مجلهٔ فیزیک زمین و فضا، دوره ۳۸، شماره ۱، ۱۳۹۱، صفحهٔ ۶۹- ۸۴

بهینه‌سازی سامانه‌های تصویر لامبرت، مرکاتور و استریوگرافیک برای ناحیه جغرافیایی ایران با توجه به معیار ایری- کاورایسکی

بهزاد وثوقی[1*]، بهزاد ملکان[2] و اصغر راست بود[3]

[1] دانشیار، دانشکده مهندسی نقشه‌برداری، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران

[2] دانش‌آموخته کارشناسی ارشد ژئودزی، دانشکده مهندسی نقشه‌برداری، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران

[3] دانشجوی دکتری ژئودزی، دانشکده مهندسی نقشه‌برداری، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران

(دریافت: ۸۸/۳/۲۳ ، پذیرش نهایی: ۸۹/۱۱/۱۹)

چکیده

یکی از اهداف اصلی کارتوگرافی ریاضی تعیین سامانه تصویر برای نقشه یک ناحیه است به‌طوری‌که تغییر شکل‌های حاصل از زوایا، مساحت‌ها و فواصل برای نقشه ناحیه مورد نظر کمینه شوند. از آنجا که فرایند تبدیل به‌طورکلی فواصل را تغییر می‌دهد، در نظر گرفتن تغییر شکل فواصل درحکم پارامتر اساسی برای ارزیابی سامانه‌های تصویر، کاری مناسب خواهد بود. در این مقاله از معیار ایری- کاورایسکی (Airy- Kavraisky) به‌منزلهٔ معیار کیفی سامانه‌های تصویر استفاده شده است و با استفاده از روش کمترین مربعات پارامترهای بهینه سامانه‌های تصویر مخروطی متشابه لامبرت (Lambert)، استوانه‌ای متشابه مرکاتور (Mercator) و آزیموتی متشابه استریوگرافیک (Stereographic) برای ایران به‌طوری‌که این معیار کمینه شود محاسبه شده‌اند. نتایج عددی نشان می‌دهند که مقدار این معیار قبل از بهینه‌سازی برای سامانه تصویر لامبرت برابر 1.2895×10^{-3} و برای سامانه تصویر مرکاتور برابر 1.8848×10^{-3} و برای سامانه تصویر استریوگرافیک برابر 7.7709×10^{-4} است و مقدار این معیار بعد از بهینه‌سازی برای سامانه‌های تصویر لامبرت، مرکاتور و استریوگرافیک برابر 1.8128×10^{-4}، 8.1897×10^{-4} و 4.1702×10^{-4} خواهد بود، که نتایج حاکی از کاهش این معیار برای ناحیه ایران بعد از بهینه‌سازی هستند.

واژه‌های کلیدی: معیار ایری- کاورایسکی، کمترین مربعات، بهینه‌سازی، واپیچش، سامانه‌های تصویر مخروطی، سامانه‌های تصویر استوانه‌ای، سامانه‌های تصویر آزیموتی

Optimization of Lambert, Mercator and Stereographic map projections for the Iranian territory using Airy-Kavraisky criterion

Voosoghi, B.[1], Malekan, B.[2] and Rastbood, A.[3]

[1] *Associate Professor, Faculty of Geodesy and Geomatics Engineering, K. N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran*

[2] *Graduate Student in Geodesy , Faculty of Geodesy and Geomatics Engineering, K. N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran*

[3] *Ph. D. Student of Geodesy, Faculty of Geodesy and Geomatics Engineering, K. N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran*

(Received: 13 June 2009 , Accepted: 8 Feb 2011)

Abstract

The mathematical aspect of cartographic mapping is a process which establishes a unique connection between points of the earth's sphere and their images on a plane. It was proven in differential geometry that an isometric mapping of a sphere onto a plane with all corresponding distances on both surfaces remaining identical can never be achieved since the two surfaces do not possess the same Gaussian curvature. In other words, it is impossible to derive transformation formulae which will not alter distances in the mapping process. Cartographic transformations will always cause a certain deformation of the original surface. These deformations are reflected in changes of distances, angles

[*] نگارنده رابط: تلفن: ۰۲۱-۸۸۷۷۰۲۱۸ دورنگار: ۰۲۱-۸۸۷۸۶۲۱۳ E-mail: vosoghi@ kntu.ac.ir

and areas.

