

تحلیل امواج راسبی و گرانی- لختی در صفحه β با استفاده از توابع تجزیه متعامد سره

خسرو اشرفی^{۱*} و وحید اصفهانیان^۲

^۱ استادیار گروه مهندسی محیطزیست، دانشکده محیطزیست دانشگاه تهران، تهران، ایران

^۲ استاد دانشکده مهندسی مکانیک، پردیس دانشکده‌های فنی دانشگاه تهران، تهران، ایران

(دریافت: ۸۵/۹/۴، پذیرش نهایی: ۸۶/۱۷)

چکیده

در مقاله حاضر از توابع تجزیه متعامد سره (POD) برای تحلیل و ارزیابی امواج راسبی و گرانی استفاده شده است. توابع POD در واقع عصاره و چکیده مجموعه‌ای از داده‌ها هستند که با نمونه‌برداری از داده‌های تحلیلی، تجربی یا عددی به دست می‌آیند. این توابع را می‌توان برای کاهش مرتبه داده‌ها یا معادلات حاکم (با تصویر گالرکین معادلات حاکم روی توابع متعامد) مورد استفاده قرار داد. در مقاله حاضر داده‌های لازم برای تشکیل توابع POD از داده‌های تحلیلی مربوط به تک موج‌های راسبی و گرانی- لختی که در مدت زمان خاصی ذخیره شده‌اند، استفاده شده است. با استفاده از معادلات آب کم عمق خطی‌سازی شده که حاوی امواج راسبی و گرانی- لختی است و با تصویر این معادلات روی توابع POD (به دست آمده از نمونه‌برداری) یک مدل رتبه کاسته به دست می‌آید. از این مدل رتبه کاسته به مثابه ابزاری برای تحلیل امواج راسبی و گرانی استفاده شده است. نتایج نشان می‌دهد که برای اینکه بتوان یک تک موج راسبی را با توابع POD مدل‌سازی کرد، به دو مود POD نیاز است. در صورتی که برای شبیه‌سازی یک تک موج گرانی- لختی به چهار مود POD نیاز داریم. همچنین برای اینکه بتوان دینامیک یک تک موج راسبی را با مودهای POD مدل‌سازی کرد نیازی نیست که فاصله زمانی داده‌برداری کوتاه باشد؛ به طوری که با ۱۰۰ نمونه در ۵ ساعت اول یا ۲۴ ساعت اول می‌توان دینامیک امواج را با دقت مناسبی تا ۱۲۰ ساعت و بیشتر با مدل رتبه کاسته POD پیش‌بینی کرد. در صورتی که برای پیش‌بینی یک تک موج گرانی- لختی با این مدل رتبه کاسته تا ۹۶ ساعت به ذخیره‌سازی ۴۰۰ نمونه در ۰/۱ ساعت نیاز است.

واژه‌های کلیدی: امواج راسبی، امواج گرانی، تجزیه متعامد سره (POD)، معادلات آب کم عمق خطی‌سازی شده، مدل رتبه کاسته

۱ مقدمه

به سادگی نمی‌توان توازن یا نبود توازن جوی را فقط به این امواج نسبت داد یا اینکه سهم نبود توازنی مربوط به امواج گرانی - لختی را به دقت تعیین کرد، چراکه این مسئله کاملاً به نوع شارش وابسته است. در تحلیل‌های مربوط به امواج راسبی و گرانی- لختی از ابزارهای متفاوتی استفاده شده است که از آن جمله می‌توان به تحقیقات دیکنسون (۱۹۷۸)، هاسکینز و همکاران (۱۹۸۵)، فورد و همکاران (۲۰۰۰)، ویودز و دیریچل (۲۰۰۲) و دیریچل و ویودز (۲۰۰۳) اشاره کرد. در اکثر این تحقیقات بیشتر به توازن نبود توازن جوی پرداخته شده است که به صورت ضمنی مسئله امواج راسبی و گرانی را دربر دارند. استفاده از ابزارهای جدید می‌تواند همچنان در درک بهتر این امواج

امواج در پژوهش‌های جوی از جایگاه ویژه‌ای برخوردارند. یکی از مهم‌ترین مسائل قابل توجه در امواج جوی، مقیاس‌های زمانی و مکانی این امواج است، چراکه امواج موجود در جو دارای مقیاس‌های بسیار متفاوتی‌اند. امواج راسبی و گرانی از مهم‌ترین امواج جوی‌اند که در پدیده‌های جوی تأثیر به‌سزایی دارند. امواج راسبی (راسبی، ۱۹۳۹) دارای سرعت انتشار پایین چندین سانتی‌متر بر ثانیه و طول موجی در حدود صدها کیلومترند. در حالی که امواج گرانی- لختی دارای سرعت انتشار چند صد متر بر ثانیه و طول موجی در مقیاس مترند. همچنین امواج راسبی و گرانی در توازن زمینگرد جوی نقش اساسی دارند (دیریچل و ویودز، ۲۰۰۳)، هر چند که

می‌شوند. در بخش سوم توابع POD و چگونگی تشکیل آنها مطرح می‌شود و در ادامه در بخش چهارم و پنجم به ترتیب مدل‌سازی رتبه‌کاسته تک موج راسبی و تک موج گرانی-لختی با استفاده از توابع POD بیان می‌شوند. در نهایت در بخش ششم مقاله با مجموعه نکات نهایی، جمع‌بندی صورت می‌گیرد.

۲ امواج راسبی و گرانی

برای بررسی امواج راسبی و گرانی-لختی از معادلات آب کم‌عمق خطی‌سازی شده استفاده می‌شود. معادلات آب کم‌عمق غیرخطی دوبعدی در یک مختصات چرخان در شکل بسط به صورت زیر نوشته می‌شوند (هالتینر و ویلیامز، ۱۹۸۰).

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - fv + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + fu + g \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} + h \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (3)$$

در معادلات بالا u و v به ترتیب مؤلفه‌های سرعت در راستای x و y ، h ارتفاع سطح آزاد شاره از کف و f پارامتر کوریولیس هستند. با خطی‌سازی معادلات (۱) تا (۳) حول حالت پایه ساکن با ارتفاع H معادلات خطی‌سازی شده به شکل زیر نوشته می‌شوند (هالتینر و ویلیامز، ۱۹۸۰).

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + g \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} - f\tilde{v} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + g \frac{\partial \tilde{h}}{\partial y} + f\tilde{u} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial t} + H \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \right) = 0 \quad (6)$$

فیزیکی و پدیده‌های مربوط به آنها مؤثر باشد. در این مقاله ابزار جدید مورد استفاده برای تحلیل و ارزیابی امواج راسبی و گرانی-لختی کاربرد توابع تجزیه متعامد سره (POD) به معادلات آب کم‌عمق خطی‌سازی شده به منظور بررسی این امواج است.

