

Analyzing Dependency and Correlation of Cole-Cole Model Parameters in Spectral Induced Polarization Using Bayesian Inference

Sadegh Roudsari, M.¹  | Ghanati, R.¹  

1. Department of Earth Physics, Institute of Geophysics, University of Tehran, Tehran, Iran.

Corresponding Author E-mail: rghanati@ut.ac.ir

(Received: 18 Oct 2024, Revised: 1 Dec 2024, Accepted: 4 Jan 2025, Published online: 10 June 2025)

Summary

Spectral induced polarization (SIP) is a useful tool in geophysical exploration for understanding the capacitive properties of materials beneath the surface. Unlike conventional methods, SIP analysis can be done in both the time domain and frequency domain. In the time domain, it measures the decay of electrical potential after transmitting a direct current pulse, while in the frequency domain, it measures the phase shift of an alternating current. The Cole-Cole model (CCM) is widely used to analyze SIP data, aiding in the comprehension of subsurface properties in different geological settings. Initially introduced by Cole and Cole (1941) and subsequently expanded upon by Pelton et al (1978), this model provides a description of the complex resistivity of materials. While initially developed for mineralized rock, CCM has been successfully adapted to characterize sedimentary formations lacking electronically conducting components. In such cases, the polarization arises from interactions between pore fluids and electrically charged mineral surfaces, forming an electric double layer. It is well established that frequency-dependent induced polarization measurements offer additional spectral information beyond a single measure of induced polarization amplitude, even though the universal mechanism is not fully understood. This spectral information, derived from the shape of the frequency response, can be linked to petrophysical and geochemical properties of the Earth's subsurface, such as soil texture, water saturation, hydraulic conductivity, pH, and the dissemination of metallic minerals, through empirical relationships. In addition to advances in the fundamental understanding of induced polarization phenomena, the SIP method has seen significant progress and development across various research areas in recent years, including forward modeling, inversion, and equipment. However, the success of the SIP method is strongly dependent on providing a reliable and precise inversion algorithm aimed at retrieving the CCM parameters. Inverse problem theory refers to a mathematical framework that addresses the extraction of information about a parameterized physical system using observational data, theoretical relationships between model parameters and data (i.e., forward problem), and prior knowledge. To ensure accurate interpretation of the estimated models, it is crucial to understand the correlation between the parameters in the subsurface models. This research is significant because it explores the dependency and correlation of the CCM parameters using a Bayesian approach in a 2.5D inversion framework specifically designed for SIP data. The motivation for studying correlation analysis between model parameters arises from the challenges that high parameter correlation can pose to Markov chain Monte Carlo (MCMC) sampling algorithms in probabilistic models. In other words, the objective is to enhance the understanding of subsurface properties and provide a more reliable interpretation of the estimated models by thoroughly analyzing parameter interdependencies. A novel 2.5D inversion code specifically developed for SIP data is introduced, leveraging Python-based libraries and advanced statistical methods. Through synthetic modeling and MCMC sampling, the robustness of this approach across various subsurface scenarios is evaluated, including a homogeneous earth model, a two-layer medium, and a model featuring two anomalies within a homogeneous background. Our method enables the extraction of CCM parameters that reflect electrical properties, offering deeper insights into complex geological formations. Visualizations of MCMC chains and corner plots effectively reveal the interdependencies among CCM parameters, illustrating the convergence and reliability of the parameter estimates. Validation against synthetic models highlights the precision and effectiveness of the proposed methodology. Overall, this study demonstrates the potential of Bayesian inversion to improve the interpretation of geophysical data and offers valuable insights into the correlation between CCM parameters across different geological environments.

Keywords: Bayesian inference, Cole-Cole model, MCMC sampling, Spectral Induced Polarization, Uncertainty analysis.

Cite this article: Sadegh Roudsari, M., & Ghanati, R. (2025). Analyzing Dependency and Correlation of Cole-Cole Model Parameters in Spectral Induced Polarization Using Bayesian Inference. *Journal of the Earth and Space Physics*, 51(1), 45-64. DOI: <http://doi.org/10.22059/jesphys.2025.383530.1007636>

E-mail: (1) sadegh.roudsari@leibniz-liag.de



Publisher: University of Tehran Press.
DOI: <http://doi.org/10.22059/jesphys.2025.383530.1007636>

Print ISSN: 2538-371X
Online ISSN: 2538-3906

تحلیل وابستگی و همبستگی پارامترهای مدل کول-کول در توموگرافی قطبش القایی طیفی با استفاده از استنباط بیزین

محمد صادق رودسری^۱ | رضا قناتی^۱✉

۱. گروه فیزیک زمین، مؤسسه ژئوفیزیک، دانشگاه تهران، تهران، ایران.

رایانامه نویسنده مسئول: rghanati@ut.ac.ir

(دریافت: ۱۴۰۳/۷/۲۷، بازنگری: ۱۴۰۳/۹/۱۱، پذیرش نهایی: ۱۴۰۳/۱۰/۱۵، انتشار آنلاین: ۱۴۰۴/۳/۲۰)

چکیده

این مطالعه به بررسی وابستگی و همبستگی پارامترهای مدل کول-کول (CCM) با استفاده از استنباط بیزین برای وارون سازی داده های قطبش القایی طیفی (SIP) می پردازد. هدف این تحقیق بهبود درک ویژگی های زیرسطحی و ارائه تفسیری قابل اعتماد از مدل های تخمینی زیرسطحی با تحلیل دقیق وابستگی های پارامتری است. در این مطالعه یک کد وارون سازی دو و نیم بعدی جدید را که به طور خاص برای داده های SIP طراحی شده است، ارائه می شود که از کتابخانه های مبتنی بر پایتون و تکنیک های پیشرفته آماری استفاده می کند. از طریق داده های حاصل از مدل سازی مصنوعی و نمونه برداری زنجیره مارکوف مونت کارلو (MCMC)، کارایی روش ارائه شده در سناریوهای مختلف زیرسطحی شامل یک مدل زمین همگن، یک محیط دولایه و مدلی شامل دو بی هنجاری مدفون در پس زمینه همگن، ارزیابی می شود. رهیافت پیشنهادی امکان استخراج پارامترهای مدل کول-کول را که بیانگر ویژگی های الکتریکی هستند، فراهم می کند و درکی عمیق تر از ساختارهای زمین شناسی پیچیده ارائه می دهد. ترسیم زنجیره های MCMC و نمودارهای گوشه ای، وابستگی های میان پارامترهای کول-کول را نشان داده و همگرایی و قابلیت اطمینان برآوردهای پارامتری را به نمایش می گذارند. از طریق اعتبارسنجی با مدل های مصنوعی، دقت و اثربخشی این روش مورد تأیید قرار می گیرد. به طور کلی این مطالعه پتانسیل وارون سازی بیزین را برای بهبود تفسیر داده های ژئوفیزیکی و درک عمیق تر از همبستگی میان پارامترهای طیفی کول-کول در مدل های تخمینی با شرایط مختلف زمین شناسی نشان می دهد.

واژه های کلیدی: استنباط بیزین، مدل کول-کول، نمونه برداری MCMC، قطبش القایی طیفی، تحلیل عدم قطعیت.

۱. مقدمه

تفاوت های مواد زیرسطحی ارائه می دهد. این روش به شناسایی ویژگی های خاصی مانند درصد فلزات یا مواد خازنی کمک می کند و در بررسی محیط های زمین شناسی پیچیده بسیار مفید است (مادسن و همکاران، ۲۰۱۷). مدل کول-کول (Cole-Cole Model-CCM) به طور گسترده ای برای تحلیل داده های SIP استفاده می شود و به درک ویژگی های زیرسطحی در محیط های زمین شناسی مختلف کمک می کند (بینلی و اسلیتر، ۲۰۲۰). این مدل که ابتدا توسط کول و کول در سال ۱۹۴۱ معرفی شد و سپس توسط پلتون و همکاران (۱۹۷۸) گسترش یافت، توصیفی از مقاومت ویژه مختلط مواد ارائه می دهد. اگرچه مدل کول-کول در ابتدا برای سنگ های معدنی توسعه یافته بود،

روش قطبش القایی طیفی (SIP) ابزاری مفید در اکتشافات ژئوفیزیکی برای درک ویژگی های خازنی مواد زیر سطح زمین است. برخلاف روش های مرسوم، تحلیل SIP را می توان هم در حوزه زمان و هم در حوزه فرکانس انجام داد. این روش در حوزه زمان، افت پتانسیل الکتریکی پس از ارسال پالس جریان مستقیم را اندازه گیری می کند، در حالی که در حوزه فرکانس، جابه جایی فاز جریان متناوب را اندازه گیری می کند. در تحلیل داده های IP در حوزه زمان که به عنوان قطبش القایی در حوزه زمان (TDIP) شناخته می شود، جریان مربعی به زمین تزریق و افت ولتاژ پس از قطع جریان اندازه گیری می شود. این افت ولتاژ نشان دهنده خاصیت خازنی مواد زیرسطحی است و اطلاعاتی در مورد

استناد: رودسری، محمد صادق و قناتی، رضا (۱۴۰۴). تحلیل وابستگی و همبستگی پارامترهای مدل کول-کول در توموگرافی قطبش القایی طیفی با استفاده از استنباط بیزین. مجله

فیزیک زمین و فضا، ۵۱(۱)، ۴۵-۶۴. DOI: <http://doi.org/10.22059/jesphys.2025.383530.1007636>

رایانامه: (۱) sadegh.roudsari@leibniz-liag.de



ناشر: مؤسسه انتشارات دانشگاه تهران.

DOI: <http://doi.org/10.22059/jesphys.2025.383530.1007636>

مفهوم مسئله وارون سازی شامل استنباط پارامترهایی است که بر اساس مشاهدات موجود، یک سیستم را تعریف می کنند. برخلاف مسئله پیشرو که معمولاً در فیزیک های قطعی تنها یک راه حل دارد، مسئله وارون راه حل یکتایی ندارد (تارانتولا، ۲۰۰۴). از طریق اندازه گیری های SIP، پارامترهای CCM را می توان با استفاده از روش های وارون قطعی کلاسیک و همچنین رویکردهای وارون تصادفی ارزیابی کرد. نمونه هایی از رویکردهای قطعی شامل طرح های مبتنی بر الگوریتم های گاوس-نیوتن هستند که اغلب شامل میرایی لونبرگ-مارکوارت برای پایداری راه حل وارون می شوند. با این حال، این روش ها معمولاً از محدودیت های نرمی به جای میرایی خالص استفاده می کنند. استفاده از چنین روش هایی برای بازیابی پارامترهای CCM توسط جگر و فل (۱۹۸۸)، لو و ژانگ (۱۹۹۸)، کمن و همکاران (۲۰۰۴)، بودو و سیروک (۲۰۰۰)، گونتر و مارتین (۲۰۱۶) نشان داده شده است. اگرچه این روش ها همگرایی سریع و کارایی محاسباتی بالایی از خود نشان می دهند، ممکن است به جای این که حل واقعی مسئله وارون را پیدا کنند، به کمینه محلی تابع هدف برسند (قناتی و مولرپتکه، ۲۰۲۱). در دهه های اخیر، وارون سازی بیزین پارامترهای ژئوفیزیکی با استفاده از روش های نمونه گیری زنجیره مارکوف مونت کارلو (Markov chain Monte Carlo-McMC) به طور فزاینده ای محبوب شده است (وهلینگ و وروگت، ۲۰۱۱؛ جاردانی و همکاران، ۲۰۱۳؛ وروگت، ۲۰۱۶؛ فیانداکا و همکاران، ۲۰۱۷). از منظر وارون تصادفی پارامترهای CCM، قربانی و همکاران (۲۰۰۷) یک مدل بیزین برای وارون سازی داده های IP در حوزه زمان و حوزه فرکانس برای پارامترهای یک CCM منفرد توسعه دادند. آنها از یک تکنیک انتگرال گیری عددی بر روی شبکه های منظم برای به دست آوردن تابع چگالی احتمال پسینی حاشیه ای هر پارامتر CCM از تابع توزیع احتمال پسینی مشترک استفاده کردند. چن و همکاران (۲۰۰۸) داده های SIP را با استفاده از CCM تفسیر کردند و یک مدل بیزی برای تخمین پارامترها با استفاده از روش های نمونه گیری

اما با موفقیت برای شناسایی سازندهای رسوبی که فاقد اجزای رسانای الکترونی هستند نیز به کار گرفته شده است (وانهالا، ۱۹۹۷؛ بینلی و همکاران، ۲۰۰۵؛ کمن و همکاران، ۲۰۰۴).

