مجلهٔ فیزیک زمین و فضا، دوره ۳۷، شماره ۴، ۱۳۹۰، صفحهٔ ۱۰۷- ۱۲۴

روشی برای محاسبه شتاب گرانی متوسط بر اساس حل مسئله مقدار مرزی و اسپیلاین‌های هماهنگ

عبدالرضا صفری[۱*] و عبدالرحمان مصطفایی[۲]

[۱] دانشیار، گروه مهندسی نقشه‌برداری، پردیس دانشکده‌های فنی، دانشگاه تهران، ایران
[۲] دانشجوی دکتری ژئودزی، گروه مهندسی نقشه‌برداری، پردیس دانشکده‌های فنی، دانشگاه تهران، ایران

(دریافت: ۸۷/۸/۵ ، پذیرش نهایی: ۸۹/۱۲/۲۴)

چکیده

یکی از مشکلات اساسی در تعیین ارتفاع ارتومتریک، تعیین شتاب گرانی متوسط در امتداد خط شاقولی گذرنده از نقطه است. در این مقاله روشی برای تعیین شتاب گرانی متوسط برمبنای حل مسئله مقدار مرزی ثابت–آزاد براساس مشاهدات از نوع (۱) قدرمطلق شتاب گرانی حاصل از گرانی‌سنجی زمینی (۲) طول و عرض نجومی (۳) پتانسیل گرانی حاصل از عملیات ترازیابی و گرانی‌سنجی و (۴) ارتفاع‌سنجی ماهواره‌ای عرضه می‌شود. پس از حل مسئله مقدار مرزی، پتانسیل گرانی تفاضلی روی سطح بیضوی مرجع حاصل می شود. پتانسیل گرانی تفاضلی در خارج بیضوی مرجع در معادله لاپلاس صدق می‌کند. پس از حل مسئله مقدار مرزی دیریکله، می‌توان پتانسیل گرانی تفاضلی را در نقطه با ارتفاع متوسط تعیین کرد و پس از اِعمال عملگر گرادیان، شتاب گرانی تفاضلی را نیز در این نقطه به‌دست آورد. با در اختیار داشتن شتاب گرانی تفاضلی در نقطه با ارتفاع متوسط و بازگرداندن اثرات حذف شده در این نقطه، شتاب گرانی متوسط به‌دست می‌آید. روش عرضه شده به‌صورت عددی در منطقه جغرافیایی ایران آزمایش شده است.

واژه‌های کلیدی: ارتفاع ارتومتریک، شتاب گرانی متوسط، مسئله مقدار مرزی ژئودتیک، اسپیلاین‌های هماهنگ، ژئوئید

A methodology for mean gravity value computation based on harmonic splines and their application to boundary value problem

Safari, A.[1] and Mostafaei, A.[2]

[1] Associate Professor, Department of Surveying and Geomatics Engineering, University College of Engineering, University of Tehran, Iran
[2] Ph. D. Student of Geodesy, Department of Surveying and Geomatics Engineering, University College of Engineering, University of Tehran, Iran

(Received: 26 Oct 2008 , Accepted: 15 March 2011)

Abstract

Height is amongst the most delicate subjects of geodesy. Thanks to the Global Navigation Satellite Systems (GNSS) like GPS or GLONASS, 3D point positioning of points, by geometrical positioning, since years ago has become a common practice. The height derived from these ways has a geometrical concept. In civil projects the physical concept of the height is more demanded. Orthometric height, H_i^O, is one kind of the physical concepts of the height. The Orthometric height of point i, H_i^O, can be calculated by

$$H_i^O = \frac{C_i}{\bar{g}_i}$$

where $\bar{g}_i$ is the mean value of the gravity along the plumb line between the geoid and the

* نگارنده رابط: تلفن: ۰۲۱-۸۸۰۰۸۸۳۷ دورنگار: ۰۲۱-۸۸۰۰۸۸۳۷ E-mail: asafari@ut.ac.ir

surface point i and C_i is the geo-potential number of point i, which is calculated using

$$C_i = -(W_i - W_0)$$

One of the problems in orthometric height calculation is computation of $\bar{g}_i$ .The value of the gravity at the point with mean height H_i° is calculated by

$$\bar{g}_i = g_i + 0.0424 H_i^O$$

Where g_i is gravity observation value at point i.

The orthometric height computed by this mean value of the gravity is called Helmert orthometric height, according to Sanso and Sona (1993) the idea for earth gravity determination.

In this paper a methodology to calculate value of the gravity at the point with mean height from the geoid has been supposed. Derived gravity from this method is composed from three parts, (1) global and regional gravity computed by ellipsoidal harmonic expansion to degree and order 360 plus the centrifugal acceleration (2) gravitational due to terrain masses within the radius of 55km around the computational point (3) incremental gravity intensity at the computational point. The first and second parts are computed by global geopotential models and digital terrain models.

Computation of the third part is possible by solving a boundary value problem. In this paper for computing the incremental gravity intensity at the point with mean height, a method by solving a fixed-free two-boundary nonlinear value problem is addressed. This boundary value problem constructed for observables of the type (i) modulus of gravity (ii) gravity potential (iii) satellite altimetry data (iv) astronomical latitude (v) astronomical longitude.

The first step towards the solution of the proposed fixed geodetic boundary value problem is the linearization of the problem. After linearization we obtained a linear boundary value problem that its solution gives us the incremental gravity potential at the surface of the reference ellipsoid. Out of the reference ellipsoid surface, this answer could be obtained by solving the following Dirichlet boundary value problem:

$$\begin{cases} div\ \mathrm{grad}\delta W^L = 0 & \forall\, \mathrm{x} \in \sum_{ext} \\ \delta W^L(\mathrm{x}) = \delta W^L & \forall\, \mathrm{x} \in \sum \\ \delta W^L = \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{\|\mathrm{x}\|_2^{L+1}}\right) & \text{for } \|\mathrm{x}\|_2 \to \infty \end{cases}$$

In this paper harmonic splines supposed by Freeden (1987) are used to solve the Dirichlet problem. By applying the gradient operator on the incremental gravity potential, due to solving Dirichlet problem, incremental gravity at every point out of the reference ellipsoid can be calculated (Jekeli, 2005).

Second section of this paper is an introduction on harmonic splines analysis. The construction of self productive Hilbert space and optimum interpolation answer is presented in the third section. In the final section the application of harmonic splines for solving the Dirichlet boundary value problem is discussed and by the proposed methodology the mean value of gravity in the first order leveling of Iran is calculated.

Key words: Mean gravity value, harmonic splines, boundary value problem, orthometric height, geoid

۱ مقدمه

یکی از اهداف اصلی ژئودزی، تعیین مختصات سه‌بُعدی نقاط در روی سطح و فضای بیرونی زمین است. پیدایش ماهواره‌های موقعیت‌یاب جهانی (GNSS, Global Navigation Satellite Systems)، تعیین موقعیت سه‌بُعدی را امکان پذیر کرده است. مختصات تعیین شده با ماهواره‌های موقعیت‌یاب جهانی دارای مفهوم هندسی است. ولی در کاربردهای عمرانی، ارتفاع موردنیاز دارای مفهوم فیزیکی است. تعیین موقعیت مسطحاتی به سادگی از طریق ماهواره‌های موقعیت یاب صورت می‌گیرد، درحالی‌که ساده‌ترین شیوه به‌منظور تعیین ارتفاع، روش ترازیابی است. پس از انتخاب یک نقطه درحکم مبنا، می‌توان ارتفاع سایر نقاط را از راه ترازیابی تعیین کرد. ارتفاع حاصل از ترازیابی به‌دلیل وابستگی اختلاف ارتفاع حاصل از ترازیابی به مسیر ترازیابی یکتا نیست. بنابراین نمی‌توان این روش را به‌صورت یک روش مناسب در تعیین ارتفاع نقاط به‌کار برد (ونیچک و کراکیوسکی، ۱۹۸۶؛ سانسو و ونیچک، ۲۰۰۶ و جکلی، ۲۰۰۰). مشکل را می‌توان با تبدیل نتایج وابسته به مسیر به نتایج مستقل از مسیر حل کرد. برای دو سطح هم‌پتانسیل نزدیک به‌هم رابطه زیر برقرار است (ونیچک و کراکیوسکی، ۱۹۸۶):

$$\delta W \doteq -g\delta h \qquad (۱)$$

می‌توان اختلاف ارتفاع δh را که کمیتی وابسته به مسیر است، به اختلاف پتانسیل δW که مستقل از مسیر است تبدیل کرد. لذا با اندازه‌گیری شتاب گرانی در طول خط ترازیابی می‌توان اختلاف پتانسیل بین دو نقطه را که مستقل از مسیر است به‌دست آورد. می‌توان به هر نقطه P_i یک پتانسیل W_i نسبت داد. در عمل بهتر است که به‌جای پتانسیل W_i از عدد ژئوپتانسیل استفاده شود. عدد ژئوپتانسیل C_i مربوط به نقطه P_i به‌صورت زیر تعریف می‌شود (هیسکانن و موریتز، ۱۹۶۷):

$$C_i = -(W_i - W_0) \qquad (۲)$$

اعداد ژئوپتانسیل دارای این ویژگی مفیدند که برای هر نقطه یکتا هستند. با در اختیار داشتن اعداد ژئوپتانسیل در هر نقطه می‌توان از راه رابطه زیر، ارتفاع ارتومتریک در هر نقطه را تعیین کرد: (هیسکانن و موریتز، ۱۹۶۷):

$$H_i^O = \frac{C_i}{\overline{g}_i} \qquad (۳)$$

که در رابطه فوق C_i عدد ژئوپتانسیل نقطه P_i و $\overline{g}_i$ شتاب گرانی متوسط در امتداد خط شاقول گذرنده از نقطه P_i است. یکی از مشکلات اصلی در تعیین ارتفاع ارتومتریک، تعیین شتاب گرانی متوسط در امتداد خط شاقول گذرنده از نقطه است. چنانچه در رابطهٔ (۳) شتاب گرانی متوسط از رابطهٔ زیر محاسبه شود:

$$\overline{g}_i = g_i + 0.0424 H_i^O \qquad (۴)$$

ارتفاع ارتومتریک حاصل ارتفاع ارتومتریک هلمرت نامیده می‌شود. در رابطهٔ (۴)، g_i برحسب گال و H_i^O برحسب کیلومتر است (هیسکانن و موریتز، ۱۹۶۷).

برای تعیین شتاب گرانی متوسط تحقیقات گسترده‌ای از سوی جامعه ژئودزی صورت گرفته است که از آن جمله می‌توان به کارهای (هلمرت، ۱۸۹۰؛ نیتهامر، ۱۹۳۲؛ مادر، ۱۹۵۴؛ هیسکانن و موریتز، ۱۹۶۷؛ لدرستگر، ۱۹۵۵؛ رپ، ۱۹۶۱؛ کراکیوسکی، ۱۹۶۵؛ استرانگ، ۱۹۸۲؛ سانکل، ۱۹۸۶؛ کاو و همکاران، ۲۰۰۰؛ تنزر و ونیچک، ۲۰۰۳؛ دنیس و فدرستون، ۲۰۰۳؛ و اردلان و جزایری، ۱۳۸۴) اشاره کرد.

