ارزیابی دقت و سرشکنی شبکه ترازیابی درجه یک ایران

عبدالرضا صفری[۱*]، یحیی جمور[۲] و عبدالرحمان مصطفایی[۳]

[۱] دانشیار، گروه مهندسی نقشه‌برداری، پردیس دانشکده‌های فنی، دانشگاه تهران، ایران
[۲] استادیار، آموزشکده نقشه‌برداری، سازمان نقشه‌برداری کشور، تهران، ایران
[۳] دانشجوی دکتری ژئودزی، گروه مهندسی نقشه‌برداری، پردیس دانشکده‌های فنی، دانشگاه تهران، ایران

(دریافت: ۸۸/۴/۲۴ ، پذیرش نهایی: ۸۹/۱۱/۱۹)

چکیده

یکی از مباحث مهم در ژئودزی تعیین ارتفاع نقاط است. برای تعیین ارتفاع نقاط در بیشتر کشورها شبکه‌های ترازیابی ایجاد شده است. مشاهدات در شبکه‌های ترازیابی تحت‌تاثیر خطاهای سامان‌مند (سیستماتیک) و اتفاقی است. در این مقاله نحوه توزیع خطاهای سامان‌مند و اتفاقی و سرشکنی شبکه ترازیابی مورد بررسی و به منزله تحقیق موردی دقت شبکه ترازیابی درجه یک در ایران و نحوه توزیع خطاهای اتفاقی و سامان‌مند در این شبکه مورد ارزیابی قرار گرفته است.

واژه‌های کلیدی: ارتفاع ارتومتریک، شبکه ترازیابی، شتاب گرانی متوسط، خطای سامان‌مند، خطای اتفاقی

Accuracy evaluation and adjustment of the first order Leveling Network of Iran

Safari, A.[1], Jamour, Y.[2] and Mostafaei, A.[3]

[1] Associate Professor, Department of Surveying and Geomatics Engineering, University College of Engineering, University of Tehran, Iran
[2] Assistant Professor, The Geomatics College of National Cartographic Center of Iran
[3] Ph. D. Student of Geodesy, Department of Surveying and Geomatics Engineering, University College of Engineering, University of Tehran, Iran

(Received: 15 July 2009 , Accepted: 8 Feb 2011)

Abstract

In many countries, leveling networks are established for height determination which is one of the most important topics in geodesy. In these networks, the sum of the leveled height differences between A and B will not be equal to the difference in the orthometric heights H_A and H_B. The reason is that the leveling increment δn, as we henceforth denote it, is different from the corresponding increment δH_B of H_B , due to the nonparallelism of the level surfaces. Denoting the corresponding increment of the potential W by δW, we have

$$-\delta W = g\,\delta n = g'\delta H_B\,, \tag{1}$$

where g is the gravity at the leveling station and g' is the gravity on the plumb line of B at δH_B. Hence,

$$\delta H_B = \frac{g}{g'}\delta n \neq \delta n \tag{2}$$

There is, thus, no direct geometrical relation between the result of leveling and the orthometric height, since Equation (2) expresses a physical relation. If gravity g is also measured, then

$$\delta W = -g\ \delta n \tag{3}$$

* نگارنده رابط: تلفن: ۸۸۰۰۸۸۳۷-۰۲۱ دورنگار: ۸۸۰۰۸۸۳۷-۰۲۱ E-mail: asafari@ut.ac.ir

is determined, so that we obtain

$$W_B - W_A = -\sum_A^B g\,\delta n \tag{4}$$

Thus, leveling combined with gravity measurements determines potential differences, which are, physical quantities.

It is somewhat more rigorous theoretically to replace the sum in Equation (4) by an integral, obtaining

$$W_B - W_A = -\int_A^B g\ dn \tag{5}$$

Note that this integral is independent of the path of integration. In practical cases, it is better to use geo-potential numbers, which are calculated using Equation (6), instead of potential values.

$$C_A = -(W_A - W_0) \tag{6}$$

Users usually like to work by the geometrical concept of the height. Therefore, the orthometric height of the point A is defined by

$$H_A^O = \frac{C_A}{\bar{g}_A}, \tag{7}$$

where $\bar{g}_A$ is mean value of the gravity along the plumb line between the geoid and the surface point A. According to potential differences, on the other hand, difference between orthometric height of two points is

$$\Delta H_{AB}^O = \frac{W_B - W_A}{\gamma_0} + \frac{\bar{g}_A - \gamma_0}{\gamma_0} H_A - \frac{\bar{g}_B - \gamma_0}{\gamma_0} H_B \tag{8}$$

Where γ_0 is normal gravity for an arbitrary standard latitude.

So, determination of difference in orthometric heights between points is changed to determination of potential differences between them. Then, it is necessary to measure both height difference and gravity along the leveling lines.

Observations in leveling networks are under influence of random and systematic errors. Errors originating from instruments, ambient circumstances and observer, have such character that it is very difficult to remove them from observations, also assessment of leveling accuracy is not an easy task.

Unmodelled systematic effects in levelling may be revealed through autocorrelation function of discrepancies (Vanicek and Craymer, 1983) between the forward and backward running of levelling sections. Test results, conducted with simulated data indicate that autocorrelation function can be used as a diagnostic tool to detect systematic effects.

The aim of this study is accuracy estimation of the first order levelling network of Iran by the Lallemand's and Vignal's formulas as well as test for significant differences between lines caused by different sources of random and systematic errors. Then, computation of section and line discrepancies is explained and the random and systematic error computed by the Lallemand's and Vignal's formulas is portrayed. Next, the theory of analysis of variance is given in outline and practical computations are demonstrated. After that, various kinds of adjustment models for the levelling network adjustment are discussed. Finally, the weight matrix, which is estimated using covariance function, is applied to adjust the network. The obtained results, in this research, showed that there are considerable systematic errors in the levelling network of Iran.

Key words: Orthometric height, Levelling network, Mean value of the gravity, Systematic error, Random error

۱ مقدمه

مبحث ارتفاعات برخلاف آنچه که در ظاهر به نظر می‌رسد، یکی از مباحث پیچیده دانش ژئودزی است. ساده‌ترین شیوه به‌منظور تعیین ارتفاع روش ترازیابی است. پس از انتخاب یک نقطه درحکم مبنا می‌توان ارتفاع سایر نقاط را از راه ترازیابی تعیین کرد. به‌همین‌دلیل در اکثر کشورها به‌منظور ایجاد سامانه ارتفاعی برای نقشه‌های پوششی ملی و اهداف ژئودینامیک شبکه‌های ترازیابی دقیق ایجاد شده است.

ارتفاع حاصل از ترازیابی به‌دلیل وابستگی اختلاف ارتفاع حاصل از ترازیابی به مسیر ترازیابی، یکتا نیست. بنابراین نمی‌توان این روش را درحکم یک روش مناسب در تعیین ارتفاع نقاط به‌کار برد (ونیچک و کراکیوسکی، ۱۹۸۶؛ سانسو و ونیچک، ۲۰۰۶ و جکلی، ۲۰۰۰). مشکل را می‌توان با تبدیل نتایج وابسته به مسیر به نتایج مستقل از مسیر حل کرد. برای دو سطح هم‌پتانسیل نزدیک به‌هم رابطه زیر برقرار است (ونیچک و کراکیوسکی، ۱۹۸۶):

$$\delta W \doteq -g\delta h \qquad (۱)$$

می‌توان اختلاف ارتفاع δh را که کمیتی وابسته به مسیر است به اختلاف پتانسیل δW که کمیتی مستقل از مسیر است، تبدیل کرد. لذا با اندازه‌گیری شتاب گرانی در طول خط ترازیابی می‌توان اختلاف پتانسیل بین دو نقطه را که مستقل از مسیر است به‌دست آورد. بنابراین می‌توان به هر نقطه P_i یک پتانسیل W_i نسبت داد. در عملکرد، استفاده از عدد ژئوپتانسیل به‌جای پتانسیل W_i بهتر است. عدد ژئوپتانسیل C_i مربوط به نقطه P_i به‌صورت زیر تعریف می‌شود (هیسکانن و موریتز، ۱۹۶۷ و هافمن ولنهوف و موریتز، ۲۰۰۶):

$$C_i = -(W_i - W_0) \qquad (۲)$$

اعداد ژئوپتانسیل گرچه دارای ویژگی مفید یکتا بودن برای هر نقطه هستند و می‌توان آنها را به مثابه یک سامانه ارتفاعی به‌کار برد، ولی عیب این اعداد این است که واحدشان مجذور متر بر مجذور ثانیه است، درحالی‌که کاربران اغلب علاقه‌مند به سامانه ارتفاعی دارای واحد متر هستند.

برای برطرف کردن این عیب ارتفاع دینامیک نقطه P_i به‌صورت زیر تعریف شده است (ونیچک و کراکیوسکی، ۱۹۸۶):

$$H_i^D = \frac{C_i}{\gamma_0} \qquad (۳)$$

که در رابطه فوق γ_0 شتاب گرانی نرمال در منطقه موردنظر است.