در چنین مواردی، قطبش از تعاملات بین سیالات منفذی و سطوح معدنی حاوی بار الکتریکی منفی ایجاد می شود که یک لایه دوگانه الکتریکی تشکیل می دهد (بینلی و اسلیتر، ۲۰۲۰). به خوبی ثابت شده است که اندازه گیری های قطبش القایی وابسته به فرکانس، اطلاعات طیفی بیشتری نسبت به یک اندازه گیری ساده از دامنه قطبش القایی ارائه می دهند، هرچند که سازوکار کلی هنوز به طور کامل درک نشده است. این اطلاعات طیفی که از شکل پاسخ فرکانسی استخراج می شوند، می توانند از طریق روابط تجربی به ویژگی های پتروفیزیکی و ژئوشیمیایی زیرسطح زمین، مانند بافت خاک، اشباع آب، هدایت هیدرولیکی، pH و پراکندگی مواد معدنی فلزی مرتبط شوند (جانسون و تومل، ۲۰۱۸). علاوه بر پیشرفت های اساسی در درک پدیده های قطبش القایی، روش SIP در سال های اخیر پیشرفت های قابل توجهی در زمینه های مختلف تحقیقاتی از جمله مدل سازی پیشرو، وارون سازی، و همچنین در زمینه تجهیزات داشته است. با این حال، موفقیت روش SIP به شدت به ارائه الگوریتم وارون سازی قابل اعتماد و دقیق برای استخراج پارامترهای مدل کول-کول (CCM) وابسته است. نظریه مسئله وارون به چارچوبی ریاضی اشاره دارد که به استخراج اطلاعات در مورد یک سیستم فیزیکی پارامتربندی شده با استفاده از داده های مشاهداتی، روابط نظری بین پارامترهای مدل و داده ها (یعنی مسئله پیشرو) و اطلاعات پیشینی می پردازد. این نظریه به طور گسترده ای در زمینه ژئوفیزیک توسعه یافته است، به ویژه در زمینه استنباط جزئیات مربوط به زیرسطح زمین بر اساس اندازه گیری های سطحی. به عنوان مثال، این نظریه شامل تخمین ویژگی های زیرسطحی مانند چگالی سنگ، مغناطیس پذیری و هدایت الکتریکی با استفاده از اندازه گیری های سطحی از میدان های گرانشی یا الکترومغناطیسی و همچنین تحلیل داده های لرزه ای می شود (موسگارد و تارانتولا، ۱۹۹۵).

McMC توسعه دادند و از نمونه گیر گیبس برای استخراج نمونه‌ها از توزیع پسینی مشترک بهره گرفتند. کری و همکاران (۲۰۱۲) یک مدل طیفی بر اساس توصیف گر چندجمله‌ای ساده از یک توزیع پیشنهاد کردند و این مسئله را با استفاده از روش بیزین حل کردند. بروبه و همکاران (۲۰۱۷) از یک روش شبیه‌سازی تطبیقی McMC برای وارون چند مدل داده‌های SIP آزمایشگاهی استفاده کردند. با وجود کاربرد موفق استنباط بیزین برای بازیابی پارامترهای CCM، استفاده از آن در مدل‌سازی دو بعدی و سه بعدی داده‌های SIP محدود باقی مانده است. این محدودیت احتمالاً به دلیل هزینه بالای محاسباتی، دشواری در انتخاب اطلاعات پیشینی مناسب و پیچیدگی وارون بیزین است. رودسری و همکاران (۲۰۲۴) یک الگوریتم وارون‌سازی هیبریدی را پیشنهاد کردند که روش هموتوپیک را با روش بیزین McMC ترکیب می‌کند تا توزیع دوبعدی پارامترهای طیفی CCM را تخمین بزنند. روش آنها از یک روش وارون‌سازی مبتنی بر گرادیان با ویژگی‌های همگرایی سراسری بهره می‌برد تا داده‌های SIP را برای رسانایی با مقدار مختلط وارون کند و سپس با استفاده از نمونه‌گیری McMC یک برازش غیرخطی کامل برای استخراج پارامترهای طیفی انجام می‌دهد. علاوه بر این، در دهه گذشته، الگوریتم‌های مدل‌سازی و وارون‌سازی IP توسعه یافته‌اند تا پارامترهای طیفی را از داده‌های IP حوزه زمان استخراج کنند. به عنوان مثال، فیانداکا و همکاران (۲۰۱۲) و فیانداکا و همکاران (۲۰۱۳) الگوریتم‌های وارون حوزه زمان یک بعدی و دو و نیم بعدی را برای حل کمی اطلاعات SIP ایجاد کردند. مادسن و همکاران (۲۰۱۷) نشان دادند که پارامترهای CCM را می‌توان از داده‌های IP حوزه زمان با استفاده از نمونه‌برداری McMC یک بعدی بازیابی کرد. با وجود اهمیت وارون‌سازی بیزین در ارائه برآوردهای مطمئن و تخمین پارامترها، باید دانست که بیشتر مطالعات مربوط به پارامترهای طیفی با رویکرد بیزین بر مطالعات آزمایشگاهی و وارون‌سازی داده‌های یک بعدی متمرکز بوده است. برای اطمینان از تفسیر دقیق مدل‌های تخمین زده شده، فهم ارتباط

بین پارامترها در مدل‌های زیرسطحی ضروری است. این پژوهش از آن جهت اهمیت دارد که به تحلیل وابستگی و همبستگی پارامترهای CCM با استفاده از رویکرد بیزین در چارچوب وارون‌سازی دو و نیم بعدی که به طور ویژه برای داده‌های SIP طراحی شده است، می‌پردازد. انگیزه مطالعه تحلیل همبستگی بین پارامترهای مدل از چالش‌هایی ناشی می‌شود که همبستگی بالای پارامترها می‌تواند برای الگوریتم‌های نمونه‌گیری McMC در مدل‌های احتمالاتی ایجاد کند. در فضا‌های پارامتری با همبستگی بالا، توزیع پسین ممکن است کشیده یا معوج شود، که باعث می‌شود الگوریتم نمونه‌گیری مدت زمان بیشتری برای همگرایی نیاز داشته باشد. این امر به این دلیل است که نمونه گیر ممکن است در برخی نواحی فضای پارامتری گیر کند یا برای کشف کامل فضا به تکرارهای بیشتری نیاز داشته باشد (هوفمن و گلن، ۲۰۱۴؛ گلن و همکاران، ۲۰۱۴). برای تحلیل وابستگی و همبستگی پارامترهای CCM در وارون‌سازی SIP، ما از یک الگوریتم نمونه‌گیری از یک مجموعه غیرمتغیر وابسته استفاده می‌کنیم که توسط گودمن و ر (۲۰۱۰) پیشنهاد شده و توسط فورمن-مک کی و همکاران (۲۰۱۳، ۲۰۱۹) توسعه یافته است. این الگوریتم رفتار پیچیده و روابط متقابل مواد زمین‌شناسی را در نظر می‌گیرد. استفاده از این نمونه‌گیر می‌تواند با تبدیل فضای پارامتری به مجموعه‌ای از پارامترهای نامرتب، اثرات همبستگی پارامترها را کاهش داده و فرایند نمونه‌گیری را کارآمدتر کند. قابل ذکر است که مطالعه ما با کار مادسن و همکاران (۲۰۱۷) متفاوت است، چرا که تحلیل آنها بر همبستگی‌ها بر اساس پارامتری‌سازی یک بعدی مدل کول-کول (CCM) با استفاده از نمونه گیر McMC سنتی (متروپولیس و همکاران، ۱۹۵۳؛ هستینگز، ۱۹۷۰) در زمینه داده‌های قطبش القایی حوزه زمان متمرکز بود. در مقابل، ما همبستگی پارامترهای CCM را در توزیع دوبعدی پارامترهای طیفی در حوزه فرکانس بررسی می‌کنیم. علاوه بر انجام تحلیل همبستگی پارامترهای وارون شده مدل، این مطالعه همچنین یک بررسی تصادفی اولیه از عدم قطعیت در مسئله وارون‌سازی SIP ارائه می‌دهد. این

ارائه می‌دهیم و بر محاسبه پاسخ‌های پتانسیل الکتریکی مختلط در محیط زیرسطحی تمرکز می‌کنیم. پس از آن، روش وارون‌سازی بیزین را معرفی می‌کنیم که از نمونه‌گیری McMC با مجموعه هم‌افزا (affine-invariant ensemble) استفاده کرده و اطلاعات پیشینی، از جمله حدود پایین و بالای توزیع‌های پیشینی را در نظر می‌گیرد.

۱-۲. مدل‌سازی پیشرو

رویکرد مدل‌سازی ما شامل دو بخش اصلی است: مدل‌سازی پیشرو و وارون. در مرحله مدل‌سازی پیشرو، توزیع پتانسیل الکتریکی مختلطی که از یک منبع جریان نقطه‌ای در یک محیط سه‌بعدی غیرهمگن و ایزوتروپ با رسانایی مختلط متغیر $\sigma(x, y, z)$ به وجود می‌آید، شبیه‌سازی می‌کنیم. این توزیع توسط معادله دیفرانسیل زیر توصیف می‌شود (ولر و همکاران، ۱۹۹۶؛ کما و همکاران، ۲۰۰۴)

$$-\nabla \cdot (\sigma^*(x, y, z, \omega) \nabla \phi^*(x, y, z, \omega)) = I \delta(x - x_s) \delta(y - y_s) \delta(z - z_s), \quad (1)$$

این معادله که برای جریان‌های پایدار مستقیم و جریان متناوب با فرکانس پایین تحت شرایط خاص کاربرد دارد، رسانایی مختلط σ^* را در نظر می‌گیرد، که به صورت $\sigma^* = |\sigma| \exp(j\theta)$ تعریف می‌شود، که در آن σ' نشان‌دهنده رسانایی الکتریکی و σ'' نشان‌دهنده اثرات قطبش است. همچنین θ زاویه فاز رسانایی مختلط را نشان می‌دهد و j واحد موهومی است $j = \sqrt{-1}$. علاوه بر این، I بزرگی جریان نقطه‌ای منبع و $\delta(x - x_s) \delta(y - y_s) \delta(z - z_s)$ توابع دلتای دیراک هستند که مکان منبع جریان نقطه‌ای را در (x_s, y_s, z_s) تعریف می‌کنند. تبدیل مکانی فوریه-کسینوسی که بر این معادله اعمال می‌شود، معادله‌ای تبدیل‌شده را ایجاد می‌کند که تکنیک‌های حل را تسهیل می‌کند. معادله تبدیل‌شده به صورت زیر ارائه شده است (ولر و همکاران، ۱۹۹۶؛ کما و همکاران، ۲۰۰۴):

$$-\nabla \cdot (\sigma^*(x, z, \omega) \nabla \hat{\phi}^*(x, k_y, z, \omega)) + k_y^2 \sigma^*(x, z, \omega) \hat{\phi}^*(x, k_y, z, \omega) = \frac{I}{2} \delta(x - x_s) \delta(z - z_s). \quad (2)$$

در اینجا، $\hat{\phi}^*$ و k_y به ترتیب نشان‌دهنده پتانسیل مختلط

تحلیل به دلیل عدم یکتایی ذاتی مسائل وارون‌سازی ژئوفیزیکی و وجود خطاهای اندازه‌گیری ضروری است. هدف از تحلیل عدم قطعیت، شناسایی مدل‌های معادلی است که به اندازه کافی با داده‌های مشاهده‌شده در محدوده خطاهای یکسان مطابقت داشته و همچنان با اطلاعات پیشین سازگار باشند. علاوه بر این، این مطالعه به طور خاص بر تحلیل داده‌های مصنوعی متمرکز است تا وابستگی‌ها و همبستگی‌های بین پارامترهای CCM را بررسی کند. اگرچه کد وارون‌سازی دو و نیم بعدی توسعه یافته که از یک رویکرد بیزین استفاده می‌کند نتایج امیدوارکننده‌ای به دست می‌دهد، اما این تنها یک گام اولیه به سوی چارچوب کامل وارون‌سازی بیزین دو بعدی و سه بعدی برای داده‌های توموگرافی SIP است. استفاده انحصاری از داده‌های مصنوعی نشان‌دهنده نیاز به بهینه‌سازی و اعتبارسنجی بیشتر قبل از استفاده از این روش برای داده‌های صحرایی است. تا جایی که ما می‌دانیم، این مطالعه اولین موردی است که استنباط بیزین را برای تحلیل همبستگی پارامترهای مدل کول-کول در چارچوب داده‌های SIP دوبعدی به کار می‌برد. پس از بررسی مقالات موجود در زمینه تحلیل داده‌های SIP با استفاده از مدل کول-کول (CCM) و روش‌های وارون‌سازی تصادفی، این مقاله رویکرد مشابهی را برای بررسی بیشتر این موضوع اتخاذ می‌کند. در ادامه، بخش روش‌شناسی به تشریح فرایند مدل‌سازی پیشرو می‌پردازد که داده‌های شبیه‌سازی‌شده SIP را بر اساس پارامترهای طیفی تولید می‌کند. سپس، مقاله به بررسی روش McMC پرداخته و مبانی نظری و کاربرد عملی آن در وارون‌سازی داده‌های SIP را توضیح می‌دهد. بخش نتایج و بحث به دنبال آن، یافته‌هایی از آزمایش‌های مصنوعی کنترل‌شده را ارائه داده و به تحلیل و تفسیر جامع آنها می‌پردازد. مقاله با ارائه نتایج نهایی خاتمه می‌یابد.