نخستین بار روش تجزیه متعامد سره را کارهانن (۱۹۴۶) و لووی (۱۹۴۶) به صورت مستقل ارائه کردند و به همین دلیل این روش به بسط K-L نیز معروف است. تجزیه متعامد سره یک روش کاهش تعداد درجات آزادی برای مسائل پیچیده است. در واقع با استفاده از توابع POD تعداد درجات آزادی کمتر و کافی از شاره شناسایی می‌شوند که مشخص‌کننده رفتار شاره‌اند. این روش را در مسئله‌های متفاوتی اعمال کرده‌اند. تا سال ۱۹۸۰ این روش اغلب در تحلیل داده‌های آماری با حجم زیاد مورد استفاده قرار گرفت. این روش در مسائلی از قبیل پردازش تصویر، تحلیل سیگنال، فشرده‌سازی داده‌ها و شناسایی فرایندها به کار رفته است (هلمز و همکاران، ۱۹۹۶). نخستین بار این روش در بررسی مسائل تلاطم POD نامیده شد (لاملی، ۱۹۶۷). پیشرفت قابل توجه در این روش هنگامی به وجود آمد که فن نمونه‌گیری لحظه‌ای (snapshot) در چارچوب این روش قرار گرفت (سیروویچ، ۱۹۸۷). در سال‌های اخیر نیز توابع POD در مدل‌سازی رتبه‌کاسته به روش‌های متفاوتی مورد استفاده قرار گرفته است (سیروساپ و همکاران، ۲۰۰۵؛ اصفهانیان و اشرفی، ۱۳۸۴؛ اشرفی، ۱۳۸۵).

در این مقاله با استفاده از حل تحلیلی معادلات آب کم‌عمق خطی‌سازی شده، داده‌های لازم برای تشکیل توابع POD فراهم می‌شود. با استفاده از این توابع و تصویر گالری معادلات روی توابع محاسبه شده، ابزاری برای تحلیل رفتار امواج راسبی و گرانی حاصل می‌شود. به این ترتیب در بخش دوم معادلات آب کم‌عمق خطی‌سازی شده ارائه شده و امواج راسبی و گرانی از آنها استخراج

$$h_s = iH \left(\frac{kf}{\omega^2 - gHk^2} \sin ly - \frac{l\omega}{\omega^2 - gHk^2} \cos ly \right) e^{ikx} \quad (14)$$

در معادلات بالا k و l به صورت زیر تعریف می شوند.

$$k = \frac{2\pi K}{L_x} \quad K = 1, 2, 3, \dots \quad \text{and} \quad l = \frac{\pi L}{L_y} \quad L = 1, 2, 3, \dots \quad (15)$$

که در آن L_x و L_y به ترتیب طول و عرض کانال اند و مقادیر L_x و L_y به ترتیب در اینجا ۱۰۰۰۰ کیلومتر و ۴۰۰۰ کیلومتر در نظر گرفته شده اند. همچنین مقدار H برابر با ۱۰ کیلومتر فرض می شود. حل معادله (۱۱) سه مقدار متفاوت برای ω نتیجه می دهد که در واقع این سه ریشه بیان کننده بسامد امواج موجود در معادلات آب کم عمق خطی است. از آنجا که بسامد امواج راسبی بسیار کوچک است پس برای به دست آوردن حل تقریبی امواج راسبی می توان از ω^3 در مقابل سایر جملات صرف نظر کرد. بنابراین بسامد امواج راسبی به صورت زیر به دست می آید.

$$\omega \cong -\frac{k\beta}{(k^2 + l^2) + f_0^2/gH} \quad (16)$$

برای به دست آوردن حل تقریبی امواج گرانی-لختی که بسامد زیادی دارند، می توان در معادله (۱۱) از جمله آخر در مقابل سایر جملات صرف نظر کرد. پس حل تقریبی برای امواج گرانی لختی به صورت زیر به دست می آید.

$$\omega \cong \pm (gH)^{1/2} (k^2 + l^2 + f_0^2/gH)^{1/2} \quad (17)$$

هرچند که در معادلات بالا حل های تقریبی برای امواج راسبی و گرانی به دست آمدند ولی می توان برای یک H داده شده و هر k و l ، مقادیر حل دقیق بسامدهای امواج راسبی و گرانی را به صورت عددی به دست آورد (با حل معادله (۱۱) به صورت عددی با استفاده از روش نیوتن). در این تحقیق از این حل های دقیق برای دستیابی

در معادلات بالا \tilde{u} و \tilde{v} مقادیر پریشیدگی از حالت پایه ساکن و \tilde{h} مقدار پریشیدگی از H هستند. در حالت برداری می توان معادلات (۴) تا (۶) را به صورت زیر نوشت.

$$\frac{\partial V}{\partial t} + AV = 0 \quad (7)$$

که در آن

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -f & g \frac{\partial}{\partial x} \\ f & 0 & g \frac{\partial}{\partial y} \\ H \frac{\partial}{\partial x} & H \frac{\partial}{\partial y} & 0 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ \tilde{h} \end{pmatrix} \quad (8)$$

برای استخراج امواج راسبی و گرانی-لختی از این معادلات می بایست مودهای بهنجار دستگاه به دست آیند. برای این منظور جواب ها به صورت زیر نوشته می شوند.

$$V = V_s e^{-i\omega t} \quad (9)$$

در معادله بالا V_s بخش مکانی جواب و ω بسامد آن است. با جانشانی معادله (۹) در معادله (۷) رابطه زیر حاصل می شود.

$$AV_s - i\omega V_s = 0 \quad (10)$$

این مسئله برای یک کانال با شرایط مرزی دوره ای در جهت x و شرایط مرزی سخت در جهت y و فرض صفحه بتا به صورت $f = f_0 + \beta(y - y_0)$ که در آن $f_0 = 1.5 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ و $\beta = 1.6 \times 10^{-11} \text{ s}^{-1} \text{ m}^{-1}$ هستند، حل شده است. نتایج این حل برای ω و V_s به صورت زیر است (هالتینر و ویلیامز، ۱۹۸۰؛ محب الحجه، ۱۳۷۰).

$$\omega^3 - [f_0^2 + (k^2 + l^2)gH]\omega - gHk\beta = 0 \quad (11)$$

$$u_s = i \left(\frac{f_0\omega}{\omega^2 - gHk^2} \sin ly - \frac{klgH}{\omega^2 - gHk^2} \cos ly \right) e^{ikx} \quad (12)$$

$$v_s = \sin lye^{ikx} \quad (13)$$

به امواج راسبی و گرانی-لختی استفاده شده است.

۳ روش تجزیه متعامد سره و مدل سازی رتبه کاسته

اصلی ترین نتیجه استفاده از توابع متعامد سره تصویر مدل اصلی با تعداد درجات آزادی بالا به یک مدل رتبه کاسته با تعداد درجات آزادی کم است. در روش POD معمولاً یک دستگاه با تعداد درجات آزادی بزرگ N به یک زیرفضا با درجه آزادی کوچک R تبدیل می شود (اشرفی، ۱۳۸۵). می توان توابع POD را با استفاده از داده های متفاوتی به دست آورد. این داده ها ممکن است تحلیلی، تجربی یا عددی باشند. در اینجا از داده های تحلیلی امواج راسبی و گرانی-لختی برای به دست آوردن توابع POD استفاده شده است. این داده ها در واقع به صورت نمونه های لحظه ای با فواصل زمانی خاصی ذخیره می شوند. این نمونه ها معرف دینامیک جریان اند که در زمان های متفاوت ذخیره شده اند. این داده ها یک مجموعه ترکیب خطی را تشکیل می دهند که فضایی خطی از داده ها را به وجود می آورند. در مرحله بعد مقادیر این نمونه های لحظه ای با هم ترکیب شده و ماتریسی به نام ماتریس همبستگی به وجود می آورند. در نهایت تعیین توابع متعامد پایه به یک مسئله مقدار ویژه تبدیل می شود که ماتریس مربوطه همان ماتریس همبستگی است. با به دست آوردن مقادیر ویژه و بردارهای ویژه این ماتریس همبستگی شرایط برای محاسبه توابع پایه متعامد سره مهیا می شود. در زیر، این مسئله به زبان ریاضی بیان می شود.