پیدایش مدل‌های جهانی و مدل‌های رقومی زمین با توان تفکیک زیاد مدل‌سازی با دقت زیاد میدان گرانی زمین را فراهم کرده است. بر این اساس سانسو و سونا (۱۹۹۳) نظریاتی را برای تعیین میدان

گرانی زمین معرفی کردند. براساس نظر مطرح شده، میدان گرانی زمین در هر نقطه از سه قسمت تشکیل شده است (۱) سهم مدل جهانی تا درجه و مرتبه L (که در این مقاله $L = 360$ انتخاب شده است) (۲) سهم اثرات جرم‌های در فاصله نزدیک حاصل از مدل رقومی زمین (۳) سهم اثرات از درجه و مرتبه بالاتر از L ناشی از جرم‌های درونی. محاسبه سهم اثرات اول و دوم به‌سادگی امکان‌پذیر است، درحالی‌که محاسبه اثر سوم از راه حل یک مسئله مقدار مرزی ممکن است.

در این مقاله روشی برای تعیین شتاب گرانی براساس نظر فوق پیشنهاد می‌شود. براساس این نظر شتاب گرانی در نقطه با ارتفاع متوسط زیاد ژئوئید از سه قسمت تشکیل شده است (۱) شتاب گرانی حاصل از یک مدل جهانی تا درجه و مرتبه $L = 360$ در نقطه با ارتفاع متوسط (۲) شتاب گرانی حاصل از جرم‌های در فاصله نزدیک اطراف نقطه مورد محاسبه (۳) شتاب گرانی تفاضلی در نقطه مورد محاسبه.

همان‌طورکه در بالا اشاره شد، محاسبه قسمت سوم با حل یک مسئله مقدار مرزی ممکن است. در این مقاله روشی برای تعیین شتاب گرانی تفاضلی در نقطه با ارتفاع متوسط براساس حل مسئله مقدار دومرزی با مرزهای ثابت وآزاد و غیرخطی با اطلاعات بیش از موردنیاز عرضه می‌شود. جزئیات این مسئله در جدول ۱ آورده شده است. در جدول ۱ μ_γ قدرمطلق شتاب گرانی، μ_w پتانسیل گرانی، μ_Λ طول نجومی، μ_Φ عرض نجومی، μ_{h} داده مرزی حاصل از ارتفاع‌سنجی ماهواره‌ای، W_0 پتانسیل ژئوئید، σ چگالی و ω بردار سرعت زاویه‌ای زمین است. برای حل این مسئله باید ابتدا آن را خطی کرد. برای ملاحظه جزئیات مربوط به خطی‌ساختن این مسئله می‌توان به (صفری و همکاران، ۲۰۰۵) مراجعه کرد.

پس از حل این مسئله مقدار مرزی پتانسیل گرانی تفاضلی δW^L در سطح بیضوی مرجع تعیین می‌شود. این پتانسیل گرانی تفاضلی در خارج بیضوی مرجع در معادله لاپلاس صدق می‌کند. از پتانسیل گرانی تفاضلی به‌دست‌آمده روی سطح بیضوی مرجع حاصل از حل مسئله مقدار مرزی داده شده در جدول ۱، می‌توان درحکم داده‌های مرزی برای حل معادلهٔ لاپلاس استفاده کرد و یک مسئله مقدار مرزی دیریکله تشکیل داد. در جدول ۲ مسئله مقدار مرزی دیریکله برای پتانسیل گرانی تفاضلی δW^L داده شده است.

با حل مسئله دیریکله می‌توان پتانسیل گرانی تفاضلی را در هر نقطه خارج بیضوی مرجع تعیین کرد. در این مقاله برای حل مسئله دیریکله از اسپیلاین‌های هماهنگ داده شده (فریدن، ۱۹۸۷) استفاده می‌شود. سپس با اِعمال عملگر گرادیان به پتانسیل گرانی تفاضلی حاصل از حل مسئله دیریکله، می‌توان شتاب گرانی تفاضلی را در هر نقطه خارج از بیضوی تعیین کرد (جکلی، ۲۰۰۵).

مزیت اصلی این روش نسبت به سایر روش‌ها در (۱) استفاده از مدل‌های ژئوپتانسیل جدید با درجه و مرتبه زیاد (۲) استفاده از مدل‌های رقومی زمین با توان تفکیک زیاد و (۳) استفاده از همه مشاهدات مربوط به میدان گرانی زمین در چارچوب یک مسئله مقدار مرزی برای تعیین شتاب گرانی متوسط است. در بخش دوم این مقاله بعضی مقدمات ریاضی برای معرفی اسپیلاین‌های هماهنگ عرضه می‌شود. در بخش سوم ساختار فضای هیلبرت خودمولد و جواب بهینه درون‌یابی عرضه می‌شود. در بخش چهارم کاربرد اسپیلاین‌های هماهنگ در حل مسئله مقدار مرزی دیریکله برای پتانسیل گرانی تفاضلی و محاسبه شتاب گرانی متوسط در شبکه ترازیابی درجه‌یک ایران آمده است.

جدول۱. مسئله مقدار دو مرزی با مرزهای ثابت و آزاد و غیرخطی با اطلاعات بیش از مورد نیاز (صفری و همکاران، ۲۰۰۵).

1. div grad $w(x) = 2\omega^2$ (outside the Earth's masses)	$\forall x \in \mathbb{R}^3/\mathcal{D} \cup \partial\mathcal{G}_e^+$
2. div grad $w(x) = -4\pi G\sigma + 2\omega^2$ (internal space plus boundary of the planet the Earth)	$\forall x \in \mathcal{D} \cup \partial\mathcal{G}_e^-$
3. $E\left\{\left\|\text{grad}w\right\|\right\} = \mu_\gamma$ (boundary value data of type modulus of gravity)	$\forall x \in \partial\mathcal{G}_e = \mathbb{M}_h^2$
4. $E\left\{w\right\} = \mu_w$ (boundary value data of type gravity potential)	$\forall x \in \partial\mathcal{G}_e = \mathbb{M}_h^2$
5. $E\left\{h\right\} = \mu_h$ (boundary value data of type satellite altimetry)	$\forall x \in \partial\mathcal{G}_e = \mathbb{M}_s^2$
6. $E\left\{\Phi\right\} = \mu_\Phi$ (boundary value data of type astronomical latitude)	$\forall x \in \partial\mathcal{G}_e = \mathbb{M}_h^2$
7. $E\left\{\Lambda\right\} = \mu_\Lambda$ (boundary value data of type astronomical longitude)	$\forall x \in \partial\mathcal{G}_e = \mathbb{M}_h^2$
8. $w(x) = W_0$ (equipotential value at the level of the geoid close to mean sea level)	$\forall x \in \partial\mathcal{G}_e = \mathbb{M}_g^2$
9. $w(x) = \frac{1}{2}\ \omega^2 \left\|x\text{-}\left\langle x\middle\|e_\omega\right\rangle e_\omega\right\|_2^2 + \frac{gm}{\left\|x\right\|_2} + \mathcal{O}_w(\frac{1}{\left\|x\right\|_2^3})\ \left\|x\right\|_2 \to \infty$ (regularity condition at infinity)	

جدول۲. مسئله مقدار مرزی خطی دیریکله برای پتانسیل گرانی تفاضلی.

$$\begin{cases} div\ \text{grad}\delta W^L = 0 & \forall\, x \in \Sigma_{ext} \\ \delta W^L(x) = \delta W^L & \forall\, x \in \Sigma \\ \delta W^L = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\|x\|_2^{L+1}}\right) & \text{for } \|x\|_2 \to \infty \end{cases}$$

۲ مقدمات ریاضی

در این بخش بعضی مقدمات ریاضی برای معرفی اسپیلاین‌های هماهنگ مطرح می‌شود.

۲-۱ سطوح منظم

سطح $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ را منظم (یا منظم μ–هولدر، $0 \le \mu \le 1$) می‌نامند چنانچه دارای ویژگی‌های زیر باشد (فریدن و میشل، ۲۰۰۴):

۱- سطح Σ فضای اقلیدسی سه‌بُعدی را به منطقه کراندار Σ_{int} (فضای داخلی) و منطقه غیرکراندار Σ^{ext} (فضای خارجی) تعریف شده با $\Sigma = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Sigma_{int}},\ \overline{\Sigma_{int}} = \Sigma_{int} \cup \Sigma$ تقسیم می‌کند.

۲- فضای Σ_{int} شامل مبداء است.

۳- سطح Σ بسته و فشرده و فاقد نقاط دوگانه

(Double Points) است.

۴- سطح $\sum$ دارای یک میدان برداری مشتق‌پذیر (یا مشتق پذیر μ–هولدر) نرمال یکه ν (یا به‌صورت دقیق‌تر $\nu_{\sum}$) که دارای جهت به‌سمت داخل فضای $\sum^{ext}$ است.

از جمله این سطوح منظم $\sum$ در علوم زمین می‌توان به بیضوی، اسفروئید، ژئوئید و سطح منظم زمین اشاره کرد.

با معلوم بودن سطح منظم، ثابت‌های α، β وجود دارد به‌طوری‌که:

$$\alpha < \sigma^{\inf} = \inf_{x\in\sum}|x| \le \sup_{x\in\sum}|x| = \sigma^{\sup} < \beta \qquad (۵)$$

نمادهای A_{int} و B_{int} (به‌همین‌ترتیب A_{ext} و B_{ext}) مشخص‌کننده فضای داخلی (به‌همین‌ترتیب خارجی) کره A و کره B حول مبداء با شعاع‌های به‌ترتیب α و β است. نمادهای $\sum_{\text{int}}^{\inf}$ و $\sum_{\text{int}}^{\sup}$ (به‌همین‌ترتیب $\sum_{ext}^{\inf}$ و $\sum_{ext}^{\sup}$) مشخص‌کننده فضای داخلی (به‌همین‌ترتیب خارجی) کره $\sum^{\inf}$ و کره $\sum^{\sup}$ حول مبداء با شعاع‌های به‌ترتیب $\sigma^{\inf}$ و $\sigma^{\sup}$ است.

۲-۲ هماهنگ‌های خارجی

فرض کنید که $\{Y_{n,j}\}, n=0,1,\dots,\ j=1,\dots,2n+1$ یک دستگاه متعامد یکه L^2- از هماهنگ‌های کروی (سطحی) باشد به‌طوری‌که (فریدن و اشنایدر، ۱۹۹۸):

$$\left(Y_{n,k},Y_{p,q}\right)_{L^2(A)} = \int_A Y_{n,k}\left(\frac{x}{|x|}\right)Y_{p,q}\left(\frac{x}{|x|}\right)d\omega(x) = \alpha^2\delta_{np}\delta_{kq} \qquad (۶)$$

که در رابطه فوق $d\omega$ مشخص‌کننده عنصر سطح است.