۲. روش‌شناسی

در این بخش، ابتدا مروری مختصر بر فیزیک پیشرو در مدل‌سازی مقاومت‌ویژه الکتریکی مختلط دو و نیم بعدی

مرتبط با هر تخمین پارامتر می‌باشند. این رویکرد آماری دیدگاه‌هایی درباره قابلیت اطمینان نتایج وارون‌سازی ارائه می‌دهد.

۲-۲. وارون‌سازی بیزین

در وارون‌سازی ژئوفیزیکی، روش بیزین از اهمیت زیادی برخوردار است و چارچوبی احتمالاتی برای ارزیابی عدم قطعیت‌ها و کمی‌سازی قابلیت اطمینان پارامترهای مدل ارائه می‌دهد. این رویکرد، پارامترهای مدل و داده‌های مشاهده‌شده را به عنوان متغیرهای تصادفی در نظر می‌گیرد و این امکان را فراهم می‌آورد تا درک جامع‌تری از لایه‌های زیرسطحی حاصل شود. در چارچوب بیزین، هم پارامترهای مدل و هم داده‌ها به عنوان متغیرهای تصادفی در نظر گرفته می‌شوند. فرض کنید $\mathbf{d}$ یک بردار از متغیرهای تصادفی است که یک مجموعه داده را نشان می‌دهد و $\mathbf{m}$ یک بردار از پارامترهای مدل باشد. طبق قضیه بیز، توزیع احتمالی پارامترها با توجه به متغیرهای تصادفی به صورت زیر بیان می‌شود (بروبه و همکاران، ۲۰۱۷):

$$P(\mathbf{m}|\mathbf{d}) = \frac{P(\mathbf{d}|\mathbf{m}) \times P(\mathbf{m})}{P(\mathbf{d})}, \quad (4)$$

در اینجا، $P(\mathbf{m}|\mathbf{d})$ توزیع احتمالی پسین پارامترهای مدل $\mathbf{m}$ با توجه به داده‌های مشاهده‌شده $\mathbf{d}$ است، $P(\mathbf{m})$ توزیع احتمالی پیشین است که مستقل از داده‌های اندازه‌گیری شده می‌باشد، $P(\mathbf{d}|\mathbf{m})$ تابع درست‌نمایی (Likelihood Function) است و $P(\mathbf{d})$ با عنوان درست‌نمایی حاشیه‌ای شناخته می‌شود. بنابراین، توزیع پسین متناسب با حاصل ضرب تابع درست‌نمایی و توزیع پیشین است.

اولین قدم در ساخت یک وارون‌سازی بیزین، تعریف $P(\mathbf{d}|\mathbf{m})$ است که فرض می‌کند خطاهای مشاهده‌ای مربوط به هر اندازه‌گیری دارای توزیع گاوسی ثابت با میانگین صفر هستند. این مفهوم در ادامه توضیح داده خواهد شد. هدف اصلی استنباط بیزین، تعیین انتظارات پسین از یک تابع از $\mathbf{m}$ یا به طور مستقیم‌تر، پارامترهای $\mathbf{m}$ است. برای تقریب مقدار انتظاری تابع $f(\mathbf{d})$ ، انتگرال‌گیری مونت کارلو با استفاده از نمونه‌های تصادفی از توزیع پسین $\mathbf{d}$ به کار گرفته می‌شود. $f(\mathbf{d})$ نمایانگر یک تابع کلی از

تبدیل‌شده و عدد موج نسبت به جهت y هستند. حل این معادله تبدیل‌شده با اعمال شرایط مرزی ترکیبی، امکان استخراج حل‌های پتانسیل مختلط در حوزه مکانی را از طریق تبدیل معکوس فوریه-کسینوسی فراهم می‌کند (دی و موريسون، ۱۹۷۹). علاوه بر این، محتوای طیفی سیگنال مقاومت ویژه مختلط با استفاده از مدل کول-کول (CCM) توصیف می‌شود. این مدل و انواع آن، از هر دو منظر تجربی و کاربردی، مؤثر بودنشان را در توصیف ویژگی‌های الکتریکی سنگ‌های معدنی و مواد رسوبی به اثبات رسانده‌اند. مدل استاندارد کول-کول رابطه بین مقاومت ویژه مختلط (به عنوان تابعی از فرکانس زاویه‌ای $\omega = 2\pi f$) و پارامترهای طیفی، یعنی مقاومت جریان مستقیم ρ ، قابلیت بارپذیری (μ)، ثابت زمانی (τ) یا زمان آرامش مدل پلتون τ_{PM} و نمای مدل کول-کول c را به صورت زیر ارائه می‌کند (وانهالا، ۱۹۹۷):

$$\rho^*(\omega) = \rho \left[1 - \mu \left(1 - \frac{1}{1 + (j\omega\tau)^c} \right) \right]. \quad (3)$$

قابل ذکر است که معادله ۳ به عنوان مدل آسایش پلتون (پلتون و همکاران، ۱۹۷۸) نیز شناخته می‌شود، با این تفاوت که $\tau = \tau_{PM}(1 - \mu)^{(1/c)}$ (ولر و اسلیتر، ۲۰۲۳). τ_{PM} نمایانگر زمان مشخصه‌ای در مدل آسایش پلتون است که به طور مستقیم به تأخیر زمانی مرتبط با فرایندهای قطبش الکتریکی در ماده زیرسطحی اشاره دارد. در این مطالعه، از یک مدل بیزین برای وارون‌سازی داده‌های مصنوعی SIP شده و از روش زنجیره مارکوف مونت کارلو (MCMC) برای محاسبه توزیع احتمالی هر یک از پارامترهای مدل کول-کول بهره برده شده است. پس از وارون‌سازی بیزین با استفاده از روش MCMC، یک تحلیل آماری دقیق انجام می‌شود تا عدم قطعیت تخمین پارامترها را کمی‌سازی کنیم. ما از تکنیک‌های نمونه‌گیری زنجیره مارکوف مونت کارلو برای تولید مجموعه‌ای از پارامترهایی استفاده می‌کنیم که توزیع پسینی پارامترهای مدل را نمایندگی می‌کنند. از این نمونه‌ها، میانگین و انحراف معیار هر پارامتر را برای استخراج مقادیر کمی عدم قطعیت محاسبه می‌کنیم. مقادیر میانگین پارامترها نشان‌دهنده گرایش مرکزی توزیع پسینی هستند، در حالی که انحراف معیارها نشان‌دهنده عدم قطعیت

$Y = 1$ در می‌آید؛ در غیر این صورت، موقعیت تغییر نمی‌کند و همان $X(t+1) = X(t)$ باقی می‌ماند، به این معنا که موقعیت فعلی در زنجیره تکرار می‌شود. بنابراین، احتمال پذیرش به صورت زیر تعریف می‌شود (چیب و گرینرگ، ۱۹۹۵):

$$\mathcal{R}(Y|X(t)) = \min \left(1, \frac{P(Y|d) \frac{Q(Y|X(t))}{Q(X(t)|Y)}}{P(X(t)|d) \frac{Q(X(t)|Y)}{Q(Y|d)}} \right), \quad (6)$$

که در آن $P(Y|d)$ تابع درست‌نمایی است که در معادله ۸ تعریف شده است. یک روش معمول برای پارامتردهی $Q(Y|X(t))$ استفاده از یک توزیع گاوسی چند متغیره است که حول $X(t)$ متمرکز شده و دارای یک تانسور کواریانس کلی است که برای بهبود عملکرد بهینه‌سازی شده است. با فرض این که توزیع پیشنهادی متقارن باشد، یعنی $Q(Y|X(t)) = Q(X(t)|Y)$ ، و با گرفتن لگاریتم نسبت $(P(Y|d)/P(X(t)|d))$ ، معادله ۶ به شکل زیر ساده می‌شود:

$$\mathcal{R}(Y|X(t)) = \min (1, \log P(Y|d) - \log P(X(t)|d)) \quad (7)$$

مهم است که به خاطر داشته باشید توزیع پیشنهادی برای انتخاب نقاط جدید در زنجیره می‌تواند به طور دلخواه تعیین شود. با این حال، انتخاب یک توزیع که به توزیع هدف واقعی نزدیک باشد، می‌تواند به طور قابل توجهی سرعت همگرایی مقادیر تولیدشده به توزیع صحیح را افزایش دهد (رودسری و همکاران، ۲۰۲۴). بحث جامع در مورد روش‌های McMC فراتر از حیطه این مقاله است. خوانندگان علاقه‌مند می‌توانند به منابع کلاسیکی مانند (مک‌کی، ۲۰۰۳) مراجعه کنند. روش‌شناسی وارون‌سازی بیزین برای داده‌های SIP مستلزم مجموعه‌ای از توابع دقیقاً طراحی شده است که هر یک نقش مهمی در این فرایند دارند. تابع درست‌نمایی برای کمی‌سازی تطابق بین پیش‌بینی‌های مدل و داده‌های مشاهده‌شده ضروری است. این تابع درست‌نمایی شرطی داده‌ها را با توجه به مقادیر مشخصی از پارامترهای مدل ارزیابی می‌کند. با در نظر گرفتن پیش‌بینی‌های مدل و نیز عدم قطعیت‌های مرتبط با اندازه‌گیری‌ها، این تابع معیار دقیقی برای ارزیابی کیفیت تطابق بین شبیه‌سازی‌های مدل و نقاط داده‌های مشاهده‌شده

داده‌های مشاهده‌شده d است که می‌تواند هر تابعی باشد که اطلاعات مرتبط با پارامترهای مدل m را بازتاب دهد. این تابع معمولاً به منظور محاسبه انتظارات آماری یا ویژگی‌های خاص داده‌ها، مانند میانگین و انحراف معیار مورد استفاده قرار می‌گیرد. در استنباط بیزین، $f(d)$ به عنوان ابزاری برای استخراج اطلاعات از توزیع پسین داده‌ها تعریف می‌شود. به عبارت دیگر، این تابع به طور مستقیم بر داده‌ها اعمال می‌شود تا ویژگی‌های مرتبط با توزیع پارامترهای مدل مورد نظر به دست آید. انتظار محاسبه‌شده به صورت زیر بیان می‌شود:

$$E[f(d)] \approx \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k f(d_i) \quad (5)$$

این نمونه‌ها، که با d_i نشان داده می‌شوند، از توزیع پایای یک زنجیره مارکوف استخراج می‌شوند. در مسائل وارون-سازی غیرخطی، استخراج یک عبارت تحلیلی برای تابع چگالی احتمال پسین (PDF) ممکن نیست. بنابراین، استفاده از روش‌های زنجیره مارکوف مونت کارلو (MCMC) بسیار رایج است، همان‌طور که توسط سامبرج و ماسگارد (۲۰۰۲) بیان شده است. در الگوریتم‌های نمونه‌گیری MCMC، پیشنهاد دادن موقعیت‌های جدید برای پارامترها نقش مهمی در جستجو در فضای پارامتر و برآورد توزیع پسین دارد. از میان الگوریتم‌های مختلف MCMC، الگوریتم متروپلیس-هاستینگز (متروپلیس و همکاران، ۱۹۵۳؛ هستینگز، ۱۹۷۰) (MH) به عنوان یکی از ساده‌ترین و رایج‌ترین روش‌ها برای پیشنهاد این حرکت‌ها شناخته می‌شود. در این مطالعه، از الگوریتم MH برای ایجاد موقعیت‌های جدید برای نمونه‌گیری پارامترها در هر گام استفاده می‌شود. الگوریتم MH شامل دو مرحله اصلی است: پیشنهاد و پذیرش. در مرحله پیشنهاد (معادله ۶)، با توجه به وضعیت فعلی $X(t)$ ، یک موقعیت پیشنهادی Y از توزیع انتقال $Q(Y; X(t))$ نمونه‌گیری می‌شود. سپس در مرحله پذیرش، موقعیت پیشنهادی Y با احتمالی که توسط حداقل ۱ و نسبت تابع احتمال موقعیت پیشنهادی به موقعیت فعلی، ضربدر نسبت احتمال‌های انتقال برای موقعیت پیشنهادی و موقعیت فعلی تعیین می‌شود، پذیرفته می‌شود. اگر پیشنهاد پذیرفته شود، موقعیت جدید به صورت $(t+1)$