اختلاف ارتفاع دینامیک دو نقطه برحسب اختلاف پتانسیل دونقطه با رابطه زیر بیان می‌شود (هیسکانن و موریتز، ۱۹۶۷):

$$\begin{aligned}\Delta H_{PQ}^D &= H_Q^D - H_P^D \\ &= \frac{W_0 - W_Q}{\gamma_0} - \frac{W_0 - W_P}{\gamma_0} \\ &= \frac{W_Q - W_P}{\gamma_0}\end{aligned} \qquad (۴)$$

بنابراین با در اختیار داشتن اختلاف پتانسیل دو نقطه، به‌راحتی می‌توان اختلاف ارتفاع دینامیک آنها را محاسبه کرد. سامانه مبتنی بر ارتفاعات دینامیک گرچه دارای واحد متر است ولی در آن، نقاط واقع بر یک سطح هم‌پتانسیل دارای ارتفاع دینامیک یکسان هستند و درنتیجه برای بعضی از کاربردها نظیر تحقیقات هیدرولوژی مناسب است. برای خیلی از کاربران مفهوم هندسی ارتفاع

جذاب‌تر است. به‌همین دلیل سامانه ارتفاع ارتومتریک تعریف شده است. ارتفاع ارتومتریک در نقطه P_i به‌صورت زیر تعریف می شود (هیسکانن و موریتز، ۱۹۶۷):

$$H_i^O = \frac{C_i}{\overline{g}_i} \tag{۵}$$

که در رابطه فوق C_i عدد ژئوپتانسیل نقطه P_i، و $\overline{g}_i$ شتاب گرانی متوسط در امتداد خط شاقول گذرنده از نقطه P_i است.

اختلاف ارتفاع ارتومتریک برحسب اختلاف ارتفاع دینامیک و اختلاف پتانسیل با رابطه زیر بیان می‌شود (هیسکانن و موریتز، ۱۹۶۷):

$$\begin{aligned} \Delta H_{PQ}^O &= \Delta H_{PQ}^D \\ &\quad + \frac{\overline{g}_P - \gamma_0}{\gamma_0} H_P - \frac{\overline{g}_Q - \gamma_0}{\gamma_0} H_Q \\ &= \frac{W_Q - W_P}{\gamma_0} + \\ &\quad \frac{\overline{g}_P - \gamma_0}{\gamma_0} H_P - \frac{\overline{g}_Q - \gamma_0}{\gamma_0} H_Q \end{aligned} \tag{۶}$$

بنابراین با در اختیار داشتن اختلاف پتانسیل دو نقطه می‌توان اختلاف ارتفاع ارتومتریک دو نقطه را محاسبه کرد. بنابراین مسئله تعیین اختلاف ارتفاع ارتومتریک به تعیین اختلاف پتانسیل دو نقطه تبدیل می‌شود.

به‌منظور تعیین اختلاف پتانسیل در شبکه ترازیابی علاوه بر اندازه‌گیری اختلاف ارتفاع بین نقاط، قدرمطلق شتاب گرانی در طول خط ترازیابی نیز اندازه‌گیری می‌شود. اندازه‌گیری‌های صورت گرفته در شبکه‌های ترازیابی نظیر سایر کارهای نقشه‌برداری، تحت‌تأثیر عواملی چون اشتباه‌ها، خطاهای سامان‌مند و خطاهای اتفاقی قرار دارند که قبل از محاسبات باید مورد بررسی قرار گیرند و اثرات این عوامل از مشاهدات حذف یا کم شود. مشاهدات اشتباه با یک رشته از کنترل‌ها قابل تشخیص و حذف است و مشاهدات مربوط باید دوباره صورت گیرد. از طرف دیگر در طی قرن گذشته، تحقیقات زیادی به‌منظور برآورد دقت شبکه ترازیابی دقیق و نیز اثر خطاهای سامان‌مند و اتفاقی در این شبکه‌ها صورت گرفته است که از آن جمله می‌توان به کارهای (ویگنال، ۱۹۳۶؛ واسف، ۱۹۵۷؛ واسف و مش، ۱۹۶۰؛ واسف، ۱۹۶۲ و واسف، ۱۹۷۴) اشاره کرد. در طی این مدت چندین روش برای برآورد دقت در شبکه‌های ترازیابی عرضه شده است. ضرورت انجام ترازیابی دقیق اولین‌بار در دومین کنفرانس نقشه‌برداری برلین در ۱۸۶۷ مطرح، و روابط استانداردی برای آن پیشنهاد شد. سپس در کنفرانس بین المللی نقشه‌برداری هامبورگ در ۱۹۱۲ فرمول‌های لالمند برای خطاهای سامان‌مند و اتفاقی در شبکه‌های ترازیابی پذیرفته شد. در اسلو مجمع بین‌المللی انجمن ژئودزی در ۱۹۴۸، فرمول‌های خطای ترازیابی را بازبینی کرد و روش ویگنال در محاسبه دقت ترازیابی را پذیرفت (لیسکویچ و لئونزیک، ۲۰۰۵).

بعد از ۱۹۵۵، از سوی واسف و مش در مقالاتی چون (واسف، ۱۹۵۵؛ واسف و مش، ۱۹۶۰ و واسف، ۱۹۶۲) کاربرد آماره‌های ریاضی، برای آنالیز واریانس در بررسی اختلاف‌های (Discrepancy) قطعات ترازیابی، براساس آزمونی موسوم به آزمون فیشر مطرح شده است.

از جمله کارهای صورت گرفتهٔ مرتبط با شبکه ترازیابی دقیق ایران و خطاهای موجود در این شبکه نیز می‌توان به (وثوقی، ۱۹۹۴؛ موسوی، ۱۹۹۶؛ معمارزاده، ۱۹۹۸؛ کریمی، ۱۳۸۲ و یوسفی، ۱۳۸۶) اشاره کرد. تا کنون به‌منظور محاسبه ارتفاع ارتومتریک در شبکه ترازیابی دقیق ایران تلاشی صورت نگرفته است. اغلب کارهای به انجام رسیده، در مورد خطاهای سامان‌مند موجود در شبکه ترازیابی، اثراتشان و مدل‌های مربوط به آنها بوده است و از تحقیقات صورت گرفته در ارتباط با محاسبه ارتفاعات می‌توان به کارهای (کریمی، ۱۳۸۲ و یوسفی، ۱۳۸۶) اشاره کرد. در مورد اول (کریمی،

۱۳۸۲) اعداد ژئوپتانسیل برای کل شبکه ترازیابی دقیق ایران با مدل‌سازی گرانی در نشان‌های بدون گرانی این شبکه و با فرض استقلال مشاهدات محاسبه شد و ارتفاعات دینامیک در شبکه با توجه به اعداد ژئوپتانسیل محاسبه شده به‌دست آمد. پس از آن در مورد دیگر، (یوسفی، ۱۳۸۶) ارتفاعات نرمال در شبکه محاسبه شد. در این مقاله علاوه بر بررسی خطاهای سامان‌مند و اتفاقی در شبکه ترازیابی دقیق ایران، اختلاف ارتفاع دینامیک و اختلاف ارتفاع ارتومتریک در شبکه ترازیابی ایران محاسبه شده است.

در این مقاله ابتدا در بخش دوم آنالیز واریانس در شبکه‌های ترازیابی دقیق و فرمول‌های لالمند و ویگنال برای بررسی خطاهای اتفاقی و سامان‌مند در شبکه‌های ترازیابی معرفی شده است. در بخش سوم نحوه سرشکنی و مدل ریاضی برای سرشکنی شبکه‌های ترازیابی و تعیین ماتریس واریانس و کواریانس در سرشکنی مورد بررسی قرار گرفته است. در بخش چهارم به‌منزله بررسی موردی، شبکه ترازیابی درجه یک ایران مورد بررسی قرار گرفته و سرانجام نتایج در بخش پنجم عرضه شده است.

۲ بررسی دقت در شبکه‌های ترازیابی دقیق

۲-۱ آنالیز واریانس (Analysis of variance)

نام آنالیز واریانس از این حقیقت گرفته شده است که هنگامی که متغیری تحت تأثیر دو فاکتور قرار می‌گیرد، اثبات می‌شود که آنها مستقلاً عمل می‌کنند و واریانس کل مشاهدات مجموع واریانس‌های مربوط به هر فاکتور است. بنابراین امکان تقسیم واریانس کل به مؤلفه‌هایش و ارزیابی اعتبار این مؤلفه‌ها وجود دارد. در ساده‌ترین حالت بدین معنی است که اگر مجموعه‌ای از m گروه از مشاهدات وجود داشته باشد، واریانس کل برای این m گروه را می‌توان به دو قسمت تقسیم کرد (ابنگ، ۱۹۸۵):

۱) تغییرات درون‌گروهی (Within-group)

۲) تغییرات بین‌گروهی (Between-groups)

تغییرات درون هر گروه معمولاً به عوامل اتفاقی و بخشی از تغییرات بین گروه‌ها به عوامل اتفاقی و بخش دیگر آن به خطاهای سامان‌مندی که ممکن است در بین گروه‌های گوناگون وجود داشته باشد نسبت داده می‌شود. هدف از آنالیز واریانس آزمونی برای اختلافات معنی‌دار بین میانگین‌ها به کمک بررسی واریانس‌ها است. با تقسیم‌بندی تغییرات کلی به منابع گوناگون مثلاً به خطوط ترازیابی، امکان مقایسه واریانس حاصل از تغییرات بین گروه‌ها با واریانس حاصل از تغییرات درون‌گروهی وجود خواهد داشت.