در این صورت دستگاه هماهنگ‌های خارجی $\left\{H_{-n-1,j}(\alpha;\cdot)\right\},\ \alpha>0, n=0,1,\dots,\ j=1,\dots,2n+1$ تعریف شده با رابطه زیر:

$$H_{-n-1,j}(\alpha;x) = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\alpha}{|x|}\right)^{n+1} Y_{n,j}\left(\frac{x}{|x|}\right),\ x\in\overline{A_{ext}} \qquad (۷)$$

در شرایط زیر صدق می‌کند:

- توابع $H_{-n-1,j}(\alpha;\cdot)$ متعلق به دسته توابع $C^{(\infty)}\left(\overline{A_{ext}}\right)$ می‌باشد.

- توابع $H_{-n-1,j}(\alpha;\cdot)$ در معادله لاپلاس $\Delta_x H_{-n-1,j}(\alpha;x)=0$ به‌ازای $x\in A_{ext}$ صدق می‌کند.

- $H_{-n-1,j}(\alpha;\cdot)\big|_A = \frac{1}{\alpha}Y_{n,j}$

- $\int_A H_{-n-1,j}(\alpha;x)H_{-n-1,l}(\alpha;x)d\omega(x) = \delta_{n,k}\delta_{j,l}$

قضیه جمع برای هماهنگ‌های خارجی به ازای تمام $(x,y)\in\overline{A_{ext}}\times\overline{A_{ext}}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sum_{j=1}^{2n+1}H_{-n-1,j}(\alpha;x)H_{-n-1,j}(\alpha;y) = \frac{2n+1}{4\pi\alpha^2}\left(\frac{\alpha^2}{|x||y|}\right)^{n+1}P_n\left(\frac{x}{|x|}\cdot\frac{y}{|y|}\right) \qquad (۸)$$

که در رابطه فوق مشخص‌کننده چندجمله‌ای‌های لژاندر P_n از درجه n است. $Harm_n\left(\overline{A_{ext}}\right)$ فضای تمام هماهنگ‌های مرتبه n با $n\ge 0$ است:

$$Harm_n\left(\overline{A_{ext}}\right) = span_{j=1,\dots,2n+1}\left(H_{-n-1,j}(\alpha;\cdot)\right) \qquad (۹)$$

و

$$\dim\left(Harm_n\left(\overline{A_{ext}}\right)\right) = 2n+1 \qquad (۱۰)$$

رابطه زیر را در نظر می‌گیریم:

$$Harm\left(\overline{A_{ext}}\right) = span_{\substack{n=0,\dots,a\\ j=1,\dots,2n+1}}\left(H_{-n-1,j}(\alpha;0)\right). \qquad (۱۱)$$

واضح است که:

$$Harm_{0,\dots,a}\left(\overline{A_{ext}}\right) = \bigoplus_{n=0}^{a} Harm_n\left(\overline{A_{ext}}\right), \qquad (۱۲)$$

به‌طوری‌که:

$$\dim\left(Harm_{0,\dots,a}\left(\overline{A_{ext}}\right)\right) = \sum_{n=0}^{a}(2n+1) = (a+1)^2 \qquad (۱۳)$$

هسته (کرنل) $K_{Harm_{0,\dots,a}\left(\overline{A_{ext}}\right)}:\overline{A_{ext}}\times\overline{A_{ext}}\to\mathbb{R}$ با رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$K_{Harm_{0,\dots,a}\left(\overline{A_{ext}}\right)}:\sum_{n=0}^{a}\frac{2n+1}{4\pi\alpha^2}\left(\frac{\alpha^2}{|x||y|}\right)^{n+1}P_n\left(\frac{x}{|x|}\cdot\frac{y}{|y|}\right) \qquad (۱۴)$$

که هسته خودمولد برای فضا $Harm_{0,\dots,a}\left(\overline{A_{ext}}\right)$ است.
به‌طور خلاصه قرار می‌دهیم:

$$Harm_{0,\dots,a}(\Sigma) = \left(Harm_{0,\dots,a}\left(\overline{A_{ext}}\right)\right)\Big|_{\Sigma} \qquad (۱۵)$$

که در رابطه فوق Σ زیرمجموعه $\overline{A_{ext}}$ است.

۲-۳ مسئله مقدار مرزی دیریکله

فضای همه توابع $U \in C^{(2)}\left(\Sigma_{ext}\right)$ که در فضای خارجی Σ_{ext} در معادله لاپلاس صدق می‌کند و در بی‌نهایت منظم هستند (به‌عبارت‌دیگر هنگامی که
$\left(|U(x)| = 0\left(|x|^{-1}\right),\ |\nabla_x U(x)| = O\left(|x|^{-2}\right),\ |x| \to \infty\right.$
با $Pot(\Sigma_{ext})$ نشان داده می‌شود. به ازای $k = 0,1,\dots$ تعریف می‌کنیم (فریدن و اشنایدر، ۱۹۹۸):

$$Pot^{(k)}(\overline{\Sigma_{ext}}) = pot(\Sigma_{ext}) \cap C^{(k)}(\overline{\Sigma_{ext}}) \qquad (۱۶)$$

فرض کنید که U از دسته توابع $Pot^{(0)}(\overline{\Sigma_{ext}})$ باشد. دراین‌صورت از قاعده بیشینه/کمینه برای پتانسیل در فضای بیرونی می‌توان روابط زیر را به‌دست آورد:

$$\sup_{x\in\overline{\Sigma_{ext}}} |U(x)| \le \sup_{x\in\Sigma} |U(x)|,\ U \in Pot^{(0)}\left(\overline{\Sigma_{ext}}\right) \qquad (۱۷)$$

$$\sup_{x\in\overline{\Sigma_{ext}}} |U(x)| \le \sup_{x\in\Sigma} \left|\frac{\partial U}{\partial \nu}(x)\right|,\ U \in Pot^{(1)}\left(\overline{\Sigma_{ext}}\right) \qquad (۱۸)$$

و

$$\sup_{x\in\overline{K}} |U(x)| \le C\left(\int_{\Sigma} |U(x)|^2\, d\omega(x)\right)^{1/2},\ U \in Pot^{(0)}\left(\overline{\Sigma_{ext}}\right) \qquad (۱۹)$$

$$\sup_{x\in\overline{K}} |U(x)| \le C\left(\int_{\Sigma} \left|\frac{\partial U}{\partial \nu}(x)\right|^2 d\omega(x)\right)^{1/2},\ U \in Pot^{(1)}\left(\overline{\Sigma_{ext}}\right) \qquad (۲۰)$$

که در رابطه فوق C یک ثابت مثبت (مستقل از U) و K زیرمجموعه Σ_{ext} با $dist\left(\overline{K},\Sigma\right)$ است.
مسئله مقدار مرزی دیریکله به‌صورت زیر تعریف می‌شود (فریدن، ۱۹۸۷):

مسئله دیریکله خارجی (Exterior Dirichlet problem):
تابع $F \in C(\Sigma)$ معلوم است، تابع $U \in Pot^{(0)}\left(\overline{\Sigma_{ext}}\right)$ را بیابید به‌نحوی که:

$$U_{\Sigma}^{+}(x) = \lim_{\substack{\tau\to 0\\ \tau>0}} U\left(x + \tau\nu(x)\right) = F(x),\ x \in \Sigma. \qquad (۲۱)$$

۲-۴ مسئله مقدار مرزی گسسته دیریکله

فرض کنید که Σ یک سطح منظم باشد. مسئله مقدار مرزی گسسته دیریکله را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد:
فرض کنید که داده‌های $\left(x_i, F(x_i)\right),\ i = 1,\dots,N$ از تابع $F \in C(\Sigma)$ متناظر به یک مجموعه X_N از نقاط $x_1,\dots,x_N$ معلوم باشد (فریدن و میشل، ۲۰۰۴):
تقریب U_N از جواب $U \in Pot^{(0)}\left(\overline{\Sigma_{ext}}\right),\ \mathrm{U}^{+} = F,$ را به‌نحوی بیابید که U_N در فضای بیرونی کره A به شعاع α حول مبداء هماهنگ باشد و در روی سطح Σ تابع $F_N = U_N|_{\Sigma}$ دقیقاً همان مقادیر را در نقاط داده شده حاصل کند. به‌عبارت دیگر $U_N(x_i) = U(x_i),\ i = 1,\dots,N$ و خطای مطلق بین F_N و F روی Σ کوچک باشد.

۳-۱ اسپیلاین‌های هماهنگ

فرض کنید که $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ یک سطح منظم و دنباله (A_n) یک دنباله-$\left(\left(\alpha/\alpha^{\inf}\right)^n\right)$ جمع‌پذیر باشد (فریدن و میشل، ۲۰۰۴). فرض نمائید که $\mathrm{A}_n \ne 0$ به ازای همهٔ $n \ge 0$ و

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)\mathrm{A}_n^{-2} \qquad (۲۲)$$

فضای زیر را در نظر بگیرید:

$$\mathcal{H}\left(\left(\mathrm{A}_n\left(\frac{\sigma^{\inf}}{\alpha}\right)^n\right); \overline{\Sigma_{ext}^{\inf}}\right) = \mathcal{H}\left((\mathrm{A}_n); \overline{\mathrm{A}_{ext}}\right)\Big|\overline{\Sigma_{ext}^{\inf}} \qquad (۲۳)$$

فضای تعریف شده از رابطه (۲۳) به‌اختصار با $\mathcal{H}$ نمایش داده می‌شود. فضای $\mathcal{H}$ فضای هیلبرت پتانسیل‌های با نمایش زیر است:

$$V=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{2n+1}\mathrm{A}_n^{-1}F^{\wedge_{L^2(\mathrm{A})}}(n,k)\times \times H_{-n-1,k}^{\alpha}\Big|\overline{\Sigma_{ext}^{\inf}},F\in L^2(\mathrm{A}) \quad (۲۴)$$

به‌طوری‌که:

$$\|\mathrm{V}\|_{\mathcal{H}}=\|F\|_{L^2(\mathrm{A})} \quad (۲۵)$$

قضیه ۳-۱

فضای $\mathcal{H}$ تعریف شده از رابطه (۲۳) و مجهز به ضرب داخلی $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{H}}$ یک فضای هیلبرت جدایی‌پذیر دارای هسته خودمولد (Reproducing Kernel) زیر است (فریدن، ۱۹۹۹):

$$K_{\mathcal{H}}(x,y)= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{2n+1}\mathrm{A}_n^{-2}H_{-n-1,k}^{\alpha}(x)H_{-n-1,k}^{\alpha}(y)= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{2n+1}\mathrm{A}_n^{-2}\left(\frac{\alpha}{\sigma^{\inf}}\right)^{2n}H_{-n-1,k}^{\sigma^{\inf}}(x)H_{-n-1,k}^{\sigma^{\inf}}(y), \quad (۲۶)$$

که در آن $(x,y)\in\overline{\Sigma_{ext}^{\inf}}$ است. دستگاه توابع $\left\{\mathrm{A}_n^{-1}\left(\frac{\alpha}{\sigma^{\inf}}\right)^n H_{-n-1,k}^{\sigma^{\inf}}\right\}$ یک پایه برای فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ است.

