فیزیک زمین و فضا، دوره ۴۵، شماره ۲، تابستان ۱۳۹۸، صفحهٔ ۳۲۵- ۳۴۲
DOI: 10.22059/jesphys.2019.268781.1007058

برآورد بهینه دقت مشاهدات در شبکه‌های کلاسیک جابه‌جاسنجی

سعید فرزانه[1]* و کمال پروازی[2]

۱. استادیار، دانشکده مهندسی نقشه‌برداری و اطلاعات مکانی، پردیس دانشکده‌های فنی، دانشگاه تهران، تهران، ایران
۲. دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی نقشه‌برداری و اطلاعات مکانی، پردیس دانشکده‌های فنی، دانشگاه تهران، تهران، ایران

(دریافت: ۹۷/۸/۲۱، پذیرش نهایی: ۹۸/۲/۲۴)

چکیده

روش برآورد مؤلفه‌های واریانس کمترین‌مربعات زمانی که تنوع مشاهداتی در شبکه وجود داشته باشد کارایی خوبی از خود نشان می‌دهد. با استفاده از این روش برای هر دسته از مشاهدات مختلف یک ضریب مقیاس محاسبه می‌شود. در این تحقیق از روش وزن‌دهی برآورد مؤلفه‌های واریانس کمترین‌مربعات استفاده شده است. این بهبود دقت برای مختصات نقاط شبکه به‌نحوی است که مقدار نیم قطر بزرگ بیضی خطای مطلق نقاط در حالت استفاده از برآورد مؤلفه‌های واریانس کمترین مربعات برابر ۲۹ میلی‌متر، در حالی‌که با استفاده از روش فاکتور وریانس ثانویه این مقدار به دو برابر افزایش می‌یابد. علاوه بر این در هنگام استفاده از روش برآورد مؤلفه‌های واریانس کمترین‌مربعات اثر ماتریس کوواریانس مجهولات برابر ۰/۸ میلی‌متر می‌باشد که نسبت به روش فاکتور وریانس ثانویه مقدار آن به اندازه دو برابر کاهش می‌یابد. در واقع مزیت روش برآورد مؤلفه‌های واریانس کمترین‌مربعات برآورد واقع‌بینانه‌ای از دقت پارامترهای مدل و ابعاد بیضی خطای مطلق می‌باشد.

واژه‌های کلیدی: برآورد مؤلفه‌های واریانس کمترین‌مربعات، فاکتور وریانس ثانویه، شبکه‌های ژئودتیک، عدد آزادی.

۱. مقدمه

سدها از جمله سازه‌های مهمی می‌باشند که مراقبت و ایمن‌سازی آنها از اهمیت بالایی برخوردار می‌باشد. سازه‌های سدها جهت جلوگیری از جریان آب رودخانه به‌منظور بهره‌برداری از آب ذخیره‌شده پشت سد برای نیروی برق و... طراحی شده‌اند. از این رو نیروی بسیار زیادی از طرف دریاچه پشت سد به بدنه سد وارد می‌شود که باعث جابه‌جایی در بدنه سد می‌شود. این جابه‌جایی ممکن است باعث تخریب سد شود. برای بررسی رفتار سدها و محاسبه جابه‌جایی‌های به‌وجود آمده معمولاً شبکه‌های میکروژئودزی در پشت، بدنه و تاج سد ایجاد می‌کنند. با توجه به نوع سد، جنس خاک و منطقه، ویژگی‌های سد از جمله ارتفاع، طول، مدت زمان سپری شده از ساخت سد و حجم آب موجود در کاسه سد، شبکه‌هایی طراحی می‌شود و بر روی این شبکه‌ها به‌صورت دوره‌ای مشاهدات انجام می‌شود. مشاهدات معمولاً با دستگاه‌های اندازه‌گیری مانند گیرنده‌های GPS، دوربین‌های توتال استیشن و یا برخی حس‌گرهایی که در بدنه سد قرار می‌دهند مثل تیلت مترها و... انجام می‌شود. نکته‌ای که در شبکه‌های میکروژئودزی سدها می‌بایست به آن توجه داشت، استفاده از دستگاه‌هایی است که بتواند با توجه به محدودیت‌هایی که شبکه‌های سد دارند، مانند نبود فضای کافی در پشت سد برای احداث پیلارها یا به‌عبارتی طراحی بهینه شبکه، احتمال نبود دید کافی از هر پیلار به تمامی نقاط موضوعی، بتوان نتایج حاصل از محاسبات سرشکنی، مانند مؤلفه‌های مختصاتی نقاط، جابه‌جایی‌های رخ داده در فاصله زمانی اپک‌ها را با دقت استاندارد برآورد کرد. به‌عبارتی دیگر دستگاه‌های اندازه‌گیری باید مشاهدات را با دقتی انجام دهند که بتواند به دقت موردنیاز برای نتایج محاسبات سرشکنی دست پیدا کنیم. دستگاه معمول مورد استفاده برای اندازه‌گیری مشاهدات طول و زاویه در ایران دستگاه (Leica Total Station TCA2003) با دقت $1mm + 1ppm$ برای طول و ۰/۵ ثانیه برای زاویه می‌باشد.

*نگارنده رابط: farzaneh@ut.ac.ir

به‌طور کلی یک شبکه ژئودتیک بهینه، شبکه‌ای با دقت و قابلیت‌اطمینان بالا می‌باشد. کوانگ (۱۹۹۱ و ۱۹۹۶) وزن و شکل بهینه‌ای را برای شبکه، با الگوریتم‌های بهینه‌سازی مختلفی به‌دست آورد. در این روش بهترین شکل برای شبکه و همچنین رسیدن به دقت بالا برای مشاهدات به‌صورت هم‌زمان طراحی شده بود (کخ ۱۹۸۵). ماتریس معیار دقت را معرفی کردند به این صورت که این ماتریس نماینده ماتریس واریانس-کواریانس ایده‌آل برای یک شبکه ژئودتیک می‌باشد. از آنجایی‌که این ماتریس یک وضعیت ایده‌آل را نشان می‌دهد حتماً نباید ماتریس واریانس کواریانس شبکه معادل این ماتریس معیار باشد. این ماتریس هم بر اساس مفاهیم نظری مانند تیلور-کارمن، ماتریس وزنی که توسط گرافارند (۱۹۷۴) ارائه شده و هم بر اساس مطالعات تجربی که توسط کراس (۱۹۸۵) ارائه شده است. از طرفی یک شبکه بهینه باید توانایی تشخیص خطاهای فاحش در مشاهدات و به حداقل رساندن اثر خطاهای کشف نشده در نتایج را داشته باشد (فان، ۲۰۱۰). باردا (۱۹۶۸) یک تست کلی برای تشخیص مشاهدات اشتباه و معرفی قابلیت‌اطمینان ارائه کرده است. معیار قابلیت‌اطمینان برای طراحی بهینه یک شبکه مورد نیاز می‌باشد. امیری سیمکویی (۲۰۰۱ و ۲۰۰۴) طراحی مرتبه اول شبکه ژئودتیک و رسیدن به ماکزیمم قابلیت‌اطمینان را ارائه کردند. در این تحقیق با یکسان بودن عدد آزادی برای تمام مشاهدات وزن مشاهدات نیز بهبوده داده شده بود. از طرفی تأثیر مشاهداتی با قابلیت‌اطمینان پایین در مانیتورکردن جابه‌جایی شبکه نیز مورد بررسی قرار گرفت. امیری سیمکوئی و همکاران (۲۰۱۲) برخی از مفاهیم اساسی مربوط به بهینه‌سازی و طراحی شبکه‌های ژئودتیکی را ارائه کردند. یتکین و اینال (۲۰۱۵) یک روشی بر اساس الگوریتم بهینه‌سازی جهش قورباغه (Shuffled frog-leaping algorithm) برای مانیتورکردن شبکه ژئودتیک ارائه کردند که بر اساس آن می‌توان موقعیت بهینه نقاط مرجع را برای رسیدن به حداکثر قابلیت‌اطمینان مشخص کرد.

یکی از مهم‌ترین مشکلات پیش رو در تجزیه و تحلیل یک شبکه ژئوتیکی، انتخاب ماتریس وزن مشاهدات است. برای ارزیابی بهینه شبکه مشاهده شده نیاز به یک ماتریس کوواریانس واقع‌بینانه می‌باشد. برآورد مؤلفه‌های وریانس (ماتریس وزن) توسط هلمرت (۱۹۰۷) توسعه داده شد و از روش‌های مختلفی برای این برآورد استفاده کرده است (گرافارند و همکاران، ۱۹۸۰؛ لرچ، ۱۹۹۱). هدف از برآورد مؤلفه‌های وریانس، به‌دست آوردن این مؤلفه‌ها به‌صورت واقع‌بینانه و قابل‌اطمینان به‌منظور ساخت ماتریس کواریانس مشاهدات می‌باشد. تکنیک آنالیز برآورد مؤلفه‌های وریانس توسط گرافارند و همکاران مورد استفاده و ارزیابی قرار گرفت است که در آن مشاهدات را به دو دسته مناسب تقسیم‌بندی کرد. در نظر گرفتن این گروه‌ها می‌تواند به‌صورت ناهمگن نیز انجام گیرد. این دو تقسیم‌بندی می‌تواند به‌صورت تقسیم طول و زاویه (تقسیم‌بندی ناهمگن) یا تقسیم‌بندی همگن (اندازه‌گیری فاصله توسط ابزارهای مختلف) باشد. این روش منجر به مجموعه‌ای از معادلات خطی متقارن می‌شود.

پردازش اطلاعات در کاربردهای ژئودتیکی عموماً وابسته به روش کمترین‌مربعات می‌باشد که در این روش برای داده‌ها وزن انتخاب می‌شود به این جهت که درجه اهمیت هر داده مشخص شود. در کارهای ژئودتیکی دقت به‌دست آمدن مشاهدات مختلف با هم متمایز می‌باشد و لذا وارد کردن وزن برای این داده‌ها امری ضروری است تا بتوان از این طریق، داده‌های دقیق‌تر را در حل مسأله سهیم‌تر کرد. لذا ماتریس وزن داده‌ها معکوس ماتریس کوورانس آنها انتخاب می‌شود. از این رو بهترین برآورد نااریب خطی (BLUE) به‌دست خواهد آمد. دانستن ماتریس کوواریانس صحیح بردار مشاهدات برای کاربردهای زیادی مورد نیاز است. چنین اطلاعاتی کمک می‌کند تا بتوان فاکتورهای توصیفی مختلفی از خطاهای مشاهداتی را مورد مطالعه قرار داد. همچنین جهت به‌دست

آوردن دقت توابع مورد نظر با استفاده از قانون انتشار کوواریانس و نیز به‌دست آوردن برآورد کننده کمترین واریانس پارامترهای مدل خطی را مورد استفاده قرار می‌دهد. استفاده از ماتریس کوواریانس صحیح در حل مسأله باعث می‌شود تا تست‌های پس از سرشکنی به‌طور مناسبی انجام شوند و سایر اندازه‌گیری‌های کنترل کیفیت نظیر میزان اعتمادپذیری به درستی ارزیابی شوند.

