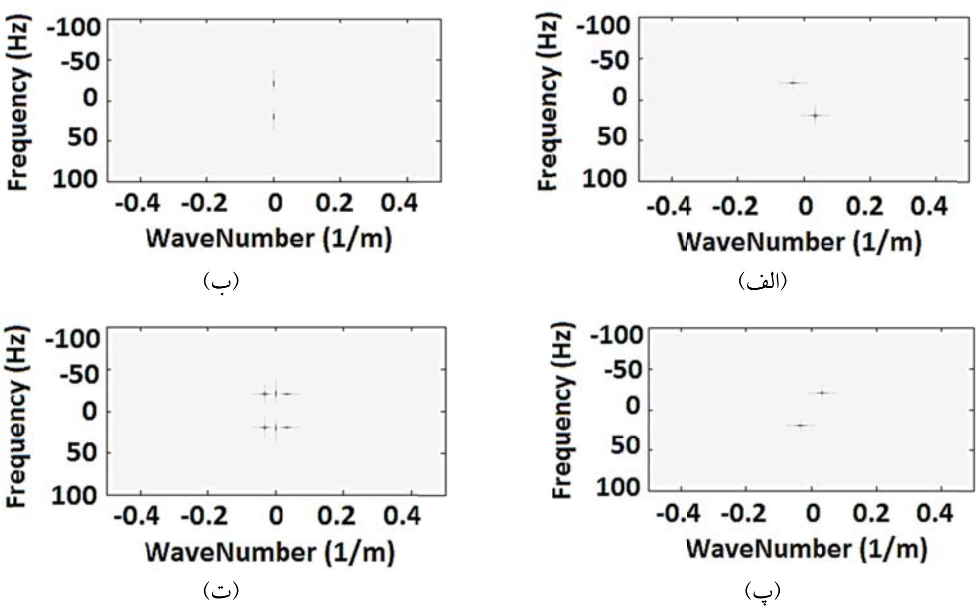
با اِعمال یک اصلاح به الگوریتم $QPOCS$، این توانایی را به الگوریتم می‌دهد تا برای تضعیف نوفه از داده‌های لرزه‌ای نیز، مورد استفاده قرار گیرد (گااُ و ساشی، ۲۰۱۱). برای این‌کار، داده مشاهده شده D^{obs} را به‌وسیله میانگین وزنی آن جایگزین میکنیم و الگوریتم $QPOCS$ برای داده‌های دوبعدی و سه‌بعدی به‌صورت زیر اصلاح می‌شود:

$$Q^k(x, y) = \alpha Q^{obs}(x, y)$$
$$+\big(I - \alpha S(x, y)\big) F_Q^{-1} T^k(\omega, k_x) F_Q Q^{k-1}(x, y)$$
$$k = 1, \dots, N \qquad (۳۴)$$

$$Q^k(\omega, x, y) = \alpha Q^{obs}(\omega, x, y) + \big(I - \alpha S(x, y)\big)$$
$$F_Q^{-1} T^k\big(\omega, k_x, k_y\big) F_Q Q^{k-1}(\omega, x, y)$$
$$k = 1, \dots, N \qquad (۳۵)$$



شکل۱. سه سیگنال خطی با شیب های (الف) مثبت، (ب) صفر و (ج) منفی.



شکل۲. (الف)، (ب) و (پ) طیف دامنه $f-k$ از سه سیگنال خطی نشان داده شده در شکل (۱). (ت) طیف دامنه $f-k$ کواترنیون برای هر سه مؤلفه.

۴. کاربرد روش

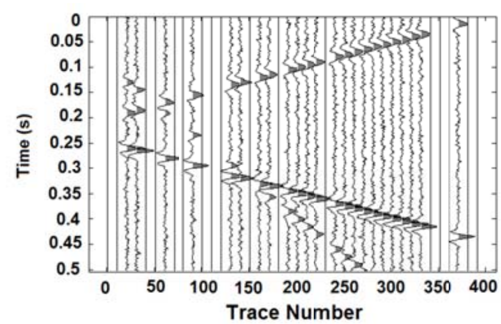
۴-۱. داده مصنوعی دوبعدی سه‌مؤلفه‌ای حاوی سه رویداد خطی