با فرض اینکه شبکه ترازیابی شامل m خط (L_1, L_2, ..., L_m) باشد و خط L_i شامل n_i+1 بنچ مارک که خط را به n_i قطعه تقسیم می‌کند. بنابراین تعداد کل قطعات در کل شبکه از رابطه زیر به‌دست می‌آید

$$n = \sum_{i=1}^{m} n_i \qquad (۷)$$

اگر خط iاُم و قطعه jاُم در این خط در نظر گرفته شود، اختلافات Δ_{ij} به‌معنی اختلاف بین اندازه‌گیری‌های رفت و برگشت قطعه ij است و

$$w_{ij} = \frac{\Delta_{ij}}{r_{ij}} \qquad (۸)$$

به معنی اختلاف در واحد کیلومتر در طول قطعه ij است یا r_{ij}، برحسب کیلومتر است. فرض می‌شود که w_{ij} از جمعیتی نرمال گرفته شده باشد. مقدار میانگین اختلافات در خط i

$$\bar{w}_i = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} w_{ij} \qquad (۹)$$

و میانگین همه اختلافات w_{ij} در شبکه به‌صورت زیر است.

$$\bar{w} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} w_{ij} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} n_i \bar{w}_i \qquad (۱۰)$$

به‌منظورآنالیز واریانس، مدل بیان شده برای متغیر w_{ij} در

معادله (۸) را می‌توان به‌صورت ترکیب سه مؤلفه بیان شود (اینگ، ۱۹۸۵):

$$w_{ij} = \overline{w} + \beta_i + \varepsilon_{ij} \qquad (۱۱)$$

β_i اثر یک خط بر خطوط وابسته دیگر(عبارت مربوط به خطای سامان‌مند) و ε_{ij} مقدار باقی‌مانده است که نرمال و میانگین آن صفر است. $\overline{w}$ و β_i پارامترهای غیر اتفاقی هستند و اثر مدل شده ثابتی دارند، پس معادله به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$w_{ij} = \overline{w}_i + \varepsilon_{ij} \qquad (۱۲)$$

و درنهایت مجموع مربعات بین w_{ij} و $\overline{w}$ (اینگ، ۱۹۸۵):

$$Q = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\left(w_{ij} - \overline{w}\right)^2$$
$$Q = \sum_{i-1}^{m} n_i\left(\overline{w}_i - \overline{w}\right)^2 + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\left(w_{ij} - \overline{w}_i\right)^2 \qquad (۱۳)$$
$$= Q_B + Q_W$$

Q_B مجموع مربعات اختلافات بین خطوط ترازیابی است که ناشی از دو منبع متفاوت از خطاها در یک خط است؛ درصورتی‌که Q_W مجموع مربعات بین اختلافات w_{ij} و مقادیر میانگین $\overline{w}_i$ یک خط است.

عبارت‌های

$$S_B^2 = \frac{Q_B}{m-1} \quad , \quad S_w^2 = \frac{Q_W}{n-m} \qquad (۱۴)$$

برآوردهای نا اُریبی از واریانس اولیه هستند و از رابطه زیر

$$F = \frac{S_B^2}{S_w^2} \qquad (۱۵)$$

می‌توان برای آزمودن فرض صفر به‌صورت زیر استفاده کرد:

$$H_0 : \overline{w}_1 = \overline{w}_2 = \overline{w}_3 = \ \ldots\ = \overline{w}_m \qquad (۱۶)$$

ولی اگر میانگین همه خطوط با هم برابر باشند پس برابر با میانگین کل $\overline{w}$ خواهد بود، بنابراین فرض صفر را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

برای همه i ها $H_0 : \beta_i = 0$

بنابراین با توجه به H_0 انتظار می‌رود که جامعه حاصل از مشاهدات از توزیع نرمال با واریانس σ^2 تبعیت کند و فرض مخالف را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

همه $\overline{W}_i$ ها برابر نیستند : H_1

براساس فرض صفر، بایستی واریانس برآورد شده از تغییرات درون‌گروهی S_w^2 با واریانس برآورد شده از تغییرات بین‌گروه‌هی S_A^2 یکسان باشد و هر اختلافی بین میانگین خطوط، سبب افزایش S_A^2 و بنابراین بزرگ شدن F می‌شود.

$$F = \frac{S_B^2}{S_w^2} > F_{1-\alpha}\left(m-1, n-m\right) \qquad (۱۷)$$

رابطه (۱۷) نشان‌دهنده پذیرفته نشدن فرض صفر است. اِلمان‌های این آنالیز به‌صورت جدول ۱ است.

جدول ۱. پارامترهای آنالیز واریانس خطوط ترازیابی.

منبع تغییرات	مجموع مربعات (SS, Sum of squares)	درجه آزادی (DF, Degree of freedom)	میانگین مربعات (MS, Mean squares)	F	F_{theo}
بین خطوط	Q_B	$m-1$	S_B^2	$F = S_B^2 / S_w^2$	$F_{1-\alpha}\left(m-1, n-m\right)$
درون خطوط	Q_w	$n-m$	S_w^2		
کلی	Q	$n-1$	S^2		

در شبکه‌های ترازیابی دقیق، خطاها از عواملی نظیر عوامل دستگاهی، عوامل محیطی و عوامل انسانی ناشی می‌شود و حذف این خطاها از مشاهدات کار مشکلی است؛ به‌نحوی‌که ارزیابی دقیق ترازیابی کار ساده‌ای ناست. در طی قرن گذشته روش‌های مختلفی برای برآورد دقت شبکه ترازیابی ارائه شده است. از جمله مهمترین این روش‌ها می‌توان فرمول‌های لالمند (Lallemand's formula) و فرمول‌های ویگنال (Vignal's formula) را نام برد.

۲-۲ فرمول‌های لالمند

این فرمول‌ها در کنفرانس عمومی نقشه‌برداری بین‌المللی در هامبورگ در سال ۱۹۱۲ برای خطاهای اتفاقی و خطاهای سامان‌مند در شبکه‌های ترازیابی ارائه شد (لیسکویچ و لئونزیک، ۲۰۰۵).

اگر همه خطاها اتفاقی باشند، انحراف معیار σ_L یک خط ترازیابی به طول L کیلومتر را می‌توان بصورت $\eta\sqrt{L}$ بیان کرد. برای زمانی که خطای سامان‌مند نیز وجود دارد می‌توان فرمول زیر را در نظر گرفت:

$$\sigma_L = \sqrt{\eta^2 L + s^2 L^2} \qquad (۱۸)$$

که η خطاهای اتفاقی جمع شونده بر حسب $mm/\sqrt{km}$ متناسب با $\sqrt{L}$ و s خطاهای سامان‌مند جمع شونده متناسب با L است.

بر اساس فرمول‌های ارائه شده، خطای متوسط اتفاقی به‌صورت:

$$\eta^2 = \frac{1}{4}\left[\frac{\sum \Delta^2}{\sum L} - \frac{\sum r^2}{\left(\sum L\right)^2}\sum \frac{\mu^2}{L}\right] \qquad (۱۹)$$

محاسبه شده که در آن L طول خط ترازیابی، μ خطای بست در خط ترازیابی، r طول قطعه ترازیابی و Δ اختلاف ارتفاع رفت و برگشت در قطعه ترازیابی است. خطای متوسط سامان‌مند نیز به‌صورت

$$s^2 = \frac{1}{4\sum L}\sum \frac{\mu^2}{L} \qquad (۲۰)$$

یا با استفاده از خطای بست لوپ‌ها به‌صورت:

$$s^2 = \frac{1}{\sum F^2}\left[\frac{1}{2}\sum \phi^2 - \eta^2 \sum F\right] \qquad (۲۱)$$

محاسبه می‌شود، که در آن، F طول لوپ، ϕ خطای بست لوپ است.

۲-۳ فرمول‌های ویگنال

همان‌طور که در ابتدا ذکر شد، در مجمع اسلو اتحادیه بین المللی ژئودزی در ۱۹۴۸، فرمول‌های خطای ترازیابی مجدداً بازبینی شده و شیوه‌ای جدید برای روش برآورد دقت ترازیابی پذیرفته شد. خطاها به دو گروه تقسیم شدند، گروه اتفاقی و گروه سامان‌مند، که مستقل از یکدیگر فرض شده‌اند.

خطاهای اتفاقی از منابعی ناشی می‌شوند که در همه مشاهدات متوالی مستقل هستند و از قانون توزیع خطای گاوس پیروی می‌کنند. خطاهای سامان‌مند ناشی از عواملی هستند که روی مشاهدات ترازیابی همسایه یا متوالی به طور مشابهی تأثیر می‌گذارند و از قانون گاوس پیروی نمی‌کنند. آنها فقط برای فواصلی که از یک فاصله حدی مجاز Z (چند ده کیلومتر) تجاوز می‌کنند به‌صورت اتفاقی عمل می‌کنند (لیسکویچ و لئونزیک، ۲۰۰۵).