جهت به‌دست آوردن یک برآورد کننده‌ی درست نیاز به یک مدل تابعی یا تصادفی مناسب است. اطلاع ناکامل و نادرست از ماتریس کوواریانس مشاهدات در مسائل زیادی اتفاق می‌افتد. از آنجا که اغلب بخشی از ماتریس کوواریانس مشاهدات معلوم است در نتیجه لازم است که بخش مجهول از روی مشاهدات اضافی به‌دست آید. برآورد این پارامترهای مجهول از ماتریس کوواریانس به برآورد مؤلفه واریانس ('VCE) برمی‌شود. روش‌های برآورد مؤلفه‌های واریانس به‌طور گسترده مورد تحقیق و بررسی قرار گرفته است، که در ادامه به برخی از آنها اشاره شده است. روش‌های زیادی نیز برای برآورد مؤلفه واریانس وجود دارند که به سه دسته عمده تقسیم‌بندی می‌شوند:

الف- روش‌هایی که در آنها از مدل تابعی استفاده می‌شود، مانند مدل گوس-مارکوف، مدل شرطی و مدل گوس هلمرت.

ب- روش‌هایی که در آنها از مدل تصادفی استفاده می‌شود، مانند روش قطری قطعه‌ای (block diagonal) و روش ساختار قطعه‌ای(block structure).

ج- روش‌های ساده و دقیق مانند روش (MIQUE, Minimum norm quadratic unbiased estimator)، روش (BIQUE, Best Invariant Quadratic Unbiased Estimator)، روش هلمرت، روش (MILE, Maximum Likelihood Estimators) ، روش بایزین، روش‌های غیر منفی و روش کمترین‌مربعات.

از جمله کاربردهایی که در آن روش‌های مختلف برآورد مؤلفه‌های وریاتس را به‌کار گرفته شده است می توان به موارد زیر اشاره کرد:

- بررسی شبکه مثلث‌بندی و سه پهلوبندی ژئودتیکی برای کنترل مشاهدات مربوط به فعالیت‌های تکتونیکی با ابزارهای مختلف الکترونیکی برای اندازه‌گیری‌های فاصله و تئودولیت‌ها و برآورد مؤلفه‌های خطا و مشاهدات وزن دار GPS (چن و همکاران ۱۹۹۰).
- بررسی ویژگی‌های نوفه در سری‌های زمانی مختصات روزانه ایستگاه‌های GPS (زهانگ و همکاران، ۱۹۹۷؛ ویلیامز و همکاران، ۲۰۰۴؛ امیری سیمکویی و همکاران، ۲۰۰۶).
- بررسی مدل آماری فاصله‌یابی لیزری ماهواره و داده‌های VLBI (لوکاس و دیلینجر ۱۹۹۸).
- مطالعه وابستگی دقت مشاهدات ارتفاع GPS (جین و جونگ، ۱۹۹۶).
- تخمین یک مدل آماری برای پردازش داده‌های فاز و کد GPS که همبستگی زمانی یا همبستگی مکانی مشاهدات GPS را ادغام می‌کند (امیری سیمکویی و همکاران، ۲۰۰۷).

در این تحقیق از روش وزن‌دهی برآورد مؤلفه‌های واریانس کمترین‌مربعات برای بهبود دقت نتایج حاصل از سرشکنی استفاده شده است.

نتایج حاصل از سرشکنی در دوحالت استفاده از روش برآورد مؤلفه‌های واریانس کمترین‌مربعات و استفاده از فاکتور وریانس ثانویه ارائه شده است. تأثیر برآورد مؤلفه‌های وریانس بر روی دقت نهایی مشاهدات، برآورد بیضی خطای مطلق، بررسی شرایط لازم در یک شبکه برای رسیدن به دقت بالاتر و تأثیر آن در به‌دست آوردن نتایج واقع‌بینانه از ماتریس قابلیت‌اطمینان ارائه شده است. تمام نتایج در دوحالت استفاده از روش برآورد مؤلفه‌های وریانس کمترین‌مربعات و استفاده از روش فاکتور وریانس ثانویه با هم مقایسه شده است. مزیت روش برآورد مؤلفه‌های واریانس کمترین‌مربعات در این تحقیق به این صورت می‌باشد که با به‌دست آوردن پارامترهای وریانس طول و امتداد، برآورد واقع‌بینانه‌ای از دقت

پارامترهای مدل و همچنین ابعاد بیضی خطای مطلق را ارائه می‌کند.

۲. روش تحقیق

یکی از مراحل مهم در آنالیز مشاهدات انجام شده، کشف مشاهدات اشتباهات می‌باشد. به‌گونه‌ای که این مشاهدات نسبت به دیگر مشاهدات موجود در مجموعه داده‌ها، ناسازگار می‌باشند. مشاهدات اشتباه در داده‌ها، منجر به بروز خطا در مدل، پیش‌بینی نادرست و نتایج نادرست خواهد شد. روش‌های متعددی برای بررسی اشتباهات وجود دارد که در اینجا از روش آستانه‌گذاری استفاده شده است. این روش، یک راه‌حل استاندارد برای کشف مشاهدات اشتباهات می‌باشد. برای این‌کار از یک حدآستانه ماکزیمم استفاده می‌شود (بارنت و لویس، ۱۹۷۴). این حدآستانه، معمولاً با ویژگی‌های خود داده‌ها، در ارتباط است. روش آستانه‌گذاری برای مشاهدات، یک توزیع معلوم در نظر می‌گیرد که این توزیع معمولاً، توزیع نرمال می‌باشد. بنابراین، اگر یک مجموعه داده به‌صورت $y_i=\{y_1,y_2,...,y_n\}$ داشته باشیم، آنگاه روش آستانه‌گذاری با فرض توزیع نرمال $N(\mu,\sigma^2)$ برای داده‌ها، به‌صورت زیر قابل تعریف است (امیری سیمکویی و همکاران، ۲۰۱۴؛ دیویس و گدر،۱۹۹۳):

$$\text{out}(\alpha,\mu,\sigma)=\left\{i=1,2,...,n:\left|y_i-\mu\right|>z_{1-\alpha/2}\sigma\right\} \qquad (۱)$$

که در آن $\text{out}(\alpha,\mu,\sigma)$ محدوده اشتباهات، μ و σ به‌ترتیب میانگین و انحراف معیار(مجهول) داده‌ها، $z_{1-\alpha/2}$ مقدار بحرانی متناسب با سطح معنی‌دار $1-\alpha/2$ و مربوط به توزیع نرمال استاندارد، می‌باشند.

در واقع، این روش، متناسب با مقدار α، مشاهداتی را که از توزیع $N(\mu,\sigma^2)$ انحراف دارند، به‌عنوان مشاهده اشتباه شناسایی می‌کند. لازم به ذکر است که تعریف (۱) نه فقط برای توزیع نرمال که برای هر توزیع متقارن دیگری با تابع چگالی مثبت، قابل‌تعمیم است (بنگال وهمکاران، ۲۰۰۵).

همچنین در این رابطه می‌توان به‌جای استفاده از میانگین، از میانه و یا هر مقدار پایدار دیگری استفاده کرد (کرن و همکاران، ۲۰۰۵).

اگر این محاسبات برای قسمت کوچک‌تری از داده‌ها محدود، در پنجره‌ای با بعد m بازنویسی شود، آنگاه محدوده اشتباهات برای آن‌ها عبارت‌است از:

$$\text{out}(\alpha,\bar{y}_m,s_m,m)=\left\{i=1,2,...,m:\left|y_i-\bar{y}_m\right|>z_{1-\alpha/2}s_m\right\} \qquad (۲)$$

که در آن $\text{out}(\alpha,\bar{y}_m,s_m,m)$ محدوده اشتباهات، $y_i=\{y_1,y_2,...,y_m\}$ مشاهدات بردار $y\in R^n$، $\bar{y}_m$ و s_m به‌ترتیب برآوردهایی از میانگین و انحراف معیار m داده مذکور می‌باشند.

اگر $y_i\in\text{out}(\alpha,\bar{y}_m,s_m,m)$، آنگاه y_i به‌عنوان مشاهده اشتباه شناخته می‌شود. بعد از اعمال روش آستانه‌گذاری برای این مجموعه کوچک از داده‌ها، پنجره مذکور به اندازه یک مشاهده به سمت جلو حرکت کرده و محاسبات برای مجموعه جدید یعنی، $y_i=\{y_2,y_3,...,y_{m+1}\}$ تکرار می‌شود. حرکت این پنجره و انجام محاسبات، تا پایان مجموعه داده‌ها ادامه می‌یابد. حسن این روش، بار محاسباتی کم است.

۲-۱. برآورد مؤلفه واریانس کمترین‌مربعات

در این تحقیق روش LS-VCE یا روش برآورد مؤلفه وریانس با روش کمترین‌مربعات مورد استفاده قرار گرفت. LS-VCE نیز مانند مدل‌های زیاد دیگری برای مدل‌های خطی یا خطی شده به‌کار گرفته می‌شود، در این روش فرض می‌شود که ماتریس کوورانس مشاهدات می‌تواند به‌صورت ترکیبی خطی از ماتریس‌های کوفاکتور در نظر گرفته شود. ضرایب این ترکیب خطی همان پارامترهای کوواریانس مجهول هستند که باید برآورد شوند.

برای این منظور سیستم معادلات مشاهدات زیر را در نظر بگیرید: (امیری سیمکویی، ۲۰۰۷؛ زو و همکاران، ۲۰۰۷؛

تیونیسن، ۱۹۸۸):

$$E\left(\underline{y}\right) = Ax,\ D\left(\underline{y}\right) = Q_y = E\left\{\left(\underline{y} - Ax\right)\left(\underline{y} - Ax\right)^T\right\} = Q_0 + \sum_{k=1}^{p} \sigma_k Q_k \qquad (۳)$$

در این رابطه (۳)، E و D به‌ترتیب، عملگرهای امید ریاضی و پراکندگی مشاهدات، A ماتریس طرح با ابعاد $m \times n$ است، x بردار مجهولات با بعد n، y بردار مشاهدات با بعد m، Q_0 قسمت معلوم ماتریس کواریانس مشاهدات با ابعاد $m \times m$ می‌باشد که برای سادگی روابط می‌توان برابر صفر در نظر گرفت (امیری سیمکویی، ۲۰۰۷)، σ_k واریانس مجهول وزن واحد، Q_y ماتریس کواریانس مشاهدات با ابعاد $m \times m$ و $Q_k, k = 1, \dots, p$ ماتریس‌های معلوم کو-فاکتور مدل می‌باشند با توجه به این‌که در این تحقیق مشاهدات مورد استفاده از جنس مشاهدات طول و مشاهدات امتدادی هستند مقدار p برابر دو در نظر گرفته شده است. ماتریس کوریانس Q_y، یک ماتریس معین-مثبت در نظر گرفته شده و به‌صورت یک ترکیب خطی مجهول از ماتریس‌های کوفاکتور معلوم Q_k نمایش داده می‌شود.

این ماتریس‌های کوفاکتور، متقارن فرض شده به‌طوری‌که جمع سری در رابطه (۳)، یک ماتریس معین-مثبت شود. شرط لازم برای داشتن یک جواب منظم برای مدل تصادفی، این است که ماتریس‌های کوفاکتور، مستقل خطی باشند (امیری سیمکویی، ۲۰۰۷). در این تحقیق با توجه به این‌که مشاهدات مورد استفاده از جنس مشاهدات طول و مشاهدات امتدادی هستند، با توجه به دقت اولیه دستگاه مورد استفاده برای اندازه‌گیری و بر اساس قانون انتشار خطاها برای هر کدام از مشاهدات دقت اولیه به‌دست می‌آید و بر اساس دقت به‌دست آمده ماتریس‌های Q_k تشکیل می‌شوند.