ارائه می‌دهد. از طریق این فرایند، تابع درست‌نمایی نمونه‌گیر McMC را به سمت نواحی از فضای پارامتر هدایت می‌کند که بهترین توضیح را برای داده‌های مشاهده‌شده ارائه می‌دهند. برای ارزیابی تطابق بین داده‌های مشاهده‌شده و پیش‌بینی‌شده در مدل‌سازی ما، تابع لگاریتم درست‌نمایی به صورت زیر تعریف می‌شود (وروگت، ۲۰۱۶؛ در پاسکواله و لینده، ۲۰۱۷؛ رودسری و همکاران، ۲۰۲۴):

$$\log \mathcal{L}(m|d) = \log P(d|m) = -\frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \log \left(\prod_{i=1}^n \sigma_i^2 \right) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{d_i - f(m)_i}{\sigma_i} \right)^2 \quad (8)$$

در اینجا، n تعداد نقاط داده است، d_i داده مشاهده‌شده i -ام است، $f(m)_i$ پیش‌بینی مدل برای نقطه داده i -ام بر اساس پارامترهای مدل m بوده، و σ_i انحراف معیار خطای مرتبط با نقطه داده i -ام را نشان می‌دهد. با در نظر گرفتن $\frac{1}{2} \log \left(\prod_{i=1}^n \sigma_i^2 \right) = \sum_{i=1}^n \log(\sigma_i)$ معادله ۸ می‌تواند با کمی بازآرایی به صورت زیر بازنویسی شود:

$$\log \mathcal{L}(m) = -\frac{n}{2} \log(2\pi) - \sum_{i=1}^n \log(\sigma_i) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{d_i - f(m)_i}{\sigma_i} \right)^2. \quad (9)$$

به طور کلی، $\log \mathcal{L}(m)$ نشان می‌دهد که یک مدل m با پاسخ نظری $f(m)$ که به داده‌های مشاهده‌شده d نزدیک باشد، مقدار بالایی برای تابع لگاریتم احتمال خواهد داشت و بالعکس. تکمیل‌کننده ارزیابی احتمال، تابع پیشین است که اطلاعات یا فرضیات قبلی درباره پارامترهای مدل را در بر می‌گیرد. این تابع به هر ترکیب پارامتری یک احتمال پیشین لگاریتمی اختصاص می‌دهد و اطلاعاتی درباره بازه‌های مورد انتظار یا توزیع‌های پارامترها بر اساس ملاحظات زمین‌شناسی یا فیزیکی ارائه می‌دهد. با تحمیل محدودیت‌هایی به عنوان یک توزیع پیشین کم‌اطلاعات، تابع پیشین نمونه‌بردار McMC را هدایت می‌کند تا مناطقی از فضای پارامتری را که با انتظارات پیشین سازگار است، کاوش کند و از حرکت نمونه‌بردار به نواحی فیزیکی غیرمحمول جلوگیری کند. در اینجا، یک بازه خاص برای چهار پارامتر مدل کول-کول (CCM) تعریف شده است

که از بینش‌های زمین‌شناسی یا فیزیکی درباره ویژگی‌های زیرسطحی مورد بررسی اطلاع می‌گیرد. در واقع، تابع پیشین به عنوان یک فیلتر عمل کرده و نمونه‌بردار McMC را به سمت ترکیب‌های پارامتری که با دانش یا انتظارات پیشین هماهنگ است، هدایت می‌کند. تابع پسین، اطلاعات درست‌نمایی و پیشین را برای محاسبه احتمال کلی پارامترهای مدل ترکیب می‌کند. با ادغام احتمال پیشین با درست‌نمایی، این تابع ارزیابی جامعی از ترکیب‌های پارامتری ارائه می‌دهد که توازن میان برازش داده‌های مشاهده‌شده و پایداری به محدودیت‌های پیشین را برقرار می‌کند. این رویکرد ادغام، نمونه‌بردار McMC را به سمت ترکیب‌های پارامتری هدایت می‌کند که توازن بهینه‌ای بین تطابق با داده‌ها و اطلاعات پیشین برقرار کنند. سرانجام، تابع برازش فرایند وارون‌سازی بیزین را با آغاز شبیه‌سازی McMC با استفاده از کتابخانه پایتون (فورمن مک کی و همکاران، ۲۰۱۳ و ۲۰۱۹) emcee هماهنگ می‌کند، که برای نمونه‌برداری از توزیع پسین پارامترهای مدل طراحی شده است. کتابخانه emcee یک نمونه‌بردار McMC با چندین گام بردار (walkers) است که توسط گودمن و و (۲۰۱۰) پیشنهاد شده است. یک مزیت مهم روش گودمن این است که فقط نیاز به تنظیم دستی یک یا دو پارامتر دارد، در حالی که روش‌های سنتی نمونه‌برداری McMC در فضای پارامتری N بعدی معمولاً نیاز به تنظیم تقریباً $\sim N^2$ پارامتر دارند. با تولید یک مجموعه از گام بردارها و تنظیم مکرر مقادیر پارامترها بر اساس تخمین احتمالات، تابع برازش امکان کاوش در فضای پارامتری و تخمین توزیع‌های پارامتری پسین را فراهم می‌کند. الگوریتم McMC از یک مجموعه پارامتری (گام بردار) تشکیل شده است که یا درون مرزهای مشخص یا به صورت تصادفی در فضای پارامتری توزیع می‌شود. هر گام بردار نمایانگر یک ترکیب منحصر به فرد از پارامترهای CCM است که ساختار مختلط مقاومت و ویژه زیرسطحی را تعریف می‌کند. در طول شبیه‌سازی، emcee موقعیت‌های این گام بردارها را بر اساس احتمال داده‌های SIP مشاهده‌شده به صورت تکراری تنظیم می‌کند. این ارزیابی احتمال شامل مقایسه

هندسه زیرسطح، از جمله مرزهای لایه‌ها و پیکربندی الکترودها، و تخصیص خواص فیزیکی مانند مقاومت ویژه الکتریکی (ρ)، قابلیت بارپذیری (μ)، ثابت زمانی (τ) و نمای مدل (c) به هر منطقه زیرسطحی است. برای مدل‌سازی پیشرو، چارچوب Python pyGIMLi از روش اجزای محدود بر روی شبکه‌های مثلثی نامنظم برای هر فرکانس استفاده می‌کند (روکر و همکاران، ۲۰۰۶). فرکانس‌های استفاده‌شده برای شبیه‌سازی پاسخ‌های مقاومت ویژه الکتریکی مختلط ظاهری در مدل‌های مصنوعی شامل ۰/۳، ۱، ۳، ۱۰، ۲۰، ۳۰، ۴۰، ۶۰، ۸۰ و ۱۰۰ هرتز است. اندازه‌گیری‌های صحرائی با استفاده از پیکربندی ونر آلفا با ۴۱ الکتروود و حداقل فاصله الکتروودی ۳/۵ متر، که شامل توزیع‌های مختلف پارامترهای طیفی زیرسطحی است، شبیه‌سازی شده‌اند. تمامی مدل‌های مصنوعی از پارامترهای یکسان برای شبکه استفاده می‌کنند. پس از جمع‌آوری داده‌های SIP مصنوعی در فرکانس‌های مختلف، مراحل پیش‌پردازش برای آماده‌سازی داده‌ها برای تحلیل وارون‌سازی بعدی اجرا می‌شود. در این مرحله حیاتی آماده‌سازی، برای شبیه‌سازی شرایط دنیای واقعی، مشاهدات مصنوعی که شامل مقادیر دامنه ($|p^*|$) و فاز θ هستند، با نوفه گاوسی آلوده می‌شوند. سطوح نوفه با انحراف معیار ۵٪ (خطای نسبی) برای دامنه و ۱ میلی‌رادیان (خطای مطلق) برای فاز تعیین می‌شود. این سطوح نوفه با اختلافات داده‌ای معمولی که در طول وارون‌سازی داده‌های صحرائی مشاهده می‌شود مطابقت دارد (بلاژک و همکاران، ۲۰۰۸). در فرایند وارون‌سازی، رویکرد مبتنی بر ناحیه اتخاذ می‌شود که در آن هر محیط با یک ناحیه واحد که شامل تمامی پارامترهای CCM است، نمایش داده می‌شود. این رویکرد به ما امکان می‌دهد که وارون مکانی بر پایه McMC را برای هر ناحیه به صورت مجزا انجام دهیم و نتایج تخمینی را برای هر ناحیه خاص بازیابی کنیم. برای هر ناحیه، یک CCM مصنوعی تعریف می‌شود که به عنوان هدفی برای بازیابی پارامترها در طول فرایند وارون‌سازی عمل می‌کند. به عنوان مثال، در مورد یک محیط همگن که شامل

پیش‌بینی‌های مدل با داده‌های اندازه‌گیری‌شده است و عدم قطعیت در اندازه‌گیری‌ها را در نظر می‌گیرد. هدف از این فرایند، کاوش و نمونه‌برداری از توزیع پسین پارامترهای مدل است تا توزیع احتمالی آنها با توجه به داده‌های مشاهده‌شده ثبت شود. با نمونه‌برداری و تنظیم مکرر موقعیت گام بردارها، که با اصول بیزین هدایت می‌شود، emcee به دنبال بیشینه‌سازی تطابق بین پیش‌بینی‌های مدل و پاسخ‌های SIP مشاهده‌شده است. ارزیابی همگرایی و عملکرد یک الگوریتم نمونه‌برداری یک کار پیچیده است و مقالات گسترده‌ای در این زمینه وجود دارد. الگوریتم پیشنهادی نمونه‌برداری McMC از یک معیار خود-همبستگی (autocorrelation) بهره‌مند است که مستقیماً تعداد ارزیابی‌های تابع چگالی احتمال پسین را اندازه‌گیری می‌کند که برای تولید نمونه‌های مستقل از چگالی هدف لازم است (به فورمن مک کی و همکاران، ۲۰۱۳ مراجعه کنید). علاوه بر این، برای اطمینان از فرکانس نمونه‌برداری مؤثر، احتمال پذیرش باید بین ۰/۲ و ۰/۵ حفظ شود (به عنوان مثال، به گلن و همکاران، ۱۹۹۴؛ بروبه و همکاران، ۲۰۱۷؛ رودسری و همکاران، ۲۰۲۴ مراجعه کنید).