با توجه به این فرمول‌ها خطای کلی در شبکه را می‌توان محاسبه کرد، ابتدا مقدار حدی اتفاقی متوسط (Mean accidental limiting value) خطای کلی محاسبه می‌شود:

$$u_L^2 = \frac{1}{4n_L}\sum \frac{\mu^2}{L} \qquad (۲۲)$$

که n_L تعداد خطوط در شبکه است. یا از فرمول

$$u_F^2 = \frac{1}{n_F + 1}\left(\sum \frac{\phi^2}{F} + \frac{\phi_e^2}{F_e}\right) \qquad (۲۳)$$

که ϕ_e خطای بست لوپ محیطی، F_e طول لوپ محیطی و

n_F تعداد لوپ‌ها است، متوسط خطای اتفاقی به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\eta^2 = u_r^2 - \xi^2 \times j^2 \quad (۲۴)$$

که

$$u_r = \frac{1}{4n_r}\sum \frac{\Delta^2}{r} \quad (۲۵)$$

$$j^2 = \frac{k}{Z} \times r_m \quad (۲۶)$$

در رابطه بالا $k = 2$ و Z متوسط طول خطوط مورد استفاده است. و درنهایت خطای سامان‌مند عبارت است از:

$$\xi^2 = u_L^2 - \eta^2 \quad (۲۷)$$

۳ مدل‌های ریاضی و سرشکنی شبکه

به‌منظور سرشکنی لوپ‌های شبکه ترازیابی دقیق، از این موضوع که پتانسیل کمیتی مستقل از مسیر است استفاده می‌شود و اختلاف پتانسیل‌های تعدیل شده قطعات ترازیابی برآورد می‌شود که با استفاده از آنها می‌توان اعداد ژئوپتانسیل و در نتیجه ارتفاعات ارتومتریک در نقاط شبکه ترازیابی را محاسبه کرد. همچنین به‌منظور سرشکنی می‌توان از یکی از مدل‌های ترکیبی، پارامتریک یا خطی استفاده کرد. از بین این مدل‌ها، مدل شرط با میانگین اختلاف ارتفاعات رفت و برگشت، برای سرشکنی مناسب‌تر است. از مدل‌های ترکیبی و پارامتریک به‌دلیل بزرگ شدن ابعاد ماتریس‌ها و مشکل محاسبات با ابزارهای موجود، استفاده نمی‌شود. بدین‌منظور فقط جزئیات مربوط به مدل شرط بیان می‌شود.

۳-۱ سرشکنی براساس اختلاف پتانسیل‌ها

معادله مربوط به محاسبه اختلاف پتانسیل بین نشان‌های i و j به‌صورت زیر است.

$$\Delta W_{ij} = W_j - W_i = \frac{g_i + g_j}{2} \times \frac{\Delta h_{ij}^F - \Delta h_{ij}^B}{2} \quad (۲۸)$$

که در این رابطه ΔW_{ij} اختلاف پتانسیل بین نشان‌های P_i و P_j، W_i و W_j به‌ترتیب پتانسیل نقاط P_i و P_j، g_i و g_j به‌ترتیب شتاب گرانی در نشان‌های P_i و P_j، Δh_{ij}^F و Δh_{ij}^B اختلاف ارتفاع رفت و برگشت بین بنچ‌مارک‌های P_i و P_j که اثر خطاهای سامان‌مند از روی آن برداشته شده است، هستند.

مدل شرط به‌صورت $B\hat{v}+w=0$ تعریف می‌شود. در این مدل صفر شدن مجموع اختلاف پتانسیل‌های قطعات ترازیابی در یک لوپ بسته اساس سرشکنی قرار گرفته است و مشاهدات، میانگین اختلاف پتانسیل‌های رفت و برگشت هستند. یعنی بردار مشاهدات به‌صورت $l = \left(\Delta W_{ij}\right)$ است. معادله مربوط به مدل شرط به‌صورت زیر است.

$$\sum_{k=1}^{n_i}\left(\Delta \hat{W}_{ij}\right)_k = \sum_{k=1}^{n_i}\left(\frac{\hat{g}_i + \hat{g}_j}{2} \times \frac{\Delta\hat{h}_{ij}^F - \Delta\hat{h}_{ij}^B}{2}\right)_k = 0 \quad (۲۹)$$

که n_i تعداد قطعه‌های هر لوپ است. جواب کمترین مربعات این مدل از رابطه زیر به‌دست می‌آید.

$$\hat{v} = -P^{-1}B^T\left(BP^{-1}B^T\right)^{-1} w \quad (۳۰)$$

که w بردار خطاهای بست پتانسیلی لوپ‌ها است. درنهایت بردار اختلاف پتانسیل‌های سرشکن شده قطعات ترازیابی از رابطه زیر قابل محاسبه است.

$$\Delta \hat{W} = \Delta W + \hat{v} \quad (۳۱)$$

در این مدل تعداد معادلات برابر تعداد لوپ‌ها و تعداد مشاهدات برابر تعداد قطعات است.

۳-۲ تابع کواریانس و وزن مشاهدات

اگر اختلاف ارتفاع ΔH که مجموع اختلاف‌های δH_i قطعات یک خط است (شکل ۱) به‌صورت زیر نوشته شود:

$$\Delta H = \sum_{i=1}^{n} \delta H_i = \mathrm{u}\ \delta \mathrm{H} \quad (۳۲)$$

که در آن $u = [1\ 1\ \ldots\ 1]$ است.

شکل ۱. خط ترازیابی.

برای سرشکنی شبکه باید ماتریس وزن مشاهدات $C_{\delta H}$ معلوم باشد. یک حالت زمانی است که اختلاف ارتفاعات δH_iها مستقل باشند، پس واریانس مشاهده ΔH به‌صورت زیر است.

$$\sigma_{\Delta H}^2 = \sum_{i=1}^{m} \sigma_{\delta H_i}^2 \qquad (۳۳)$$

اگر همه اختلاف ارتفاعات δH_i در یک خط با دقت یکسانی اندازه‌گیری شوند، σ_1^2 واریانس اختلاف ارتفاع در امتداد طول واحد، معمولاً برای فاصله یک کیلومتری است.

$$\sigma_{\Delta H}^2 = \sigma_1^2 \sum_{i=1}^{m} \Delta s_i = \sigma_1^2 S \qquad (۳۴)$$
$$\Rightarrow \sigma_{\Delta H} = \sigma_1 \sqrt{S}$$

رابطه فوق گاهی قانون ریشه دوم (Square-root low) نیز خوانده می‌شود زیرا توزیع انحراف معیارها را با ریشه دوم فاصله مرتبط می‌سازد (ونیچک و کراکیوسکی، ۱۹۸۶).
درصورتی‌که مشاهدات مستقل نباشند

$$\sigma_{\Delta H}^2 = u C_{\delta H} u^T \qquad (۳۵)$$

$C_{\delta H}$ ماتریس کواریانس اختلاف ارتفاعات δH قطعات متوالی یک خط است و برای سادگی فرض شده است که طول قطعات Δs_i برابر است. ماتریس کواریانس $C_{\delta H}$ را برحسب ضرایب همبستگی (Correlation) به‌صورت زیر می‌توان نشان داد.

$$C_{\delta H} = \sigma_1 \begin{bmatrix} 1 & r_1 & r_2 & \ldots & r_n \\ r_1 & 1 & r_1 & r_2 & r_{n-1} \\ r_2 & r_1 & 1 & . & . \\ . & . & . & \ldots & . \\ r_n & r_{n-1} & . & r_1 & . \end{bmatrix} \qquad (۳۶)$$

که $r_i = \dfrac{\sigma_{kl}}{\sigma_k \sigma_l}$ و $i = |k - l|$.
پس

$$\sigma_{\Delta H}^2 = \sigma_1^2 \left[n + 2\sum_{i=1}^{n-1} (n-i) r_i \right] \qquad (۳۷)$$

به‌ازای $r_i = 0$ استقلال آماری و رابطه (۳۴) حاصل شده و به‌ازای $r_i = 1$ وابستگی کلی اختلاف ارتفاع‌ها که حالت حدی دیگر است حاصل می‌شود؛ بنابراین محدوده واریانس یک خط ترازیابی با نامساوی زیر نشان داده می‌شود (ونیچک و کراکیوسکی، ۱۹۸۶).

$$\sigma_1^2 S \le \sigma_{\Delta H}^2 \le \sigma_1^2 S^2 \qquad (۳۸)$$

آنچه باقی می‌ماند ساختار ماتریس کواریانس $C_{\delta H}$ است که کاملاً به تابع کواریانس وابسته است. یکی از توابع هم‌خانواده با توابع کواریانس پیشنهاد شده LUCHT در ۱۹۷۲ به‌صورت زیر است (ونیچک و کراکیوسکی، ۱۹۸۶):

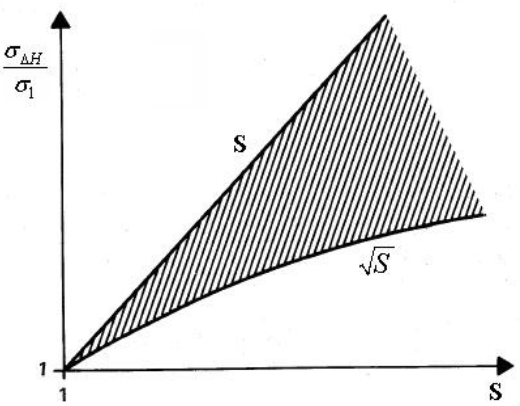
$$Cov(\lambda; |S - S'|) = \lambda^{|S-S'|} = \lambda^{S_s} \qquad (۳۹)$$

که λ تنها پارامتر تابع است، و $|S - S'| = S_S$ فاصله بین نقاط میانی دو قطعه ترازیابی موردنظر است.
با توجه به رابطه (۳۸)، خانواده منحنی‌های توزیع خطای مرتبط با توابع کواریانس دارای حدود $\sqrt{S}$ و S هستند (شکل۲). با توجه به این حقیقت می‌توان به قانون توان که توزیع خطاهای وابسته آماری را کنترل می‌کند پی برد (ونیچک و کراکیوسکی، ۱۹۸۶).

$$\frac{\sigma_{\Delta H}}{\sigma_1} = S^{\alpha} \ , \quad 0.5 \le \alpha \le 1 \qquad (۴۰)$$

پس از محاسبه مقدار α، واریانس اختلاف ارتفاع هر خط یا قطعه ترازیابی با طول S_i از رابطه زیر قابل محاسبه است.

$$\sigma_i^2 = \left(\sigma_1 S_i^{\alpha}\right)^2 \qquad (۴۱)$$



شکل۲. خانواده قوانین انتشار خطاها.