جواب برآوردگر کمترین‌مربعات وزن‌دار مدل (۳)، در صورتی‌که ماتریس وزن مشاهدات برابر با معکوس ماتریس کواریانس مشاهدات در نظر گرفته شود ($p = Q_y^{-1}$)، جواب بهترین برآورد ناأریب خطی به صورت زیر خواهد بود.

$$\underline{\hat{x}} = (A^T P A)^{-1} A^T P \underline{y} \qquad (۴)$$

با توجه به این‌که $E(y) = Ax$ پس از انجام یک سری عملیات ساده جبری در بخش مدل تصادفی رابطه (۳)، خواهیم داشت:

$$E\{(\underline{y} - Ax)(\underline{y} - Ax)^T\} = E\{\underline{y}\underline{y}^T - \underline{y}x^T A^T - Ax\underline{y}^T + Axx^T A^T\} = E\{\underline{y}\underline{y}^T - Axx^T A^T - Axx^T A^T + Axx^T A^T\} = E\{\underline{y}\underline{y}^T - Axx^T A^T\} = Q_0 + \sum_{k=1}^{p} \sigma_k Q_k \qquad (۵)$$

با انتقال مجهولات به سمت چپ سیستم معادلات و انتقال معلومات به سمت راست معادله، رابطه (۵) را می‌توان به‌شکل زیر بازنویسی کرد:

$$E\{\underline{y}\underline{y}^T - Q_0\} = Axx^T A^T + \sum_{k=0}^{p} \sigma_k Q_k \qquad (۶)$$

به‌عنوان مثال در این تحقیق جهت تشکیل ماتریس‌های کوفاکتور Q_k، با توجه به این‌که ماتریس وزن برای مجموع کل مشاهدات (۷۰ مشاهده) به‌صورت یک ماتریس مربعی قطری با ابعاد ۷۰×۷۰ می‌باشد، در ابتدا دو ماتریس قطری با ابعاد ۷۰×۷۰ برای هرکدام از انواع مختلف مشاهدات مورد استفاده (در اینجا طول و امتداد) ساخته می‌شود به‌طوری‌که برای مشاهدات طولی (۲۴ مشاهده) یک ماتریس قطری با ابعاد ۲۴×۲۴ در بالای ماتریس اصلی قرار می‌گیرد و برای مشاهدات امتدادی (۴۶ مشاهده) یک ماتریس قطری با ابعاد ۴۶×۴۶ در پایین ماتریس اصلی قرار می‌گیرد. فرم مربوط به دو ماتریس کوفاکتور در زیر ارائه می‌شود. که در آن Q_L ماتریس وزن مشاهدات طولی و Q_D ماتریس وزن مشاهدات امتدادی می‌باشد.

$$Q_L = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{l1}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \delta_{l24}^2 \end{bmatrix}_{24*24} & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{46*46} \end{bmatrix},$$

$$Q_D = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{24*24} & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} \delta_{d1}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \delta_{d46}^2 \end{bmatrix}_{46*46} \end{bmatrix}$$

(۷)

مدل ارائه شده در رابطه (۶)، شبیه مدل تابعی ارائه شده در رابطه (۳)، $(E(\underline{y}) = Ax)$ باشد. بنابراین مدل تابعی رابطه (۳) دارای بردار مشاهدات $\underline{y}$ با بعد m می‌باشد. این در حالی‌است که مدل به‌دست آمده در رابطه (۶) دارای ماتریس مشاهدات $\underline{y}\underline{y}^T - Q_0$ با ابعاد $m \times m$ می‌باشد. به‌علاوه مدل (۶) دارای دو بردار مجهول x و $\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & \cdots & \sigma_p \end{bmatrix}^T$ (حاوی مؤلفه‌های مجهول (کو)واریانس) می‌باشد. که در آن $\sigma_1, \ldots, \sigma_p$ مؤلفه‌های کوواریانس مجهول و $Q_1, \ldots, Q_p$ ماتریس‌های کوفاکتور $m \times m$ مثبت معین متقارن می‌باشند. برآورد مؤلفه‌های کوواریانس به‌عنوان تعمیمی از برآورد واریانس وزن واحد خواهد بود. مؤلفه‌های واریانس در صورتی برآورد می‌شوند که برای مثال، اگر انواع مختلف مشاهدات به‌طور تصادفی وابسته باشند، آنگاه مؤلفه‌های کوواریانس جهت بیان میزان وابستگی مشاهدات برآورد می‌شوند. به‌عنوان یک شرط لازم، ماتریس‌های کوفاکتور باید به‌طور خطی مستقل باشند. به‌گونه‌ای که اگر یکی از ماتریس‌های کوفاکتور بتواند به‌صورت ترکیب خطی از ماتریس‌های کوفاکتور دیگر نوشته شود آنگاه مدل آماری منفرد خواهد شد. نقش ماتریس‌های کوفاکتور جدا کردن خطاهای مختلف و متمایزکردن تأثیر خطاهای مشاهدات مختلف در ماتریس کوواریانس اصلی می‌باشد. از این رو ترکیب خطی تشکیل‌دهنده ماتریس کوواریانس اصلی به تعداد گروه‌های مختلف مشاهداتی به تعداد انواع خطاها، ماتریس کوفاکتور خواهد داشت.

با توجه به این‌که روش کمترین‌مربعات نسبت به تبدیلات نامنفرد، ناورداست اگر بردار مشاهدات $\underline{y}$ تحت تبدیل نامنفرد T به بردار مشاهدات جدید $\underline{y}' = T\underline{y}$ تبدیل شود، جواب کمترین‌مربعات تغییر نخواهد کرد. درواقع تبدیل نامنفرد، اطلاعاتی به مدل اضافه و یا کاسته نخواهد کرد. به‌منظور ساده‌تر شدن فرمول (۶) بردار مشاهدات $\underline{y}$ را تحت تبدیل نامنفرد به بردار جدید تبدیل خواهد شد.

$$\underline{y}' = T\underline{y} = \begin{bmatrix} (A^T Q_y^{-1} A)^{-1} A^T Q_y^{-1} \\ B^t \end{bmatrix} \underline{y} = \begin{bmatrix} (A^T Q_y^{-1} A)^{-1} A^T Q_y^{-1} \underline{y} \\ B^T \underline{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\underline{x}} \\ \underline{t} \end{bmatrix} \qquad (۸)$$

که در آن ماتریس B (ماتریس معادلات شرط)، ماتریسی با ابعاد $m \times (m-n)$ و دارای مرتبه کامل ستونی برابر $m-n$ می‌باشد.

همچنین این ماتریس در رابطه $B^T A = 0$ نیز صدق می‌کند. تحت تبدیل نامنفرد $\underline{y}' = T\underline{y}$، رابطه (۸) به‌شکل رابطه (۹) ارائه خواهد شد.

$$E\left(T\underline{y}\underline{y}^T T^T\right) = TAxx^T A^T T^T + TQ_y T^T \qquad (۹)$$

با جای‌گذاری رابطه (۸) در رابطه (۹) خواهیم داشت:

$$E\left\{\begin{bmatrix} \underline{\hat{x}}\underline{\hat{x}}^T & \underline{\hat{x}t}^T \\ \underline{t\hat{x}}^T & \underline{tt}^T \end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} xx^T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (A^T Q_y^{-1} A)^{-1} & 0 \\ 0 & B^T Q_y B \end{bmatrix} \qquad (۱۰)$$

در رابطه (۱۰)، $\underline{\hat{x}} = (A^T Q_y^{-1} A)^{-1} A^T Q_y^{-1} \underline{y}$ و $\underline{t} = B^T \underline{y}$ بردار خطا می‌باشد. رابطه (۱۰) شامل ۳ معادله زیر می‌باشد:

$$\begin{cases} E\left(\underline{\hat{x}\hat{x}}^T\right) = xx^T + (A^T Q_y^{-1} A)^{-1} = xx^T + Q_{\underline{\hat{x}}} \\ E\left(\underline{\hat{x}t}^T\right) = 0 \\ E\left(\underline{tt}^T\right) = B^T Q_y B = Q_{\underline{t}} \end{cases}$$

(۱۱)

در معادله اول از سیستم معادلات (۱۱) تعداد مشاهدات و مجهولات برابر بوده و در نتیجه درجه آزادی آن برابر صفر خواهد بود. بنابراین معادله هیچ‌گونه اطلاعات اضافه‌تری برای تعیین ماتریس Q_y در اختیار ما قرار نمی‌دهد و از مشاهدات $\underline{\hat{x}\hat{x}}^T$ تنها به‌منظور برآورد

مجهولات xx^T می‌توان استفاده کرد. همچنین معادله دوم سیستم معادلات (۱۱) نیز تنها ناهمبستگی بردارهای $\underline{\hat{x}}$, t^T را نشان می‌دهد $(Q_{\underline{\hat{x}}t^T} = O)$. بنابراین معادله سوم از رابطه (۱۱) معادله اصلی ما است. با جای‌گذاری $Q_y = Q_0 + \sum_{k=1}^{p} \sigma_k Q_k$ در معادله سوم سیستم معادلات (۱۱) خواهیم داشت:

$$E(\underline{tt}^T) - B^T Q_o B = \sum_{k=1}^{p} \sigma_k B^T Q_k \,\mathrm{B} \qquad (۱۲)$$

به طریق مشابه، تبدیل نامنفرد $\underline{y}' = T\underline{y}$ (رابطه (۸))، به بخش مدل تابعی رابطه (۳) نیز اعمال خواهد شد. بنابراین سیستم معادلات مشاهدات (۳) پس از تبدیل نامنفرد رابطه (۸) به‌شکل زیر خواهد شد.

$$E(\underline{t}) = 0; E(\underline{tt}^T) - B^T Q_o B = \sum_{k=1}^{p} \sigma_k Q_k\, B \qquad (۱۳)$$

توجه شود که بخش مدل تابعی سیستم معادلات مشاهدات (۱۳) دارای هیچ مجهولی نمی‌باشد. از طرفی چون $\underline{t} = B^T \underline{y}$ معلوم می‌باشد، سمت چپ بخش مدل تصادفی $(\underline{tt}^T)$ نیز معلوم بوده و تنها مجهول آن بردار $\sigma = [\sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_p]^T$ می‌باشد. تنها مشکل رابطه (۱۳) ماتریسی بودن مشاهدات $(\underline{tt}^T)$ می‌باشد، برای حل این مشکل، می‌توان از عملگر vh برای تبدیل ماتریس متقارن $\underline{tt}^T$ با ابعاد $b \times b$ به بردار استفاده کرد، که در آن b درجه آزادی مدل تابعی و برابر $m - \mathrm{n}$ می‌باشد. عملگر vh بر روی ماتریس متقارن عمل کرده و آن ماتریس را تبدیل به یک بردار می‌کند. به دو طرف رابطه (۱۳) عملگر vh را اعمال می‌کنیم. با توجه به این‌که هر دو عملگر vh و امیدریاضی، عملگرهای خطی می‌باشند، تعویض ترتیب آنها مشکلی ایجاد نمی‌کند. در این صورت خواهیم داشت:

$$E\left(vh(\underline{tt}^T - B^T Q_0 B)\right) = \sum_{k=1}^{p} \sigma_k vh(B^T Q_k B)\,;\; Q_{vh} \;\; or \;\; w_{vh} \qquad (۱۴)$$