هر داده سه‌مؤلفه‌ای را با توجه به مفهوم کواترنیون، می‌توانیم به‌صورت یک کواترنیون بنویسیم. در این بخش، الگوریتم QPOCS را روی طیف کواترنیون داده مصنوعی دوبعدی سه‌مؤلفه‌ای که از سه رویداد خطی تشکیل شده است، اعمال می‌کنیم. در شکل‌های ۳-الف و ۳-ب و ۳-پ، یک رکورد مصنوعی دوبعدی سه‌مؤلفه‌ای را مشاهده می‌کنید که ۴۰ درصد از ردلرزه‌ها را به‌صورت اتفاقی حذف کرده‌ایم. رویدادهای خطی در هر سه مؤلفه، دارای دامنه و فرکانس متفاوتی می‌باشند. در شکل‌های ۴-الف و ۴-پ و ۴-ث با استفاده از الگوریتم POCS، ردلرزه‌های مفقود شده را بازسازی کرده‌ایم. در ادامه،

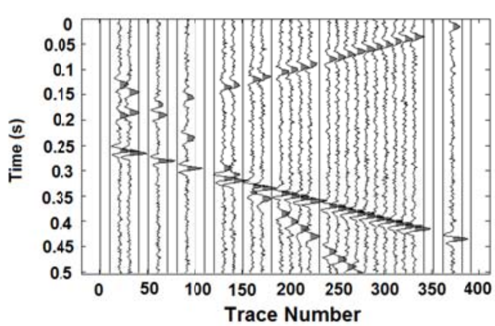
بازسازی داده دوبعدی سه‌مؤلفه‌ای را با استفاده از الگوریتم QPOCS برای هر مؤلفه به‌تنهایی انجام داده‌ایم، که در شکل‌های ۴-ب، ۴-ت، ۴-ج نتیجه را می‌توان مشاهده کرد. اجرای الگوریتم POCS و QPOCS در شرایط یکسان از نظر تعداد تکرار و میانگین وزنی انجام شده است. تعداد ۱۰۰ تکرار برای هر دو الگوریتم منظور شد و میانگین وزنی مقدار ۰/۳ در نظر گرفته شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود بازسازی هر سه مؤلفه با استفاده از الگوریتم QPOCS دارای نوفه کمتری نسبت به بازسازی هر مؤلفه به‌تنهایی است و مصنوعات کمتری در داده بازسازی شده به‌وسیله الگوریتم QPOCS مشاهده می‌شود. سپس برای درصدهای مختلف اقدام به حذف ردلرزه‌ها به‌صورت اتفاقی کردیم و بازسازی هر سه مؤلفه را با یکدیگر با استفاده از الگوریتم QPOCS و بازسازی هر سه مؤلفه به‌تنهایی، با استفاده از الگوریتم POCS را انجام دادیم و با استفاده از فرمول زیر نسبت سیگنال به نوفه را برای هر حالت محاسبه کردیم:

$$S/N = 10\ \log\frac{\|d_o\|_2^2}{\|d-d_o\|_2^2}, (dB) \qquad (۳۶)$$

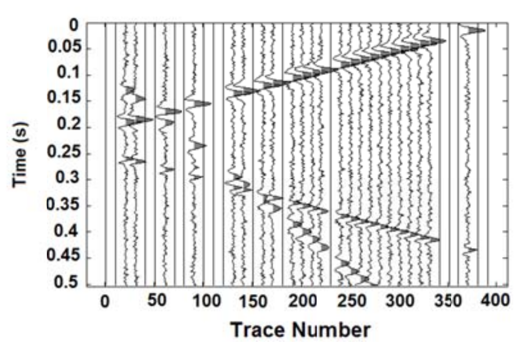
که در آن d_o داده اصلی و d داده بازسازی شده می‌باشد. شایان ذکر است که معادله (۳۶) تنها زمانی قابل استفاده است که داده مشاهده شده (بدون نوفه) موجود باشد. همانند شکل ۳ داده سه مؤلفه‌ای مصنوعی با سه رویداد خطی که هر کدام دارای فرکانس غالب متفاوتی می‌باشند، برای درصدهای مختلف حذف‌شدگی ردلرزه‌ها، مورد بررسی قرار گرفت و یک‌بار با الگوریتم QPOCS هر سه مؤلفه همزمان بازسازی شدند و سپس با استفاده از الگوریتم POCS هر مؤلفه به‌تنهایی بازسازی شد. با استفاده از معادله (۳۶)، نسبت سیگنال به نوفه برای هر مؤلفه محاسبه شده و نتایج حاصله در شکل ۵ نمایش داده شده است. همان‌طور که در نمودارها مشاهده می‌شود، بازسازی با استفاده از الگوریتم QPOCS دارای نسبت سیگنال به نوفه بیشتری نسبت به الگوریتم POCS برای درصدهای مختلف حذف‌شدگی ردلرزه‌ها، برای هر سه مؤلفه می‌باشد.