با محاسبه مقادیر واریانس از رابطه (۴۱) با استفاده از خانواده پذیرفته شده توابع کواریانس، رابطه (۳۹)، درایه‌های ماتریس $C_{\delta H}$ از رابطه زیر قابل محاسبه است.

$$\sigma_{ij} = \sigma_i \sigma_j Cov(\lambda; |S - S'|) \; i, j = 1, 2, ..., n \qquad (۴۲)$$

۳-۲-۱ محاسبه مقادیر α و λ

معمولاً دقت شبکه‌های ترازیابی دقیق بزرگ براساس خطای بست Δ حاصل از ترازیابی رفت و برگشت هر قطعه(u_r) از رابطه (۲۵) و براساس خطای بست μ ترازیابی رفت و برگشت یک خط(u_L) از رابطه (۲۲) محاسبه می‌شود. این خطاها قبل از سرشکنی شبکه برآورد می‌شوند (لیسکویچ و جکویچ، ۲۰۰۷).

پس از محاسبه u_r و u_L ، با در نظر گرفتن طول متوسط خط ترازیابی S_m برای شبکه ترازیابی یک منطقه خاص با استفاده از معادله $\sigma_{\Delta H} = u_L S_m^{0.5}$ و $\sigma_1 = u_r$ مقدار کسر $\frac{\sigma_{\Delta H}}{\sigma_1}$ برای این منطقه محاسبه می‌شود و با استفاده از معادله زیر

$$\alpha = \frac{\ln\left(\frac{\sigma_{\Delta H}}{\sigma_1}\right)}{\ln S_m} \qquad (۴۳)$$

مقدار α محاسبه می‌شود.

در شبکه‌های با وسعت زیاد با طول خطوط ناهمگن به همین روش می‌تواند ابتدا برای هر خط ترازیابی مقدار α_i مخصوص آن خط را محاسبه کرد و میانگین α_i های خطوط موردنظر در هر منطقه را درحکم α مخصوص آن منطقه در نظرگرفت.

مسئله‌ای که در تعیین λ درخانواده توابع کواریانس پذیرفته شده رابطه (۳۹) وجود دارد این است که در رابطه (۳۵) فرض شده که طول قطعات برابر است، ولی در واقعیت طول قطعات یکسان نیست. بنابراین ابتدا با درون‌یابی، داده‌های با طول قطعات یکسان به‌دست می‌آید و پس از آن λ برای منطقه محاسبه می‌شود و با استفاده از تابع کواریانس رابطه (۳۹) و از رابطه (۴۲)، مؤلفه‌های کواریانس برای مشاهدات اختلاف ارتفاع برآورد می‌شود.

۳-۳ تعیین ماتریس وزن مشاهدات سرشکنی

پس از تعیین ماتریس واریانس-کواریانس مشاهدات ترازیابی($C_{l'l'}$) با محاسبه ماتریس واریانس-کواریانس مشاهدات سرشکنی(C_{ll}) از روابط زیر می‌توان با رابطه $P = \sigma_0^2 C_{ll}^{-1}$ ، به ماتریس وزن دست یافت.

$$l = f(l')$$
$$C_{ll} = J_{ll'} C_{l'l'} J_{ll'}^T$$
$$J_{ll'} = \frac{\partial f}{\partial l'}$$
$$\Delta W_k = \frac{g_i + g_j}{2} \times \frac{\Delta h_k^F - \Delta h_k^B}{2}$$
$$l = (\Delta W_i)$$
$$l' = \left(\Delta h_k^F, \Delta h_k^B, g_i, g_j\right)^T$$
$$f = (f_1, f_2, ..., f_m)^T = (\Delta W_1, \Delta W_2, ..., \Delta W_m)^T$$

که

ساختار ماتریس‌های ژاکوبی ($J_{ll'}$) و واریانس-کواریانس مشاهدات ترازیابی ($C_{l'l'}$) به‌صورت زیر است

$$J_{ll'} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \Delta h_1^F} & \frac{\partial f_1}{\partial \Delta h_1^B} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial \Delta h_m^F} & \frac{\partial f_1}{\partial \Delta h_m^B} & \frac{\partial f_1}{\partial g_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial g_n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \frac{\partial f_m}{\partial \Delta h_1^F} & \frac{\partial f_m}{\partial \Delta h_1^F} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial \Delta h_m^F} & \frac{\partial f_m}{\partial \Delta h_m^B} & \frac{\partial f_m}{\partial g_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial g_n} \end{bmatrix}$$

$$C_{l'l'}=\begin{bmatrix}
\sigma^{2^F}_{\Delta h_1} & \sigma^{\mathrm{FB}}_{11} & \cdots & \sigma^{\mathrm{FF}}_{1\mathrm{m}} & \sigma^{\mathrm{FB}}_{1\mathrm{m}} & 0 & \cdots & 0\\
\sigma^{\mathrm{FB}}_{11} & \sigma^{2^B}_{\Delta h_1} & \cdots & \sigma^{\mathrm{BF}}_{1\mathrm{m}} & \sigma^{\mathrm{BB}}_{1\mathrm{m}} & 0 & \cdots & 0\\
\vdots & & \ddots & & & \vdots & & \vdots\\
\sigma^{\mathrm{FF}}_{1\mathrm{m}} & \sigma^{\mathrm{FB}}_{\mathrm{m}1} & & \sigma^{2^F}_{\Delta h_m} & \sigma^{\mathrm{FB}}_{\mathrm{mm}} & 0 & & 0\\
\sigma^{\mathrm{FB}}_{1\mathrm{m}} & \sigma^{\mathrm{BB}}_{\mathrm{m}1} & & \sigma^{\mathrm{FB}}_{\mathrm{mm}} & \sigma^{2^B}_{\Delta h_m} & 0 & & 0\\
0 & & & & & \sigma^2_1 & & 0\\
\vdots & & & & & \vdots & \ddots & \vdots\\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \sigma^2_{\mathrm{n}}
\end{bmatrix}$$

که m تعداد قطعات به‌کاررفته در سرشکنی و n تعداد نشان‌های به کار گرفته شده در سرشکنی است.

۳-۴ پردازش‌های قبل از سرشکنی

ازآنجاکه مشاهدات در فضای فیزیکی صورت می گیرند، دارای انواع خطاهای سامان‌مند، اتفاقی و اشتباهات هستند. خطاهای اتفاقی در روش کمترین مربعات مشکلی ایجاد نمی‌کنند و تعدیل می‌شوند ولی خطاهای سامان‌مند و اشتباه‌های نتایج حاصل از سرشکنی کمترین مربعات را تحت تأثیر قرار می‌دهند. روش کمترین مربعات دارای خصوصیات آماری بسیار مهمی است که در نظریهٔ تقریب فوق‌العاده مهم هستند و این در صورتی است که مشاهدات عاری از خطاهای سامان‌مند و اشتباه و دارای تابع توزیع نرمال باشند. لذا پردازش‌های قبل از سرشکنی روی مشاهدات بسیار اهمیت دارند. انواع پردازش‌های قبل از سرشکنی عبارت‌اند از : آزمون مشاهدات نامتوافق (Outliers Observations)، آزمون تابع توزیع مشاهدات (Goodness of fit) آزمون واریانس دستگاه. نکته قابل‌توجه در پردازش‌های قبل از سرشکنی این است که فقط مشاهداتی را که به‌صورت تکراری هستند می‌توان پردازش کرد. مشاهدات مرحله اول شبکه ترازیابی دقیق درجه‌یک ایران به دلیل تکراری نبودن، قابل پردازش نیستند و فقط اختلاف ارتفاعات به‌صورت رفت و برگشت است که قبلاً با استفاده از دستورالعمل‌های شبکه ترازیابی دقیق از سوی سازمان نقشه‌برداری کشور آزمون شده‌اند.

۳-۵ پردازش‌های بعد از سرشکنی

در پردازش‌های قبل از سرشکنی فقط امکان آزمون سازگاری مشاهداتی وجود دارد که به‌صورت تکراری باشند ولی در پردازش‌های بعد از سرشکنی، امکان آزمون مشاهدات متفاوت از نظر سازگاری وجود دارد. در این مرحله هدف کنترل کلیه مراحل صورت گرفته در سرشکنی است که از آن جمله می‌توان سازگاری مشاهدات گوناگون را نام برد. این کنترل براساس یک رشته آزمون‌های آماری خواهد بود که مهمترین آنها آزمون فاکتور واریانس است.