رابطه بالا را می‌توان به فرم ماتریسی زیر در نظر گرفت:

$$E(y_{vh}) = Q_{vh}\sigma\,;\; Q_{vh} \;\; or \;\; w_{vh} \qquad (۱۵)$$

که در آن، ماتریس طرح $\mathrm{A_{vh}}$ ماتریسی با ابعاد $\frac{\mathrm{b(b+1)}}{\mathrm{b}} \times \mathrm{p}$، $\mathrm{y_{vh}}$ برداری با بعد $\frac{\mathrm{b(b+1)}}{\mathrm{b}}$ و σبردار مجهولات حاوی مؤلفه‌های مجهول (کو)واریانس با بعد p می‌باشند و به‌صورت زیر تعریف می شوند.

$$A_{vh} = [vh(B^T Q_k B) \;\; vh(B^T Q_2 B) \ldots vh(B^T Q_p B)] \qquad (۱۶)$$

$$y_{vh} = vh\left(\underline{tt}^T - B^T Q_0 B\right) \qquad (۱۷)$$

درجه آزادی مدل تصادفی (۱۴)، برابر $\mathrm{df} = \frac{\mathrm{b(b+1)}}{2} - \mathrm{p}$ می‌باشد. مدل فوق قادر به حل تمام عناصر ماتریس کواریانس $\mathrm{Q_y}$ به‌عنوان مجهول نخواهد بود (کمبود درجه آزادی). ماکزیمم تعداد مجهول قابل‌حل توسط این مدل مطابق رابطه زیر محاسبه خواهد شد:

$$df = 0 \rightarrow p = \frac{b(b+1)}{2}, \xrightarrow{\boxed{b=m-n}}$$

$$\boxed{p = \frac{(m-n)(m-n+1)}{2}} \qquad (۱۸)$$

برآورد ناااریب مربعی مدل (۱۴) مطابق رابطه زیر خواهد شد:

$$\underline{\hat{\sigma}} = (A_{vh}^T W_{vh} A_{vh})^{-1} A_{vh}^T\, W_{vh}\;\, y_{vh} = N^{-1} \underline{l} \qquad (۱۹)$$

که در آن ماتریس N، ماتریس نرمال به‌شکل $n = (A_{vh}^T W_{vh} A_{vh})^{-1}$ و بردار مشاهدات $\underline{l}$ به‌شکل $\underline{l} = A_{vh}^T\, W_{vh}\;\, y_{vh}$ می‌باشند. معادله (۱۹) را می‌توان به فرم ماتریسی زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{bmatrix} \underline{\hat{\sigma}}_1 \\ \underline{\hat{\sigma}}_2 \\ \vdots \\ \underline{\hat{\sigma}}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} & \ldots & n_{1p} \\ n_{21} & n_{22} & \ldots & n_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n_{1p} & n_{2p} & \cdots & n_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{l}_1 \\ \underline{l}_2 \\ \vdots \\ \underline{l}_p \end{bmatrix} \qquad (۲۰)$$

که در آن:

$$n_{ij} = vh(B^T Q_i B)^T W_{vh}\, vh(B^T Q_i B)$$

$$\underline{l_i} = vh(B^T Q_i B)^T W_{vh}\, vh(\underline{tt}^T - B^T Q_0 B) \qquad (۲۱)$$

لازم به ذکر است، هر ماتریس معین‌-مثبتی می‌تواند در نقش ماتریس وزن W_{vh} با ابعاد $\frac{b(b+1)}{2} \times \frac{b(b+1)}{2}$ در رابطه (۱۹) ظاهر می‌شود. در صورتی‌که ماتریس وزن W_{vh}

برابر با معکوس ماتریس کوواریانس Q_{vh} انتخاب شود، برآورد (۱۹)، علاوه بر خاصیت نااریب مربعی، خاصیت کمترین واریانس را نیز خواهد داشت.در واقع این برآورد به بهترین برآورد مربعی منجر خواهد شد.

برای رسیدن به بهترین (کمترین واریانس) جواب نااریب مربعی کافی‌است ماتریس وزن به‌صورت زیر در نظر گرفته شود (امیری سیمکویی، ۲۰۰۷): با در نظر گرفتن ماتریس وزن به‌صورت $W_t = \frac{1}{\sqrt{2}} Q_t^{-1}$، آنگاه روابط ذکر شده برای n_{ij} و $\underline{l}$ به‌صورت زیر محاسبه خواهد شد:

$$\underline{n_{ij}} = \frac{1}{2} tr\left(B^T Q_i B\ Q_t^{-1} B^T Q_j B Q_t^{-1}\right)$$
$$\underline{1_i} = \frac{1}{2}\ \underline{t}^T Q_t^{-1} B^T Q_i B Q_t^{-1} \mathrm{t} -$$
$$\frac{1}{2} tr(B^T Q_i B\ Q_t^{-1} B^T Q_0 B Q_t^{-1}) \quad (۲۲)$$

در رابطه (۲۲) عملگر tr نشان‌دهنده Trace یک ماتریس می‌باشد که به معنی مجموع عناصر قطری آن ماتریس می‌باشد و ماتریس‌های Q_i و Q_j، ماتریس وزن مربوط به هر دسته مشاهدات مورد استفاده می‌باشد. در نهایت مؤلفه‌های مجهول کو-وریانس با استفاده از روش حل تکراری و از رابطه $\underline{\hat{\sigma}} = N^{-1} \underline{l}$ محاسبه خواهند شد.

تا کنون فرمول‌های روش برآورد مؤلفه‌های واریانس کمترین مربعات بر حسب مدل شرط (ماتریس B) ارائه شدند. اما از آنجایی‌که در عمده مسائل نقشه‌برداری با مدل پارامتریک سر و کار داریم، در این قسمت به بررسی روابط مربوطه بر حسب مدل پارامتریک پرداخته می‌شود. برای ارائه روابط مربوط به روش برآورد مؤلفه‌های واریانس کمترین‌مربعات بر حسب مدل پارامتریک از اتحاد زیر استفاده می‌شود:

$$A(A^T W_y A)^{-1} A^T W_y +$$
$$W_y^{-1} B (B^T W_y^{-1} B)^{-1} B^T = I_m \quad (۲۳)$$

که در آن W_y ماتریس وزن مشاهدات می‌باشد. رابطه (۲۳) را می‌توان به‌شکل زیر نیز بازنویسی کرد:

$$W_y^{-1}\ B w_t B^T =$$
$$I_m - A(A^T W_y A)^{-1} A^T W_y =$$
$$I_m - p_A = p_A^{\perp} \quad (۲۴)$$

در رابطه (۲۴) p_A و $p_A^{\perp}$ تصویرگرهایی هستند که به‌ترتیب بر روی فضای برد ماتریس A و فضای مکمل متعامد فضای برد ماتریس A تصویر می‌کنند. اگر طرفین رابطه (۲۴) از سمت چپ در W_y ضرب شود، خواهیم داشت:

$$B w_t B^T = W_y p_A^{\perp} \quad (۲۵)$$

اگر رابطه (۲۵) را در معادله به‌دست آمده از مدل شرط $(n_{ij} = tr\left(B^T Q_i B w_t B^T Q_j B w_t\ \right))$ جایگزین کنیم خواهیم داشت:

$$n_{ij} = tr\left(B^T Q_i W_y p_A^{\perp} Q_j B W_t\right) \quad (۲۶)$$

با توجه به این‌که می‌دانیم $tr(xy) = tr(yx)$ رابطه (۲۶) را می‌توان به‌شکل زیر نوشت:

$$n_{ij} = tr\left(\ Q_i W_y p_A^{\perp} Q_j B W_t B^T\right) =$$
$$tr\left(\ Q_i W_y p_A^{\perp} Q_j W_y p_A^{\perp}\right) \quad (۲۷)$$

به طریق مشابه برای بردار مشاهدات l داریم:

$$l_i = \underline{t}^T\ W_t B^T Q_i B W_t \underline{t} -$$
$$tr\left(Q_0 w_y p_A^{\perp} w_y p_A^{\perp}\right) \quad (۲۸)$$

از طرفی می‌دانیم، بردار باقی‌مانده‌های سرشکن شده $\underline{\hat{e}}$ از رابطه زیر محاسبه خواهد شد:

$$\underline{\hat{e}} = p_A^{\perp} \underline{y} \quad (۲۹)$$

با استفاده از رابطه (۲۴) و (۲۹) می‌توان این‌گونه نوشت:

$$\underline{\hat{e}} = W_y^{-1} B W_t B^T \underline{y} = W_y^{-1} B W_t \underline{t} \quad (۳۰)$$

حال دو طرف رابطه (۳۰) را از سمت چپ در w_y ضرب می‌کنیم. خواهیم داشت:

$$B w_t \underline{t}\ = W_y \underline{\hat{e}} \quad (۳۱)$$

با استفاده از رابطه (۳۱)، رابطه (۲۸) را می‌توان به‌شکل رابطه زیر بازنویسی کرد.

$$\mathrm{l}_i = \underline{\hat{e}}\ W_y Q_i W_y\ \underline{\hat{e}}\ - tr\left(Q_0 w_y p_A^{\perp} w_y p_A^{\perp}\right) \quad (۳۲)$$

برای رسیدن به جواب نااریب کمترین واریانس، کافی‌است $w_y = {1}\big/{\sqrt{2}}^{Q_y^{-1}}$ اختیار شود. در این

صورت فرمول‌های نهایی برآوردگر کمترین‌مربعات وزن‌دار در مدل پارامتریک به‌شکل زیر محاسبه خواهند شد:

$$n_{ij} = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(Q_i Q_y^{-1} p_A^{\perp} Q_j Q_y^{-1}\, p_A^{\perp}\right)$$
$$\underline{\mathrm{l}}_i = \frac{1}{2}\underline{\hat{e}}^T Q_y^{-1} Q_i\, Q_y^{-1}\underline{\hat{e}} - \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(Q_0\, Q_y^{-1}\, p_A^{\perp} Q_y^{-1} p_A^{\perp}\right)$$
$$\hat{\sigma} = \mathrm{N}^{-1} \qquad (۳۳)$$

که در آن $P^{\perp}$ ماتریس تصویرگر قائم می‌باشد که از رابطه (۲۴) محاسبه می‌شود، N ماتریس نرمال است که مؤلفه‌های آن را n_{ij} ها تشکیل می‌دهند، l برداری است که مؤلفه‌های آن را $\underline{\mathrm{l}}_i$ها تشکیل می‌دهند. معکوس ماتریس نرمال N ماتریس کوریانس پارامترهای برآورده شده را به‌دست می‌دهد. $\mathrm{Q_y}$ ماتریس کواریانس مشاهدات، Q_i و Q_j ماتریس‌های کوفاکتور، y بردار مشاهدات و A ماتریس ضرایب می‌باشد.