(الف)

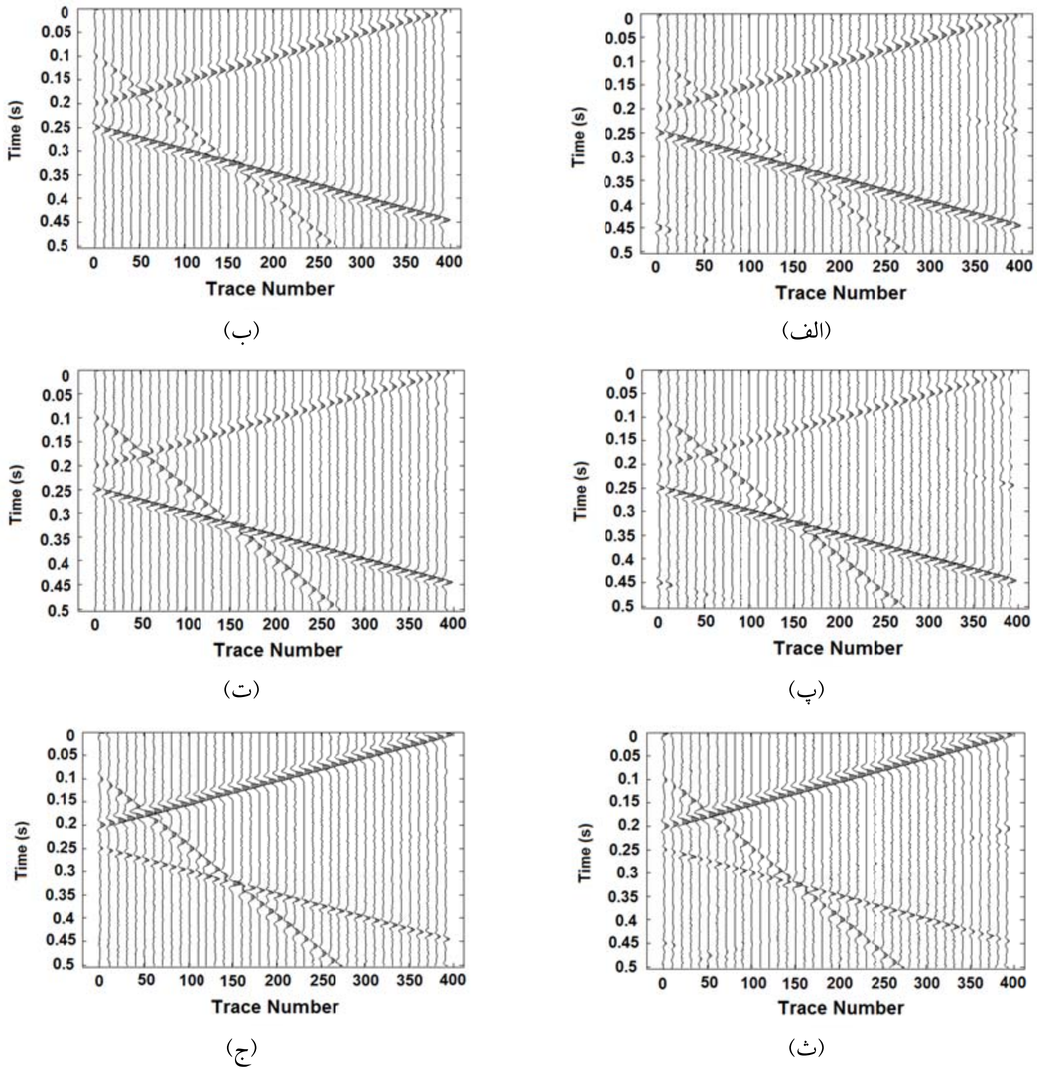


(ب)