۱-۳ توابع POD

هدف از کاربرد POD یافتن یک تابع Φ برای دنباله ای برداری $U^{(i)}$ است که ساختار عضوهای این دنباله را بیان کند. عضوهای این دنباله در واقع همان نمونه های لحظه ای اند. یکی از روش های حل این مسئله تصویر این دنباله روی Φ است. برای این منظور باید

ضرب داخلی $(U^{(i)}, \Phi)$ را به دست آورد، به طوری که تا حد امکان این تابع با دنباله $U^{(i)}$ موازی است. ضرب داخلی برای دو تابع دلخواه برداری f و g به صورت زیر تعریف می شود.

$$(f, g) = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx \quad (18)$$

در معادله بالا Ω ناحیه حل جریان، و X بردار مکانی است. بنابراین باید ضرب $(U^{(i)}, \Phi)$ بیشینه شود و در شروع برای حذف دامنه، این ضرب داخلی بهنجار سازی می شود. برای بهنجار کردن با توجه به فضای توابع Φ ضرب داخلی (Φ, Φ) موجود است. به بیان ریاضی می بایست رابطه زیر بیشینه شود:

$$\frac{(\Phi, U^{(i)})}{(\Phi, \Phi)} \quad (19)$$

به علاوه، نکته حائز اهمیت، بزرگی این ضرب داخلی است نه علامت آن، پس برای به حساب آوردن همه $U^{(i)}$ ها از عبارت مربع میانگین استفاده می کنیم. پس ما به دنبال تابعی به صورت Φ هستیم که بهترین بیان از مجموعه $U^{(i)}$ ها باشد. به بیان دیگر این تابع باید رابطه زیر را بیشینه کند.

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{|(U^{(i)}, \Phi)|^2}{(\Phi, \Phi)} \quad (20)$$

در رابطه بالا N تعداد نمونه ها است که در واقع هر یک از آنها داده های یک مسئله گذرا در زمان t_i هستند. در حقیقت باید در جستجوی تابعی بود که بزرگ ترین تصویر مربع میانگین را روی مجموعه $U^{(i)}$ ها داشته باشد. برای به دست آوردن این مهم، تعریف زیر در نظر گرفته می شود.

$$K\Phi = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} U^{(i)}(x)U^{(i)}(x')\Phi(x')dx' \quad (21)$$

(۲۰) را پیشینه کند. این معادله هنگامی که تعداد درجات آزادی (نقاط شبکه) بزرگتر از تعداد نمونه‌ها باشند مفید خواهد بود. اگر معادلات (۲۱) و (۲۷) در معادله (۲۶) قرار داده شوند پس از ساده‌سازی رابطه زیر حاصل می‌شود.

$$CW = \Lambda W \quad (28)$$

که

$$C_{ij} = \frac{1}{N} \int_{\Omega} U^{(i)}(x)U^{(j)}(x)dx, \quad W = \{w_1, w_2, \dots, w_N\} \quad (29)$$

در مسئله بالا، C یک ماتریس غیرمنفی هرمیتی است که ماتریس همبستگی نامیده است و W ماتریس بردارهای ویژه است. همچنین Λ ماتریس قطری مقادیر ویژه است و به صورت $\Lambda = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N]$ نمایش داده می‌شود. بردارهای ویژه موجود در ماتریس W به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$w_1 = [w_1^1, w_2^1, \dots, w_N^1]^T, w_2 = [w_1^2, w_2^2, \dots, w_N^2]^T, \dots, w_N = [w_1^N, w_2^N, \dots, w_N^N]^T \quad (30)$$

علامت T در معادله بالا نماینگر ترانپوز است. بردارهای ویژه به دست آمده، متناظر با مقادیر ویژه $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N \geq 0$ هستند. اکنون می‌توان حل‌های معادله (۲۰) را به صورت زیر نوشت:

$$\Phi_1 = \sum_{i=1}^N w_i^1 U^{(i)}, \Phi_2 = \sum_{i=1}^N w_i^2 U^{(i)}, \dots, \Phi_N = \sum_{i=1}^N w_i^N U^{(i)} \quad (31)$$

همچنین می‌توان بردار w_1 را طوری بهنجارسازی کرد که شرط زیر را تأمین کند.

$$(w_1, w_1) = \sum_{i=1}^N w_i^1 w_i^1 = \frac{1}{N\lambda_1} \quad (32)$$

این بهنجارسازی در نهایت نتیجه زیر را می‌دهد.

پس

$$(K\Phi, \Phi) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \int_{\Omega} U^{(i)}(x)\Phi(x)U^{(i)}(x')\Phi(x')dx dx' \quad (22)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |(U^{(i)}, \Phi)|^2$$

به علاوه:

$$\frac{(K\Phi, \Phi)}{(\Phi, \Phi)} = \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |(U^{(i)}, \Phi)|^2}{(\Phi, \Phi)} = \lambda \quad (23)$$

در رابطه بالا λ در واقع ضریب لاگرانژ در مسئله بهینه‌سازی است و اثبات می‌شود که λ همان مقدار ویژه دستگاه دست است. با استفاده از ریاضیات وردشی می‌توان تابع پیشینه را به صورت زیر پیدا کرد. فرض می‌شود که Φ^* تابعی باشد که λ را پیشینه می‌کند. پس هر تابع دیگری را می‌توان به صورت $\Phi^* + \varepsilon\Phi$ نوشت. پس برای λ رابطه زیر به دست می‌آید.

$$F(\varepsilon) = \frac{(K\Phi^* + \varepsilon\Phi, \Phi^* + \varepsilon\Phi) + \varepsilon(K\Phi^*, \Phi') + \varepsilon(K\Phi', \Phi^*) + \varepsilon^2(K\Phi', \Phi')}{(\Phi^* + \varepsilon\Phi, \Phi^* + \varepsilon\Phi) + \varepsilon(\Phi^*, \Phi') + \varepsilon(\Phi', \Phi^*) + \varepsilon^2(\Phi', \Phi')} = \lambda \quad (24)$$

با توجه به تعریف Φ^* روشن است هنگامی که $\varepsilon = 0$ است مقدار پیشینه λ اتفاق می‌افتد و در نتیجه $\left. \frac{dF(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0$ این مسئله منجر به رابطه زیر می‌شود.

$$(K\Phi^*, \Phi') = \lambda(\Phi^*, \Phi') \quad (25)$$

اکنون کاملاً مشخص است که مسئله پیشینه معادله (۲۰) همانند پیدا کردن مقادیر ویژه مسئله زیر است.

$$K\Phi^* = \lambda\Phi^* \quad (26)$$

همچنین فرض می‌شود که Φ به صورت خاصی بر حسب جملات داده‌های اصلی $U^{(i)}$ تعریف شود.

$$\Phi = \sum_{i=1}^N w_i U^{(i)} \quad (27)$$

که در آن w_i ها طوری تعریف می‌شوند که Φ رابطه

$$\frac{\partial V}{\partial t} = L(V) \quad (36)$$

که در آن

$$L(V) = - \begin{pmatrix} g\tilde{h}_x - f\tilde{v} \\ g\tilde{h}_y + f\tilde{u} \\ H(\tilde{u}_x + \tilde{v}_y) \end{pmatrix} \quad (37)$$