۳-۵-۱ آزمون فاکتور واریانس

انتظار می‌رود که $\hat{\sigma}_0^2$ حاصل از سرشکنی با σ_0^2 اولیه، مقدار تقریباً یکسانی داشته باشد و در حالت ایده‌آل

$$\frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2}=1 \qquad (۴۴)$$

در عمل نیز با توجه به شرایط عملی، یک حد معقول بین این دو مقدار انتظار می‌رود. اما این اختلاف معقول چقدر است؟ با توجه به روابط حاکم بر این پارامترها

$$\hat{\sigma}_0^2=\frac{\hat{v}^T P\hat{v}}{df}=\frac{\hat{\sigma}_0^2\hat{v}^T C_{ll}^{-1}\hat{v}}{df} \\ \Rightarrow \hat{v}^T C_{ll}^{-1}\hat{v}=\frac{df\,\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} \qquad (۴۵)$$

اما طبق قضیه χ^2، $\hat{v}^T C_{ll}^{-1}\hat{v}\rightarrow\chi^2_{df}$ در نتیجه

$$\frac{df\,\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2}\rightarrow\chi^2_{df} \qquad (۴۶)$$

برای محاسبه فاصله اطمینان باید آزمون آماری زیر عملی شود.

$$\begin{cases}H_0:\hat{\sigma}_0^2=\sigma_0^2\\ H_1:\hat{\sigma}_0^2\neq\sigma_0^2\end{cases} \qquad (۴۷)$$

این آزمون آماری با ریسک $\alpha\%$، فاصله اطمینان زیر را نتیجه خواهد داد.

$$\chi^2_{df,\frac{\alpha}{2}\%} < \frac{df\,\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{df,\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\%} \qquad (۴۸)$$

قرار گرفتن $\frac{df\,\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2}$ در بازه فوق نشان‌دهنده این است که با اطمینان $(1-\alpha)\%$ اختلاف بین $\hat{\sigma}_0^2$ و σ_0^2 معقول است و فرض صفر قبول شده است درغیراین‌صورت بین این دو اختلاف فاحش وجود دارد و فرض یک قبول شده است.

از مهم‌ترین دلایل رد شدن فرض صفر $H_0 : \hat{\sigma}_0^2 = \sigma_0^2$ می‌توان به اشتباه بودن باقی‌مانده‌های برآورد شده که در واقع به معنی اشتباه بودن مشاهدات است و نبود تناسب بین وزن‌های نسبت داده شده به مشاهدات اشاره کرد. چرا که مستقیماً در تعیین $\hat{\sigma}_0^2$ نقش دارند (کریمی، ۱۳۸۲).

۳-۵-۲ آزمون باردا (Baarda)

برای کشف $\hat{v}_i$های اشتباه از آزمون باردا استفاده می‌شود. در این روش ابتدا $\hat{v}_i^*$ها را به‌دست آورده، باتوجه به تعریف $\hat{v}_i^*$ها، $\hat{v}_i^*$ از تابع توزیع نرمال استاندارد تبعیت می‌کند، به‌عبارت‌دیگر

$$\hat{v}_i^* = \frac{\hat{v}_i}{\sigma_{\hat{v}_i}} \rightarrow N(0,1) \qquad (۴۹)$$

با سطح اطمینان $(1-\alpha)\%$، برای کنترل $\hat{v}_i^*$ها بازه زیر به دست می‌آید

$$Z_{\frac{\alpha}{2}\%} < \hat{v}_i^* < Z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\%} \qquad (۵۰)$$

اگر $\hat{v}_i^*$ در بازه فوق قرار نداشت، درحکم مشاهده مشکوک در نظر گرفته می‌شود. در هر بار سرشکنی، مجموعه‌ای از مشاهدات به‌دست می‌آید. از این مجموعه، مشاهده‌ای را که $\hat{v}_i^*$ آن از نظر قدرمطلق از بقیه بزرگ‌تر است را حذف می کنند و سرشکنی با بقیه مشاهدات تکرار می‌شود. دوباره آزمون صورت می‌گیرد و باز مجموعه‌ای از مشاهدات مشکوک به دست می‌آید. سپس از مجموعه حاصل، مشاهده‌ای را که $\hat{v}_i^*$ آن از نظر قدرمطلق از بقیه بزرگ‌تر است حذف و سرشکنی با بقیه مشاهدات تکرار می‌شود. این کار آنقدر تکرار می‌شود تا دیگر مشاهده‌ای حذف نشود. سپس اولین مشاهده حذف شده دوباره به مشاهدات باقی‌مانده اضافه و سرشکنی تکرار می‌شود. اگر مشاهده‌ای از آزمون رد شد، مشاهده اضافه شده درحکم مشاهده اشتباه قطعی، از فهرست مشاهدات حذف و درغیراین‌صورت به‌منزله مشاهده صحیح به فهرست مشاهدات اضافه می‌شود. این کار با بقیه مشاهداتی که از سرشکنی کنار گذاشته شده‌اند تکرار می‌شود. در پایان فهرستی از مشاهدات صحیح و اشتباه به‌دست می‌آید.

یکی از اشکالات این روش در تعیین مشاهدات اشتباه این است که با حذف مشاهدات، هندسه شبکه دچار ضعف می‌شود. برای جلوگیری از این اشکال، از آزمون برآورد پایدار (Robust Estimation) استفاده می‌شود.

۳-۵-۳ آزمون برآورد پایدار

مراحل این آزمون کاملاً شبیه روش باردا است، با این تفاوت که در این روش به‌جای حذف مشاهدات، وزن آنها کم می‌شود. این روش دو حسن دارد. یکی اینکه هندسه دچار ضعف نمی‌شود و دیگری اینکه وزن مشاهدات به مقدار واقعی خود نزدیک‌تر می‌شود. در این روش برای برگرداندن مشاهده حذف شده به فهرست مشاهدات، وزن آن را افزایش می‌دهند (کریمی، ۱۳۸۲).

۴ بررسی موردی: ارزیابی دقت و سرشکنی شبکه ترازیابی درجه‌یک ایران

با توجه به اطلاعات موجود از شبکه ترازیابی دقیق ایران ۵۸ لوپ ترازیابی قابل استخراج است. توزیع این ۵۸ لوپ در شکل ۳ نشان داده است. ابتدا آنالیز واریانس برای اطلاعات ترازیابی ۵۸ لوپ پیش‌گفته صورت گرفت. نتایج مربوط به آن در جدول ۲ آمده است. نسبت MS

بین خطوط به MS درون خطوط $F = 4.4443$ است که در سطح اطمینان ۹۵٪، مقدار نظریهٔ تابع توزیع فیشر $F_{theo} = 1.1714$ و این بدان معنی است که میانگین خطوط با یکدیگر برابر نیست و واریانس‌ها نیز همگن نیستند، بنابراین مشاهدات ترازیابی در طول خطوط دارای خطاهای سامان‌مند هستند.

خطاهای اتفاقی و سامان‌مند برای هر خط ترازیابی با استفاده از فرمول‌های لالمند محاسبه شد. خطای اتفاقی دارای متوسط $\pm 0.6754\ mm/\sqrt{km}$ است و خطای سامان‌مند نیز با استفاده از اختلاف خطوط ترازیابی دارای متوسط $0.1299\ mm/km$ است. اندازه خطاهای سامان‌مند و اتفاقی این خطاها درون شبکه و بافت‌نگار (هیستوگرام) مربوط به مقادیر آنها برای هر خط ترازیابی به‌ترتیب در شکل‌های ۴ و ۵ نشان داده شده است. خطای سامان‌مند متوسط با استفاده از خطای بست لوپ‌ها نیز محاسبه شده که مقدار آن برابر $0.1030\ mm/km$ است.

با استفاده از روابط ویگنال نیز؛ که آخرین فرمول‌های پذیرفته شده برای محاسبه خطای اتفاقی و سامان‌مند است، مقادیر این خطاها محاسبه شد. مقادیر متوسط خطاهای اتفاقی و سامان‌مند (روابط (۲۴) و (۲۷)) به‌ترتیب $\pm 0.6529\ mm/\sqrt{km}$ و $1.2892\ mm/km$ محاسبه شده است.

همان‌طور که در بخش۳-۲-۱ بیان شد، برای محاسبه α و λ نیاز به محاسبه مقدار حدی اتفاقی متوسط خطای کلی براساس خطوط و قطعات ترازیابی است که به‌ترتیب $u_L = 1.45\ \mathrm{mm}/\sqrt{km}$ و $u_r = 0.70\ \mathrm{mm}/\sqrt{km}$، به‌دست آمد. درنهایت مقادیر α و λ در کل شبکه به‌ترتیب 0.67 و 0.89 به‌دست آمد.

از میان ۵۸ لوپ ترازیابی قابل استخراج تعدادی از لوپ‌ها فاقد مشاهدات گرانی کافی هستند و تعدادی از آنها نیز در مشاهدات ترازیابی نقص دارند و فقط ۱۳ لوپ، شامل ۶۰ خط ترازیابی، ۳۵۰۱ قطعه ترازیابی و ۳۴۹۳ نقطه، دارای اطلاعات گرانی کامل و قابل اعتماداند. توزیع این ۱۳ لوپ در شکل ۶ نشان داده است. ازآنجاکه در سرشکنی شبکه به روش مطرح شده نیاز به اطلاعات گرانی است، فقط این ۱۳ لوپ در سرشکنی مورد استفاده قرار گرفته است.