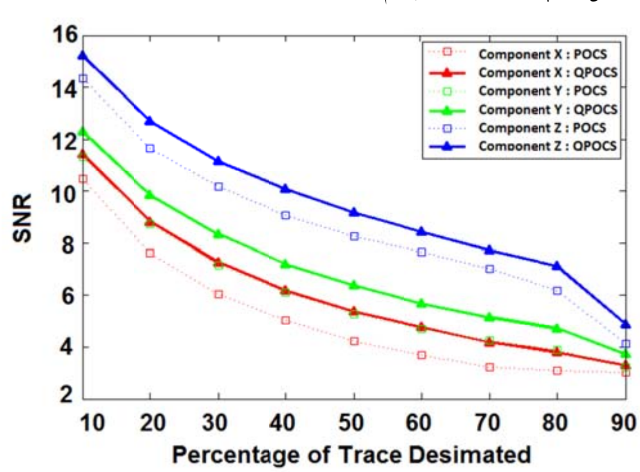


(پ)

شکل۳. (الف) مؤلفه اول (ب) مؤلفه دوم و (پ) مؤلفه سوم از داده لرزه‌ای سه مؤلفه‌ای مصنوعی آغشته به نوفه تصادفی پس از حذف تصادفی ۴۰ درصد از ردلرزه‌ها. فرکانس مرکزی موجک در هرکدام از رویدادهای خطی، متفاوت انتخاب شده است.



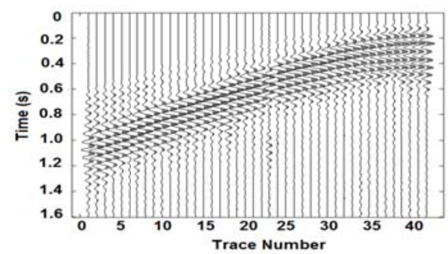
شکل۴. (الف) و (ب) بازسازی مؤلفه اول از داده مصنوعی سه مؤلفه‌ای شکل (۳-الف) به‌ترتیب با استفاده از الگوریتم POCS و QPOCS. (پ) و (ت) بازسازی مؤلفه دوم از داده مصنوعی سه مؤلفه‌ای شکل (۳-ب) به‌ترتیب با استفاده از الگوریتم POCS و QPOCS (ث) و (ج) بازسازی مؤلفه سوم از داده مصنوعی سه مؤلفه‌ای شکل (۳-پ) با استفاده از الگوریتم POCS و QPOCS.



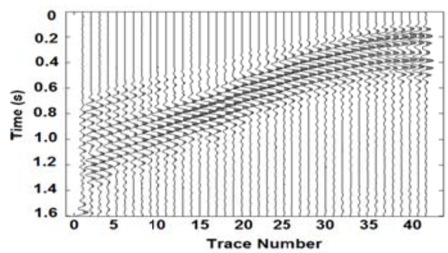
شکل۵. نسبت سیگنال به نوفه برای درصدهای مختلف حذف‌شدگی ردلرزه‌ها برای داده سه‌مؤلفه مصنوعی با سه رویداد خطی.

۴-۲. داده واقعی دوبعدی سه‌مؤلفه‌ای

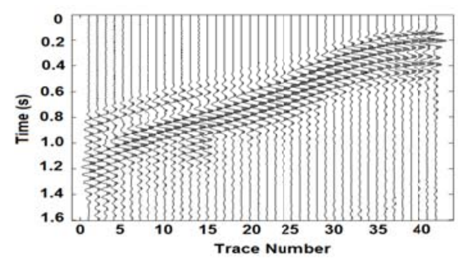
در شکل ۶، سه مؤلفه از یک داده واقعی دوبعدی سه‌مؤلفه‌ای را مشاهده می‌کنید، شکل ۶-الف مؤلفه قائم و شکل۶-ب مؤلفه افقی اول و شکل ۶-پ مؤلفه افقی دوم می‌باشند. در شکل ۷، ۴۰ درصد کل تریس‌ها را به‌صورت تصادفی حذف کرده‌ایم. داده سه‌مؤلفه‌ای مربوط به منطقه Blackfoot در کشور کانادا است که در سال ۱۹۹۵ برداشت شده است. سپس یک‌بار با استفاده از الگوریتم QPOCS، هر سه مؤلفه را همزمان بازسازی کردیم و بار دیگر با استفاده از الگوریتم POCS برای هر مؤلفه به‌تنهایی، ردلرزه‌های مفقودشده بازسازی شدند.