نامساوی زیر:

$$|V(x)|\le\left(\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{A}_n^{-2}\frac{2n+1}{4\pi\alpha^2}\left(\frac{\alpha^2}{\left(\sigma^{\inf}\right)^2}\right)^{n+1}\right)^{\frac{1}{2}}\|V\|_{\mathcal{H}} \quad (۲۷)$$

به ازای هر $x\in\overline{\Sigma_{ext}^{\inf}}$ و به ازای همه $V\in\mathcal{H}$ برقرار است. بنابراین شرط لازم‌وکافی برای اینکه $\mathcal{H}$ دارای یک هسته خودمولد باشد برقرار است (ارونسجین، ۱۹۵۰) و بنابراین رابطه زیر برقرار است:

$$V(x)=\left(K_{\mathcal{H}}(x,\cdot),V\right)_{\mathcal{H}},\quad x\in\overline{\Sigma_{\mathrm{ext}}^{\inf}} \quad (۲۸)$$

از رابطه (۲۷) لم زیر به‌دست می‌آید:

لم ۳-۱

به ازای هر $x\in\overline{\Sigma_{ext}^{\inf}}$ تابعک خطی D_x تعریف شده از رابطه زیر:

$$D_x:V\mapsto D_xV=V(x),\quad V\in\mathcal{H} \quad (۲۹)$$

روی $\mathcal{H}$ کراندار است (فریدن و همکاران، ۱۹۹۸). به‌عبارت‌دیگر $|D_xV|=|V(x)|\le C\|V\|_{\mathcal{H}}$ که در آن C از رابطه زیر برآورد می‌شود:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{A}_n^{-2}\frac{2n+1}{4\pi\alpha^2}\left(\frac{\alpha^2}{\left(\sigma^{\inf}\right)^2}\right)^{n+1}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (۳۰)$$

به ازای $x\in\overline{\Sigma_{ext}^{\inf}}$ تابع زیر

$$y\mapsto K_{\mathcal{H}}(y,x),\qquad y\in\overline{\Sigma_{ext}^{\inf}} \quad (۳۱)$$

یک عنصر از فضای $\mathcal{H}$ است و به ازای همهٔ $V\in\mathcal{H}$

$$D_xV=V(x)=\left(V,K_{\mathcal{H}}(x,\cdot)\right)_{\mathcal{H}}. \quad (۳۲)$$

۳-۲ درون‌یابی اسپیلاین هماهنگ (مسئله درون‌یابی)

مسئله درون‌یابی را می‌توان به‌صورت زیر تعریف کرد (فریدن و میشل، ۲۰۰۴):

فرض کنید از جواب $U:\overline{\Sigma_{ext}}\to\mathbb{R}$ مسئله مقدار مرزی $LU=F$ اطلاعات $(x_i,F(x_i))\in\Sigma\times\mathbb{R},\ i=1,\ldots,N$ معلوم باشد. تابع U_N را به‌نحوی بیابید که:

$$\|U_N\|_{\mathcal{H}}=\inf_{V\in\mathcal{I}_N^F}\|V\|_{\mathcal{H}} \quad (۳۳)$$

و در آن:

$$\mathcal{I}_N^F=\left\{V\in\mathcal{H}\middle|L_{x_i}V=F(x_i),i=1,\ldots,N\right\} \quad (۳۴)$$

مسئله درون‌یابی در چارچوب فضاهای هیلبرت خودمولد $\mathcal{H}$ را می‌توان به‌روش استاندارد حل کرد. مراحل لازم یادآوری می‌شود. ابتدا اسپیلاین‌های هماهنگ (که گاهی اوقات اسپیلاین‌های لاپلاس نامیده می‌شوند) معرفی

می‌شوند (فریدن، ۱۹۸۷).

تعریف ۳-۱: فرض کنید که $X_N=\{x_1,\ldots,x_N\}\subset\sum$ باشد. هر تابع $U_N\in\mathcal{H}$ با صورت زیر:

$$U_N(x)=\sum_{i=1}^{N}L_{x_i}K_{\mathcal{H}}(x_i,x)a_i,\quad x\in\overline{\sum_{\text{ext}}^{\text{inf}}} \tag{۳۵}$$

که در آن ضرایب $a_1,\ldots,a_N\in\mathbb{R}$ دلخواه‌اند و توابع $L_{x_1}K_{\mathcal{H}}(x_1,\cdot),\ldots,L_{x_N}K_{\mathcal{H}}(x_N,\cdot)$ مستقل خطی هستند یک اسپیلاین هماهنگ در $\mathcal{H}$ نسبت به دستگاه $X_N\subset\sum$ و تابعک‌های $L_{x_1},\ldots,L_{x_N}$ نامیده می‌شود.

نتایج زیر به‌راحتی قابل اثبات است (فریدن و میشل، ۲۰۰۴):

لم ۳-۲

یک اسپیلاین هماهنگ U_N^F در $\mathcal{H}$ نسبت به X_N وجود دارد که داده‌ها را درون‌یابی می‌کند. به‌عبارت‌دیگر $L_{x_i}U_N^F=F(x_i),\ \ i=1,\ldots,N$ است.

لم ۳-۳

به ازای همهٔ درون‌یاب‌های $V\in\mathcal{I}_N^F$ و همهٔ اسپیلاین‌های U_N رابطهٔ زیر برقرار است:

$$\|U_N-V\|_{\mathcal{H}}^2=\|U_N^F-V\|_{\mathcal{H}}^2+\|U_N-U_N^F\|_{\mathcal{H}}^2 \tag{۳۶}$$

لم ۳-۴

چنانچه $V\in\mathcal{I}_N^F$ باشد دراین‌صورت رابطه زیر برقرار است:

$$\|V\|_{\mathcal{H}}^2=\|U_N^F\|_{\mathcal{H}}^2+\|U_N^F-V\|_{\mathcal{H}}^2 \tag{۳۷}$$

قضیه ۳-۲

فرض کنید که از تابع $F\in\mathcal{H}|\sum$ نقاط داده $(x_i,F(x_i))\in\sum\times\mathbb{R},i=1,\ldots,N$ معلوم باشد. دراین‌صورت عبارت زیر برقرار است (فریدن و میشل، ۲۰۰۴):

مسئله دیریکله خارجی گُسسته: فرض کنید که $U\in\mathcal{H}|\overline{\sum_{ext}},\ \mathrm{U}^+=\mathrm{U}|\sum=F$ باشد. دراین‌صورت مسئله درون‌یابی زیر

$$\|U_N\|_{\mathcal{H}}=\inf_{V\in\mathcal{I}_N^F}\|V\|_{\mathcal{H}}$$

که در آن:

$$\mathcal{I}_N^F=\{V\in\mathcal{H}|V(x_i)=F(x_i),i=1,\ldots,N\}$$

خوش‌وضع است. به‌عبارت‌دیگر این مسئله دارای جواب یکتا است و جواب تابع پیوسته‌ای از داده‌های $F(x_1),\ldots,F(x_N)$ خواهد بود. این جواب یکتا با رابطه زیر بیان می‌شود:

$$U_N^F(x)=\sum_{n=1}^{N}K_H(x_i,x)a_i,\qquad x\in\overline{\sum_{ext}}$$

که در آن ضرایب در رابطه زیر صدق می‌کنند:

$$\sum_{n=1}^{N}K_H(x_i,x_j)a_i=F(x_j),\qquad j=1,\ldots,N$$

اکنون فضای $\mathcal{H}$ را چنانچه ضرب داخلی $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{H}_{0,\ldots,m}^{\perp}}$ متناظر به نیم‌نرم تعریف شده از رابطه زیر باشد، در نظر می‌گیریم (فریدن و میشل، ۲۰۰۴):

$$\|V\|_{\mathcal{H}_{0,\ldots,m}^{\perp}}=\left(\sum_{m+1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2n+1}\mathrm{A}_n^{-2}\left(\frac{\alpha}{\sigma^{\inf}}\right)^{2n}\times\left(V\middle|\overline{\Sigma}_{ext}^{\inf},\mathcal{H}_{-n-1,j}^{\sigma^{\inf}}\right)_{\mathcal{H}}^2\right)^{1/2} \tag{۳۸}$$

هسته $\mathcal{H}_{0,\ldots,m}^{\perp}$ این نرم $\|\ \|_{\mathcal{H}_{0,\ldots,m}^{\perp}}$ یک فضای خطی با بُعد $M=(m+1)^2$ است.

با در نظر گرفتن این فضای جدید، مسئله درون‌یابی به‌صورت زیر به فرمول در می‌آید:

فرض کنید از جواب $U:\overline{\sum_{ext}}\to\mathbb{R}$ مسئله مقدار مرزی اطلاعات $(x_i,F(x_i))\in\sum\times\mathbb{R},\ i=1,\ldots,N$ معلوم باشد. مجموعه نقاط $X_N=\{x_1,\ldots,x_N\}$ نسبت به $\mathcal{H}_{0,\ldots,m}$ یک دستگاه قابل پذیرش (Admissible) است. تابع U_N را به‌نحوی بیابید که:

$$\|U_N\|_{\mathcal{H}_{0,\ldots,m}^{\perp}}=\inf_{V\in\mathcal{I}_N^F}\|V\|_{\mathcal{H}_{0,\ldots,m}^{\perp}} \tag{۳۹}$$

لازم به توضیح است که یک دستگاه $X_N\subset\Sigma$ با $N\geq M$ را دستگاهی قابل‌پذیرش گوییم چنانچه تابع

یکتای $\mathcal{P} \in \mathcal{H}_{0,\ldots,m}$ وجود داشته باشد، به‌قسمی که به ازای هر مجموعه از اسکالرهای حقیقی $\alpha_1,\ldots,\alpha_M$ در شرایط درون‌یابی $L_{x_i}P = \alpha_i,\ i=1,\ldots,M$ صدق کند.