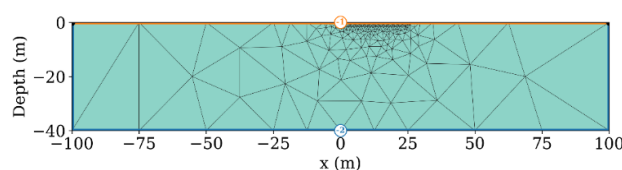
۳. نتایج و بحث

پس از تعیین چارچوب فرایند وارون‌سازی، این بخش به ارائه نتایج ارزیابی جامع الگوریتم توسعه‌یافته برای وارون‌سازی داده‌های SIP می‌پردازد. تمرکز این بخش بر روی بررسی وابستگی و همبستگی پارامترهای مدل کول-کول (CCM) در زمینه مدل‌های مصنوعی دوبعدی است. روش‌شناسی به طور دقیق در سناریوهای مختلف زیرسطحی، از جمله یک مدل همگن، یک مدل دو لایه، و یک نیم‌فضای رسانا شامل دو بی‌هنجاری مستطیلی، آزمایش شده است. داده‌های شبیه‌سازی‌شده از سه مدل مصنوعی با استفاده از کتابخانه PyGIMLi (روکر و همکاران، ۲۰۱۷)، که به طور خاص برای مدل‌سازی پیشرو ۲/۵ بعدی مقاومت ویژه الکتریکی DC و داده‌های SIP طراحی شده است، تولید شده‌اند. این فرایند شامل تعریف

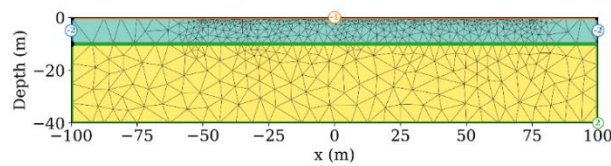
یک ناحیه واحد است، هدف ما بازیابی چهار پارامتر است که خواص الکتریکی آن را توصیف می‌کند. شکل‌های ۱-الف، ۱-ب، و ۱-پ نشان‌دهنده گسسته‌سازی مدل‌ها هستند: یک محیط همگن، یک مدل دو لایه، و یک نیم‌فضا که شامل دو بی‌هنجاری مستطیلی است. این پیکربندی‌ها به ترتیب مربوط به یک، دو و سه ناحیه در چارچوب وارون‌سازی هستند. مدل همگن شامل پیکربندی یک ناحیه‌ای است که در آن فرض می‌شود تمامی خواص الکتریکی در سراسر محیط یکنواخت هستند. جدول ۱ خواص الکتریکی مثال ۱ را بر اساس CCM نشان می‌دهد. این سناریو امکان تخمین پارامترهای CCM که نمایانگر خواص کلی زیرسطح هستند را فراهم می‌کند. در مقابل، مدل دو لایه نمایانگر پیکربندی‌ای است که هر لایه با مجموعه‌ای از پارامترهای CCM منحصر به فرد خود توصیف می‌شود.

در مورد مثال ۲، با وارد کردن چنین ساختارهای لایه‌ای، پیچیدگی فرایند وارون‌سازی افزایش می‌یابد و امکان توصیف محیط‌های زیرسطحی ناهمگن فراهم می‌شود. جدول ۲ پارامترهای طیفی اختصاص داده شده به هر لایه در مثال ۲ را ارائه می‌دهد. علاوه بر این، نمایش دو بی‌هنجاری مستطیلی که در یک نیم‌فضای همگن قرار گرفته‌اند و خواص طیفی آنها در جدول ۳ به تفصیل آمده است، پیچیدگی بیشتری را نشان می‌دهد و مناطقی از زیرسطح را با خواص الکتریکی متفاوت نشان می‌دهد. از طریق رویکرد مبتنی بر ناحیه و تعاریف مدل مصنوعی، نمونه‌برداری McMC را انجام می‌دهیم تا مقادیر بهینه پارامترها را برای هر ناحیه استنباط کنیم. این فرایند تکرارشونده شامل نمونه‌گیری از توزیع پسین پارامترهای مدل است که توسط داده‌های مشاهده شده و اطلاعات پیشین هدایت می‌شود. با تحلیل مستقل هر ناحیه، به بینش‌هایی در مورد خواص

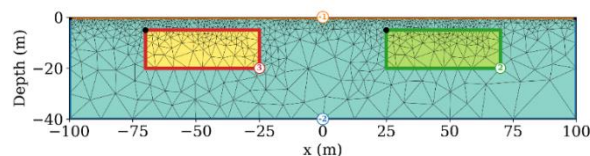
الکتریکی لایه‌های زیرسطحی مختلف دست می‌یابیم که به درک جامع ساختار زمین‌شناسی کمک می‌کند. جنبه کلیدی ارزیابی ما شامل بررسی زنجیره‌های McMC و نمودارهای گوشه‌ای (corner plots) است. این تصاویر، بینش‌های ارزشمندی درباره توزیع و تغییرپذیری پارامترهای مدل در سناریوهای مختلف زیرسطحی ارائه می‌دهند. از طریق تحلیل دقیق زنجیره‌های McMC، ما به درک عمیق‌تری از فضای پارامتری و تأثیرات آن بر نتایج وارون‌سازی می‌رسیم. پس از تکمیل فرایند نمونه‌برداری McMC، نمودارهای زنجیره‌ای تولید می‌کنیم تا تکامل هر پارامتر CCM را در طول تکرارها برای هر ناحیه از مدل زیرسطحی ترسیم کنیم. شکل‌های ۲ و ۳ تاریخچه نمونه‌برداری پارامترهای CCM را پس از اعمال الگوریتم نمونه‌برداری McMC پیشنهادی بر روی مثال‌های مصنوعی اول و دوم به ترتیب نشان می‌دهند. در همه مثال‌ها، فضای مدل با استفاده از ۳۲ گام بردار نمونه‌برداری می‌شود و حالت اولیه زنجیره‌های مارکوف به‌طور تصادفی از یک توزیع اولیه یکنواخت ترسیم می‌شود. همان‌طور که مشاهده می‌شود، این نمودارهای زنجیره‌ای، اطلاعات ارزشمندی درباره رفتار همگرایی و پایداری برآورد پارامترها ارائه می‌دهند. خصوصاً که، مشاهده می‌کنیم که چگونه مقدار هر پارامتر در طول تکرارهای McMC نوسان می‌کند و یک نمای کلی جامع از فرایند نمونه‌برداری پارامترها را ارائه می‌دهد. همچنین مشاهده می‌شود که با تکرارهای متوالی الگوریتم نمونه‌برداری McMC، حالت‌های تصادفی اولیه به توزیع هدف نزدیک‌تر می‌شوند. نمونه‌های اولیه در ابتدای زنجیره، در طول مرحله burn-in (همگرایی اولیه)، ممکن است به‌طور دقیق توزیع هدف را نمایان نکنند. بنابراین، این نمونه‌های اولیه معمولاً هنگام محاسبه توزیع پسین و عدم قطعیت در پارامترهای مدل کنار گذاشته می‌شوند.



(الف)



(ب)



(پ)

شکل ۱. نمایش مدل‌های مصنوعی زیرسطحی. الف) مدل همگن که نمایانگر ویژگی‌های الکتریکی یکنواخت در سراسر محیط است، ب) مدل دو لایه‌ای با لایه‌های متمایز که توسط پارامترهای منحصر به فرد مدل کول-کول توصیف می‌شوند، پ) مدل نیم‌فضا که شامل دو بی‌هنجاری مستطیلی است و نواحی با ویژگی‌های الکتریکی متفاوت را نشان می‌دهد.

جدول ۱. پارامترهای طیفی مرتبط با مدل نیم‌فضای همگن.

پارامتر	مقادیر
$\log \rho \ (\Omega \cdot m)$	۲/۳۰۱
$\mu \ (V/V)$	۰/۴
$\log \tau \ (s)$	-۰/۶۹۸
c	۰/۵

جدول ۲. پارامترهای طیفی مرتبط با مدل نیم‌فضای دو لایه.

پارامترهای طیفی	مقادیر لایه بالایی	مقادیر لایه پایینی
$\log \rho \ (\Omega \cdot m)$	۲/۳۰۱	۱/۴۷۷
$\mu \ (V/V)$	۰/۴	۰/۲
$\log \tau \ (s)$	-۰/۶۹۸	-۰/۳۹۷
c	۰/۵	۰/۲

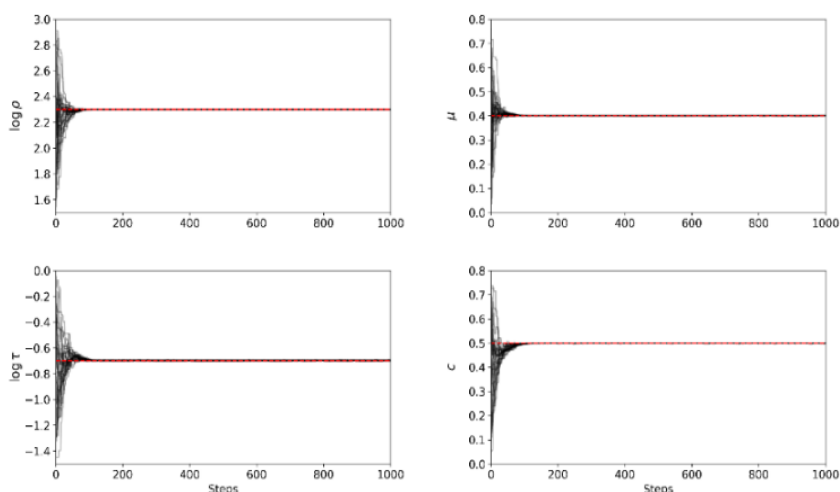
جدول ۳. پارامترهای طیفی مرتبط با مدل نیم‌فضای دارای دو بی‌هنجاری.

پارامترهای طیفی	مقادیر بی‌هنجاری ۱	مقادیر بی‌هنجاری ۲	مقادیر پس زمینه
$\log \rho \ (\Omega \cdot m)$	۲/۴۷۷	۲/۶۰۲	۱/۹۰۳
$\mu \ (V/V)$	۰/۴۵	۰/۵	۰/۲
$\log \tau \ (s)$	-۰/۰۴۵	-۰/۰۰۴۳	-۰/۳۹۷
c	۰/۵	۰/۴	۰/۶

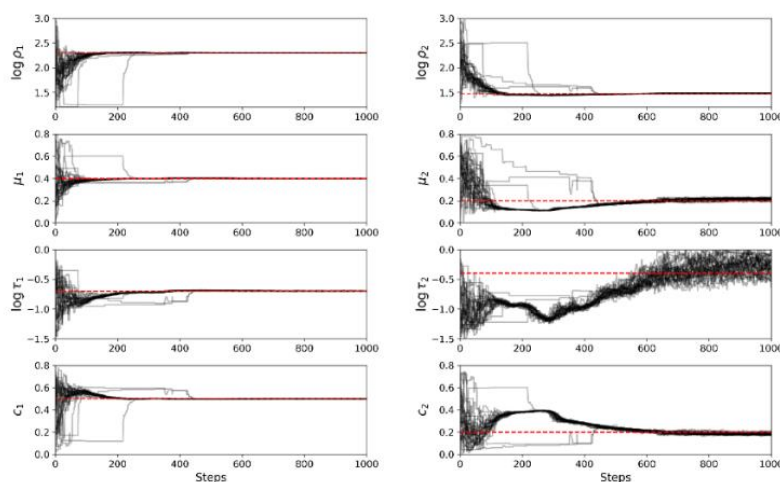
وارون‌سازی ارائه‌شده به‌طور کلی در ثبت خصوصیات الکتریکی بی‌هنجاری‌های زیرسطحی قابل‌اعتماد است. نمودارهای زنجیره‌ای همچنین پیشرفت مقادیر پارامتری هر پارامتر CCM را درون دو ناحیه بی‌هنجار نشان می‌دهند و امکان ارزیابی سازگاری و همگرایی برآوردهای پارامتری را برای این مناطق فراهم می‌کنند.