(الف)

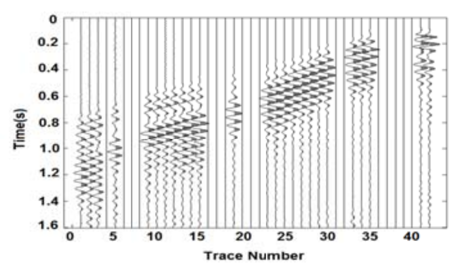


(ب)

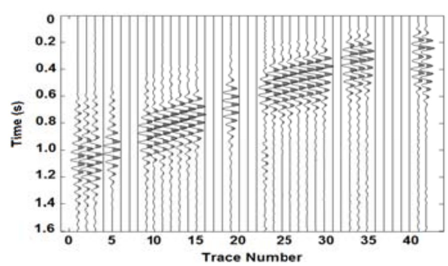


(پ)

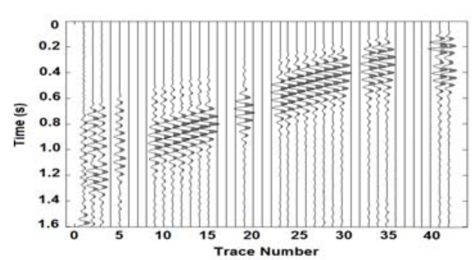
شکل۶. نمونه‌ای از داده لرزه‌ای سه مؤلفه‌ای. (الف) مؤلفه قائم، (ب) مؤلفه افقی اول و (پ) مؤلفه افقی دوم.



(الف)



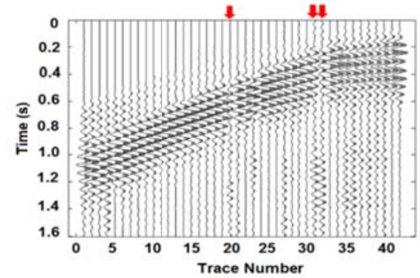
(ب)



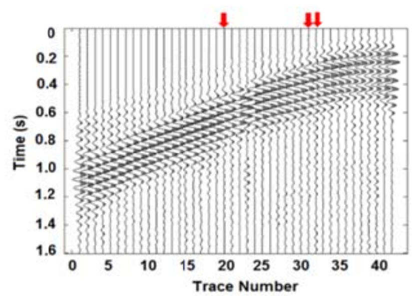
(پ)

شکل۷. داده لرزه‌ای سه مؤلفه‌ای شکل(۷) پس از حذف ۴۰ درصد از ردلرزه‌ها. (الف) مؤلفه قائم، (ب) مؤلفه افقی اول و (پ) مؤلفه افقی دوم.

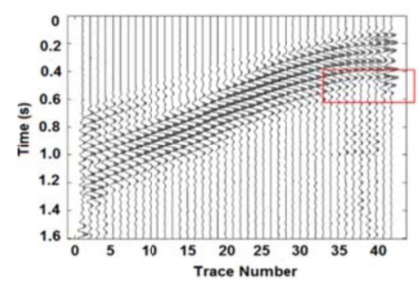
در شکل‌های ۸–الف، ۸–پ و ۸–ث نتیجه بازسازی با استفاده از الگوریتم POCS را مشاهده می‌کنید. اجرای الگوریتم POCS و QPOCS در شرایط یکسان از نظر تعداد تکرار و میانگین وزنی انجام شد و تعداد ۳۰۰ تکرار در هر پنجره زمانی با ۱۰۰ نمونه زمانی، برای هر دو الگوریتم منظور شد و میانگین وزنی مقدار ۰/۴ در نظر گرفته شده است. در شکل‌های ۸–ب، ۸–ت و ۸–ج نتیجه بازسازی با استفاده از الگوریتم QPOCS را مشاهده می‌کنید. نتیجه بازسازی الگوریتم‌های QPOCS و POCS در شکل ۸ با یکدیگر مقایسه شده است و در قسمت‌های مشخص شده، بر روی شکل‌ها به وضوح می‌توان به بازسازی بهتر الگوریتم QPOCS پی برد که نتیجه بازسازی با استفاده از این الگوریتم، دارای مصنوعات کمتر می‌باشد و همچنین، در قسمت‌های مشخص شده، الگوریتم POCS دارای کیفیت پایین‌تری در بازسازی اطلاعات مفقودشده می‌باشد. در شکل‌های ۸–الف و ۸–ب، ردلرزه‌های با شماره ۲۰، ۳۱ و ۳۲ با علامت فلش مشخص شده‌اند و بازسازی این ردلرزه‌ها با استفاده از الگوریتم POCS دارای دامنه کمتری نسبت به ردلرزه‌های متناظر با استفاده از الگوریتم QPOCS می‌باشد.