از آنجا که حالت پایه برای این معادلات حالت ساکن در نظر گرفته شده است، پس هیچ مقدار متوسطی برای متغیرها استفاده نمی شود و بسط بر حسب توابع POD به صورت زیر نوشته می شود.

$$V(t; x, y) = \sum_{i=1}^R a_i(t) \Phi(x, y) \quad (38)$$

با تصویر گالرکین معادله (۳۸) روی توابع پایه POD رابطه زیر به دست می آید:

$$(V, \Phi_k) = (L(V), \Phi_k) \quad (39)$$

با این تصویرسازی معادلات آب کم عمق به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل می شوند.

$$\frac{da_k}{dt} = \sum_{i=1}^R L_{ik} a_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, R \quad R \ll N \quad (40)$$

که در آن

$$L_{ik} = (L(\Phi_i), \Phi_k) \quad (41)$$

در معادله (۴۰)، N تعداد نمونه های ذخیره شده است. در واقع معادله (۴۰) تعداد R معادله خطی است که می توان آنها را به روش های معمولی حل کرد. با حل این معادلات، تغییرات زمانی ضرایب توابع POD به دست می آیند. در ادامه، تحلیل رتبه کاسته امواج راسبی و گرانی-لختی صورت می پذیرد و نتایج آنها مورد بررسی قرار می گیرد.

$$(\Phi_1, \Phi_m) = \begin{cases} 1 & l = m \\ 0 & l \neq m \end{cases} \quad (33)$$

این مرحله، مرحله تکمیلی تشکیل مجموعه متعامد $\{\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_N\}$ است.

۲-۳ مدل سازی رتبه کاسته

به منظور مدل سازی رتبه کاسته معادلات آب کم عمق خطی سازی شده در ابتدا باید داده هایی برای تشکیل توابع پایه POD در دسترس باشند. برای دستیابی به چنین داده هایی باید شرایط اولیه ای برای معادلات در نظر گرفته شوند و در زمان های متفاوت، حل های مورد نظر ذخیره سازی شوند. در همین راستا می توان هر شرط اولیه را به صورت جمع مودهای بهنجار دستگاه در نظر گرفت، به طوری که:

$$V(0) = \sum_{j=1} A_j V_{sj} \quad (34)$$

در معادله بالا V_s تغییرات مکانی، اندیس j نشان دهنده مود j ام و A_j دامنه مربوط به آن است. پس تغییرات زمانی V به صورت زیر حاصل می شود.

$$V(t; x, y) = \sum_{j=1} A_j V_{sj} e^{-i\omega t} \quad (35)$$

از آنجا که V_{sj} با استفاده از معادلات (۱۲) تا (۱۴) و مقادیر بسامدهای راسبی یا گرانی معلوم اند، پس در هر لحظه می توان جواب را با استفاده از شرایط اولیه به دست آورد. بنابراین در مدل سازی رتبه کاسته معادلات آب کم عمق خطی می توان از داده های تحلیلی برای تشکیل توابع متعامد سره استفاده کرد. برای مدل سازی رتبه کاسته، معادلات حاکم روی توابع POD تصویر می شوند و به این ترتیب معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل می شوند. برای انجام این منظور، معادله (۷) به صورت زیر بازنویسی می شود.

۴ تحلیل امواج راسبی با استفاده از توابع تجزیه

متعامد سره

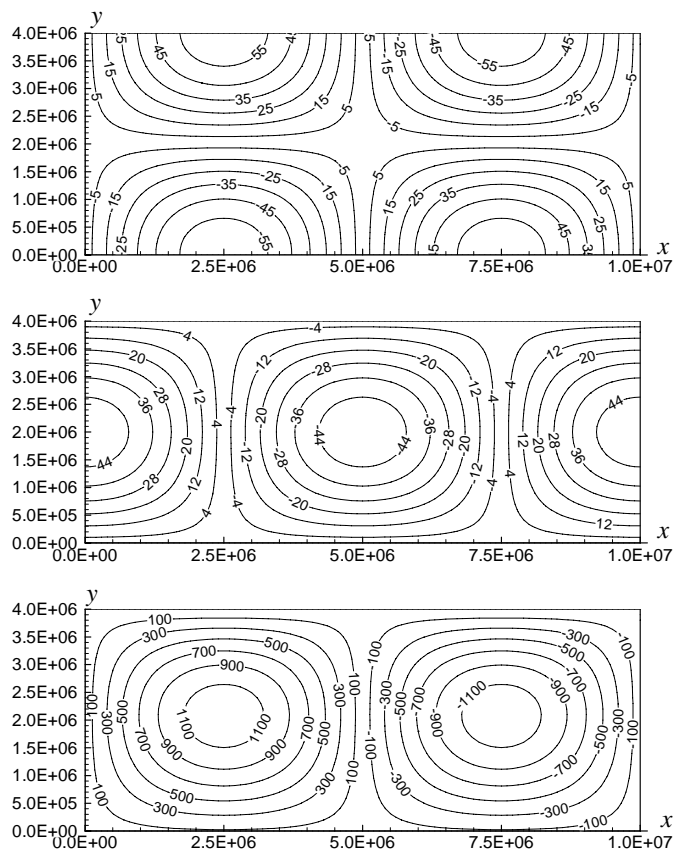
برای مدل‌سازی رتبه‌کاسته امواج راسبی شرایط اولیه به صورت یک تک موج راسبی در نظر گرفته می‌شود.

$$V(0) = A_1 V_{s1} \quad (42)$$

اگر در رابطه بالا مقدار بسامد کوچک از حل معادله (۱۱) قرار داده شود موج راسبی حاصل می‌شود. با در نظر گرفتن $L=1$ و $K=1$ ، $A_1 = 50$ یک تک موج

راسبی مطابق شکل ۱ به دست می‌آید.

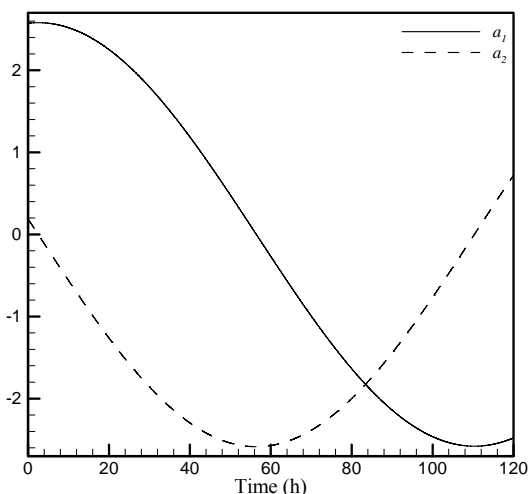
برای بررسی رفتار موج راسبی در مدل‌سازی رتبه‌کاسته دو نوع از ذخیره‌سازی داده‌ها در نظر گرفته می‌شود. در حالت اول ذخیره‌سازی داده‌ها با فواصل کم و در زمان کوتاه ۵ ساعت اولیه و پیش‌بینی ۱۲۰ ساعته با استفاده از مدل رتبه‌کاسته صورت می‌گیرد. در حالت دوم ذخیره‌سازی داده‌ها با فواصل زمانی زیاد و در ۲۴ ساعت اولیه و در ادامه پیش‌بینی ۱۲۰ ساعته صورت می‌گیرد.