الگوریتم برآورد مؤلفه‌های واریانس کمترین مربعات در مدل پارامتریک

ورودی:

* مارتریس A معادلات پارامتریک
* بردار مشاهدات y
* ماتریس‌های کوفاکتور Q_k به ازای $k = 1, \dots, p$
* مقادیر اولیه مؤلفه‌هی کووریانس $\mathrm{Q}_p = \left[\sigma_1^0, \dots, \sigma_p^0\right]$
* مقدار کوچکی برای ε

شروع:

* بررسی عدم وجود خطاهای فاحش در مشاهدات
* محاسبه ماتریس کوواریانس مشاهدات $\mathrm{Q}_y = \mathrm{Q}_0 + \sum_{k=1}^{p} \sigma_k Q_k$
* محاسبه معکوس ماتریس Q_y
* محاسبه بردار باقی‌مانده‌های کمترین‌مربعات $\hat{e} = P_A^{\perp} y$
* محاسبه عناصر ماتریس نرمال N و بردار l
* محاسبه مقدار جدید $\hat{\sigma}$ به‌عنوان مؤلفه‌های کواریانس
* تکرار روند محاسبات تا برقراری شرط $||\sigma^i - \sigma^{i-1}|| > \varepsilon$
* استخراج $\hat{\sigma}$ از اخرین تکرار

۲-۲. مدل تابعی کمترین‌مربعات (Functional model of LS)

برای حل معادلات مشاهدات با قیود سخت از مدل تابعی زیر استفاده می‌شود (تیونیسن ۲۰۰۰):

$$E(y) = Ax\,;\; B^T x = 0\,; D(y) = Q_y \qquad (۳۴)$$

در رابطه (۳۴) E و D به‌ترتیب عملگرهای امید ریاضی و پراکندگی مشاهدات می‌باشند، Q_y ماتریس کواریانس مشاهدات با ابعاد $m \times m$، y یک بردار m بعدی از مشاهدات، x یک بردار n بعدی از پارامترهای مجهول، A ماتریس طرح با ابعاد $m \times n$ و B ماتریس قیود با ابعاد $n \times q$ می‌باشد. معادلات مشاهدات (۳۴) را می‌توان به‌شکل معادل به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$E(y) = AB^{\perp}\lambda\;;\; D(y) = Q_y \qquad (۳۵)$$

در رابطه (۳۵)، $B^{\perp}$ یک ماتریس پایه برای فضای پوچ ماتریس B (با شرط $B^T B^{\perp} = 0$) و λ یک بردار با ابعاد $n - q$ می‌باشد. $\hat{\lambda}$ برآورد کمترین‌مربعات λ به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\hat{\lambda} = (B^{\perp T} A^T {Q_y}^{-1} A B^{\perp})^{-1}\, B^{\perp T} A^T {Q_y}^{-1} y \qquad (۳۶)$$

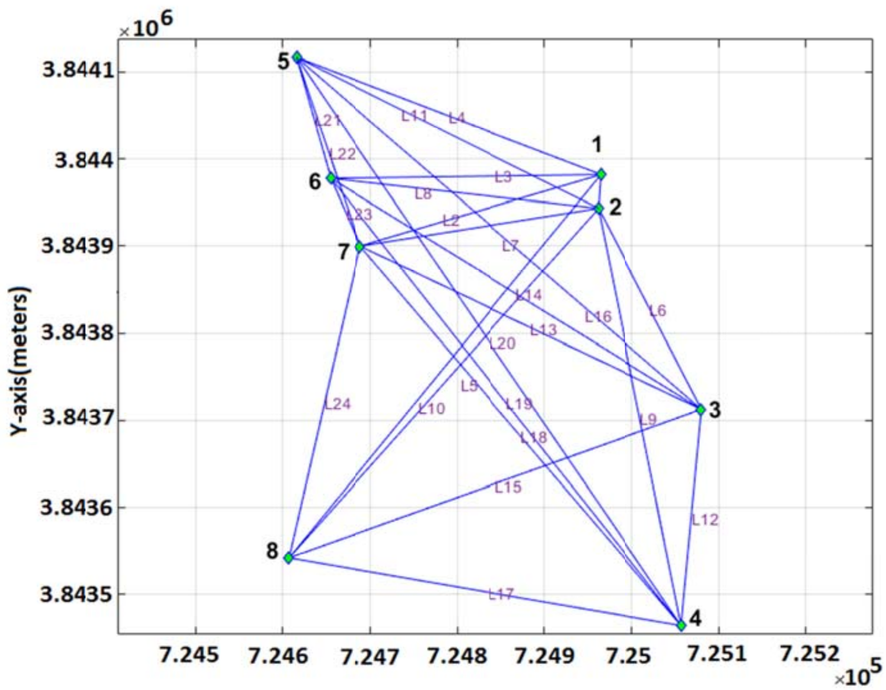
در نهایت $\hat{x}$ برآورد کمترین‌مربعات x به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود(تیونیسن ۲۰۰۰):

$$\hat{x} = B^{\perp}\hat{\lambda} \qquad (۳۷)$$

۳. نتایج عددی

داشتن یک منطقه واقعی برای در نظر گرفتن نتایج قابل‌قبول بسیار مهم می‌باشد. برای این هدف مشاهدات یک سد در دو مرحله مورد استفاده قرار گرفته است. به‌علت وجود گسل‌های زلزله خیز در منطقه سد وجود یک شبکه برای پایش دائمی آنها در نظر گرفته شده است. با توجه به اهمیتی که این سازه‌ها در این مناطق دارا می‌باشند، مطالعه در مورد لغزش‌ها از اهمیت بالایی برخوردار می‌باشد. بر اساس اندازه منطقه و اهداف مورد نیاز، یک شبکه ژئودتیک برای این مناطق انتخاب

شده است. شبکه‌های مربوط به سد دارای ۸ ایستگاه می‌باشد. مشاهدات شامل ۲۴ مشاهده فاصله و ۴۶ مشاهده امتداد می‌باشند. درجه آزادی شبکه برابر $df = 24 + 46 + 3 - 24 = 49$ می‌باشد. در شکل ۱ موقعیت ایستگاه‌های شبکه خارج سد مورد مطالعه در این تحقیق نشان داده شده است. در جدول (۱) ویژگی‌ها و خصوصیات مربوط به روش سرشکنی مورد استفاده برای شبکه خارج سد ارائه شده است. در جدول (۲) لیست مشاهدات فاصله‌ای و مشاهدات امتدادی نشان داده شده است.



شکل ۱. موقعیت ایستگاه‌ها به همراه مشاهدات فاصله‌ای.

جدول ۱. ویژگی‌های مربوط به سرشکنی شبکه خارج سد.

تعداد ایستگاه‌ها	۸
کمبود مرتبه شبکه	۰
تعداد ایستگاه‌های مجهول	۷
تعداد کل مشاهدات	۷۰
تعداد مشاهدات فاصله	۲۴
تعداد مشاهدات امتداد	۴۶
روش سرشکنی	Constraint Minimum
درجه آزادی	۴۹

جدول۲. مشاهدات برداشت شده در شبکه ژئودتیک مورد استفاده در سد.

شماره مشاهده	مشاهده طول (متر)			مقدار اولیه	شماره	مشاهده طول (متر)			مقدار اولیه
	از	به	مقدار	انحراف معیار	مشاهده	از	به	مقدار	انحراف معیار
۱	۱	۲	۳۶/۹۸۵	۱/۰۳	۱۳	۳	۷	۴۲۳/۸۲۷	۱/۴۳
۲	۱	۷	۲۸۵/۷۱۲	۱/۲۹	۱۴	۳	۶	۵۰۱/۸۱۸	۱/۵۰
۳	۱	۶	۳۰۹/۴۳۹	۱/۳۱	۱۵	۳	۸	۵۰۵/۷۱۰	۱/۵۰
۴	۱	۵	۳۶۳/۶۸۷	۱/۳۷	۱۶	۳	۵	۶۲۴/۱۴۸	۱/۶۲
۵	۱	۸	۵۶۶/۳۳۵	۱/۵۷	۱۷	۴	۸	۴۵۶/۳۷۷	۱/۴۶
۶	۲	۳	۲۵۸/۶۸۵	۱/۲۶	۱۸	۴	۷	۵۷۵/۱۲۷	۱/۵۷
۷	۲	۷	۲۷۶/۶۱۳	۱/۲۸	۱۹	۴	۶	۶۴۲/۷۱۲	۱/۶۵
۸	۲	۶	۳۰۵/۸۲۳	۱/۳۱	۲۰	۴	۵	۷۸۷/۰۰۱	۱/۷۹
۹	۲	۴	۴۸۷/۷۰۹	۱/۴۹	۲۱	۵	۶	۱۴۴/۱۴۷	۱/۱۱
۱۰	۲	۸	۵۲۵/۰۲۱	۱/۵۴	۲۲	۵	۷	۲۲۸/۴۴۲	۱/۲۳
۱۱	۲	۵	۳۷۷/۱۱۰	۱/۳۹	۲۳	۶	۷	۴۸/۷۶۱	۱/۰۸
۱۲	۳	۴	۲۴۹/۳۶۶	۱/۲۵	۲۴	۷	۸	۳۶۶/۶۰۴	۱/۳۷
شماره مشاهده	مشاهده امتداد (داریان)			مقدار اولیه	شماره	مشاهده امتداد (داریان)			مقدار اولیه
	از	به	مقدار	انحراف معیار	مشاهده	از	به	مقدار	انحراف معیار
۱	۱	۷	۰	۰/۸	۲۴	۴	۸	۵/۶۸۵۹	۰/۸
۲	۱	۶	۰/۲۶۵۵	۰/۸	۲۵	۵	۳	۰	۰/۸
۳	۱	۵	۰/۶۵۶۲	۰/۸	۲۶	۵	۴	۰/۲۶۱۴	۰/۸
۴	۱	۲	۵/۰۶۶۷	۰/۸	۲۷	۵	۷	۰/۵۳۰۸	۰/۸
۵	۱	۸	۵/۶۷۴۰	۰/۸	۲۸	۵	۶	۰/۵۷۸۸	۰/۸
۶	۲	۷	۰	۰/۸	۲۹	۵	۲	۶/۰۳۳۲	۰/۸
۷	۲	۶	۰/۲۵۹۱	۰/۸	۳۰	۶	۴	۰	۰/۸
۸	۲	۵	۰/۶۳۰۹	۰/۸	۳۱	۶	۷	۰/۲۴۶۲	۰/۸
۹	۲	۱	۱/۷۷۲۵	۰/۸	۳۲	۶	۱	۵/۳۶۳۳	۰/۸
۱۰	۲	۳	۴/۳۸۴۲	۰/۸	۳۳	۶	۲	۵/۴۶۹۴	۰/۸
۱۱	۲	۴	۴/۶۸۲۸	۰/۸	۳۴	۶	۳	۵/۳۸۳۹	۰/۸
۱۲	۲	۸	۵/۵۷۳۶	۰/۸	۳۵	۷	۴	۰	۰/۸
۱۳	۳	۷	۰	۰/۸	۳۶	۷	۸	۰/۹۴۶۲	۰/۸
۱۴	۳	۶	۰/۱۲۱۵	۰/۸	۳۷	۷	۶	۳/۴۲۵۷	۰/۸
۱۵	۳	۵	۰/۲۵۹۸	۰/۸	۳۸	۷	۵	۳/۵۵۹۱	۰/۸
۱۶	۳	۲	۰/۶۴۰۵	۰/۸	۳۹	۷	۱	۵/۱۳۵۵	۰/۸
۱۷	۳	۴	۴/۳۵۰۱	۰/۸	۴۰	۷	۲	۵/۲۶۸۱	۰/۸
۱۸	۳	۸	۵/۴۸۱۶	۰/۸	۴۱	۷	۳	۵/۸۷۰۱	۰/۸
۱۹	۴	۷	۰	۰/۸	۴۲	۸	۳	۰	۰/۸
۲۰	۴	۶	۰/۰۳۷۷	۰/۸	۴۳	۸	۴	۰/۵۱۷۳	۰/۸
۲۱	۴	۵	۰/۱۱۷۲	۰/۸	۴۴	۸	۷	۵/۲۸۲۴	۰/۸
۲۲	۴	۲	۰/۵۰۵۱	۰/۸	۴۵	۸	۱	۵/۷۴۰۹	۰/۸
۲۳	۴	۳	۰/۷۹۴۵	۰/۸	۴۶	۸	۲	۵/۷۸۳۱	۰/۸

آنالیز شبکه مورد نظر توسط سرشکنی با قیود داخلی انجام شده است. در جدول (۳) و (۴) دقت اولیه و دقت برآورد شده توسط روش LS-VCE برای مشاهدات فاصله‌ای و مشاهدات زاویه‌ای ارائه داده شده است. همان‌طور که در جدول (۳) و (۴) دیده می‌شود، دقت اولیه مشاهدات فاصله‌ای و زاویه‌ای به‌ترتیب ۱ میلی‌متر و ۰/۸ ثانیه می‌باشد. در این جدول مقادیر اعداد آزادی مربوط به مشاهدات طول و زاویه ارائه شده است. مقدار اعداد آزادی از ۳۸ و ۴۰ (حداقل مقدار) تا ۸۶ و ۶۰ (حداکثر مقدار) متغیر می‌باشد.