چنانچه $X_N \subset \Sigma$ یک دستگاه قابل‌پذیرش نسبت به $\mathcal{H}_{0,\ldots,m}$ باشد، آن‌گاه در $\mathcal{H}_{0,\ldots,m}$ یک پایه یکتای $B_1,\ldots,B_M$ به صورت زیر وجود دارد:

$$B_j(x) = \sum_{i=1}^{M} C_i^j \sum_{n=0}^{m} A_n^{-2} \frac{2n+1}{4\pi\alpha^2} L_{x_i} \times \left(\left(\frac{\alpha^2}{|x||x_i|}\right)^{n+1} P_n\left(\frac{x}{|x|}\cdot\frac{x_i}{|x_i|}\right)\right),\quad x \in \overline{\Sigma}_{ext}^{\inf} \tag{۴۰}$$

که در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$L_{x_i} B_j = \delta_{ij},\quad i,j = 1,\ldots,M \tag{۴۱}$$

به ازای هر $V \in \mathcal{H}$، درون‌یاب یکتای pV روی دستگاه قابل‌پذیرش X_M با فرمول لاگرانژ زیر داده شده است:

$$pV = \sum_{i=1}^{M} \left(L_{x_i}, V\right) B_i \tag{۴۲}$$

نگاشت $p: \mathcal{H} \to \mathcal{H}_{0,\ldots,m}$ یک تصویرگر پیوسته، خطی از $\mathcal{H}$ به $\mathcal{H}_{0,\ldots,m}$، و p تعیین‌کننده جمع مستقیم زیر است:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{0,\ldots,m} \oplus \mathring{\mathcal{H}}_{0,\ldots,m}^{\perp} \tag{۴۳}$$

با

$$\mathring{\mathcal{H}}_{0,\ldots,m}^{\perp} = \mathring{\mathcal{H}}_{0,\ldots,m}^{\perp}\left(\left(\mathrm{A}_n\left(\frac{\sigma^{\inf}}{\alpha}\right)^n\right); \overline{\Sigma_{ext}^{\inf}}\right) = \left\{V \in \mathcal{H} \middle| L_{x_i}V = 0,\ i = 1,\ldots,M\right\} \tag{۴۴}$$

فضای $\mathring{\mathcal{H}}_{0,\ldots,m}^{\perp}$ تعریف شده با رابطه (۴۴) مجهز به ضرب داخلی $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{H}_{0,\ldots,m}^{\perp}}$ یک فضای هیلبرت است. به‌آسانی می‌توان تحقیق کرد که فضای $\mathring{\mathcal{H}}_{0,\ldots,m}^{\perp}$ دارای هسته خودمولد بیان شده با رابطه زیر است:

$$\begin{aligned} K_{\mathring{\mathcal{H}}_{0,\ldots,m}^{\perp}}(x,y) &= K_{\mathcal{H}_{0,\ldots,m}^{\perp}}(x,y) \\ &- \sum_{i=1}^{M}\left(L_{x_i} K_{\mathcal{H}_{0,\ldots,m}^{\perp}}(x_i,x)\right) B_i(y) \\ &- \sum_{i=1}^{M} B_i(x)\left(L_{x_i}, K_{\mathcal{H}_{0,\ldots,m}^{\perp}}(y,x_i)\right) \\ &+ \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M} B_i(x)\left(L_{x_i} L_{x_j} K_{\mathcal{H}_{0,\ldots,m}^{\perp}}(x_j,x_i)\right) B_j(y) \end{aligned} \tag{۴۵}$$

که در این رابطه

$$K_{\mathcal{H}_{0,\ldots,m}^{\perp}}(x,y) = \sum_{i=1}^{M} \frac{2n+1}{4\pi\alpha^2} A_n^{-2} \times \left(\frac{\alpha^2}{|x||y|}\right)^{n+1} P\left(\frac{x}{|x|}\cdot\frac{y}{|y|}\right) \tag{۴۶}$$

که در آن $x,y \in \overline{\Sigma}_{ext}^{\inf}$ است. به ازای هر $x \in \overline{\Sigma}_{ext}^{\inf}$ می‌توان نشان داد که $K_{\mathring{\mathcal{H}}_{0,\ldots,m}^{\perp}}(x,y)$ عضوی از فضای $\mathring{\mathcal{H}}_{0,\ldots,m}^{\perp}$ است و ویژگی

$$\mathring{V}(x) = \left(K_{\mathring{\mathcal{H}}_{0,\ldots,m}^{\perp}}(x,\cdot), \mathring{V}\right)_{\mathcal{H}_{0,\ldots,m}^{\perp}} \tag{۴۷}$$

به ازای هر $x \in \overline{\Sigma}_{ext}^{\inf}$ و $\mathring{V} \in \mathring{\mathcal{H}}_{0,\ldots,m}^{\perp}$ برقرار است. با توجه به اینکه به ازای هر $x \in \Sigma$، L_x روی فضای $\mathring{\mathcal{H}}_{0,\ldots,m}^{\perp}$ کراندار است لذا به ازای $y \in \overline{\Sigma}_{ext}^{\inf}$، $y \mapsto L_x K_{\mathring{\mathcal{H}}_{0,\ldots,m}^{\perp}}(x,y)$ نمایشگر L_x است.

اکنون می‌توان به مسئله یافتن نُرم‌ترین درون‌یاب به‌صورت زیر پاسخ گفت:

قضیه ۳-۳

فرض کنید که از تابع $F \in \mathcal{H}|\Sigma$ نقاط داده $\left(x_i, F(x_i)\right) \in \Sigma \times \mathbb{R}, i = 1,\ldots,N$ معلوم باشد. دراین‌صورت عبارات زیر برقرار هستند:

مسئله دیریکله خارجی گُسسته: فرض کنید که $U \in \mathcal{H}|\overline{\Sigma_{ext}},\ \mathrm{U}^{+} = \mathrm{U}|\Sigma = F$ باشد. دراین‌صورت مسئله درون‌یاب‌ی زیر

$$\left\|U_N^F\right\|_{\mathcal{H}_{0,\dots,m}^{\perp}} = \inf_{V\in\mathcal{I}_N^F} \|V\|_{\mathcal{H}_{0,\dots,m}^{\perp}}$$

که در آن:

$$\mathcal{I}_N^F = \left\{V\in\mathcal{H} \middle| V(x_i)=F(x_i), i=1,\dots,N\right\}$$

خوش‌وضع است. به‌عبارت دیگر این مسئله دارای جواب یکتا، و جواب تابع پیوسته‌ای از داده‌های $F(x_1),\dots,F(x_N)$ است. این جواب یکتا با رابطه زیر بیان می‌شود:

$$U_N^F(x)=\sum_{i=1}^{M} F(x_i)B_i(x) + \sum_{n=M+1}^{N} K^{\circ}_{\mathcal{H}_{0,\dots,m}^{\perp}}(x_n,x)a_n,\ \ x\in\overline{\Sigma_{ext}^{\inf}}$$

کـه در آن ضـرایب $a_{M+1},\dots,a_N$ در رابطـه زیـر صـدق می‌کنند:

$$\sum_{i=M+1}^{N} K^{\circ}_{\mathcal{H}_{0,\dots,m}^{\perp}}(x_i,x_j)a_i = F(x_j) - \sum_{n=1}^{M} F(x_n)B_n(x_j)\ \ \ j=M+1,\dots,N$$

۳-۳ اسپیلاین‌های هموارسازی (Smoothing Splines)

عملاً مشاهدات به خطا آلوده هستند. در این حالت داده‌ها درون‌یابی بایستی با هموارسازی جایگزین شوند (فریدن، ۱۹۸۱؛ فریدن، ۱۹۹۹؛ موریتز، ۱۹۸۰ و وهبا، ۱۹۹۰). به‌طور دقیق‌تر چنانچه کمیت‌های $F(x_1),\dots,F(x_N)$ با خطا همراه باشند، لذا برای تابع درون‌یابی:

$$L_{x_i}V \approx F(x_i),\ \ i=1,\dots,N \tag{۴۸}$$

منظور از هموارسازی این است که کمیت زیر:

$$\mu(V)=\sum_{i=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\left(L_i V - F_i\right)B_{il}\left(L_l V - F_l\right) + \lambda\|V\|_{\mathcal{H}} \tag{۴۹}$$

که در آن $V\in\mathcal{H}$ ، کمینه شود. در رابطه فوق λ یک ثابت مثبت و B_{il} یک ماتریس معین مثبت است.

ضرایب از دستگاه خطی زیر تعیین می‌شوند:

$$\left(\mathbf{K}_H+\lambda\mathbf{B}^{-1}\right)a=\mathbf{F},\qquad \mathbf{F}=(F_1,\dots,F_N) \tag{۵۰}$$

بایستی توجه داشت که $\mathbf{K}_H$ و $\mathbf{B}$ معین مثبت و درنتیجه ماتریس $\left(\mathbf{K}_H+\lambda\mathbf{B}^{-1}\right)$ معین مثبت است. دستگاه معادلات بالا دارای جواب یکتا است.

برای حل مسئله بیان شده با رابطه (۵۰)، بایستی ابتدا پارامتر λ تعیین شود. برای تعیین پارامتر λ می‌توان از روش (GCV, Generalized Cross-Validation) استفاده کرد (هانسن، ۱۹۹۸ و وهبا، ۱۹۹۰). پارامتر پایدارسازی بهینه λ در این روش طوری انتخاب می‌شود که تابع G با تعریف زیر را کمینه سازد:

$$G(\lambda)=\frac{\left\|\mathbf{K}_H a_\lambda-\mathbf{F}\right\|_2^2}{\left[\mathrm{trace}\left[\mathbf{I}_N-\mathbf{K}_H\left(\mathbf{K}_H^T\mathbf{K}_H+\lambda^2\mathbf{I}_N\right)^{-1}\mathbf{K}_H^T\right]\right]^2}=\frac{\nu(\lambda)}{\tau(\lambda)} \tag{۵۱}$$

که در رابطـه فـوق توابـع $\upsilon(\lambda)$ و $\tau(\lambda)$ بـه‌صـورت زیـر تعریف می‌شوند:

$$\nu(\lambda)=\frac{\left\|\mathbf{K}_H a_\lambda-\mathbf{F}\right\|_2^2}{\tau(\lambda)} \tag{۵۲}$$

$$\tau(\lambda)=\mathrm{trace}\left[\mathbf{I}_N-\mathbf{K}_H\left(\mathbf{K}_H^T\mathbf{K}_H+\lambda^2\mathbf{I}_N\right)^{-1}\mathbf{K}_H^T\right] \tag{۵۳}$$

در روابط فوق a_λ ضرایب مجهول به ازای مقدار λ و $\mathbf{I}_N$ نیز ماتریس یکه به بُعد N است.

۳-۴ مثال‌های از انواع هسته(کرنل)ها

به ازای بعضی دنباله‌های جمع‌پذیر خاص $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ می‌توان نمایش هسته خودمولد را با استفاده از قضیه جمع برای هماهنگ‌های کروی به‌صورت توابع مقدماتی به‌دست آورد. در این بخش مثال‌هایی از آن مطرح می‌شود.