شکل ۱. شرایط اولیه تک موج راسبی، مؤلفه u سرعت (بالا)، مؤلفه v سرعت (وسط) و ارتفاع ژئوپتانسیل (پایین).

همان‌طور که در جدول ۱ مشاهده می‌شود به‌جز دو مود اول بقیه مودها تقریباً صفرند، پس مدل‌سازی رتبه کاسته با ۲ مود POD برای موج راسبی مورد نظر قابل اجرا است.

با حل معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه اول (معادله ۴۰) پیش‌بینی برای ۱۲۰ ساعت با استفاده از مدل رتبه کاسته به‌دست می‌آید. در شکل ۳ تغییرات زمانی a_1 و a_2 برای ۱۲۰ ساعت با استفاده از مدل‌سازی رتبه کاسته نشان داده شده‌است.



شکل ۳. نحوه تغییرات a_1 و a_2 مربوط به مودهای اول و دوم POD در مدل‌سازی تک موج راسبی با ذخیره‌سازی داده‌ها در ۵ ساعت اول.

با استفاده از مقادیر به‌دست آمده برای ضرایب توابع متعامد و خود توابع متعامد می‌توان میدان‌های سرعت و ارتفاع را به‌دست آورد. این مقادیر پیش‌بینی‌شده برای ۱۲۰ ساعت در شکل ۴ نشان داده شده‌اند.

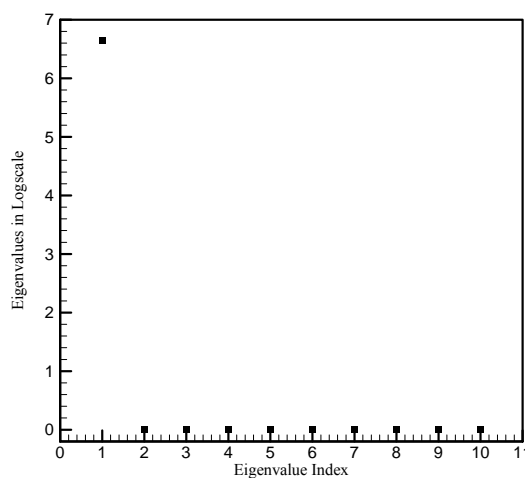
۲-۴ ذخیره‌سازی داده‌ها در ۲۴ ساعت اول

در این حالت برای مدل‌سازی رتبه کاسته از ذخیره داده‌ها در ۲۴ ساعت اول با ۱۰۰ نمونه استفاده شده‌است. بنابراین در این حالت فواصل زمانی ذخیره داده‌ها بیشتر

۱-۴ ذخیره‌سازی داده‌ها در ۵ ساعت اول

با استفاده از داده‌های تحلیلی ۵ ساعت اولیه تعداد ۱۰۰ عدد نمونه ذخیره‌سازی می‌شود و با استفاده از معادلات مطرح‌شده در بخش ۳ توابع پایه متعامد سره برای مدل‌سازی رتبه کاسته به‌دست می‌آیند. ۱۰ مقدار ویژه اول ماتریس همبستگی C برای این مورد در شکل ۲ نشان داده شده‌است.

همچنین این مقادیر برای وضوح بیشتر در جدول ۱ آورده شده‌اند.



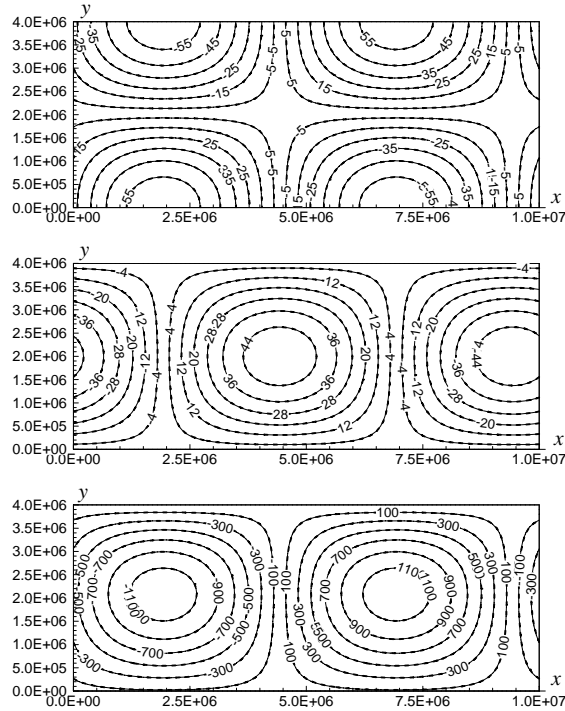
شکل ۲. مقادیر ویژه ۱۰ مود اول از ۱۰۰ مود در مقیاس لگاریتمی برای تک موج راسبی با ۵ ساعت ذخیره‌سازی داده‌ها.

جدول ۱. ۱۰ مقدار ویژه از ۱۰۰ مقدار ویژه برای تک موج راسبی با ۵ ساعت ذخیره‌سازی داده‌ها.

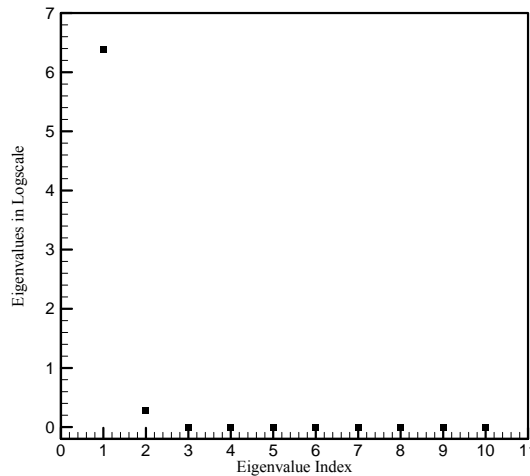
ردیف	اندازه مقادیر ویژه
۱	6.644288718925504
۲	$1.208777292608873 \times 10^{-2}$
۳	$2.309288955059397 \times 10^{-15}$
۴	$2.017905016184303 \times 10^{-15}$
۵	$1.938605530080561 \times 10^{-15}$
۶	$1.856317636698366 \times 10^{-15}$
۷	$1.762187440398690 \times 10^{-15}$
۸	$1.752907082626522 \times 10^{-15}$
۹	$1.699902032749440 \times 10^{-15}$
۱۰	$1.581499417090060 \times 10^{-15}$

نشان داده شده است. در شکل ۵ مشاهده می شود که جز دو مقدار ویژه اول بقیه مقادیر تقریباً صفرند. نحوه تغییرات a_k ها همانند شکل ۳ است و از آوردن مجدد آنها خودداری می شود. مقادیر میدان های باد و ارتفاع ژئوپتانسیل در مقایسه با حل تحلیلی در شکل ۶ نشان داده شده است.