جدول۳. مقایسه بین انحراف معیار و اعداد آزادی در دو حالت استفاده از وزن‌های مختلف برای مشاهدات فاصله‌ای.

شماره مشاهده	مشاهده طول		مقدار اولیه	مقدار بهینه			
	از	به	$\sigma(mm)$	$\sigma(mm)$: used of: $\hat{\sigma}=\frac{V^TPV}{df}$	$\sigma(mm)$: used of: $LS-VCE$	r_i: used of: $\hat{\sigma}=\frac{V^TPV}{df}$	r_i: used of: $LS-VCE$
۱	۱	۲	۱/۰۳۱	۰/۵۸۵	۰/۲۶۷	۰/۶۱۲۹	۰/۲۵۴۲
۲	۱	۷	۱/۲۸۸	۰/۴۵۱	۰/۲۱۶	۰/۸۵۲۵	۰/۶۸۵۳
۳	۱	۶	۱/۳۰۹	۰/۴۶۵	۰/۲۲۱	۰/۸۴۸۴	۰/۶۸۳۸
۴	۱	۵	۱/۳۷۴	۰/۵۶۶	۰/۲۶۳	۰/۷۹۵۴	۰/۵۹۰۹
۵	۱	۸	۱/۵۶۶	۰/۷۱۵	۰/۲۹۳	۰/۷۴۹۳	۰/۶۰۹۹
۶	۲	۳	۱/۲۵۹	۰/۶۳۴	۰/۲۶۴	۰/۶۹۴۹	۰/۵۱۰۴
۷	۲	۷	۱/۲۷۷	۰/۴۲۵	۰/۲۱۲	۰/۸۶۶۵	۰/۶۹۳۴
۸	۲	۶	۱/۳۰۹	۰/۴۶۴	۰/۲۱۲	۰/۸۴۸۷	۰/۷۰۶۷
۹	۲	۴	۱/۴۸۸	۰/۶۶۸	۰/۲۹۰	۰/۷۵۷۵	۰/۵۷۷۱
۱۰	۲	۸	۱/۵۳۵	۰/۶۵۰	۰/۲۷۴	۰/۷۸۴۵	۰/۶۴۴۷
۱۱	۲	۵	۱/۳۸۷	۰/۵۵۵	۰/۲۴۳	۰/۸۰۷۴	۰/۶۵۹۲
۱۲	۳	۴	۱/۲۴۹	۰/۷۲۷	۰/۳۰۲	۰/۵۹۲۲	۰/۳۴۹۵
۱۳	۳	۷	۱/۴۳۴	۰/۵۵۸	۰/۲۵۴	۰/۸۱۸۰	۰/۶۵۰۰
۱۴	۳	۶	۱/۵۰۱	۰/۶۰۴	۰/۲۵۱	۰/۸۰۵۴	۰/۶۸۹۱
۱۵	۳	۸	۱/۵۰۳	۰/۶۷۷	۰/۳۲۷	۰/۷۵۵۷	۰/۴۷۲۳
۱۶	۳	۵	۱/۶۱۶	۰/۶۶۲	۰/۲۶۰	۰/۷۹۸۲	۰/۷۱۲۳
۱۷	۴	۸	۱/۴۵۷	۰/۷۷۳	۰/۳۶۶	۰/۶۶۱۵	۰/۲۹۶۶
۱۸	۴	۷	۱/۵۷۱	۰/۶۲۲	۰/۲۶۶	۰/۸۱۱۲	۰/۶۸۰۴
۱۹	۴	۶	۱/۶۵۲	۰/۶۶۵	۰/۲۷۱	۰/۸۰۴۹	۰/۶۹۹۲
۲۰	۴	۵	۱/۷۸۸	۰/۷۰۲	۰/۲۶۹	۰/۸۱۴۵	۰/۷۴۷۸
۲۱	۵	۶	۱/۱۴۳	۰/۶۲۳	۰/۲۵۵	۰/۶۴۲۵	۰/۴۴۷۴
۲۲	۵	۷	۱/۲۲۸	۰/۶۰۱	۰/۲۵۱	۰/۷۱۱۹	۰/۵۳۲۸
۲۳	۶	۷	۱/۰۸۵	۰/۵۴۵	۰/۲۳۳	۰/۶۹۵۶	۰/۴۸۵۳
۲۴	۷	۸	۱/۳۶۷	۰/۷۱۲	۰/۳۲۴	۰/۶۷۳۳	۰/۳۷۵۴

جدول۴. مقایسه بین انحراف معیار و اعداد آزادی در دو حالت استفاده از وزن‌های مختلف برای مشاهدات امتدادی.

شماره مشاهده	مشاهده امتداد		مقدار اولیه	مقدار بهینه			
	از	به	$\sigma(sec)$	$\sigma(sec): used\ of: \hat{\sigma} = \frac{V^TPV}{df}$	$\sigma(sec): used\ of: LS-VCE$	$r_i: used\ of: \hat{\sigma} = \frac{V^TPV}{df}$	$r_i: used\ of: LS-VCE$
۱	۷	۱	۰/۸	۰/۴۱	۰/۴۴	۰/۶۷۹۰	۰/۷۶۷۵
۲	۶	۱	۰/۸	۰/۴۳	۰/۴۵	۰/۶۵۵۶	۰/۷۶۰۴
۳	۵	۱	۰/۸	۰/۴۳	۰/۴۶	۰/۶۵۰۲	۰/۷۴۸۹
۴	۲	۱	۰/۸	۰/۵۶	۰/۶۶	۰/۴۰۱۲	۰/۴۸۳۵
۵	۸	۱	۰/۸	۰/۴۳	۰/۴۶	۰/۶۵۶۴	۰/۷۵۰۰
۶	۷	۸	۰/۸	۰/۴۰	۰/۳۹	۰/۷۰۳۶	۰/۸۲۰۷
۷	۶	۲	۰/۸	۰/۴۰	۰/۳۹	۰/۶۹۳۷	۰/۸۱۸۱
۸	۵	۲	۰/۸	۰/۴۰	۰/۴۰	۰/۷۰۳۱	۰/۸۱۲۱
۹	۱	۲	۰/۸	۰/۵۷	۰/۶۷	۰/۳۸۴۰	۰/۴۶۴۶
۱۰	۳	۲	۰/۸	۰/۴۶	۰/۴۵	۰/۵۹۷۶	۰/۷۶۶۶
۱۱	۴	۲	۰/۸	۰/۳۸	۰/۴۰	۰/۷۲۱۵	۰/۸۱۱۲
۱۲	۸	۲	۰/۸	۰/۳۸	۰/۳۹	۰/۷۲۷۷	۰/۸۲۲۲
۱۳	۷	۳	۰/۸	۰/۳۴	۰/۳۹	۰/۷۸۲۲	۰/۸۲۲۱
۱۴	۶	۳	۰/۸	۰/۳۴	۰/۳۹	۰/۷۸۴۰	۰/۸۲۰۲
۱۵	۵	۳	۰/۸	۰/۳۵	۰/۴۰	۰/۷۷۴۲	۰/۸۱۳۶
۱۶	۲	۳	۰/۸	۰/۴۳	۰/۴۳	۰/۶۵۷۰	۰/۷۸۷۰
۱۷	۴	۳	۰/۸	۰/۵۲	۰/۴۸	۰/۴۸۲۳	۰/۷۲۷۳
۱۸	۸	۳	۰/۸	۰/۴۰	۰/۴۰	۰/۶۹۳۰	۰/۸۱۱۷
۱۹	۷	۴	۰/۸	۰/۳۲	۰/۳۸	۰/۸۰۹۲	۰/۸۲۸۰
۲۰	۶	۴	۰/۸	۰/۳۲	۰/۳۸	۰/۸۰۸۴	۰/۸۲۶۳
۲۱	۵	۴	۰/۸	۰/۳۳	۰/۳۹	۰/۷۹۶۰	۰/۸۲۰۰
۲۲	۲	۴	۰/۸	۰/۳۳	۰/۳۸	۰/۷۹۲۰	۰/۸۲۷۲
۲۳	۳	۴	۰/۸	۰/۳۴	۰/۴۳	۰/۶۳۳۴	۰/۷۸۳۶
۲۴	۸	۴	۰/۸	۰/۴۲	۰/۴۰	۰/۶۷۰۹	۰/۸۱۰۶
۲۵	۳	۵	۰/۸	۰/۳۹	۰/۴۴	۰/۷۱۷۳	۰/۷۶۹۸
۲۶	۴	۵	۰/۸	۰/۴۰	۰/۴۵	۰/۷۰۰۳	۰/۷۶۰۸
۲۷	۷	۵	۰/۸	۰/۳۸	۰/۴۴	۰/۷۳۵۴	۰/۷۷۲۱
۲۸	۶	۵	۰/۸	۰/۵۲	۰/۵۳	۰/۴۹۶۴	۰/۶۷۲۲
۲۹	۲	۵	۰/۸	۰/۴۰	۰/۴۳	۰/۶۹۷۲	۰/۷۷۷۹
۳۰	۴	۶	۰/۸	۰/۴۰	۰/۴۵	۰/۶۹۹۸	۰/۷۶۴۸
۳۱	۷	۶	۰/۸	۰/۵۲	۰/۵۸	۰/۴۸۲۳	۰/۶۰۰۸
۳۲	۱	۶	۰/۸	۰/۴۵	۰/۴۵	۰/۶۱۴۹	۰/۷۶۱۱
۳۳	۲	۶	۰/۸	۰/۴۰	۰/۴۴	۰/۶۹۱۷	۰/۷۷۴۸
۳۴	۳	۶	۰/۸	۰/۳۹	۰/۴۴	۰/۷۱۸۵	۰/۷۷۲۴
۳۵	۴	۷	۰/۸	۰/۳۷	۰/۳۹	۰/۷۳۷۸	۰/۸۱۸۷
۳۶	۸	۷	۰/۸	۰/۴۷	۰/۴۳	۰/۵۸۷۴	۰/۷۸۲۹
۳۷	۶	۷	۰/۸	۰/۵۵	۰/۶۰	۰/۴۳۳۱	۰/۵۶۹۲
۳۸	۵	۷	۰/۸	۰/۴۷	۰/۴۶	۰/۵۸۶۹	۰/۷۴۶۶
۳۹	۱	۷	۰/۸	۰/۴۵	۰/۴۰	۰/۶۲۷۶	۰/۸۱۱۱
۴۰	۲	۷	۰/۸	۰/۴۰	۰/۳۹	۰/۶۹۴۷	۰/۸۲۰۸
۴۱	۳	۷	۰/۸	۰/۳۸	۰/۳۹	۰/۷۳۲۹	۰/۸۲۰۵
۴۲	۳	۸	۰/۸	۰/۳۸	۰/۴۲	۰/۷۲۳۳	۰/۷۹۲۳
۴۳	۴	۸	۰/۸	۰/۴۳	۰/۴۳	۰/۶۴۶۳	۰/۷۸۱۳
۴۴	۷	۸	۰/۸	۰/۴۱	۰/۴۳	۰/۶۸۵۸	۰/۷۸۴۱
۴۵	۱	۸	۰/۸	۰/۳۶	۰/۴۳	۰/۷۶۰۲	۰/۷۹۲۸
۴۶	۲	۸	۰/۸	۰/۳۵	۰/۴۲	۰/۷۷۰۲	۰/۷۹۶۰