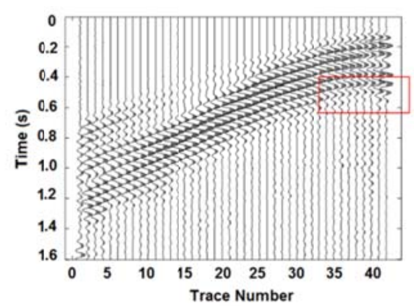
(الف)



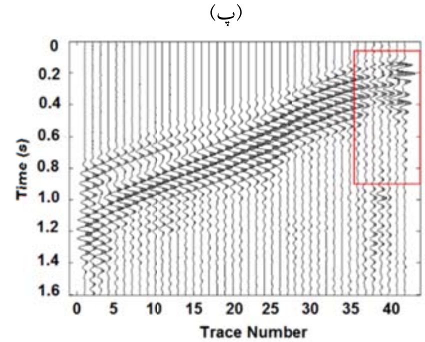
(ب)



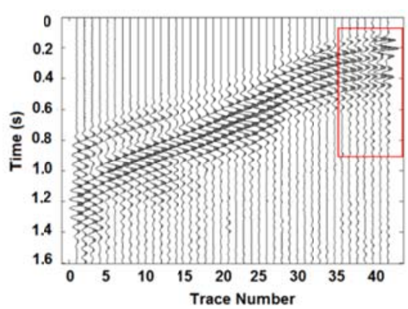
(پ)



(ت)



(ث)



(ج)

شکل۸. (الف) و (ب) بازسازی ردلرزه‌های حذف شده مؤلفه قائم شکل (۷–الف) به‌ترتیب با استفاده از الگوریتم POCS و QPOCS. (پ) و (ت) بازسازی ردلرزه‌های حذف شده مؤلفه افقی اول شکل (۷–ب) به‌ترتیب با استفاده از الگوریتم POCS و QPOCS (ث) و (ج) بازسازی ردلرزه‌های حذف شده مؤلفه افقی دوم شکل(۷–پ) به‌ترتیب با استفاده از الگوریتم POCS و QPOCS.

همچنین در شکل‌های ۸-پ و ۸-ت، رویدادهای مشخص شده در مستطیل، توسط الگوریتم QPOCS بهتر بازسازی شده است. در شکل‌های ۸-ث و ۸-ج، در مستطیل مشخص شده، مشاهده می‌شود که بازسازی ردلرزه‌ها با استفاده از الگوریتم QPOCS، بهتر بوده و الگوریتم POCS در بازسازی ردلرزه‌های مفقود شده، ضعیف عمل کرده و تعداد مصنوعات حاصل از اجرای الگوریتم در ردلرزه‌های بازسازی شده، نسبت به اجرای الگوریتم QPOCS، بیشتر می‌باشد.