۱- هسته از نوع آبل-پواسون با $A_n=1\,,n=0,1,\ldots$:

$$K_{\mathcal{H}}(x,y)=\frac{1}{4\pi}\frac{|x|^2|y|^2-\alpha^4}{\left(|x|^2|y|^2-2(x\cdot y)\alpha^2+\alpha^4\right)^{\frac{3}{2}}} \tag{۵۴}$$

۲- هسته از نوع تکینه با $A_n=(2n+1)/2,\ n=0,1,\ldots$:

$$K_{\mathcal{H}}(x,y)=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{\left(|x|^2|y|^2-2(x\cdot y)\alpha^2+\alpha^4\right)^{\frac{1}{2}}} \tag{۵۵}$$

۳- هسته از نوع لگاریتمی با $A_n=(2n+1)(n+1),\ n=0,1,\ldots$:

$$K_{\mathcal{H}}(x,y)=\frac{1}{4\pi\alpha^2}\ln\left(1+\frac{2\alpha^2}{\left(|x|^2|y|^2-2(x\cdot y)\alpha^2+\alpha^4\right)^{\frac{1}{2}}+|x||y|-\alpha^2}\right) \tag{۵۶}$$

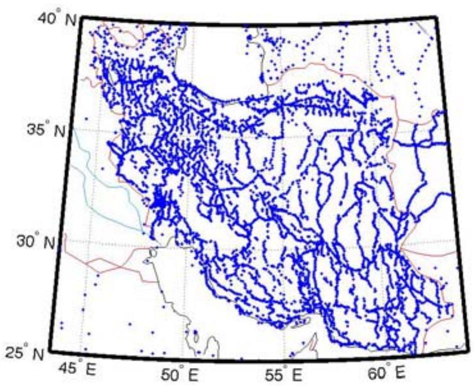
۴ بررسی موردی: تعیین شتاب گرانی متوسط در منطقه ایران

در این بخش کاربرد مدل‌های ژئوپتانسیل با درجه و مرتبه بالا، مدل‌های رقومی زمین و اسپیلاین‌های هماهنگ برای تعیین شتاب گرانی متوسط در شبکه ترازیابی درجه‌یک ایران عرضه می‌شود.

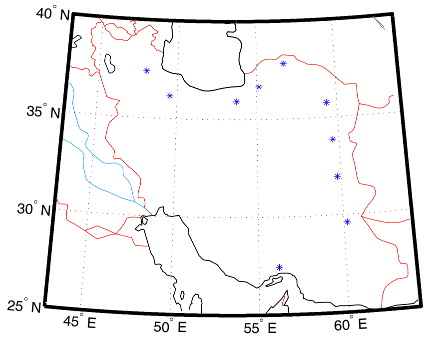
برای تعیین پتانسیل گرانی تفاضلی در روی سطح بیضوی مرجع از داده‌های مرزی (۱) شتاب گرانی حاصل از گرانی‌سنجی زمینی موجود در بانک داده BGI (۲) داده‌های طول و عرض نجومی درجه‌یک و (۳) داده‌های حاصل از ارتفاع‌سنجی ماهواره‌ای استفاده شد. در شکل ۱ توزیع داده‌های شتاب گرانی در بانک داده BGI استفاده شده در این تحقیق نشان داده شده است. شکل ۲ نشان‌دهنده موقعیت نقاط نجومی مورد استفاده به‌مثابه داده مرزی در این تحقیق است. تغییرات ژئوئید دریایی استفاده شده درحکم داده مرزی در مسئله مقدار مرزی با مرز ثابت-آزاد در شکل ۳ نشان داده شده است. به‌منظور محاسبه ژئوئید دریایی از رابطه زیر استفاده شده است (صفری و همکاران، ۲۰۰۵):

$$N=h_{MSL}-h_{SST} \tag{۵۷}$$

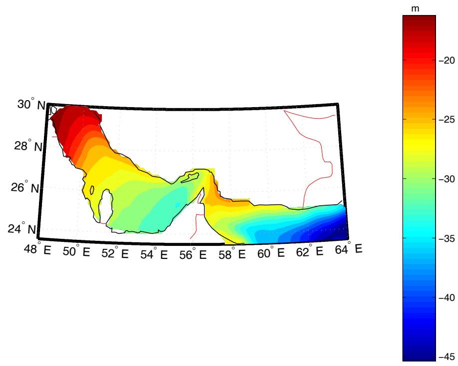
که در رابطه فوق h_{MSL} نشان‌دهنده ارتفاع سطح متوسط دریا و h_{SST} نشان‌دهنده توپوگرافی سطح دریا است. جهت محاسبه سطح متوسط دریا از مدل جهانی CSRMSS95 استفاده شد. این مدل سطح متوسط آب دریا از مشاهدات ارتفاع‌سنجی ماهواره‌ای حاصل شده است. به‌منظور محاسبه این سطح متوسط از داده‌های حاصل از ماهواره TOPEX/POSEIDON، ماهواره ERS-1 و ماهواره Geosat استفاده شده است (کیم و همکاران، ۱۹۹۵). برای محاسبه توپوگرافی سطح آب دریا در خلیج فارس و دریای عمان نیز از مدل (Global Parallel Ocean Circulation Model) POCM-4B استفاده شده است. این مدل از راه مشاهدات روزانه میدان تنش باد (Wind stress field) و مشاهدات ماهانه جریان‌های گرمایی سطح متوسط آب دریا (Mean sea surface heat fluxes) از ۱۹۸۷ تا ۱۹۹۴ به‌دست آمده است (استامر و همکاران، ۱۹۹۶). این مدل از بسط هماهنگ‌های کروی تا درجه و مرتبه ۳۶۰ بیان می‌شود (رپ، ۱۹۹۸).



شکل ۱. توزیع نقاط در بانک داده BGI.



شکل ۲. توزیع نقاط نجومی درجه یک در ایران.



شکل ۳. تغییرات ژئوئید دریایی در خلیج فارس حاصل از مشاهدات ارتفاع‌سنجی ماهواره‌ای.

داده‌های فوق درحکم داده مرزی در مسئله مقدار دو مرزی با مرز ثابت–آزاد داده شده در جدول ۱ استفاده شد. با حل این مسئله مقدار مرزی پتانسیل گرانی تفاضلی روی سطح بیضوی مرجع تعیین می‌شود. برای جزئیات مربوط به نحوهٔ حل این مسئله مقدار مرزی و تعیین پتانسیل گرانی تفاضلی روی سطح بیضوی مرجع می‌توان به (اردلان و صفری، ۲۰۰۴) و (صفری و همکاران، ۲۰۰۵) مراجعه کرد. شکل ۴ نشان‌دهنده تغییرات پتانسیل گرانی تفاضلی حاصل از حل مسئله مقدار مرزی با داده‌های مرزی فوق در روی سطح بیضوی مرجع است (اردلان و صفری، ۲۰۰۴).

با در اختیار داشتن پتانسیل گرانی تفاضلی روی بیضوی می‌توان مسئله مقدار مرزی جدول ۲ را برای تعیین پتانسیل گرانی تفاضلی در هر نقطه خارج بیضوی حل کرد. برای این کار از روش اسپیلاین‌های هماهنگ عرضه شده در بخش قبل استفاده شد. برای این کار از یک درون‌یاب آبل–پواسون $(A_n=1)$ با $\left(\frac{\alpha}{\sigma^{\inf}}=0.996\right)$ استفاده شد. شکل ۵ تغییرات پارامتر هموارسازی براساس روش GCV را نشان می‌دهد (هانسن، ۱۹۹۸ و وهبا، ۱۹۹۰). براساس این روش پارامتر هموارسازی بهینه برابر 4.5278×10^{-10} حاصل شد. بعد از حل مسئله مقدار مرزی برای پتانسیل گرانی تفاضلی با اِعمال عملگرهای خطی می‌توان سایر کمیت‌های گرانی نظیر شتاب گرانی تفاضلی را به‌دست آورد (جکلی، ۲۰۰۵). ارتباط بین شتاب گرانی تفاضلی $\delta\Gamma^L$ و پتانسیل گرانی تفاضلی δW^L در هر نقطه به‌صورت زیر تعریف می‌شود (اردلان و گرافارند، ۲۰۰۴):

$$\delta\Gamma^L=\nabla_{\mathbf{e}_\gamma}\delta W^L \qquad (۵۸)$$

که در رابطه فوق $\nabla_{\mathbf{e}_\gamma}$ به‌مفهوم گرادیان در راستای بردار مرجع $\mathbf{e}_\gamma$ است. لذا برای تعیین شتاب گرانی تفاضلی در هر نقطه از فضای خارج بیضوی مرجع می‌توان عملگر گرادیان $\nabla_{\mathbf{e}_\gamma}$ را به پتانسیل گرانی تفاضلی δW^L حاصل از جواب مسئله دیریکله اِعمال کرد. شکل ۶ نشان‌دهنده تغییرات شتاب گرانی تفاضلی روی سطح بیضوی مرجع است.

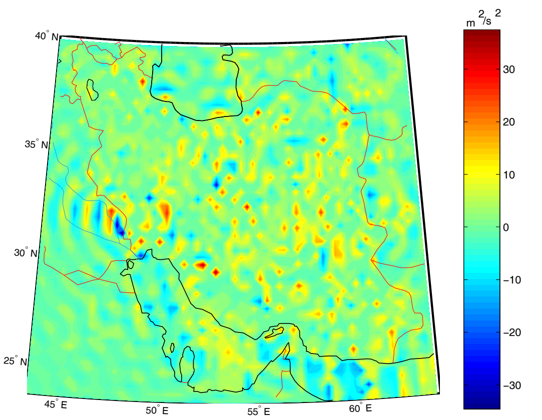
اکنون با در اختیار داشتن پتانسیل گرانی تفاضلی در منطقه ایران حاصل از حل مسئله دیریکله می‌توان شتاب گرانی متوسط را در نقاط گوناگون منطقه ایران از روش پیشنهاد شده به‌دست آورد. تغییرات ارتفاعی در ایران حاصل از مدل SRTM در شکل ۷ نشان داده شده است. با اِعمال عملگر گرادیان به پتانسیل گرانی تفاضلی در نقطه واقع در ارتفاع متوسط می‌توان شتاب گرانی تفاضلی را محاسبه کرد. شکل ۸ نشان‌دهنده تغییرات شتاب گرانی تفاضلی محاسبه شده در نقاط با ارتفاع متوسط در منطقه ایران است. اکنون با معلوم بودن شتاب گرانی تفاضلی، به‌منظور به‌دست آوردن شتاب گرانی متوسط اثرات میدان

مرجع و اثر جرم‌های در فاصله نزدیک در نقطه با ارتفاع متوسط بازگردانده می‌شود.