از حالت قبل است. هدف از در نظر گرفتن این حالت آن است که ببینیم آیا می توان با احتساب فواصل زمانی بیشتر برای ذخیره سازی نمونه ها به جواب درست دست یافت یا خیر؟ با استفاده از معادلات مطرح شده در بخش سوم، توابع پایه متعامد برای این حالت محاسبه می شود. ۱۰ مقدار ویژه اول ماتریس همبستگی C در شکل ۵



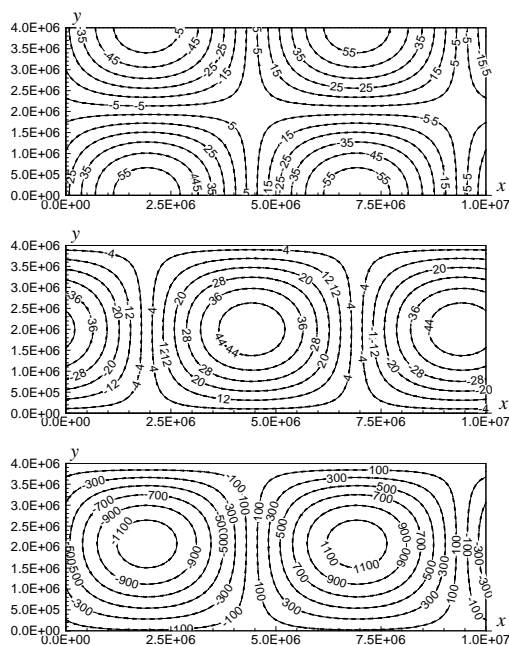
شکل ۴. مدل سازی رتبه کاسته تک موج راسبی با ذخیره سازی داده در ۵ ساعت اول، خط های ممتد نشان دهنده حل تحلیلی و خط چین ها نشان دهنده حل رتبه کاسته اند، مؤلفه u سرعت (بالا)، مؤلفه v سرعت (وسط) و ارتفاع ژئوپتانسیل (پایین).



شکل ۵. مقادیر ویژه ۱۰ مود اول از ۱۰۰ مود در مقیاس لگاریتمی برای تک موج راسبی با ۲۴ ساعت ذخیره سازی داده ها.

سرعت انتشار بسیار بیشتری اند، لذا مدل سازی رتبه کاسته این امواج می بایست تفاوت هایی با امواج راسبی داشته باشد. با استفاده از ذخیره سازی ۱۰۰ نمونه در ۵ ساعت اول، میدان های سرعت و ارتفاع برای ۱۲۰ ساعت با شبیه سازی رتبه کاسته POD به صورت شکل ۸ به دست می آید. همان طور که در شکل ۸ مشاهده می شود مدل سازی رتبه کاسته امواج گرانی-لختی با این گونه ذخیره سازی داده ها موفقیت آمیز نیست در حالی که برای امواج راسبی حتی با ذخیره سازی داده ها در ۲۴ ساعت اول جواب های دقیقی به دست آمد.

از آنجا که امواج گرانی-لختی با سرعت بالایی منتشر می شوند، بنابراین برای تحلیل POD آنها می بایست فواصل زمانی نمونه گیری را کم کرد و تعداد آنها را افزایش داد. در همین راستا با آزمون های عددی متفاوت، بهترین نتیجه برای پیش بینی ۱۲۰ ساعته با ذخیره سازی ۴۰۰ نمونه در ۰/۱ ساعت به دست آمده است. این نتایج برای میدان های سرعت و ارتفاع در شکل ۹ نشان داده شده اند.



شکل ۶. مدل سازی رتبه کاسته تک موج راسبی با ذخیره سازی داده ها در ۲۴ ساعت اول، خط های ممتد نشان دهنده حل تحلیلی و خط چین ها نشان دهنده حل رتبه کاسته است، مؤلفه u سرعت (بالا)، مؤلفه v سرعت (وسط) و ارتفاع ژئوپتانسیل (پایین).

شکل ۶ نشان می دهد با اینکه فاصله ذخیره سازی نمونه ها بیشتر شده است تغییری در پیش بینی مدل رتبه کاسته نسبت به حل تحلیلی به وجود نیامده است. این امر بیانگر این نکته است که مقیاس زمانی امواج راسبی به اندازه ای است که می توان با ذخیره سازی نمونه ها با مقادیر بزرگ تر، رفتار آنها را بدون مشکلی شبیه سازی کرد.

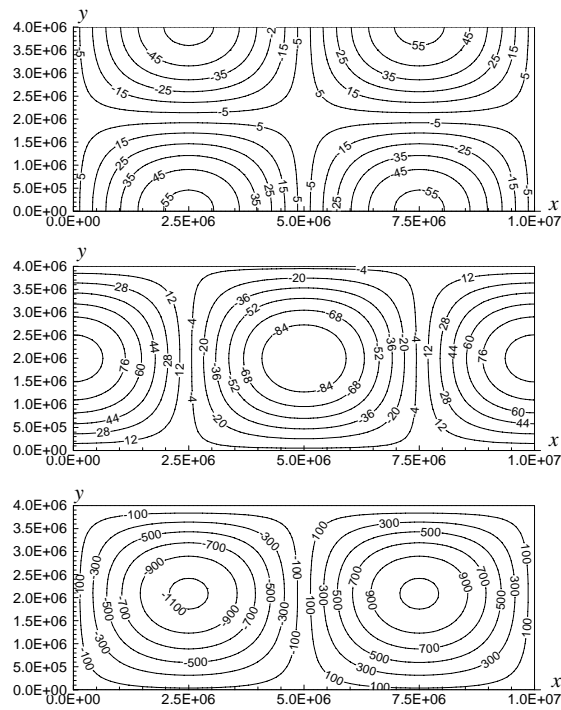
۵ تحلیل امواج گرانی با استفاده از توابع تجزیه متعامد سره

برای مدل سازی رتبه کاسته امواج گرانی-لختی، شرایط اولیه به صورت یک تک موج گرانی-لختی به صورت زیر در نظر گرفته می شود.

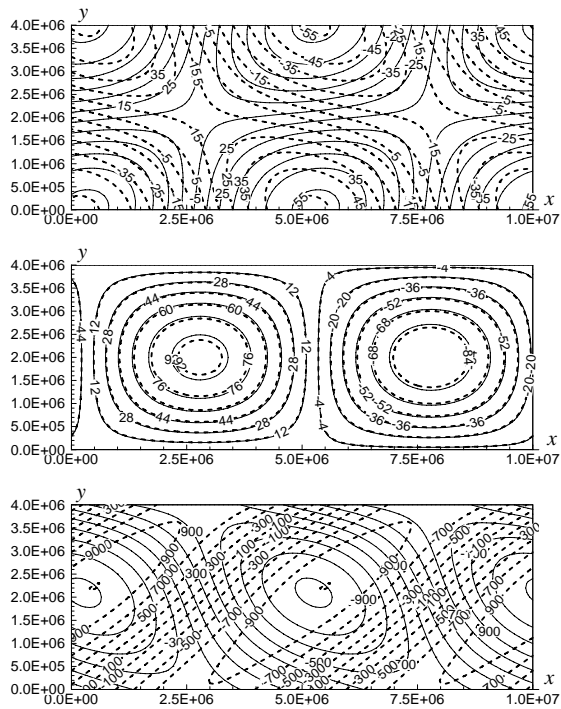
$$V(0) = A_1 V_{s1} \quad (۴۳)$$

اگر در رابطه بالا دو مقدار بسامد بزرگ از حل معادله (۱۱) قرار داده شوند موج گرانی-لختی حاصل می شود. با در نظر گرفتن $L=1$ و $K=1$ ، $A_1 = 50$ یک تک موج راسبی مطابق شکل ۷ به دست می آید.