۵. نتیجه‌گیری

ژئوفون‌های سه‌مؤلفه‌ای این قابلیت را دارند تا از موج لرزه‌ای در سه راستا نمونه‌برداری کنند. در روش‌های مرسوم، بازسازی داده‌های سه مؤلفه‌ای با ردلرزه‌های گم‌شده، معمولاً به‌وسیله عمل بر روی هر مؤلفه به‌صورت جداگانه انجام می‌شود که می‌تواند به ویژگی‌های ظریف موجود در داده صدمه بزند. در این تحقیق با استفاده از تبدیل فوریه کواترنیون و الگوریتم *POCS*، برخلاف روش‌های مرسوم اقدام به بازسازی همزمان داده‌های سه مؤلفه‌ای کردیم. این روش فواید متمایزی دارد که به‌خاطر عمود بودن مؤلفه‌های ورودی بوده (سیگنال‌ها ترکیب نمی‌شوند) و ضمن حفظ تغییرات ظریف بین مؤلفه‌ها (خواه بزرگ یا کوچک باشند)، به بهبود کیفیت بازسازی داده‌ها نیز کمک می‌کند. مقایسه نتایج حاصل از بازسازی هر مؤلفه به‌تنهایی با استفاده از الگوریتم *POCS* و سه مؤلفه همزمان با استفاده از الگوریتم *QPOCS*، نشان داد که نتایج حاصل از بازسازی با استفاده از الگوریتم*POCS* و تبدیل فوریه کواترنیون (که اجازه به‌کارگیری همزمان هر سه مؤلفه را فراهم می‌کند)، دارای کیفیت بالاتری بوده و در داده خروجی، درصد مصنوعات تولید شده، نسبت به اجرای الگوریتم *POCS* بر هر مؤلفه به‌تنهایی، کمتر می‌باشد.

مراجع

Abma, R. and Kabir, N., 2006, 3D interpolation of irregular data with a POCS algorithm, Geophysics, 71, 91–96.

Bihan, N. L. and Mars, J. I., 2001, New 2D complex and hypercomplex seismic attributes, Presented at the 71st Conference of the Society of Exploration Geophysicists, SEG.

Ell, T., 1992, Hypercomplex spectral transformations, PhD thesis, University of Minnesota.

Ell, T. A., 1993, Quaternion-fourier transforms for analysis of two-dimensional linear time-invariant partial-differential systems, 32nd IEEE Conf. Decision and Control, 1830–1841.

Ell, T. A. and Sangwine, S. J., 2007, Hypercomplex fourier transforms of color images, IEEE Trans, Image Process, 16, 22–35.

Galloway, E. and Sacchi, M. D., 2007, POCS method for seismic data reconstruction of irregularly sampled data: CSPG CSEG Convention, 555.

Gao, J. J., Chen, X. H., Li, J. Y. and Liu, G.C., 2010, Irregular seismic data reconstruction based on exponential threshold model of pocs method, Applied Geophysics, 7, 229–238.

Gao, J. and Sacchi, M. D., 2011, Convergence improvement and noise attenuation considerations for POCS reconstruction, Presented at the 73rd EAGE conference and exhibition.

Gao, J., Stanton, A., Naghizadeh, M., Sacchi, M. and Chen, X., 2013, Convergence improvement and noise attenuation considerations for beyond alias projection onto convex sets reconstruction, Geophysical Prospecting, 61, 138–151.

Gerchberg, R. W. and Saxton, W. O., 1972, A practical algorithm for the determination of phase from image and diffraction plane pictures, Optik 35, 227–246.

Grandi, A., Mazzotti, A. and Stucchi, E., 2007, Multicomponent velocity analysis with quaternions, Geophysical Prospecting, 55, 761–777.

Hamilton, W., 1866, Elements of quaternions, Longmans Green.

Jiang, T., Gong, B., Qiao, F., Jiang, Y., Chen, A., Hren, D. and Meng, Y., 2017, Compressive seismic reconstruction with extended POCS for arbitrary irregular acquisition, SEG Technical Program Expanded Abstracts, 4272-4277, doi:10.1190/segam2017-17632472.1.

Krieger, L. and Grigoli, F., 2015, Optimal reorientation of geophysical sensors, A quaternion based analytical solution, Geophysics, 80(2), 19-30.

Menanno, G. M. and Mazzotti A., 2012, Deconvolution of multicomponent seismic data by means of quaternions: Theory and preliminary results, Geophysical Prospecting, 60(2), 217-238.

Pinilla, J., Etcheverlepo, A. and Ojeda, G., 2016, A piecewise linear threshold model for five-dimensional interpolation of seismic data using POCS method, SEG Technical Program Expanded Abstracts, 4134-4138, doi:10.1190/segam2016-13952846.1.