برای نشان‌دادن فرایند نمونه‌برداری MCMC برای مورد آزمایشی سوم، شکل ۴ تاریخچه نمونه‌برداری برای تمامی پارامترهای طیفی مرتبط با هر ناحیه را نمایش می‌دهد. زنجیره‌ها نشان‌دهنده همگرایی به توزیع هدف برای بیشتر پارامترها هستند، به‌استثنای $\log \tau_2$ و $\log \tau_3$ که همگرایی جزئی را نشان می‌دهند. این موضوع نشان می‌دهد که روش

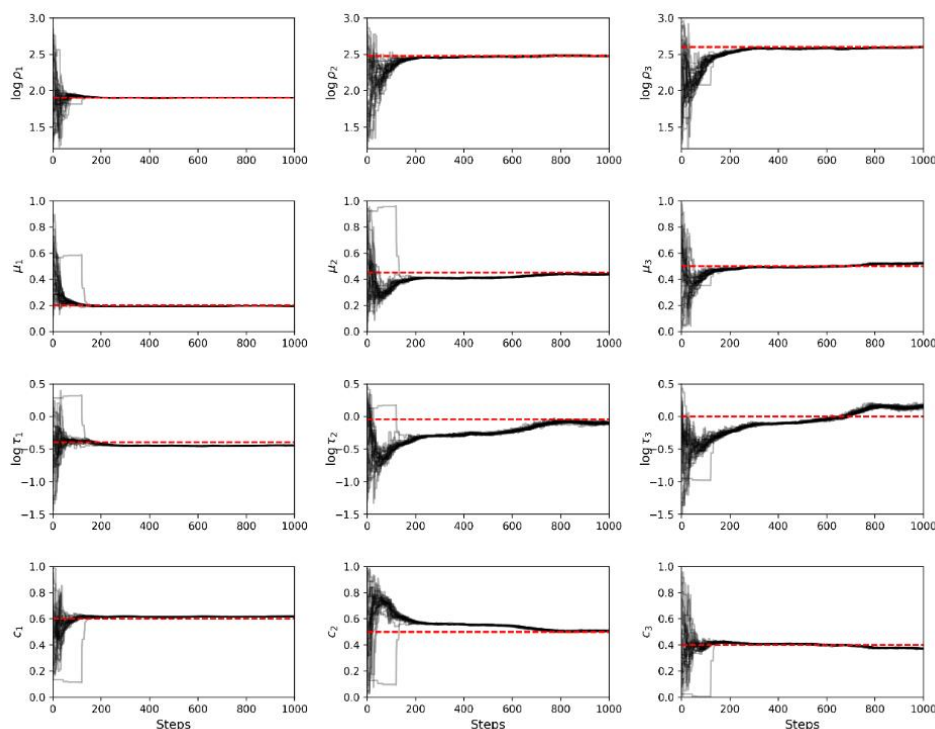
برای هر پارامتر به صورت مستقل را نمایش می دهند. ابتدا نمودار گوشه ای مرتبط با مدل زمین همگن (شکل ۵) را بررسی می کنیم. نمودارهای توزیع که رابطه بین لگاریتم مقاومت ویژه ($\log \rho$) و سایر پارامترهای طیفی c ، $\log \tau$ ، μ را نشان می دهند، به شکل دایره ای ظاهر می شوند. این شکل دایره ای نشان دهنده همبستگی ضعیف بین $\log \rho$ و این پارامترها است. در نتیجه، تغییرات در مقاومت ویژه تحت تأثیر تغییرات در بارپذیری، زمان آسایش، یا نمای مدل (c) قرار نمی گیرد. این مشاهده نشان می دهد که در مدل همگن، تغییرات در مقاومت ویژه بر دیگر خصوصیات الکتریکی تأثیری نمی گذارد و فضای پارامتری مقاومت ویژه نسبتاً غیر مرتبط است.



شکل ۱. نمودارهای زنجیره ای برای پارامترهای مدل همگن. CCM نمودارهای زنجیره ای تکامل هر پارامتر CCM را در طول تکرارهای MCMC برای مدل همگن نشان می دهند. این نمودارها بینشی در مورد رفتار همگرایی و پایداری تخمین های پارامتر در طی فرایند وارون سازی ارائه می دهند.



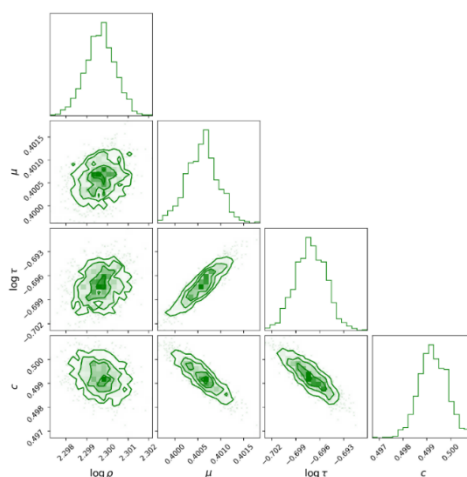
شکل ۳. نمودارهای زنجیره ای برای پارامترها CCM در پیکربندی مدل نیم فضایی دو لایه. نمودارهای زنجیره ای پیشرفت مقادیر پارامترهای CCM را در مناطق بی هنجار زیرسطحی نشان می دهند.



شکل ۴. نمودارهای زنجیره‌ای برای پارامترهای CCM در سه محیط مختلف در پیکربندی نیم‌فضای دارای دو بی‌هنجاری مستطیلی. این نمودارها مناسب بودن بازایی پارامترها را نشان می‌دهند و قابلیت اطمینان و دقت فرایند وارون‌سازی را در توصیف ساختارهای پیچیده زیرسطحی تأیید می‌کنند.

به افزایش دارد و بالعکس. این همبستگی مثبت بدین معنی است که زمان‌های آسایش طولانی‌تر با بارپذیری بیشتر همراه هستند. به عبارتی ساده‌تر، توانایی محیط در قطبش و نگهداری بار به مدت زمان اثر قطبش القایی مرتبط است. این تفاسیر از نمودارهای گوشه‌ای اطلاعات با ارزشی را در مورد روابط بین پارامترها در محیط همگن فراهم می‌کنند. واضح است که هیچ همبستگی‌ای بین $\log \tau$ و سایر پارامترها وجود ندارد، که نشان می‌دهد مقاومت ویژه به صورت مستقل رفتار می‌کند. از سوی دیگر، همبستگی‌های مشاهده شده بین c ، μ و $\log \tau$ بر وابستگی‌های پیچیده تأکید می‌کنند و درک عمیق‌تری از خصوصیات الکتریکی و تعاملات آنها درون مدل ارائه می‌دهند. علاوه بر این، هیستوگرام‌های روی محور اصلی یک توزیع به شکل زنگوله و تک‌مودال را نمایش می‌دهند که دارای یک بیشینه در مقدار واقعی مدل است.

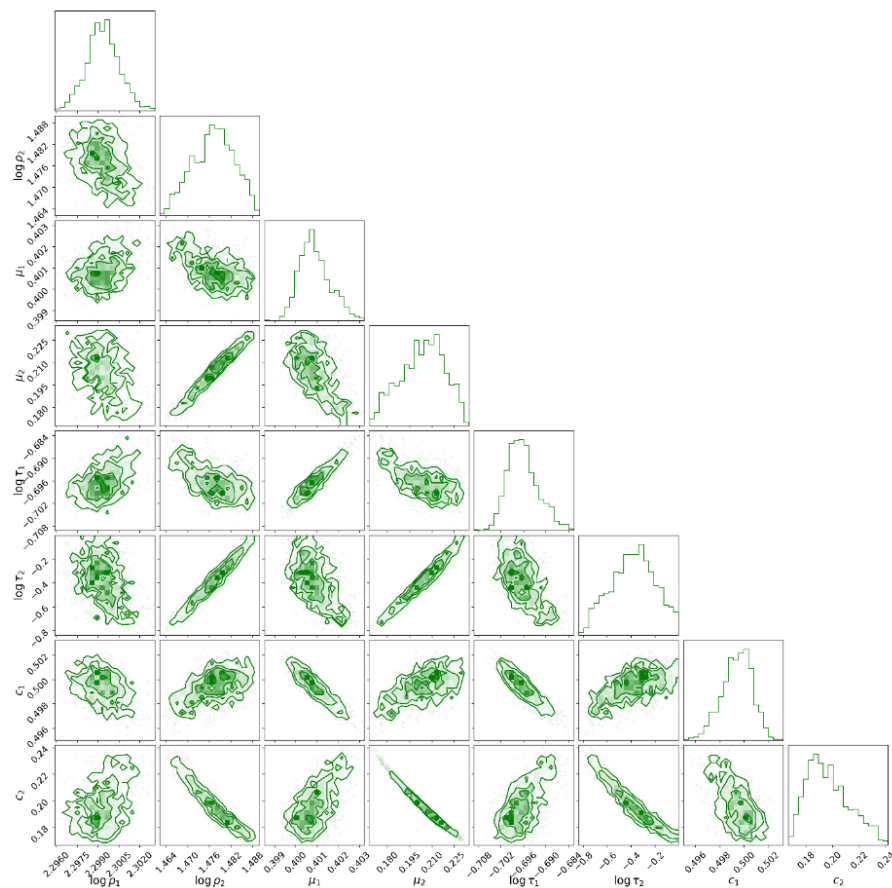
از سوی دیگر، نمودارهای گوشه‌ای برای نمای مدل (c) در برابر بارپذیری (μ) و زمان آسایش ($\log \tau$) یک توزیع بیضوی شکل با زاویه‌ای حدوداً -45° درجه را نمایش می‌دهند. این جهت‌گیری نشان‌دهنده همبستگی منفی بین این پارامترها است. همان‌طور که مقدار c افزایش می‌یابد، هر دو μ و $\log \tau$ تمایل به کاهش دارند و بالعکس. این همبستگی منفی ممکن است یک رابطه فیزیکی زیرین در محیط همگن را منعکس کند که در آن رسانایی وابسته به فرکانس بالاتر با بارپذیری کمتر و زمان‌های آرامش کوتاه‌تر مطابقت دارد، احتمالاً به دلیل طبیعت واکنش محیط به قطبش القایی. این نتایج با موارد گزارش شده در مادسن و همکاران (۲۰۱۷) سازگار است. نمودار گوشه‌ای بین $\log \tau$ و μ نیز یک توزیع بیضوی شکل با زاویه‌ای حدوداً 45° درجه را نشان می‌دهد. این زاویه نشان‌دهنده همبستگی مثبت بین این پارامترها است: با افزایش $\log \tau$ ، μ نیز تمایل



شکل ۵. نمودار گوشه‌ای برای پارامترهای CCM در مدل همگن. نمودار گوشه‌ای (corner plot) نمای دوبعدی از فضای پارامترها ارائه می‌دهد که همبستگی‌ها و وابستگی‌های میان پارامترهای CCM را در هر منطقه برای مدل‌های همگن و دولایه نشان می‌دهد. این نمایش تصویری بینشی در مورد تعاملات پیچیده بین ویژگی‌های مختلف الکتریکی در محیط زیرسطحی ارائه می‌دهد.

نمودار گوشه‌ای $\log \tau_1$ و c_1 ، توزیع بیضی‌شکل باریک با زاویه‌ای حدوداً 45° - درجه نشان‌دهنده یک همبستگی منفی است. به همین ترتیب، نمودار $\log \tau_2$ در برابر c_2 نیز توزیع بیضی‌شکل باریک با زاویه‌ای حدوداً 45° - درجه را نشان می‌دهد که بیانگر یک همبستگی منفی است. همبستگی ضعیف بین $\log \rho_1$ و سایر پارامترها نشان می‌دهد که مقاومت‌ویژه لایه بالایی به‌طور مستقل از سایر پارامترها رفتار می‌کند. در مقابل، همبستگی‌های مربوط به $\log \rho_2$ ، μ_2 ، c_2 و $\log \tau_2$ به پیچیدگی‌های وابستگی‌ها در لایه پایینی اشاره دارد. این روابط نشان می‌دهد که بارپذیری، زمان آسایش و رسانایی وابسته به فرکانس در لایه پایینی بیشتر به هم مرتبط هستند، در حالی که لایه بالایی در مورد مقاومت‌ویژه رفتار مستقل‌تری دارد. شکل ۶ همچنین توزیع‌های پسین یک‌بعدی حاشیه‌ای برای شش پارامتر طیفی را که از نمونه‌های پس از فاز (burn-in) تخمین زده شده‌اند، در قطر نمودار گوشه‌ای نمایش می‌دهد. نمودارهای هیستوگرام مربوط به پارامترهای لایه بالایی کمتر به چپ یا راست کشیده شده‌اند و بیشتر به توزیع نرمال شباهت دارند. در مقابل، هیستوگرام‌های پارامترهای لایه پایینی به چپ و راست کشیدگی نشان می‌دهند. این کشیدگی ممکن است ناشی از همبستگی‌های اضافی بین پارامترهای طیفی لایه پایینی باشد.