در جدول (۳) و (۴) نتایج مربوط به روش برآورد کمترین‌مربعات مؤلفه‌های واریانس نشان داده شده است. ستون چهارم، انحراف معیاراولیه مشاهدات، ستون پنجم و ششم به‌ترتیب انحراف معیار مشاهدات برای دو حالت استفاده از فاکتور واریانس ثانویه و برآورد کمترین‌مربعات و ستون هفتم و هشتم به‌ترتیب مقادیر اعداد آزادی بهینه مشاهدات در دو حالت استفاده از فاکتور واریانس ثانویه و برآورد کمترین‌مربعات را پس از ده تکرار نشان می‌دهد. با توجه به نتایج ارائه شده در جدول(۳) می‌توان دید که برای مشاهدات فاصله‌ای، انحراف معیار به دست آمده در حالت استفاده از فاکتور واریانس ثانویه باعث بهبودی دقت مشاهدات فاصله تا ۱ میلی‌متر و در حالت استفاده از برآورد کمترین‌مربعات مؤلفه واریانس دقت تا ۱/۵میلی‌متر افزایش پیدا کرده است. و برای اعداد آزادی این مشاهدات نیز برآورد واقع‌بینانه‌ای با توجه به دقت مشاهدات به‌دست آمده است. در جدول(۵) نیز برای مشاهدات امتدادی، انحراف معیاربه‌دست آمده در حالت استفاده از فاکتور واریانس ثانویه و از برآورد کمترین‌مربعات مؤلفه واریانس دقت تا ۰/۴ثانیه افزایش پیدا کرده است. در جدول (۶) نحوه‌ی همگرا شدن واریانس‌های مربوط به مشاهدات فاصله و امتدا در تکرارهای مختلف ارائه شده است.

جدول۵. انحراف معیار مربوط به نقاط شبکه سد با دو روش فاکتور واریانس ثانویه و روش برآورد کمترین‌مربعات مؤلفه واریانس.

شماره ایستگاه	$\sigma_x(mm)$: $used\ of$: $\hat{\sigma}=\frac{V^TPV}{df}$	$\sigma_x(mm)$: $used\ of$: $LS-VCE$	$\sigma_y(mm)$: $used\ of$: $\hat{\sigma}=\frac{V^TPV}{df}$	$\sigma_y(mm)$: $used\ of$: $LS-VCE$
۱	۰/۲۸	۰/۱۳	۰/۴۸	۰/۲۵
۲	۰/۲۷	۰/۱۳	۰/۳۴	۰/۱۸
۳	۰/۳۶	۰/۲۱	۰/۴۶	۰/۲۰
۴	۰/۴۰	۰/۲۲	۰/۴۸	۰/۲۰
۵	۰/۳۵	۰/۲۳	۰/۴۶	۰/۲۴
۶	۰/۲۸	۰/۱۷	۰/۴۰	۰/۲۱
۷	۰/۲۶	۰/۱۷	۰/۳۲	۰/۱۷
۸	۰/۴۸	۰/۲۲	۰/۵۷	۰/۲۷

جدول۶. تغییرات مؤلفه‌های واریانس برآورد شده در هر مرحله از تکرار.

تعداد تکرار	مؤلفه واریانس مشاهده طول	مؤلفه واریانس مشاهده امتداد
۱	۰/۱۱۰۹	۱/۲۵۶۵
۲	۰/۰۹۳۶	۱/۳۰۵۸
۳	۰/۰۹۰۶	۱/۳۲۱۲
۴	۰/۰۹۰۶	۱/۳۲۴۸
۵	۰/۰۸۹۸	۱/۳۲۵۶
۶	۰/۰۸۹۷	۱/۳۲۵۸
۷	۰/۰۸۹۷	۱/۳۲۵۹
۸	۰/۰۸۹۷	۱/۳۲۵۹
۹	۰/۰۸۹۷	۱/۳۲۵۹
۱۰	۰/۰۸۹۷	۱/۳۲۵۹

در جدول (۷) انحراف معیار مختصات x و y نقاط شبکه برای دو حالت استفاده از فاکتور واریانس ثانویه و برآورد کمترین‌مربعات مؤلفه وریانس ارائه شده است. بر اساس این نتایج می‌توان دید که اختلافی در حدود ۲/۵ میلی‌متر برای مؤلفه x و ۰/۳ میلی‌متر برای مؤلفه y به‌دست آمده است.

با در نظر گرفتن این نکته که مقدار a به‌عنوان معیاری از دقت منطقه‌ای نقاط شبکه می‌باشد، جهت بهینه‌سازی شبکه می‌توان بزرگ‌ترین مقدار نصف قطر اطول بیضی خطای مطلق شبکه را مینیمم کرد.

از طرفی معیار دیگری که می‌توان بر اساس آن نتیجه‌ای در مورد دقت شبکه ارائه کرد پارامتر مقدار تریس شبکه می‌باشد به این صورت کهکشف مینیمم بودن این پارامتر، معیاری برای دقت بالاتر شبکه خواهد بود. به این دلیل که عناصر قطری بیانگر وریانس‌ها می‌باشند. این عدد معیار نسبتاً خوبی از دقت کل شبکه می‌باشد. در جدول (۷) معیارهای طراحی اولیه شبکه ارائه شده است. که شامل نیم قطر بزرگ بیضی خطای مطلق در سطح اطمینان ۹۹٪ و مقدار عددی مربوط به $Trace(C_x)$ می‌باشد.

همان‌طور که در جدول مشاهده می‌شود، می‌توان دید که در حالت استفاده از برآورد مؤلفه‌های وریانس به روش کمترین‌مربعات ابعاد بیضی خطا کاهش یافته است که نشان‌دهنده دقت این روش می‌باشد. این بهبود دقت برای مختصات نقاط شبکه به‌نحوی است که حداکثر مقدار نیم قطر اطول بضی خطای مطلق نقاط در حالت استفاده از برآورد مؤلفه‌های واریانس کمترین‌مربعات برابر ۲/۹۰ میلی‌متر می‌باشد. و زمانی که از روش فاکتور وریانس ثانویه استفاده می‌شود این مقدار به دو برابر افزایش می‌یابد. علاوه بر این یکی دیگر از شرایط رسیدن به دقت بالاتر در شبکه، مینیمم‌شدن $Trace(C_x)$ می‌باشد که در هنگام استفاده از روش برآورد مؤلفه‌های واریانس کمترین‌مربعات(مقدار آن برابر ۰/۸ ثانیه) در مقابل روش فاکتور وریانس ثانویه مقدار آن به اندازه دو برابر کاهش می‌یابد.

۴. نتیجه‌گیری

سدها از جمله سازه‌های مهمی می‌باشند که مراقبت و ایمن‌سازی آنها از اهمیت بالایی برخوردار می‌باشد. به همین دلیل شبکه‌های ژئودتیک برای مانیتور کردن این سازه‌ها استفاده می‌شود. دستگاه مورد استفاده برای اندازه‌گیری مشاهدات طول و زاویه در این تحقیق دستگاه (Leica Total Station TCA2003) با دقت $1mm + 1ppm$ برای طول و ۰/۵ ثانیه برای زاویه می‌باشد. ارزیابی و بهبود قابلیت‌اطمینان و معیارهای دقت در یک شبکه واقعی بسیار مهم می‌باشد. کیفیت یک شبکه ژئودتیک با پارامترهایی از قبیل دقت و قابلیت‌اطمینان مشخص می‌شود.

جدول۷. معیارهای طراحی شبکه شامل نیم قطر بزرگ بیضوی و $Trace(C_x)$ برای شبکه کنترل.

شماره ایستگاه	a(mm) $used\ of: LS-VCE$	a(mm) $used\ of: \hat{\sigma} = \frac{V^TPV}{df}$	$Trace(C_x): used\ of: LS-VCE$	$Trace(C_x): used\ of: \hat{\sigma} = \frac{V^TPV}{df}$
۱	۰/۲۵	۰/۴۸	mm۰/۸۱۵	mm۱/۵۹
۲	۰/۱۹	۰/۳۴		
۳	۰/۲۳	۰/۴۷		
۴	۰/۲۳	۰/۴۸		
۵	۰/۲۹	۰/۴۷		
۶	۰/۲۱	۰/۴۲		
۷	۰/۱۷	۰/۳۴		
۸	۰/۲۹	۰/۵۷		

شبکه ممکن است بسیار دقیق طراحی شده باشد در حالی‌که ممکن است در همان زمان قابل‌اعتماد نباشد و برعکس. بنابراین، این معیارها متفاوت هستند و شبکه باید به‌گونه‌ای طراحی شود که به‌طور هم‌زمان هر دو معیار حداکثر دقت و قابلیت‌اطمینان بالا را دارا باشد. برای رسیدن به بهترین برآورد نااریب خطی (BLUE)، ارائه وزن مناسب برای مشاهدات، الزامی است. برآورد مؤلفه‌های مجهول کوواریانس تحت‌عنوان variance component Estimation ارائه شده است. روش‌های مختلفی برای VCE وجود دارد. در این تحقیق از دو روش برآورد فاکتور وریانس ثانویه و برآود مؤلفه وریانس کمترین‌مربعات استفاده شده است. در روش برآود مؤلفه وریانس کمترین‌مربعات به‌جای این‌که یک فاکتور واریانس برای ماتریس وزن محاسبه شود، برای هر دسته مشاهداتی مختلف یک ضریب مقیاس محاسبه می‌شود. به این ترتیب وزن‌دهی به مشاهدات منطقی و صحیح‌تر انجام شده و در نهایت به برآورد واقع‌بینانه‌ای از مجهولات خواهیم رسید. نتایج نشان داده است که حداکثر مقدار نیم قطر اطول بضی خطای مطلق نقاط در حالت استفاده از برآورد مؤلفه‌های واریانس کمترین‌مربعات برابر ۰/۲۹ میلی‌متر می‌باشد. و زمانی که از روش فاکتور وریانس ثانویه استفاده می‌شود، این مقدار به دو برابر افزایش می‌یابد. علاوه بر این یکی دیگر از شرایط رسیدن به دقت بالاتر در شبکه، مینیمم‌شدن $Trace(C_x)$ می‌باشد که در هنگام استفاده از روش برآورد مؤلفه‌های واریانس کمترین‌مربعات (مقدار آن برابر ۰/۸ میلی‌متر) در مقابل روش فاکتور وریانس ثانویه مقدار آن به اندازه دو برابر کاهش می‌یابد. در ادامه به برآورد دقت مشاهدات پرداخته شد و در حالت استفاده از روش برآورد مؤلفه‌های واریانس کمترین‌مربعات مقدرا آن به اندازه ۰/۵ میلی‌متر بهبود یافته است. با توجه به نتایج ارائه شده، برای مشاهدات فاصله‌ای، انحراف معیاربه‌دست آمده در حالت استفاده از فاکتور وریانس ثانویه باعث بهبودی دقت مشاهدات فاصله تا ۱ میلی‌متر و در حالت استفاده از برآورد کمترین‌مربعات مؤلفه وریانس دقت تا ۰/۵۱ میلی‌متر افزایش پیدا کرده است. برای مشاهدات امتدادی نیز، انحراف معیاربه‌دست آمده در حالت استفاده از فاکتور وریانس ثانویه و برآورد کمترین‌مربعات مؤلفه وریانس دقت تا ۰/۴ ثانیه افزایش پیدا کرده است. برای اعداد آزادی مشاهدات نیز برآورد واقع‌بینانه‌ای به‌دست آمد. در واقع مزیت روش برآورد مؤلفه‌های واریانس کمترین‌مربعات به این صورت می‌باشد که با به‌دست آوردن پارامترهای وریانس طول و امتداد، برآورد واقع-بینانه‌ای از دقت پارامترهای مدل و همچنین ابعاد بیضی خطای مطلق را ارائه کرد.