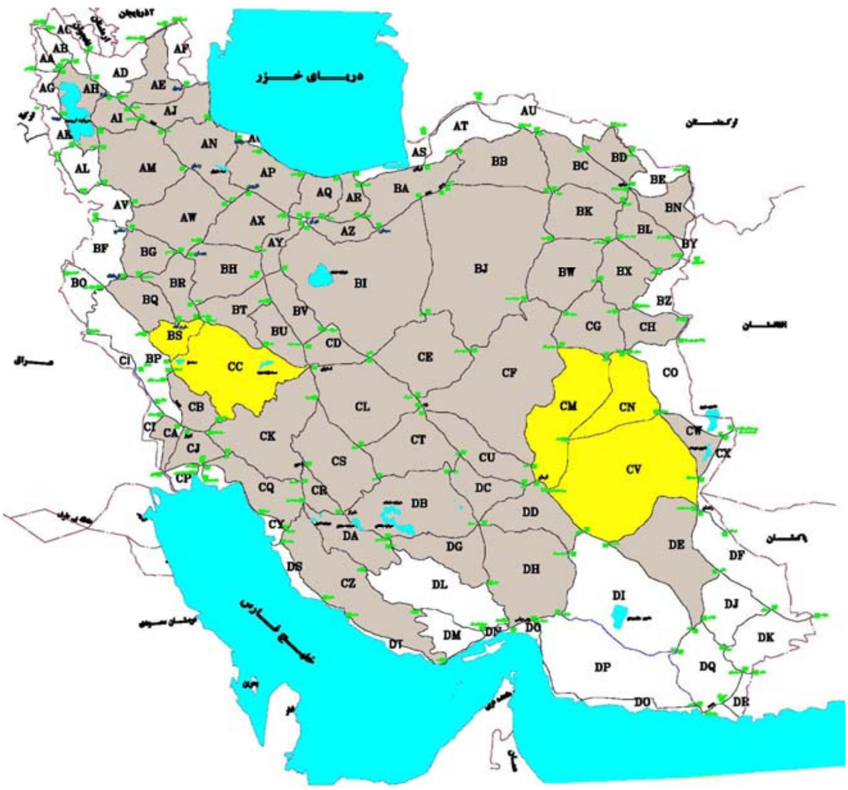
با توجه به روابط پیش‌گفته برای محاسبه ماتریس وزن، نیاز به تعیین ماتریس واریانس-کواریانس مشاهدات اولیه($C_{l'l'}$) است. در تعیین این ماتریس برای واریانس شتاب گرانی نقاط از اطلاعات دریافت شده از سازمان نقشه‌برداری کشور استفاده شد و واریانس و کواریانس مربوط به مشاهدات اختلاف ارتفاع با توجه به مقادیر به‌دست آمده برای α و λ، از رابطه (۴۲) محاسبه شده است و پس از آن با تشکیل سایر ماتریس‌های موردنیاز از رابطه (۳۰) بردار تصحیحات محاسبه شدند. ابعاد ماتریس‌های تشکیل شده در جدول ۳ آمده است.

از میان آزمون‌های بعد از سرشکنی، آزمون‌های فاکتور واریانس و آزمون برآورد پایدار روی نتایج سرشکنی صورت گرفت. قابل ذکر است که به‌دلیل ایجاد ضعف در شبکه ترازیابی از آزمون باردا استفاده نشده است. پس از اجرای آزمون‌های بعد از سرشکنی و به‌دست آوردن بردار تصحیح‌های نهایی از رابطه (۳۱) اختلاف پتانسیل‌های سرشکن شده حاصل شدند. اطلاعات و نتایج مربوط به روش سرشکنی مطرح شده در جدول‌های ۴ و ۵ آورده شده است. در این جدول‌ها $\hat{\sigma}_0^2$ فاکتور واریانس ثانویه، $\bar{\sigma}_l$ میانگین جذر عضوهای روی قطر اصلی ماتریس واریانس-کواریانس مشاهدات به مترمربع بر مجذور ثانیه، $\bar{\sigma}_{\hat{l}}$ میانگین جذر عضوهای روی قطر اصلی ماتریس واریانس-کواریانس مشاهدات برآورد شده به مترمربع بر مجذور ثانیه، $\bar{\sigma}_{\hat{v}}$ میانگین جذر عضو روی قطر اصلی ماتریس واریانس-کواریانس تصحیح‌های برآورد شده به مترمربع بر مجذور ثانیه و $\bar{\hat{v}}$ میانگین قدر

مطلق تصحیح‌های برآورد شده به مترمربع بر مجذور ثانیه است.

با در اختیار داشتن اختلاف پتانسیل‌های سرشکن شده می‌توان اختلاف ارتفاع دینامیک و اختلاف ارتفاع ارتومتریک را در لوپ‌های موردنظر در شبکه ترازیابی ایران محاسبه کرد. برای محاسبه اختلاف ارتفاع دینامیک از رابطه (۴) استفاده شد.

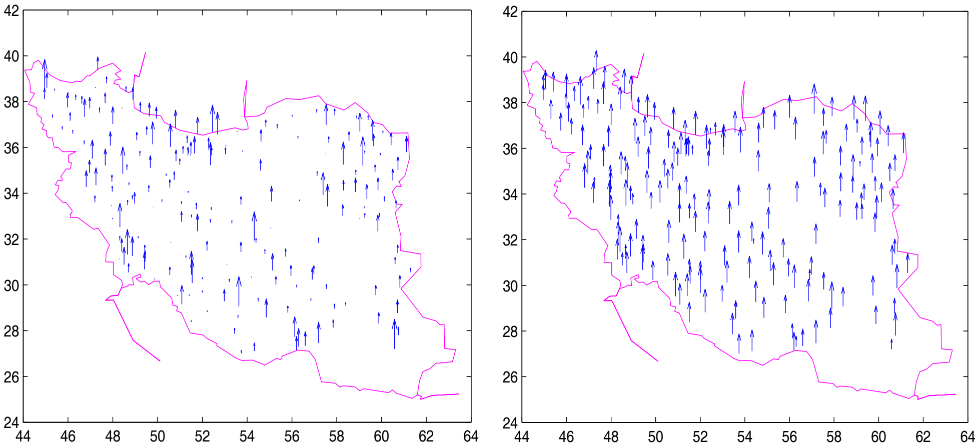
به‌منظور محاسبه اختلاف ارتفاع ارتومتریک، ابتدا بایستی در نقاط ترازیابی شتاب گرانی متوسط در امتداد خط شاقولی گذرنده از نقطه را محاسبه کرد. برای این کار از روش عرضه شده (صفری و مصطفایی، ۱۳۸۷) استفاده شده است. با استفاده از رابطه (۶) اختلاف ارتفاع ارتومتریک در لوپ‌های موردنظر محاسبه شد.



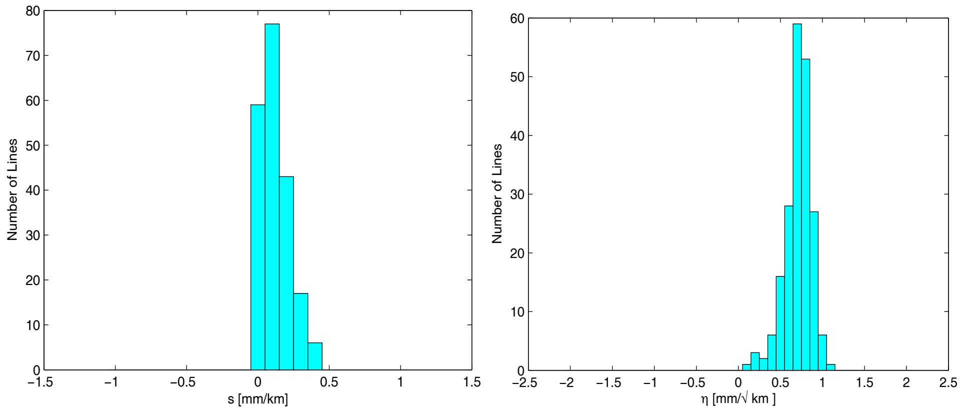
شکل۳. شبکه ترازیابی درجه۱ طراحی شده برای ایران و پراکندگی اطلاعات ترازیابی موجود، نام هر لوپ درون آن نوشته شده است.

جدول۲. نتایج آنالیز واریانس خطوط ترازیابی شبکه ترازیابی دقیق ایران.