شکل ۶ نمودارهای گوشه‌ای برای مدل دولایه را نمایش می‌دهد. نمودارهای گوشه‌ای بین $\log \rho_1$ و سایر پارامترها ($c_1, c_2, \log \tau_1, \log \tau_2, \mu_1$, and μ_2) توزیعی دایره‌ای را نشان می‌دهند که نشان‌دهنده همبستگی ضعیف است. این موضوع نشان می‌دهد که تغییرات در مقاومت‌ویژه لایه بالایی ($\log \rho_1$) تا حد زیادی مستقل از تغییرات در سایر پارامترها است. برای لایه پایینی، نمودارهای توزیع برای $\log \rho_2$ در برابر μ_2 و $\log \tau_2$ به شکل بیضی‌های باریک با زاویه‌ای حدوداً 45° - درجه ظاهر می‌شوند. این موضوع نشان‌دهنده یک همبستگی مثبت بین $\log \rho_2$ و هر دو μ_2 و $\log \tau_2$ است. به عبارت دیگر، با افزایش $\log \rho_2$ ، μ_2 و $\log \tau_2$ نیز تمایل به افزایش دارند و بالعکس. این موضوع نشان می‌دهد که مقاومت‌ویژه بالاتر در لایه پایینی با بارپذیری بیشتر و زمان‌های آسایش طولانی‌تر همراه است. برعکس، نمودار گوشه‌ای $\log \rho_2 - c_2$ توزیعی به شکل بیضی باریک با زاویه‌ای حدوداً 45° - درجه را نشان می‌دهد که نشان‌دهنده یک همبستگی منفی بین این پارامترها است. همبستگی متقابل بین μ_2 و c_2 نیز یک خط مورب با زاویه‌ای حدوداً 45° - درجه تشکیل می‌دهد که نشان‌دهنده یک همبستگی منفی قوی است. علاوه بر این، نمودار μ_2 در برابر $\log \tau_2$ یک خط مورب با زاویه‌ای حدوداً 45° - درجه تشکیل می‌دهد که نشان‌دهنده یک همبستگی مثبت قوی است. در مورد



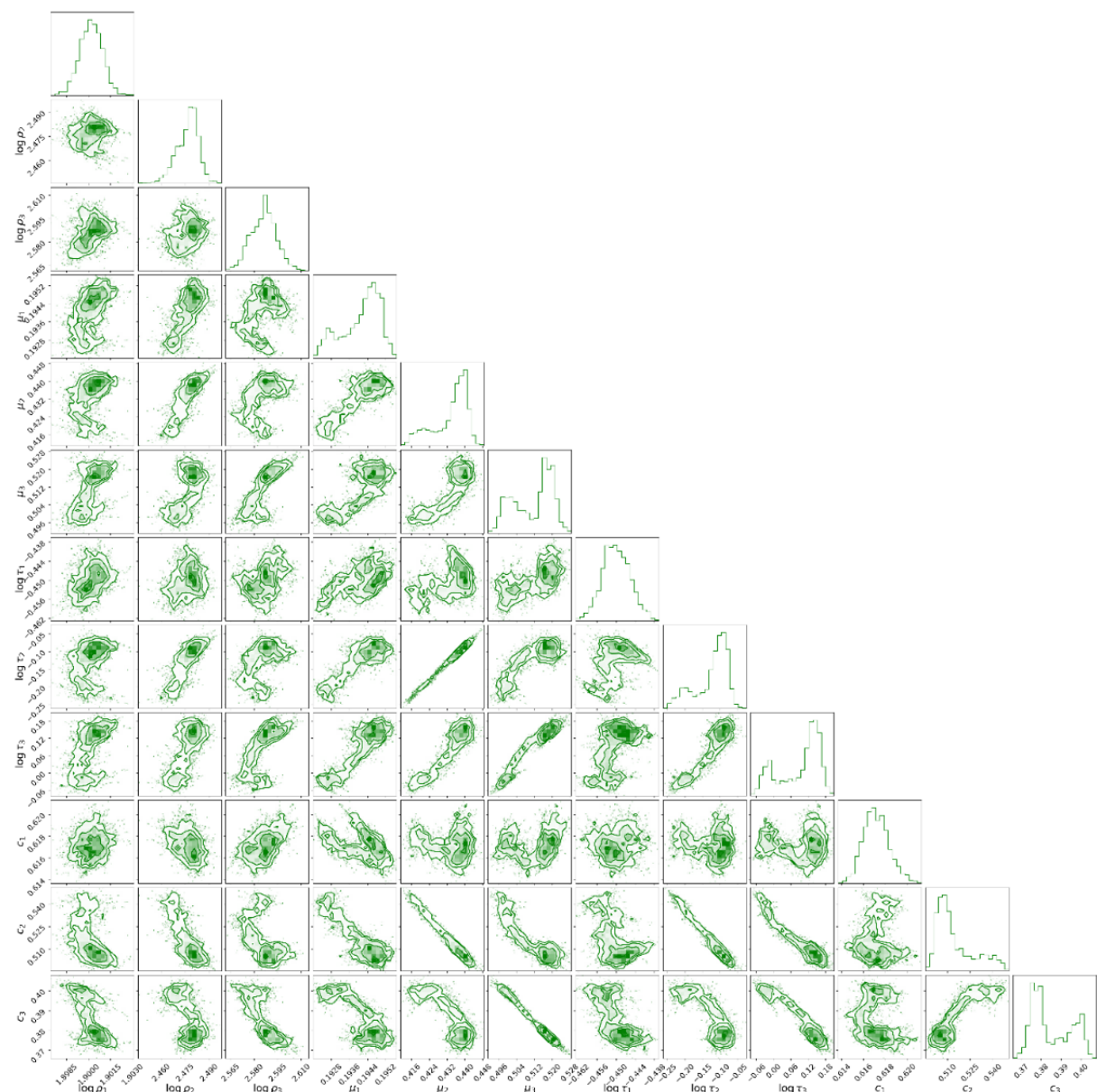
شکل ۶. نمودار گوشه‌ای برای پارامترهای CCM در مدل دولایه.

این بدان معناست که مقادیر بالاتر c_2 با مقادیر کمتری از μ_2 ، μ_3 و $\log \tau_2$ همراه است. به‌طور مشابه، مقایسه‌های c_3 با μ_3 و $\log \tau_3$ نیز زاویه -45° درجه‌ای را نشان می‌دهد که همبستگی‌های منفی را مشخص می‌کند. سایر ترکیب‌های پارامتری همبستگی‌های ضعیف یا ناچیزی را نشان می‌دهند که نشان می‌دهد تغییرات در یک پارامتر عمدتاً مستقل از تغییرات در سایر پارامترهاست. علاوه بر این، پتل‌های قطر شکل ۷ توزیع‌های پسین یک‌بعدی حاشیه‌ای برای دوازده پارامتر مدل را نمایش می‌دهند که از نمونه‌های پس از فاز سوختن استخراج شده‌اند. هیستوگرام‌های مربوط به پارامترهای طیفی مرتبط با بی‌هنجاری‌ها یک توزیع چندحالتی (multimodal) با کشیدگی به هر دو طرف را نشان می‌دهند. مشابه مورد ۲، این مشاهده ممکن است به همبستگی‌های افزایش‌یافته بین پارامترهای بی‌هنجاری‌ها نسبت داده شود. هدف اصلی از نمایش شدت همبستگی بین پارامترهای CCM این نیست

برای تحلیل نتایج تخمین پارامترهای به‌دست‌آمده از طریق McMC در مورد مورد آزمایش سوم، شکل ۷ همبستگی‌های متقابل بین پارامترهای طیفی را در پتل‌های خارج از قطر نشان می‌دهد. نمودار گوشه‌ای μ_2 در برابر $\log \tau_2$ یک توزیع باریک و بیضی‌شکل را نشان می‌دهد که تقریباً در زاویه 45° درجه قرار دارد و نشان‌دهنده همبستگی مثبت بین این پارامترهاست. به‌طور مشابه، نمودارهای μ_3 در برابر $\log \tau_2$ و $\log \tau_3$ نیز نشان‌دهنده این همبستگی مثبت با زاویه 45° درجه هستند و نشان می‌دهند که افزایش در τ_3 با افزایش در هر دو زمان آسایش مرتبط است. علاوه بر این، نمودار $\log \tau_2$ در برابر $\log \tau_3$ نیز زاویه 45° درجه‌ای را نمایش می‌دهد که رابطه مثبت بین زمان‌های آسایش دو ناهنجاری را تقویت می‌کند. در عوض، نمودارهای c_2 در برابر μ_2 ، μ_3 و $\log \tau_2$ و $\log \tau_3$ توزیع‌های باریک بیضی‌شکل با زاویه‌ای تقریباً -45° درجه را نشان می‌دهند که بیانگر همبستگی منفی است.

و انحراف معیار برای هر پارامتر را نمایش می‌دهند. نتایج برای اولین مثال مصنوعی که نسبتاً ساده است، در جداول گنجانده نشده‌اند. تحلیل نشان می‌دهد که مقادیر میانگین تخمینی به مقادیر واقعی بسیار نزدیک هستند، که نشان‌دهنده تخمین دقیق پارامترهای μ ، $\log \rho$ و $\log \tau$ با تغییرات کم است. با این حال، پارامترهایی مانند $\log \tau$ و c تغییرات بیشتری از خود نشان می‌دهند، که پیچیدگی‌های موجود در تعیین دقیق این پارامترها را برجسته می‌کند.

که به ابهام احتمالی یک مدل معادل اشاره کنیم. بلکه هدف ما نشان دادن این است که با افزایش تعداد پارامترهای CCM، همبستگی بین این پارامترها قوی‌تر می‌شود و در نتیجه، بازیابی پارامترهای طیفی زیرسطحی پیچیده‌تر می‌شود. یک تحلیل آماری روی آزمایش‌های مصنوعی انجام شد تا پارامترهای تخمینی که از روش نمونه‌گیری McMC به دست آمده را با مقادیر واقعی مقایسه کنیم. نتایج برای مثال‌های ۲ و ۳ در جداول ۴ و ۵ به ترتیب نشان داده شده‌اند، که میانگین



شکل ۷. نمودار گوشه‌ای برای پارامترهای CCM در مدل نیم‌فضای در حضور دو بی‌هنجاری.

جدول ۴. مقایسه پارامترهای طیفی برآوردشده با مقادیر واقعی مرتبط با مدل دولایه.

پارامترهای طیفی	میانگین	مقدار واقعی	انحراف معیار
$(\Omega. m)\log \rho_1$	۲/۲۹۹۳۷	۲/۳۰۱۳۰	۰/۰۰۱۱۷
$(\Omega. m)\log \rho_2$	۱/۴۷۷۱۱	۱/۴۷۷۱۲	۰/۰۰۵۶۷
$(V/V)\mu_1$	۰/۴۰۰۹	۰/۴	۰/۰۰۰۷۳
$(V/V)\mu_2$	۰/۲۰۳۵۸	۰/۲	۰/۰۱۴۴۹
$(s)\log \tau_1$	-۰/۶۹۶۱۴	-۰/۶۹۸۹۷	۰/۰۰۴۰۴
$(s)\log \tau_2$	-۰/۳۸۳۰۶	-۰/۳۹۷۴۹	۰/۱۸۱۵۱
c_1	۰/۴۹۹۴	۰/۵	۰/۰۰۱۲۳
c_2	۰/۱۹۶۸۸	۰/۲	۰/۰۱۵۹۳

جدول ۵. مقایسه مقادیر پارامترهای طیفی برآوردشده با مقادیر واقعی مرتبط با مدل نیم‌فضای دارای دو بی هنجاری.

پارامترهای طیفی	میانگین	مقدار واقعی	انحراف معیار
$(\Omega. m)\log \rho_1$	۱/۹۰۰۱۷	۱/۹۰۳۰۹	۰/۰۰۰۷۷
$(\Omega. m)\log \rho_2$	۲/۴۷۶۶۶	۲/۴۷۷۱۲	۰/۰۰۶۶۲
$(\Omega. m)\log \rho_3$	۲/۵۸۶۰۵	۲/۶۰۲۰۶	۰/۰۰۸۰۳
$\mu_1 (V/V)$	۰/۱۹۴۱۲	۰/۲	۰/۰۰۰۸۴
$\mu_2 (V/V)$	۰/۴۳۳۷۵	۰/۴۵	۰/۰۰۷۷۳
$\mu_3 (V/V)$	۰/۵۱۱۵۷	۰/۵	۰/۰۰۸۷۸
$\log \tau_1 (s)$	-۰/۴۴۹۹۹	-۰/۳۹۷۴۹	۰/۰۰۴۳۷
$\log \tau_2 (s)$	-۰/۱۲۳۲۶	-۰/۰۴۵۷۶	۰/۰۴۶۱۵
$\log \tau_3 (s)$	۰/۰۹۱۶۶	-۰/۰۰۴۳۶	۰/۰۷۰۹۶
c_1	۰/۶۱۷۱۸	۰/۶	۰/۰۰۱۱۹
c_2	۰/۵۱۴۹۵	۰/۵	۰/۰۱۲۹۶
c_3	۰/۳۸۵۲	۰/۴	۰/۰۰۹۹۴

۴. نتیجه‌گیری

طیفی وجود دارد و این همبستگی با افزایش پیچیدگی مدل‌های زیرسطحی برجسته‌تر می‌شود. تحلیل همبستگی که از نمودارهای گوشه‌ای توزیع احتمال پسین برای پارامترهای کول-کول به دست آمده، نشان می‌دهد که همبستگی ضعیفی بین $\log \rho$ و پارامترهای طیفی $\log \tau$ ، μ و c وجود دارد. با این حال، این همبستگی ضعیف ممکن است در مدل‌های زیرسطحی پیچیده‌تر (مانند موارد موجود در مثال دوم و سوم) با افزایش تعداد پارامترهای کول-کول بیشتر نمایان شود. در مدل زمین دو لایه، وابستگی‌های قابل توجهی بین $\log \rho_2$ ، μ_2 ، $\log \tau_2$ و c_2 مشاهده شد که نشان‌دهنده روابط پیچیده‌تری در لایه پایینی در مقایسه با لایه بالایی است. به‌طور