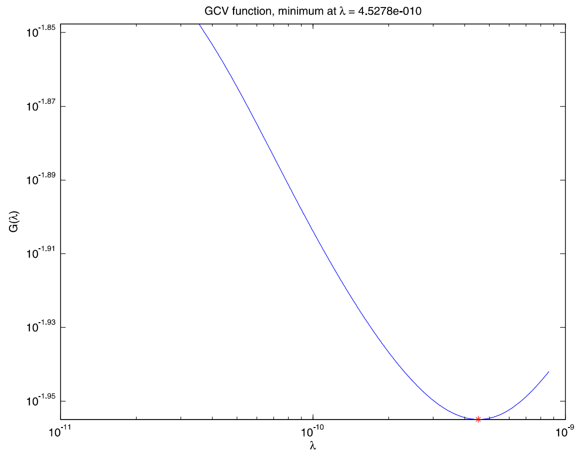
شکل۹ نقشه تغییرات شتاب گرانی مرجع حاصل از بسط هماهنگ‌های تا درجه و مرتبه ۳۶۰ و اثر میدان گریز از مرکز محاسبه شده در نقاط با ارتفاع متوسط در منطقه ایران را نشان می‌دهد. به‌منظور محاسبه اثر میدان جاذبه از بسط هماهنگ‌های بیضوی تا درجه و مرتبه ۳۶۰ حاصل از مدل ژئوپتانسیل EIGEN-GL04C (فورست و همکاران، ۲۰۰۵) استفاده شد. ضرایب این مدل به‌صورت کروی است که با استفاده از رابطه بین ضرایب هماهنگ‌های بیضوی و کروی، ضرایب این مدل در دستگاه بیضوی استخراج شد (جکلی، ۱۹۸۸). شکل ۱۰ نشان‌دهنده تغییرات اثر جرم‌های درفاصله نزدیک در نقطه مورد محاسبه است. به‌منظور محاسبه اثر جرم‌های در فاصله نزدیک ۵۵ کیلومتر اطراف نقطه از روش پیشنهادی (اردلان و صفری، ۲۰۰۴) استفاده شد. نقشه تغییرات شتاب گرانی حاصل از بسط هماهنگ‌های بیضوی تا درجه و مرتبه ۳۶۰، اثر میدان گریز و اثر جرم‌های در فاصله نزدیک در نقطه با ارتفاع متوسط در منطقه ایران در شکل ۱۱ آورده شده است. با در اختیار داشتن شتاب گرانی تفاضلی، اثر جرم‌های در فاصله نزدیک ۵۵ کیلومتر اطراف نقطه مورد محاسبه و شتاب گرانی مرجع حاصل از بسط هماهنگ‌های تا درجه و مرتبه ۳۶۰ و اثر میدان گریز از مرکز محاسبه شده در نقطه با ارتفاع متوسط می‌توان شتاب گرانی متوسط را تعیین کرد. شکل ۱۲ نشان‌دهنده تغییرات شتاب گرانی متوسط در نقاط با ارتفاع متوسط در منطقه ایران است.

روش پیشنهادی با روش هلمرت (هیسکانن و موریتز، ۱۹۶۷) برای محاسبه شتاب گرانی متوسط در نقاط با ارتفاع متوسط در محل نقاط ترازیابی درجه یک ایران (شکل ۱۳) مقایسه، و نتیجه اختلاف در شکل ۱۴ نشان داده شده است.

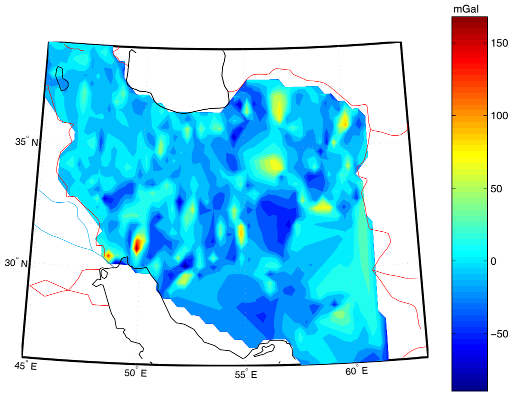
یکی دیگر از راه‌های بررسی روش پیشنهادی، محاسبه شتاب گرانی در نقاط شبکه ترازیابی دقیق ایران (شکل ۱۳) است. به‌این‌منظور ابتدا با استفاده از روش پیشنهادی در نقاط شبکه ترازیابی دقیق ایران، شتاب گرانی تفاضلی تولید شد و سپس به‌منظور محاسبه شتاب گرانی اثرات حذف شده، شامل اثر حاصل از جرم‌های در فاصله نزدیک، اثر حاصل از بسط هماهنگ‌های تا درجه و مرتبه ۳۶۰ و اثر گریز از مرکز بازگردانده شد. شتاب گرانی محاسبه شده در این نقاط با شتاب گرانی اندازه‌گیری شده مقایسه شد. اطلاعات آماری مربوط به این مقایسه در جدول ۳ آمده است. این آزمون دوباره با استفاده از انتگرال آبل–پواسون (صفری و همکاران، ۲۰۰۵) صورت گرفت. با استفاده از انتگرال آبل–پواسون شتاب گرانی تفاضلی در نقاط شبکه ترازیابی درجه یک ایران تولید شد و به‌منظور محاسبه شتاب گرانی در این نقاط، اثرات حذف شده بازگردانده شد. شتاب گرانی محاسبه شده به این روش در این نقاط، با شتاب گرانی اندازه‌گیری شده مقایسه و اطلاعات آماری مربوط به این مقایسه در جدول ۴ آورده شد. مقایسه نتایج در جدول‌های ۳ و ۴ به‌خوبی برتری روش پیشنهادی را بر استفاده مستقیم از انتگرال آبل–پواسون نشان می‌دهد.



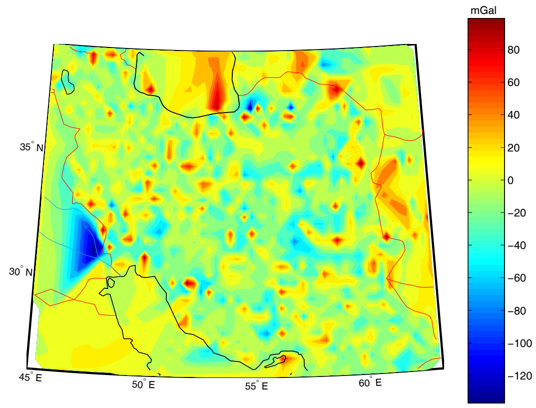
شکل٤. تغییرات پتانسیل گرانی تفاضلی روی سطح بیضوی مرجع در منطقه ایران.



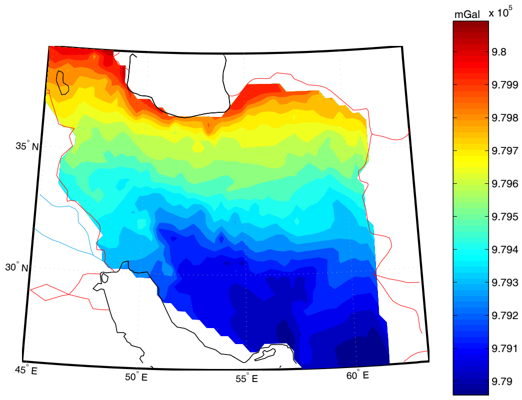
شکل ۵. منحنی GCV و نقطه حداقل منحنی درحکم پارامتر هموارسازی 4.5278×10^{-10}.



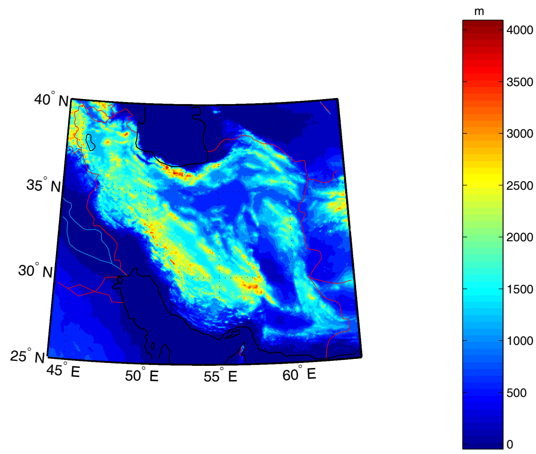
شکل ۸. نقشه تغییرات شتاب گرانی تفاضلی در نقطه با ارتفاع متوسط در منطقه ایران براساس روش پیشنهادی.



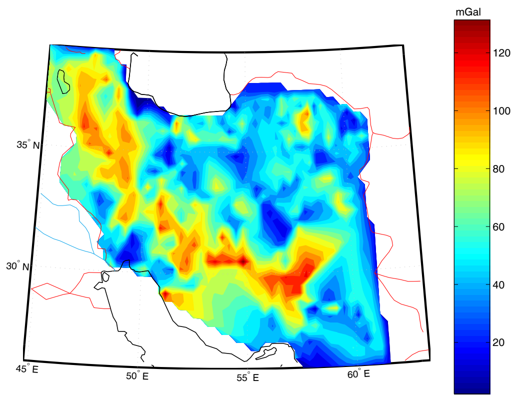
شکل ۶. تغییرات شتاب گرانی تفاضلی روی سطح بیضوی مرجع.



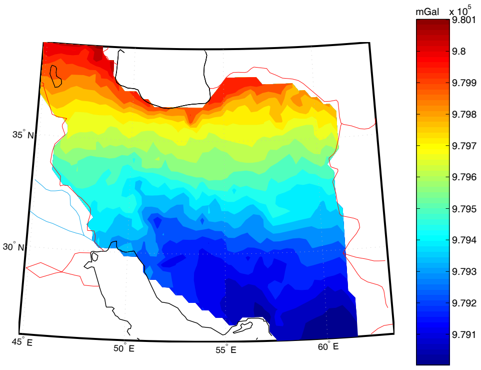
شکل ۹. نقشه تغییرات شتاب گرانی مرجع حاصل از بسط هماهنگ‌های بیضوی تا درجه و مرتبه ۳۶۰ و اثر میدان گریز از مرکز در نقطه با ارتفاع متوسط در منطقه ایران.



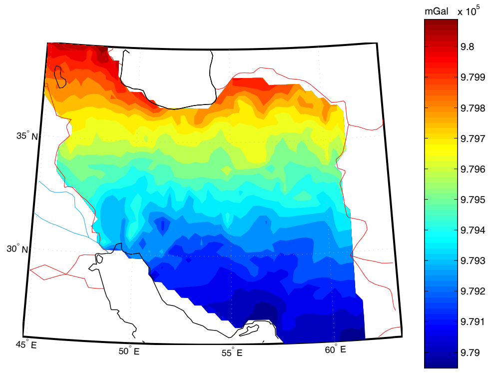
شکل ۷. تغییرات ارتفاع در منطقه ایران حاصل از مدل SRTM.



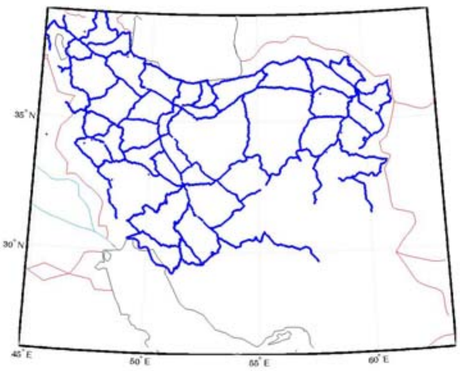
شکل ۱۰. نقشه تغییرات اثر جرم‌های در فاصله نزدیک در نقطه با ارتفاع متوسط در منطقه ایران.



شکل ۱۱. نقشه تغییرات شتاب گرانی حاصل از بسط هماهنگ‌های بیضوی تا درجه و مرتبه ۳۶۰، اثر میدان گریز و اثر جرم‌های در فاصله نزدیک در نقطه با ارتفاع متوسط در منطقه ایران.