تشکر و قدردانی

نگارندگان بر خود لازم می‌دانند از شرکت طرح نقشه باختر به خاطر تامین مشاهدات سد جهت انجام این پژوهش تشکر می‌نمایند.

مراجع

Amiri-Simkooei, A. R., 2001, Strategy for Designing Geodetic Network with High Reliability and Geometrical Strength Criteria. Journal of Surveying Engineering, 127(3), 104-117.

Amiri-Simkooei, A. R., 2004, A New Method for Second-order Design of Geodetic Networks: Aiming at High Reliability. Survey Review, 37(293), 552-560.

Amiri-Simkooei, A. R., 2007, Least-squares variance component estimation: theory and GPS applications (Doctoral dissertation, TU Delft, Delft University of Technology).

Amiri-Simkooei, A. R., Asgari, J., Zangeneh-Nejad, F. and Zaminpardaz, S., 2012, Basic concepts of optimization and design of geodetic networks. Journal of Surveying Engineering, 138(4), 172-183.

Amiri-Simkooei, A. R., Zaminpardaz, S. and Sharifi, M. A., 2014, Extracting tidal frequencies using multivariate harmonic analysis of sea level height time series. Journal of Geodesy, 88(10), 975-988.

Andersson, J. V., 2008, A complete model for displacement monitoring based on undifferenced GPS observations (Doctoral dissertation, KTH).

Baarda, W., 1968, A testing procedure for use in geodetic networks, Netherland Geodetic Commission, Delft, Netherlands.

Bagherbandi, M., Eshagh, M. and Sjöberg, L. E., 2009, Multi-objective versus single-objective models in geodetic network optimization. Nordic Journal of Surveying and Real Estate Research, 6(1), 7-20.

Bagherbandi, M., 2016, Deformation monitoring using different least squares adjustment methods: A simulated study. KSCE Journal of Civil Engineering, 20(2), 855-862.

Barnett, V. and Lewis, T., 1974, Outliers in statistical data. Wiley.

Ben-Gal, I., Maimon, O. and Rockach, L.,2005, Data Mining and Knowledge Discovery Handbook A Complete Guide for Practitioners and Researchers, Kluwer Academic Publishers.

Chen, Y.Q., Chrzanowski, A. and Secord, J.M., 1990, A strategy for the analysis of the stability of reference points in deformation surveys. CISM Journal, 44(2), 39-46.

Cross, P. A., 1985, Numerical Methods in Network Design. In: Grafarend & Sanso, eds. Optimization and Design of Geodetic Networks. Berlin: Springer, 132-168.

Davies, L. and Gather, U., 1993, The identification of multiple outliers, Journal of the American Statistical Association, 88(423), 782-792.

Fan, H., 2010, Theory of Errors and Least Squares Adjustment, Stockholm: Royal Institue of Technology (KTH).

González-Ferreiro, E., Diéguez-Aranda, U. and Miranda, D., 2012, Estimation of stand variables in Pinus radiata D. Don plantations using different LiDAR pulse densities. Forestry, 85(2), 281-292.

Grafarend, E. W., 1974, Optimization of geodetic networks. Bolletino di Geodesia a Science Affini, 33(4), 351-406.

Grafarend, E., Kleusberg, A. and Schaffrin, B., 1980, An introduction to the variance-covariance component estimation of Helmert type. Zeitschrift für Vermessungswesen, 105(4), 161-180.

Helmert, F. R., 1907, Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate: mit Anwendungen auf die Geod sie, die Physik und die Theorie der Messinstrumente. BG Teubner.

Hwang, J., Yun, H., Park, S.K., Lee, D. and Hong, S., 2012, Optimal methods of RTK-GPS/accelerometer integration to monitor the displacement of structures. Sensors, 12(1), 1014-1034.

Jin, X. X. and de Jong, C.D., 1996, Relationship between satellite elevation and precision of GPS code observations. The Journal of Navigation, 49(2), 253-265.

Kern, M., Preimesberger, T., Allesch, M., Pail, R., Bouman, J. and Koop, R., 2005, Outlier detection algorithms and their performance in GOCE gravity field processing. Journal of Geodesy, 78(9), 509-519

Koch, K. R., 1985, First Order Design: Optimization of the Configuration of a Network by Introducing Small Position Changes. In: Grafarend & Sanso, eds. Optimization and Design of Geodetic Networks. Berlin: Springer, pp. 56-73.

Kuang, S., 1991, Optimization and Design of Deformation Monitoring Schemes, Fredericton, Canada: Department of Surveying Engineering.

Kuang, S., 1996, Geodetic Network Analysis and Optimal Design: Concepts and Applications. Chelsea, Michigan, USA: Ann Arbor Press, Inc.

Lerch, F. J., 1991, Optimum data weighting and error calibration for estimation of gravitational parameters. Bulletin géodésique, 65(1), 44-52.

Lindenbergh, R., Pfeifer, N. and Rabbani, T., 2005, September. Accuracy analysis of the Leica HDS3000 and feasibility of tunnel deformation monitoring. In Proceedings of the ISPRS Workshop, Laser scanning, 36(3), 24-29.

Lucas, J.R. and Dillinger, W.H., 1998, MINQUE for block diagonal bordered systems such as those encountered in VLBI data analysis. Journal of Geodesy, 72(6), 343-349.

Teunissen, P.J., 1988, Towards a least-squares framework for adjusting and testing of both functional and stochastic model. Internal research memo, Geodetic Computing Centre, Delft. A reprint of original 1988 report is also available in 2004, No. 26, http://www.lr.tudelft.nl/mgp.

Teunissen, P.J., 2000, Adjustment theory: an introduction series on mathematical geodesy and positioning. Delft University Press, Washington, D.C.

Teunissen, P. J. and Amiri-Simkooei, A.R., 2008, Least-squares variance component estimation. Journal of geodesy, 82(2), pp.65-82.

Williams, S. D., Bock, Y., Fang, P., Jamason, P., Nikolaidis, R. M., Prawirodirdjo, L., Miller, M. and Johnson, D. J., 2004, Error analysis of continuous GPS position time series. Journal of Geophysical Research: Solid Earth, 109(B3), 1-19

Xu, P., Liu, Y., Shen, Y. and Fukuda, Y., 2007, Estimability analysis of variance and covariance components. Journal of Geodesy, 81(9), 593-602.

Yetkin, M. and Inal, C., 2015, Optimal Design of Deformation Monitoring Networks Using the Global Optimization Methods. In The 1st International Workshop on the Quality of Geodetic Observation and Monitoring Systems (QuGOMS'11) (pp. 27-31). Springer, Cham.

Zhang, J., Bock, Y., Johnson, H., Fang, P., Williams, S., Genrich, J., Wdowinski, S. and Behr, J., 1997, Southern California Permanent GPS Geodetic Array: Error analysis of daily position estimates and site velocities. Journal of geophysical research: solid earth, 102(B8), 18035-18055.

Optimized Estimation of Observation Precisions In Classical Displacement Network

Farzaneh, S.[1*] and Parvazi, K.[2]

1. Assistant Professor, Department of Surveying and Geomatics Engineering, Faculty of Engineering, University of Tehran, Tehran, Iran
2. Ph.D. Student Department of Surveying and Geomatics Engineering, Faculty of Engineering, University of Tehran, Tehran, Iran

(Received: 12 Nov 2018, Accepted: 14 May 2019)

Summary

Any infrastructure such as dams need constant monitoring for the detection of risks of failure and/or to plan civil engineering maintaining work. A recent approach considers precise geodetic instruments and satellite-based geodetic monitoring as a method to estimate potential deformation of such structures. A growing need for a fully automated and continuous monitoring of structural and ground deformations has created new challenges for design and analysis of the monitoring schemes, where multi-sensor geodetic systems can provide essential aid. Combination of different geodetic data helps determining displacements with high precision, hence, the risk of damages is reduced. Corresponding authorities of large man-made structures are faced with the safety problem, as all have aim to reduce risk and cost. Designers try to design large structures to tolerate against different forces like wind, traffic load, temperature, flood, earthquake, land uplift etc. Using geodetic instruments and techniques, we are able to monitor the deformation behavior or deflection in the mentioned structures and eventually provide a structural failure alarm capability (Andersson 2008).

It is important to select appropriate sensor and methods to detect the deformation. Slow deforming dams require sub-millimeter to millimeter level accuracy to monitor the displacement and deformation (Lindenbergh et al. 2005). Reaching this level of accuracy is not costly, if geodetic sensors are integrated with other sensors (e.g. geotechnical sensors, and precise total stations, see Hwang et al. 2012). It might be to implement other sensors (e.g. laser scanner and Total Station). Using point clouds data for deformation monitoring is almost new. Gonzalez et al. (2012) studied on point clouds accuracy for applications in civil engineering e.g. deformation monitoring. They showed that the results appear suitable for deformation monitoring, with accuracies less than 1 mm. Bagherbandi et al. (2009) studied on various techniques to find the optimal design of a deformation network using various criteria such as precision, cost and reliability. Better results can be achieved using the control network, provided that an optimal network design is performed for detecting deformations (Kuang 1996). In addition, the methods of geodetic network process can affect the results (Bagherbandi 2016).

The aim of this study is primarily to evaluate different deformation monitoring methods and possibilities to physically interpret the deformation and evaluate the risk of failures. In this research, the idea of assigning weights for the observations by least square variance components estimation (LS-VCE) is used (Amiri-Simkooei 2007; Teunissen and Amiri-Simkooei 2008) in order to improve accuracy of adjustment results, which differs from the applied method in Bagherbandi (2016) to determine the variance components. Some issues and parameters should be investigated in LS-VCE such as the effect of variance components estimation on the observations final accuracy, the absolute error ellipsoid estimation, the study of the necessary conditions in a network to achieve higher accuracy and its effect on obtaining real results from the reliability matrix. All results obtained from adjustment by element, LS-VCE, and Tikhonov regularization are compared using a simulated geodetic network and real data. Results from this study provide important information in studying deformation that can be used to interpret the deformation mechanism, which may reduce the risk of potential disasters in large structures. We will evaluate the above-mentioned methods in Jamishan dam in Iran and utilize the geodetic techniques and observations to monitor the deformation of the dam.

Keywords: Geodetic Network, least squares variance component estimation, Deformation.

*Corresponding author: farzaneh@ut.ac.ir