با رویکرد بیزین، برای وارون‌سازی پارامترهای طیفی مدل کول-کول از داده‌های IP حوزه فرکانس استفاده شد. علاوه بر این، تأثیر وابستگی و همبستگی پارامترهای مدل کول-کول (CCM) بر بازیابی خواص الکتریکی زیرسطح مورد مطالعه قرار گرفت. روش نمونه‌گیری McMC پیشنهادی به مدل‌های مصنوعی مختلف با مقادیر متفاوت پارامترهای طیفی اعمال شد. نتایج با استفاده از نمودارهای زنجیره‌ای و گوشه‌ای نمایش داده شدند که به درک روابط بین پارامترهای مختلف CCM و ارزیابی انسجام و دقت فرایند تخمین پارامترها از طریق تحلیل عدم قطعیت کمک کردند. مشاهده شد که همبستگی قوی بین پارامترهای

با به کارگیری روش وارون سازی بیزین برای داده های واقعی SIP، پتانسیل زیادی برای بهبود درک از بررسی های ژئوفیزیکی و دستیابی به بینش های عمیق تر در مورد خواص زیرسطح وجود دارد. علاوه بر این، زمینه برای کارهای بیشتر در راستای بهبود روش فعلی وجود دارد، با تمرکز بر افزایش کارایی محاسباتی و سازگاری با سناریوهای زمین شناسی متنوع تر. از سوی دیگر، روش های سنتی نمونه برداری McMC برای مقابله با چالش های ناشی از شدت همبستگی بین پارامترهای مدل با مشکل مواجه هستند، که به شدت بر دقت بازایی مدل زیرسطحی و ارزیابی عدم قطعیت تأثیر می گذارد. در نتیجه، نیاز به توسعه و به کارگیری الگوریتم های پیشرفته تر نمونه برداری McMC، به ویژه در زمینه وارون سازی داده های SIP احساس می شود.

مراجع

- Bérubé, C. L., Chouteau, M., Shamsipou, M., Enkin, P., & Olivo, G. R. (2017). Bayesian inference of spectral induced polarization parameters for laboratory complex resistivity measurements of rocks and soils. *Computers and Geosciences*, 105, 51-64.
- Binley, A., & Slater, L. (2020). *Resistivity and induced polarization: Theory and applications to the near-surface earth*. Cambridge University Press.
- Binley, A., Slater, L. D., Fukes, M., & Cassiani, G. (2005). Relationship between spectral induced polarization and hydraulic properties of saturated and unsaturated sandstone. *Water Resources Research*, 41(12), W12417.
- Blaschek, R., Hördt, A., & Kemna, A. (2008). A new sensitivity-controlled focusing regularization scheme for the inversion of induced polarization data based on the minimum gradient support. *Geophysics*, 73(2), F45-F54.
- Boadu, F. K., & Seabrook, B. (2000). Estimating hydraulic conductivity and porosity of soils from spectral electrical response measurements. *Journal of Environmental and Engineering Geophysics*, 5(1), 1-9.
- Chen, J., Kemna, A., & Hubbard, S. (2008). A comparison between Gauss-Newton and Markov-chain Monte Carlo-based methods for inverting spectral induced-polarization data for Cole-Cole parameters. *Geophysics*, 73, F247-F259.
- Chib, S., & Greenberg, E. (1995). Understanding the Metropolis-Hastings Algorithm. *The American Statistician*, 49 (4), 327-335.
- Cole, Kenneth S., Cole, & Robert H. (1941). Dispersion and Absorption in Dielectrics I. Alternating Current Characteristics. *The Journal of Chemical Physics*, 9(4), 341-351.
- De Pasquale, G., & Linde, N., (2017). On Structure-Based Priors in Bayesian Geophysical Inversion. *Geophysical Journal International*, 208, 1342-1358.
- Dey, A., & Morrison, M. F. (1979). Resistivity modeling for arbitrarily shaped two-dimensional structures. *Geophysical Prospecting*, 27, 106-136.
- Fiandaca, G., Auken, E., Gazoty, A., & Christiansen, A. V. (2012). Time-domain induced polarization: Full-decay forward modeling and 1D laterally constrained inversion of Cole-Cole parameters. *Geophysics*, 77, E213-E225.
- Fiandaca, G., Madsen, L., & Maurya, P. (2017). Re-parameterization of the Cole-Cole Model for Improved Spectral Inversion of Induced Polarization Data. *Near Surface Geophysics*. 2018, 16, 385-399.
- Fiandaca, G., Ramm, J., Binley, A., Gazoty, A., Christiansen, A. V., & Auken, E. (2013). Resolving spectral information from time domain induced polarization data through 2-D inversion. *Geophysical Journal International*, 192, 631-646.

خاص، قابلیت بارپذیری، زمان آسایش و نمای CCM در لایه پایینی همبستگی بیشتری نشان می دهند، در حالی که مقاومت ویژه در لایه بالایی رفتار مستقل تری دارد. در مثال سوم، همبستگی بین مقاومت ویژه و پارامترهای طیفی نادیده گرفته شده است، زیرا تأثیر ρ بر سیگنال پلاریزاسیون القایی در مثال های اول و دوم کم بود. با این حال، همبستگی های قابل توجهی بین پارامترهای μ ، $\log \tau$ و c در رابطه با نواحی غیر معمول مشاهده شد. به طور خاص، یک همبستگی مثبت بین μ_2 ، μ_3 ، $\log \tau_2$ و $\log \tau_3$ وجود دارد، در حالی که همبستگی منفی بین c_2 ، c_3 ، μ_2 ، μ_3 ، $\log \tau_2$ و $\log \tau_3$ و پارامترهای μ و $\log \tau$ ذکر شده، شناسایی شد. علاوه بر این، هیچ وابستگی واضحی بین پارامترهای طیفی زمینه همگن و آنهایی که مربوط به نواحی بی هنجار هستند، مشاهده نشد. نگاهی به آینده، نتایج امیدوارکننده به دست آمده از مدل های مصنوعی یک مبنای قوی برای فعالیتهای آتی با استفاده از داده های واقعی ایجاد می کند.

- Foreman-Mackey, D., Farr, W. M., Sinha, M., Archibald, A. M., Hogg, D. W., Sanders, J. S., Zuntz, J., Williams, P. K. G., Nelson, A. R. J., de Val-Borro, M., Erhardt, T., Pashchenko, I., & Abril Pla, O. A. (2019). emcee v3: A Python ensemble sampling toolkit for affine-invariant MCMC. *Journal of Open Source Software*, 4(43), 1864.
- Foreman-Mackey, D., Hogg, D. W., Lang, D., & Goodman, J. (2013). emcee: The MCMC Hammer. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 125(925), 306.
- Gelman, A., Carlin, J. B., Stern, H. S., & Rubin, D. B. (2014). *Bayesian data analysis*. 3rd ed. Chapman and Hall.
- Gelman, A., Roberts, G. O., & Gilks, W. R. (1994). *Bayesian Statistics 5*, Oxford University Press, 599–607.
- Ghanati, R., & Müller-Petke, M. (2021). A homotopy continuation inversion of geoelectrical sounding data. *Journal of Applied Geophysics*, 191, p.104356.
- Ghorbani, A., Camerlynck, C., Florsch, N., Cosenza, P., & Revil, A. (2007). Bayesian inference of the Cole-Cole parameters from time-and frequency-domain induced polarization. *Geophysical Prospecting*, 55, 589–605.
- Goodman, J., & Weare, J. (2010). Ensemble samplers with affine invariance. *Communications in Applied Mathematics and Computational Science*, 5, 65–80.
- Günther, T., & Martin, T. (2016). Spectral two-dimensional inversion of frequency-domain induced polarisation data from a mining slag heap. *Journal of Applied Geophysics*, 135, 436–448.
- Hastings, W. K. (1970). Monte Carlo sampling methods using Markov chains and their applications. *Biometrika*, 57, 97–109.
- Hoffman, M. D., & Gelman, A. (2014). The No-U-Turn sampler: adaptively setting path lengths in Hamiltonian Monte Carlo. *Journal of Machine Learning Research*, 15(1), 1593–1623.
- Jaggar, S. R., & Fell, P. A. (1988). Forward and inverse Cole–Cole modelling in the analysis of frequency domain electrical impedance data. *Exploration Geophysics*, 19, 463–470.
- Jardani, A., Revil, A., & Dupont, J. P. (2013). Stochastic joint inversion of hydrogeophysical data for salt tracer test monitoring and hydraulic conductivity imaging. *Advances in Water Resources*, 52, 62–77.
- Johnson, T. C., & Thomle, J. (2018). 3-D decoupled inversion of complex conductivity data in the real number domain. *Geophysical Journal International*, 212, 284–296.
- Keery, J., Binley, A., Elshenawy, A., & Clifford, J. (2012). Markov-chain Monte Carlo estimation of distributed Debye relaxations in spectral induced polarization. *Geophysics*, 77(2), E159–E170.
- Kemna, A., Binley, A., & Slater, L. (2004). Crosshole IP imaging for engineering and environmental applications. *Geophysics*, 69, 97–107.
- Luo, Y., & Zhang, G., (1998). Theory and application of spectral induced polarization. SEG, *Geophysical Monograph Series*, no. 8.
- MacKay, D. (2003). *Information Theory, Inference, and Learning Algorithms*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Madsen, L. M., Fiandaca, G., Auken, E., & Christiansen, A. V. (2017). Time-domain induced polarization – an analysis of Cole–Cole parameter resolution and correlation using Markov Chain Monte Carlo inversion. *Geophysical Journal International*, 211, 1341–1353.
- Metropolis, N., Rosenbluth, M. N., Rosenbluth, A. W., & Teller, A. H. (1953). Equation of state calculations by fast computing machines. *Journal of Chemical Physics*, 21, 1987–1992.
- Mosegaard, K., & Tarantola, A. (1995). Monte Carlo sampling of solutions to inverse problems. *Journal of Geophysical Research, Atmospheres*, 100, 12431–12448.
- Pelton, W. H., Ward, S. H., Hallof, P. G., Sill, W. R., & Nelson, P. H. (1978). Mineral discrimination and removal of inductive coupling with multifrequency IP. *Geophysics*, 43(3), 588–609.
- Roudsari, M. S., Ghanati, R., & Bérubé, C. L. (2024). Spectral induced polarization tomography inversion: Hybridizing homotopic continuation with Bayesian inversion. *Geophysics*, 89(5), 1–63.
- Rücker, C., Günther, T., & Spitzer, K. (2006). Three-dimensional modeling and inversion of DC resistivity data incorporating topography—part I: modeling. *Geophysical Journal International*, 166, 495–505.
- Rücker, C., Günther, T., & Wagner, F. M. (2017). pyGIMLi: An open-source library for modelling and inversion in geophysics. *Computers & Geosciences*, 109, 106–123.
- Sambridge, M., & Mosegaard, K. (2002) Monte Carlo methods in geophysical inverse problems. *Reviews of Geophysics*, 40(3), 3.13.29
- Tarantola, A. (2004). *Inverse Problem Theory and Methods for Model Parameter Estimation*. Society for Industrial and Applied Mathematics, USA.
- Vanhala, H. (1997). Mapping oil-contaminated sand and till with the spectral induced polarization (SIP) method. *Geophysical Prospecting*, 45(2), 303326.
- Vrúgt, J. A. (2016). Markov chain Monte Carlo

- simulation using the DREAM software package: Theory, concepts, and MATLAB implementation. *Environmental Modelling and Software*, 75, 273316.
- Weller, A., & Slater, L. (2023). Ambiguity in induced polarization time constants and the advantage of the Pelton model, *Geophysics*, 87(6), E393E399.
- Weller, A., M. Seichter, & Kampke, A. (1996). Induced-polarization modelling using complex electrical conductivities, *Geophysical Journal International*, 127, 387398,
- Wohling, T., & Vrügt, J. A. (2011). Multiresponse multilayer vadose zone model calibration using Markov chain Monte Carlo simulation and field water retention data. *Water Resources Research*, 47, 19.