امواج گرانی-لختی نسبت به امواج راسبی دارای

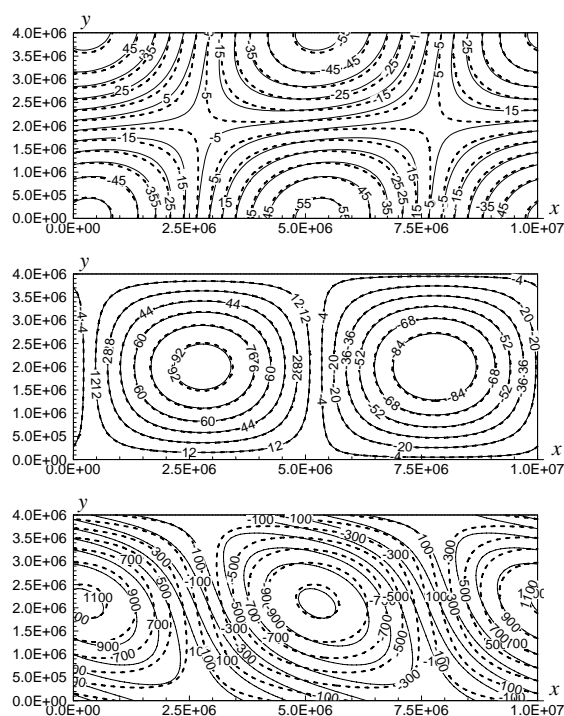


شکل ۷. شرایط اولیه تک موج گرانی-لختی، مؤلفه u سرعت (بالا)، مؤلفه v سرعت (وسط) و ارتفاع ژئوپتانسیل (پایین).



شکل ۸. مدل‌سازی رتبه کاسته تک موج گرانی-لختی با ذخیره‌سازی داده‌ها در ۵ ساعت اول، خط‌های ممتد نشان‌دهنده حل تحلیلی و خط‌چین‌ها نشان‌دهنده

حل رتبه کاسته هستند، مؤلفه u سرعت (بالا)، مؤلفه v سرعت (وسط) و ارتفاع ژئوپتانسیل (پایین).



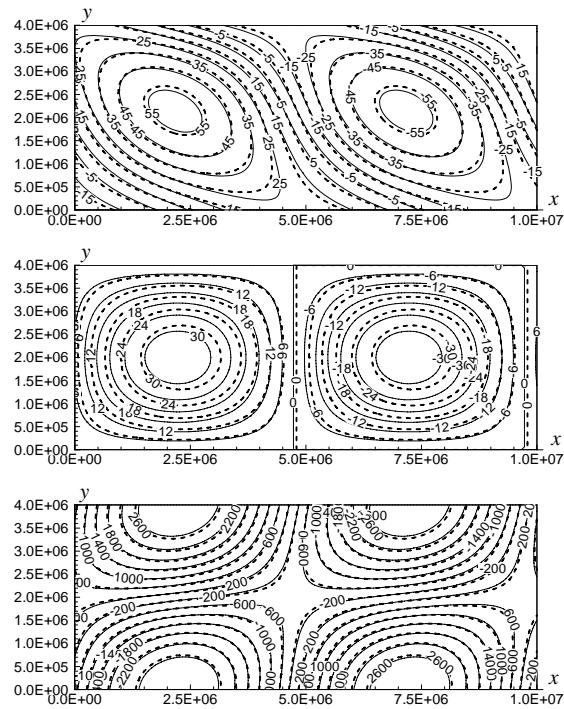
شکل ۹. مدل‌سازی رتبه کاسته ۱۲۰ ساعته تک موج گرانی-لختی با ذخیره‌سازی ۴۰۰ نمونه در ۰/۱ ساعت اول، خط‌های ممتد نشان‌دهنده حل تحلیلی و خط‌چین‌ها نشان‌دهنده حل رتبه کاسته هستند، مؤلفه u سرعت (بالا)، مؤلفه v سرعت (وسط) و ارتفاع ژئوپتانسیل (پایین).

گرانی-لختی دارای دو بسامد در جهت‌های متفاوت است در صورتی که یک موج راسبی فقط دارای یک بسامد است. در حقیقت هر بسامد انتشار با دو مود POD شبیه‌سازی می‌شود. زیرا که هر بسامد هنگامی که در جمله $e^{-i\omega t}$ قرار می‌گیرد یک قسمت حقیقی و یک قسمت موهومی به وجود می‌آورد. ۱۰ مقدار ویژه اول از ۴۰۰ مقدار ویژه ماتریس C برای تک موج گرانی لختی در جدول ۲ آمده است.

نمودار تغییرات زمانی ضرایب توابع POD برای چهار مود اول در طی ۹۶ ساعت در شکل ۱۱ نشان داده شده است. با توجه به شکل ۱۱ و مقایسه آن با شکل ۳ می‌توان به رفتار متفاوت این امواج پی‌برد. در واقع این دو شکل بیانی از رفتار زمانی امواج راسبی و گرانی هستند که در ضرایب زمانی توابع POD ظاهر می‌شوند.

همان‌طور که در شکل ۹ نشان داده شده است، جواب‌های مدل‌سازی رتبه کاسته بسیار به جواب‌های تحلیلی نزدیک شده‌اند ولی هنوز تفاوت‌هایی با حل تحلیلی دارند. یکی از دلایل این تفاوت، زمان انتگرال‌گیری طولانی ۱۲۰ ساعته است. با انتگرال‌گیری معادلات تا ۹۶ ساعت جواب‌ها از دقت کافی برخوردار می‌شوند. نتایج میدان‌های سرعت و ارتفاع برای ۹۶ ساعت در شکل ۱۰ نشان داده شده است.

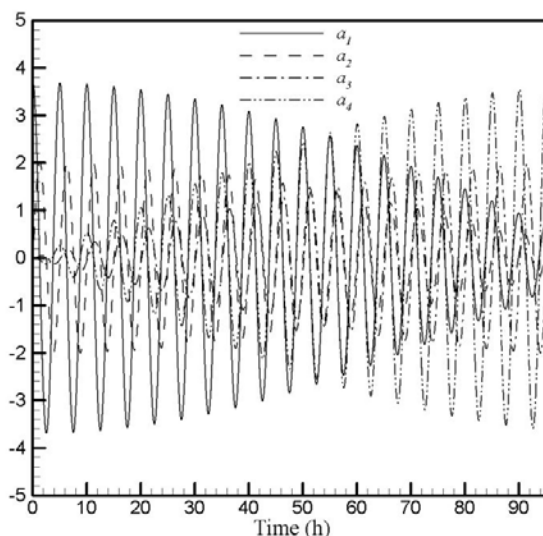
از دیگر اختلاف‌های مربوط به تحلیل امواج POD گرانی-لختی با امواج راسبی در تعداد مدهای POD لازم برای این تحلیل است. در تحلیل یک تک‌موج راسبی فقط به دو مود POD نیاز است در حالی که برای تحلیل تک موج گرانی-لختی به چهار مود POD نیاز است. این اختلاف از آنجا ناشی می‌شود که یک موج



شکل ۱۰. مدل سازی رتبه کاسته ۹۶ ساعته تک موج گرانی-لختی با ذخیره سازی ۴۰۰ نمونه در ۰/۱ ساعت اول، خطهای ممتد نشان دهنده حل تحلیلی و خطچین ها نشان دهنده حل رتبه کاسته اند، مؤلفه u سرعت (بالا)، مؤلفه v سرعت (وسط) و ارتفاع ژئوپتانسیل (پایین).