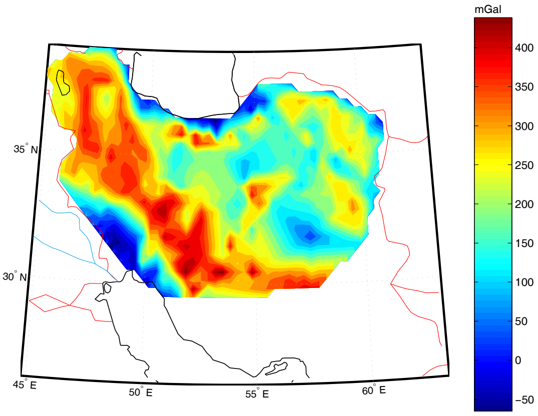
شکل ۱۲. نقشه تغییرات شتاب گرانی متوسط محاسبه شده براساس روش پیشنهادی.



شکل ۱۳. توزیع نقاط در امتداد شبکه ترازیابی ایران.

جدول ۳. اطلاعات آماری اختلاف بین شتاب گرانی تولید شده به روش پیشنهادی و شتاب گرانی در ایستگاه‌های شبکه درجه‌یک (برحسب میلی گال).

انحراف معیار	بیشینه	میانگین	کمینه
47.28	190.31	-24.53	-287.83



شکل ۱٤. نقشه تغییرات تفاوت شتاب گرانی متوسط محاسبه شده براساس روش پیشنهادی و روش هلمرت.

جدول ٤. اطلاعات آماری اختلاف بین شتاب گرانی تولید شده با استفاده مستقیم از انتگرال آبل–پواسون و شتاب گرانی در ایستگاه‌های شبکه درجه‌یک (برحسب میلی گال).

انحراف معیار	بیشینه	میانگین	کمینه
2.920×10^{5}	-1.7608×10^{6}	-15104.59	-9.3566×10^{6}

۵ بحث و نتیجه گیری

در این مقاله روشی جدید برای تعیین شتاب گرانی متوسط براساس محاسبه شتاب گرانی تفاضلی، مدل‌های ژئوپتانسیلی و مدل‌های رقومی زمین عرضه شد. مزیت این روش در استفاده از مدل‌های ژئوپتانسیل جدید با درجه و مرتبه بالا، مدل‌های رقومی زمین و استفاده از مشاهدات متفاوت میدان گرانی زمین در چارچوب یک مسئله مقدار مرزی برای تعیین شتاب گرانی متوسط است. از حل مسئله مقدار مرزی ثابت–آزاد، پتانسیل گرانی تفاضلی در سطح بیضوی مرجع تعیین شد. پتانسیل گرانی تفاضلی در خارج بیضوی مرجع در معادله لاپلاس صدق می‌کند. پس از حل مسئله دیریکله پتانسیل گرانی تفاضلی در فضای خارج بیضوی مرجع تعیین شد. پس از اِعمال عملگر گرادیان، شتاب گرانی تفاضلی، در نقطه با ارتفاع متوسط تعیین شد. پس از بازگرداندن اثرات حذف شده در این نقطه شتاب

گرانی متوسط محاسبه شد. روش عرضه شده به‌صورت عددی در منطقه جغرافیایی ایران به‌طور موفقیت آمیزی آزمایش شد.

تشکر و قدردانی

از حمایت مالی دانشگاه تهران از این تحقیق در قالب طرح پژوهشی شمارهٔ ۸۱۰۸۰۱۲/۱/۰۵ قدردانی می‌شود.

منابع

آزموده اردلان، ع.، جزایری، ش.، ۱۳۸۴، روشی برای محاسبه شتاب گرانشی متوسط در داخل زمین به‌منظور افزایش دقت ارتفاع ارتومتریک، مجله فیزیک زمین و فضا، جلد ۳۱، شماره ۲.

Ardalan, A. A. and Grafarend, E. W., 2004, High-resolution regional geoid computation without applying Stokes’s formula: a case study of the Iranian geoid, Journal of Geodesy **78,** 138-156.

Ardalan, A. A. and Safari, A., 2004, Terrain correction on the multi-cylindrical equal area map projection of the surface of the reference ellipsoid, Journal of Geodesy **78,** 114-123.

Aronszjain, N., 1950, Theory of reproducing kernels, Trans. Amer. Soc, **68**, 337-404.

Dennis, M. L. and Featherstone, W. E., 2003, Evaluation of orthometric and related height systems using a simulated mountain gravity field, In: Tziavos IN (ed) Gravity and geoid 2002, Department of Survey and Geodesy, Aristotle Univ Thessaloniki, 389–394.

Forste, C., Flechhtner, F., Schmidt, R., Meyer, U., Stubenvoll, R., Barthelmes, F., Konig, R., Neumayer, KH., Rothacher, M., Reigber, Ch., Biancale, R., Bruinsma, S., Lemoine, J. M. and Raimondo, J. C., 2005, A new high resolution global gravity model derived from combination of GRACE and CHAMP mission and altimetry-gravimetry surface gravity data, Poster g004 EGU-A-04561 presented at EGU General Assembly 2005, Vienna, Austria, 24-29.

Freeden, W., 1981, On spherical spline interpolation and approximation, Math. Meth in the Appl. Sci., **3**, 551-575.

Freeden, W., 1981, On approximation by harmonics splines, Manuscr. Geod., **6**, 193-244.

Freeden, W., 1987, A spline interpolation method for solving boundary value problems of potential theory from discretely given data, Numer. Meth. Part. Diff. Equations, **3**, 375-398.

Freeden, W., 1987, Harmonic splines for solving boundary value problems of potential theory, in: Algorithms for Approximation (Mason, J.C., Cox, M.G., eds), The institute of mathematics and its applications, conferences series, **10**, Clarendon Press, Oxford, 507-529.

Freeden, W., 1987, Metaharmonic splines for solving the exterior Dirichlet problem of the Helmholtz Equation, in: Topics in: Multivariate Approximation Theory (Chui, C. K., Schumaker, L. L., Utreras, F., eds), Academic Press, Boston, 99-110.

Freeden, W., 1990, Spherical splines approximation and its application in physical geodesy, in: Topics in: Geophysical Data Inversion Methods and applications, A. et al. (eds), Vieweg Publication, Braunschweig, 79-104.

Freeden, W., 1999, Multiscale modeling of spaceborne Geodata, B.G. Teubner, Leipzig.

Freeden, W., Gerevens, T. and Schreiner, M., 1998, Constructive approximation on the sphere (With Applications to Geomathematics), Oxford Science Publications, Clarendon, Oxford.

Freeden, W. and Kersten, H., 1980, The geodetic boundary value problem using the known surface of the Earth. RWTH Aachen, Heft 29.

Freeden, W. and Michel, V., 2004, Multiscale potential theory with application to geoscience. Birkhauser, Boston.

Freeden, W. and Scheneider, F., 1998, Wavelet approximation on closed surfaces and their application to boundary-value problems of theory potential, Math. Meth. In the appli. Sci., **21**, 129-165.

Hansen, P. C., 1998, Regularization tools, A MATLAB package for analysis and solution of discrete ill-posed problems, Department of masthematical modeling building 305, technical university of Denmark, Dk-2800 Lyngby, Denmark.

Heiskanen, W. and Moritz, H., 1967, Physical Geodesy, W. H. Freeman, San Francisco, Calif.

Jekeli, C., 1988, The exact transformation between ellipsoidal and spherical harmonic expansions, Manuscripta geodaetica **13**, 106-113.

Jekeli, C., 2000, Heights, the geopotential, and vertical datums, Geodetic science and surveying, Department of civil and environmental engineering and geodetic science, The Ohio State University, Report No.459.

Jekeli, C., 2005, Spline representations of functions on a sphere for geopotential modeling, Ohio state University, report No. 475.

Kao, S. P., Rongshin, H. and Ning, F. S., 2000, G´eod 56, 300–311.

Sunkel, H., 1986, Digital height and density model and its use for the orthometric height and gravity field determination for Austria, In: Proceedings of international symposium on the definition of the geoid, Florence, 599–604.

Tenzer, R. and Van´ıˇcek, P., 2003, Correction to Helmert's orthometric height due to actual lateral variation of topographical density, Brazilian J Cartography – Revista Brasileira de Cartografia **55**(2), 44–47.

Vanıcek, P. and Krakiwsky, E., 1986, Geodesy the concepts, 2nd edn. Elsevier, Amsterdam.

Wahba, G., 1990, Spline models for observational data, CBMS-NSF regional conference series in applied mathematics, 59, SIAM, Philadelphia.

Results of field test for computing orthometric correction based on measured gravity, Geom Res Aus **72**, 43–60.

Kim, M. C., Tapley, B. D., Shum, C. K. and Ries, J. C., 1995, Center for Space Research Mean Sea Surface Model, Presented at the TOPEX/Poseidon working Team Meeting, Pasadena California.

Krakiwsky, E. J., 1965, Heights, MS Thesis, Department of Geodesic Science and Survey, Ohio State University Columbus, 157 pp.

Ledersteger, K., 1955, Der Schwereverlauf in den Lotlinien und die Berechnung der wahren Geoidschwere, Publication dedicated to W. A. Heiskanen, Publ. Finn. Geod. Inst., **46**, 109–124.

Mader, K., 1954, Die orthometrische Schwerekorrektion des Pr¨azisions-Nivellements in den Hohen Tauern, Osterreichische Zeitschrift f¨ur Vermessungswesen, Sonderheft 15.

Moritz, H., 1980, Advanced physical geodesy, Herbert Wichmann Verlag, Karlsruhe, Abacus Press, Tunbridge, Wells, Kent.

Niethammer, T., 1932, Nivellement und Schwere als Mittel zur Berechnung wahrer Meereshohen, Schweizerische Geodatische Kommission, Berne.

Rapp, R. H., 1961, The orthometric height, MS Thesis, Department of Geodesi Science, Ohio State University, Columbus, 117 pp.

Rapp, R. H., 1998, The Development of a Degree 360 Expansion of the Dynamic Ocean Topography of the POCM_4B Global Circulation Model, NASA/CR-1998-206877, Greenbelt Maryland 20771.

Safari, A., Ardalan, A. A., Grafarend, E. W., 2005, A new ellipsoidal gravimetric, satellite altimetry and astronomic boundary value problem, a case study: the geoid of Iran, Journal of Geodynamic **39,** 545-568.

Sanso, F., 1995, The long road from measurements to boundary value problems in physical geodesy, manuscripta geodetica, **20**, 326-344.

Sanso, F. and Sona, G., 1993, The challenge of computing the geoid in the nineties. Surveys in Geophysics **14,** 339-371.

Sanso, F., Vanicek, P., 2006, The orthometric height and the holonomity problem. Journal of Geodesy, 80: 225-232.

Stammer, D., Tokmakian, R., Semtner, A. and Wunsch, C., 1996, How well does a $1/4^{o}$ global circulation model simulate large-scale ocean observation?, Geophysical Research, 101, C11, 25779-25812, 1996.

Strang, W. E., 1982, An evaluation of orthometric height accuracy using borehole gravimetry, Bull