Sangwine, S. and Bihan, N., 2005, Quaternion Toolbox for Matlab, Software Library, Available at http://qtfm.sourceforge.net./

Sangwine, S. J. and Ell, T. A., 2000, The discrete fourier transform of a colour image: Proc. Image Processing II Mathematical Methods, Algorithms and Applications, 430–441.

Stanton, A. and Sacchi, M., 2011, Multicomponent seismic data reconstruction using the quaternion Fourier transform and POCS. SEG Technical Program Expanded Abstracts: pp. 1267-1272.

Stanton, A. and Sacchi, M., 2013, Vector reconstruction of multicomponent seismic data, Geophysics, 78(4), 131-145.

Wang, S. Q., Xing, G. and Yao, Z. X., 2010, Accelerating POCS interpolation of 3d irregular seismic data with graphics processing units: Computers & Geosciences, 36, 1292–1300.

Witten, B. and Shragge, J., 2006, Quaternion-based signal processing, Presented at the 76th Conference of the Society of Exploration Geophysicists, SEG.

Journal of the Earth and Space Physics, Vol. 45, No. 2, Summer 2019, P. 2

Application of POCS algorithm for the reconstruction of three-component seismic data in quaternion Fourier domain

Eftekhari, A.[1] and Siahkoohi, H. R.[2*]

1. M.Sc. Graduated, Department of Geophysics, Research and Science Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran
2. Professor, Department of Earth Physics, Institute of Geophysics, University of Tehran, Tehran, Iran

(Received: 22 May 2018, Accepted: 14 May 2019)

Summary

Three-component (3C) seismic data acquisition method samples seismic wave field at each station along three Cartesian coordinates, simultaneously. Many reservoirs have been discovered and determined by the generation and recording of P waves only, but the P wave alone cannot provide a comprehensive description of the reservoir characteristics. In some studies, S-wave information is required in addition to P-wave information to get a correct estimation from reservoir properties. By the three component seismic acquisition, P and S waves' information can be recorded simultaneously. More often in seismic surveys, one cannot sample seismic wave field uniformly the along spatial direction due to environment limitations or instrument malfunctions; inevitably we have to use interpolation methods for reconstruction of missing traces. Reconstruction of missing or noisy traces is done using the projection onto convex sets (POCS). The POCS algorithm is a simple algorithm which is suitable for reconstruction of irregularly lost traces in a regular grid using multiple repetitive Fourier transforms. Conventional methods for reconstruction of missing traces in three component acquisition is usually done by implementation of POCS on each component separately, which could damage any subtle features in the record. This research introduces a method to reconstruct all three components at once using the quaternion Fourier transform and Projection onto Convex Sets (QPOCS).Quaternions in mathematics are a commutative numbers system that extend the complex numbers system. As the ordinary complex numbers can be displayed on two dimensions, these numbers can also be displayed on four dimensions. Quaternions were first introduced by William Rowan Hamilton when looking for a way to extend complex numbers to three dimensions. He knew how to sum and multiply three-dimensional numbers, but he was looking for a way to divide these numbers into each other. In 1843, Hamilton discovered that the division of quaternions requires a fourth dimension. Quaternion Algebra is often shown with H (in honor of Hamilton). The two-component data vector representation in the frequency domain can be obtained by putting the real and imaginary parts of each component in the arguments of a quaternion. This method allows operators to apply both components simultaneously. Quaternions are converted to Frequency-wavenumber domain by Quaternion Fourier Transform (QFT) and a single domain spectrum for both components is defined using the polar representation of the Quaternions. Quaternions have other applications in seismic data processing such as computing spectral attributes, multi-component velocity analysis and multi-component deconvolution. The advantage of this method is because of the spectral overlapping of the components in the frequency-wavenumber domain, thus the perpendicularity of input components is preserved (signals are not interconnected) and similarities between components are maintained that helps improve the quality of reconstruction. The coding of this method has been done in MATLAB environment and results of applying the proposed method on 3-component synthetic and real seismic data are compared to that of the POCS algorithm when applied on each component separately. The results of reconstruction using QPOCS algorithm indicate a better quality for reconstructed seismic data and in the output data, the percentage of produced artifacts is lower than that of the POCS algorithm on each component alone.

Keywords: Three-dimensional interpolation, Three-component seismic acquisition, Fourier transform, Quaternion, Convex set.

*Corresponding author: hamid@ut.ac.ir