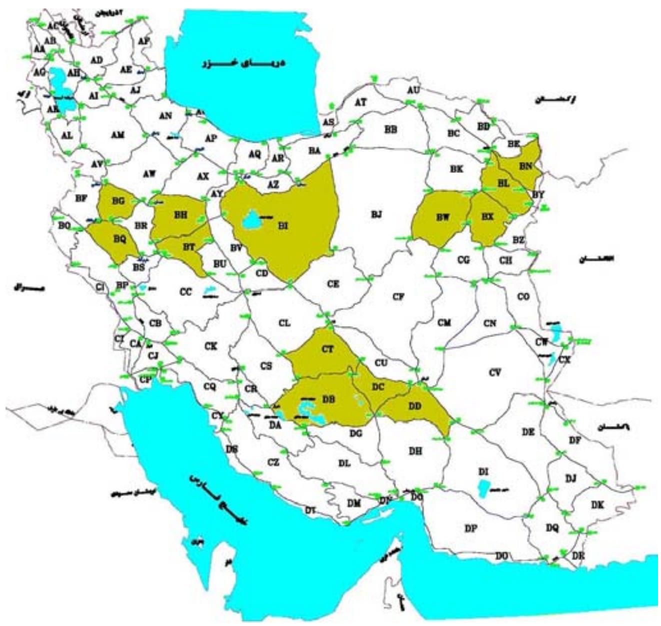
منبع تغییرات	مجموع مربعات (SS)	درجه آزادی(DF)	میانگین مربعات (MS)	F	F_{theo}	$1-\alpha$
بین خطوط	۷۸۱.۵۲۷	۲۰۱	۳.۸۸۸			
درون خطوط	۹۸۰۵.۶۵۳	۱۱۲۰۸	۰.۸۷۵	۴.۴۴۴۳	۱.۱۷۱۴	۰.۹۵
کلی	۱۰۵۸۷.۱۸۰	۱۱۴۰۹	۰.۹۲۸			



شکل ٤. توزیع اندازه خطاهای اتفاقی در کل شبکه (نقشه سمت راست) و توزیع اندازه خطاهای سامان‌مند در کل شبکه (نقشه سمت چپ).



شکل ٥. بافت‌نگار خطاهای اتفاقی در کل شبکه (سمت راست) و بافت‌نگار خطاهای سامان‌مند در کل شبکه (سمت چپ).



شکل ٦. پراکندگی لوپ‌های دارای اطلاعات گرانی کامل.

جدول۳. ابعاد ماتریس‌های تشکیل شده در سرشکنی.

ماتریس	**l**	**B**	**w**	$C_{l'l'}$	**J**	**P**
ابعاد	۳۵۰۱×۱	۱۳×۳۵۰۱	۱۳×۱	۱۰٤۹۵×۱۰٤۹۵	۳۵۰۱×۱۰٤۹۵	۳۵۰۱×۳۵۰۱

جدول٤. نتایج حاصل از سرشکنی قبل از آزمون برآورد پایدار.

$\hat{\sigma}_0^2$	$\bar{\sigma}_l$	$\bar{\sigma}_{\hat{l}}$	$\bar{\sigma}_{\hat{v}}$	$\bar{\hat{v}}$
150.3671	0.0091	0.0085	0.000238	0.0057

جدول۵. نتایج حاصل از سرشکنی پس از آزمون برآورد پایدار.

$\hat{\sigma}_0^2$	$\bar{\sigma}_l$	$\bar{\sigma}_{\hat{l}}$	$\bar{\sigma}_{\hat{v}}$	$\bar{\hat{v}}$
1.0524	0.0517	0.0493	0.00942	0.0043

۵ بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله دقت در شبکه ترازیابی درجه‌یک ایران با استفاده از فرمول‌های لالمند و ویگنال مورد بررسی قرار گرفت. ابتدا آنالیز واریانس برای اطلاعات ترازیابی ۵۸ لوپ پیش‌گفته صورت گرفت. براساس نتایج حاصل از آنالیز واریانس مشخص شد که مشاهدات ترازیابی در طول خطوط دارای خطاهای سامان‌مند هستند.

خطاهای اتفاقی و سامان‌مند برای هر خط ترازیابی با استفاده از فرمول‌های لالمند محاسبه شد. خطای اتفاقی دارای متوسط $\pm 0.6754\ mm/\sqrt{km}$ و خطای سامان‌مند نیز با استفاده از اختلافات خطوط ترازیابی دارای متوسط $0.1299\ mm/km$ است خطای سامان‌مند متوسط با استفاده از خطای بست لوپ‌ها نیز محاسبه شد که مقدار آن برابر $0.1030\ mm/km$ است.

با استفاده از روابط ویگنال نیز که آخرین فرمول‌های پذیرفته شده برای محاسبه خطای اتفاقی و سامان‌مند است، مقادیر این خطاها محاسبه شد. مقادیر متوسط خطاهای اتفاقی و سامان‌مند به‌ترتیب برابر با $\pm 0.6529\ mm/\sqrt{km}$ و $1.2892\ mm/km$ به‌دست آمد. اختلاف نتایج مربوط به خطای سامان‌مند ناشی از این واقعیت است که در روابط لالمند از خطای بست لوپ‌ها استفاده می‌شود درحالی‌که در روابط ویگنال از قطعات ترازیابی استفاده می‌شود. دلیل بزرگ بودن خطای سامان‌مند حاصل از روابط ویگنال نسبت به روابط لالمند را می‌توان ناشی از این واقعیت دانست که در هنگام استفاده از خطای بست، لوپ‌ها بسیاری از تأثیرات خود را نشان نمی‌دهند ولی در روابط ویگنال که از قطعات ترازیابی استفاده شده است اثرات بیشتری از خطاها خود را آشکار می‌سازند و بنابراین عدد بزرگ‌تری برای نتیجه روابط ویگنال به‌دست آمده است. مقادیر α و λ در کل شبکه نیز به‌ترتیب برابر 0.67 و 0.89 به‌دست آمد. با توجه به اینکه فقط ۱۳ لوپ، شامل ۶۰ خط ترازیابی، ۳۵۰۱ قطعه ترازیابی و ۳۴۹۳ نقطه، دارای اطلاعات گرانی کامل و قابل‌اعتماد است، سرشکنی در مورد این لوپ‌ها صورت گرفت. پس از انجام سرشکنی، اختلاف پتانسیل‌های سرشکن شده به‌دست آمد. اکنون با در اختیار داشتن اختلاف پتانسیل‌های سرشکن شده، می‌توان اختلاف ارتفاع دینامیک و اختلاف ارتفاع ارتومتریک را در لوپ‌های موردنظر در شبکه ترازیابی ایران محاسبه کرد.

منابع

صفری، ع.، مصطفایی، ع.، ۱۳۸۷، روشی برای محاسبه شتاب گرانی متوسط براساس حل مسئله مقدار مرزی و اسپیلاین‌های هارمونیک، مجله فیزیک زمین و فضا، عرضه به‌منظور انتشار.

کریمی، ر.، ۱۳۸۲، پردازش مشاهدات ترازیابی دقیق ایران و تعیین اعداد ژئوپتانسیلی برای کل شبکه، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشکده فنی دانشگاه تهران.

یوسفی، ا.، ۱۳۸۶، محاسبه ارتفاع نرمال در شبکه ترازیابی دقیق ایران.، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشکده فنی دانشگاه تهران.

Ebong, M., 1985, On the use of multiple comparisons test for the analysis of leveling discrepancies, Bulletin Géodésique, **59**(1), 1-10.

Heiskanen, W. H. and Moritz, H., 1967, Physical Geodesy, W. H. Freeman and Co., San Francisco, USA.

Hofmann-Wellenhof, B. and Moritz, H., 2006, Physical Geodesy, Second corrected edition, Springer Wien NewYork.

Jekeli, C., 2000, Heights, the geopotential, and vertical datums, Geodetic science and surveying, Department of civil and environmental engineering and geodetic science, The Ohio State University, Report No.459.

Łyszkowicz, A. and Leonczyk, M., 2005, Accuracy of the last precise leveling campaign in Poland, EUREF symposium in Vienna.

Łyszkowicz, A. and Jackiewicz, A., 2007, Correlation in Polish precise levelling network, Symposium of the IAG Subcommission for Europe(EUREF).

Meamarzadeh, Y., 1998, Refraction effect and statistical analysis of the Iranian first order precise leveling data, M. S. thesis, Dept. of Surveying Engineering, K. N. Toosi University, Tehran.

Moosavi, A. H., 1996, Testing the Efficiency of Leveling Corrections in Iranian First Order Network, M. S. thesis, Dept. of Surveying Engineering, K. N. Toosi University, Tehran.

Sanso, F. and Vanicek, P., 2006, The orthometric height and the holonomity problem, Journal of Geodesy, 80, 225-232.

Vanicek, P. and Craymer, M., 1983, Autocorrelation functions as a diagnostic tool in leveling, In H. Pelzer and W. Niemeier (editors, (Precise Levelling, Dummler Verlag, Bonn, 327-341

Vanicek, P. and Krakiwsky, E. J., 1986, Geodesy: the Conceps, Elsevier Science Publishers.

Voosoghi, B., 1994, Investigation of systematic error in first order leveling on Iran, M. S. thesis, Dep. Of Surveying Engineering, K. N. Toosi University, Tehran.

Vignal, J., 1936, Evaluation de la preécision d'une réthode de Nivellement, Bulletin Géodésique, **49**(1), 1-3.

Wassef, A. M., 1955, Statistical analysis of discrepancies in leveling with applications to the first-order leveling of the Nile Delta, Bulletin Géodésique, N. 36.

Wassef, A. M., 1957, Note on the application of mathematical statistics to leveling errors, Report of the special study group N. 3 of the International Association of Geodesy to the Eleventh General Assembly in Torento.

Wassef, A. M. and Messh, F. Z. A., 1960, On the statistical distribution of leveling errors, Bulletin Géodésique, N. 56.

Wassef, A. M., 1962, Principles and methods of statistical analysis of leveling errors, Travaux de L'Association Internationale De Geodesie, vol. 21, Paris.

Wassef, A. M., 1974, On the search for reliable criteria for the accuracy of precise leveling based on statistical considerations of the discrepancies, Bulletin Géodésique, **112**, 149-163.