جدول ۲. ۱۰ مقدار ویژه اول از ۴۰۰ مقدار ویژه برای موج گرانی-لختی با ۰/۱ ساعت ذخیره سازی داده ها.

ردیف	اندازه مقادیر ویژه
۱	6.762750253238046
۲	2.034280488184148
۳	$6.917654866961054 \times 10^{-2}$
۴	$2.102612040750314 \times 10^{-2}$
۵	$3.356762101362050 \times 10^{-15}$
۶	$2.761283150521713 \times 10^{-15}$
۷	$2.497232453864458 \times 10^{-15}$
۸	$2.319731986621098 \times 10^{-15}$
۹	$2.132815868675868 \times 10^{-15}$
۱۰	$2.058039606953476 \times 10^{-15}$



شکل ۱۱. نحوه تغییرات a_1 تا a_4 مربوط به مدهای اول تا چهارم POD در مدل‌سازی تک موج گرانی-لختی با ذخیره‌سازی ۴۰۰ نمونه در ۰/۱ ساعت اول.

۶ جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

در این مقاله در ابتدا امواج راسبی و گرانی-لختی از معادلات آب کم‌عمق خطی‌سازی شده استخراج شدند. با استفاده از مقادیر استخراج شده برای بسامدهای امواج راسبی و گرانی-لختی حل‌های تحلیلی معادلات آب کم‌عمق خطی‌سازی شده به دست آمدند. از حل‌های تحلیلی یک‌تک موج راسبی و گرانی-لختی داده‌های لازم برای تشکیل توابع پایه متعامد سره فراهم شدند.

با ذخیره‌سازی ۱۰۰ نمونه لحظه‌ای در ۵ ساعت و ۲۴ ساعت اول برای موج راسبی، این موج تا ۱۲۰ ساعت با استفاده از مدل‌سازی رتبه کاسته بر پایه توابع POD به درستی و دقت مناسبی پیش‌بینی شده است. این در حالی است که این مسئله برای موج گرانی-لختی با ذخیره‌سازی ۴۰۰ نمونه در ۰/۱ ساعت اولیه قابل اجرا است و در ضمن، ساعت پیش‌بینی به ۹۶ ساعت کاهش می‌یابد. این اختلاف در مدل‌سازی رتبه کاسته دو موج از مقیاس‌های زمانی آنها ناشی می‌شود. با مقایسه دو شکل ۳ و ۱۱ این اختلاف به وضوح دیده می‌شود. در شکل ۳ روشن است که مقیاس

زمانی موج راسبی در حدود ۱۰ روز (نصف موج در ۵ روز) برای کانال فرض شده است، در صورتی که مقیاس زمانی از شکل ۱۱ برای موج گرانی-لختی در کانال مورد نظر در حدود ساعت (۲۰ مرتبه تکرار موج در ۹۶ ساعت) برآورد می‌شود.

از دیگر نکات قابل توجه در تحلیل POD امواج راسبی و گرانی پیش‌بینی دینامیک موج راسبی با دو مود POD و دینامیک موج گرانی-لختی با چهار مود POD است. این مسئله از آنجا ناشی می‌شود که دو مود POD قابلیت شبیه‌سازی یک بسامد را دارد، زیرا هر بسامد هنگامی که در جمله زمانی قرار می‌گیرد یک قسمت حقیقی و یک قسمت موهومی ایجاد می‌کند. بنابراین یک تک‌موج راسبی که فقط یک بسامد انتشار دارد، با دو مود POD شبیه‌سازی می‌شود و موج گرانی-لختی که دو بسامد انتشار دارد با چهار مود POD شبیه‌سازی می‌شود.

در کارهای آینده می‌توان از نتایج این تحقیق استفاده کرد و امواج راسبی و گرانی-لختی را در داده‌های تجربی با استفاده از توابع POD بررسی کرد. این تحقیق می‌تواند

- Holmes, P., Lumley, J. L., and Berkooz, G., 1996, Turbulence, coherent structures, dynamical system and symmetry, Cambridge University Press, pp. 438.
- Hoskins, B. J., McIntyre, M. E., and Robertson, A. W., 1985, On the use and significance of isentropic potential-vorticity maps. *Q. J. Roy. Meteor. Soc.*, **111**, 877-946.
- Karhunen, K., 1946, Zur spektral theorise stochastischer prozesse, *Ann Acad Sci Fenn, Ser A1 Math. Phys.*, **34**, 1-7.
- Loeve, M., 1946, Function aleatoire de second order, *Rev. Sci.*, **84**, 195-206.
- Lumley, J. L., 1967, The structure of inhomogeneous turbulence in atmospheric turbulence and radio wave propagation, *Yaglom Am. Tatarok: VA (eds) Nauka: Moscow*, 166-178.
- Rossby, C. G., 1939, Relation between variations in the intensity of the zonal circulation of the atmosphere and the displacements of the semi-permanent centers of action, *J. Mar. Res.*, **2**, 38-55.
- Sirosup, S., Karniadakis, G. E., Xiu, D., and Kevrekidis, I. G., 2005, Equation-free/Galerkin-free POD-assisted computation of incompressible flows, *J. Comput. Phys.*, **207**, 568-587.
- Sirovich, L., 1987, Turbulence and the dynamics of coherent structures: Part I-III, *Q. Appl. Math.*, **45**, 561-590.
- Viudez, A., and Dritschel, D. G., 2002, An explicit potential vorticity conserving approach to modelling nonlinear internal gravity waves. *J. Fluid Mech.*, **458**, 75-101.
- در پدیده‌های متفاوت جوی صورت گیرد و مقیاس‌های متفاوت مورد بررسی قرار گیرند.
- تشکر و قدردانی**
- نویسندگان مقاله نهایت تشکر و قدردانی خود را از دانشگاه تهران، پژوهشگاه هواشناسی و علوم جو و مرکز پیش‌بینی سازمان هواشناسی کشور که با فراهم آوردن امکانات لازم راه را برای عملی شدن این تحقیق هموار کردند، ابراز می‌دارند.
- منابع**
- اشرفی، خ، ۱۳۸۵، شبیه‌سازی غیر دائم معادلات آب کم‌عمق توسط مدل‌سازی رتبه کاسته براساس روش تجزیه متعامد سره، رساله دکتری، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تهران.
- اصفهانیان، و، و اشرفی، خ، ۱۳۸۴، مدل‌سازی رتبه کاسته معادلات آب کم‌عمق یک‌بعدی با استفاده از توابع POD بدون تصویر گالرکین، چهارمین همایش پیش‌بینی عددی وضع هوا، تهران.
- محب‌الحجه، ع. ر، ۱۳۷۰، حل عددی معادلات دیفرانسیلی آب کم‌عمق، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، مؤسسه ژئوفیزیک، دانشگاه تهران.
- Dickinson, R. E., 1978, Rossby waves long-period oscillations of oceans and atmospheres, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **10**, 159-195.
- Dritschel, D. G., and Viudez, A., 2003, A balanced approach to modelling rotating stably stratified geophysical flows, *J. Fluid Mech.*, **488**, 123-150.
- Ford, R., McIntyre, M. E., and Norton, W. A., 2000, Balance and the slow quasimanifold: some explicit results. *J. Atmos. Sci.*, **57**, 1236-1254.
- Haltiner, G. J., and Williams, R. T., 1980, Numerical prediction and dynamical meteorology, 2nd edition, John Wiley & Sons.