One of the main tasks of mathematical cartography is to determine a projection of a mapped region in such a way that the resulting deformation of angles, areas and distances are minimized. It is possible to derive transformation equations which have no deformations in either angles or areas. These projections are called conformal and equiareal, respectively. Since the transformation process will generally change the original distances it is appropriate to adopt the deformation of distances as the basic parameter for the evaluation of map projections.

In 1861 an English astronomer, G. B. Airy, made the first significant attempt in cartography to introduce a qualitative measure for a combination of distortions. His measure of quality was designed to be an equivalent to the variance in statistics. A more realistic evaluation of the deformations at a point was suggested by German geodesisit, W. Jordan, in 1896. In 1959, Kavraisky recommended a small modification of the mean square deformations of Airy and Jordan by the logarithmic definition of linear deformation. Such altered mean square deformation are called Airy-Kavraisky and Jordan-Kavraisky.

Using the above two mentioned criterions we can compute the mean square deformation of distances at a point. The evaluation and comparison of map projections of a closed domain is done by integration of the above two criterions.

In this paper the first measure was used as the qualitative measure of map projections. The two criterions should lead to similar results but the application of the Airy-Kavraisky criterion in the computation process is much simpler. This is the main reason for its selection as the basis of finding the best projection.

Optimization process was done in irregular domain of Iran for Lambert conic, Mercator cylindrical and stereographic azimuthal conformal projections. At first a grid composed of 165 points was created in the region. The scale factor was computed for the center of grid elements. The boundaries consist of a series of discrete points. Since the optimization domain is not regular like a spherical trapezoid, spherical cap or a hemisphere, so the minimization of the criterion leads to a least squares adjustment problem. For the Lambert conformal conic projection the optimization process will determine four unknown parameters: the geographic coordinates of metapole (φ_0, λ_0) and the projection constants C_1 and C_2. For other map projections the number of unknown parameters is three (φ_0, λ_0, C).

The following table shows the numerical results of Airy-Kavraisky criterion after optimization. In this table E_{AK} shows the Airy-Kavraisky criterion before optimization and $\hat{E}_{AK}$ shows this criteria after optimization. Computational results show a decrease in Airy-Kavraisky criterion after optimization.

This study of optimization of cartographic projections for small scale mappings was conducted to investigate the general approaches for obtaining the best projections using the Airy-Kavraisky measure of quality.

Estimated parameters	**Lambert conformal conic projection**	**Mercator conformal cylindrical projection**	**stereographic conformal azimuthal projection**
φ_0	32° 48' .10"	-46° 17' 8.96"	32° 49' 29.56"
λ_0	54° 2' 26.39"	7° 7' 45.53"	53° 10' 10.79"
C	C_1= 0.9959, C_2=1.9774	0.9989	1.9940
E_{AK}	0.0013	0.0018	0.0008
$\hat{E}_{AK}$	0.0001	0.0008	0.0004

Key words: Airy-Kavraisky criterion, least squares, optimization, distortion, conic map projection, cylindrical map projection, azimuthal map projection.

۱ مقدمه

در مبحث کارتوگرافی، تصویر کردن، از دیدگاه ریاضی فرایندی است که طی آن ارتباطی یکه بین نقاط سطح کروی زمین و تصاویر آنها روی صفحه کاغذ به وجود می‌آید. نگاشت طول‌پای (ایزومتریک) کره به صفحه به‌طوری‌که همهٔ فواصل متناظر برابر باقی بمانند امکان‌پذیر نیست (گتز، ۱۹۷۰). هدف اصلی کارتوگرافی ریاضی تعیین تصویری است که تغییر شکل‌های حاصل از آن کمینه باشد. می‌توان معادلاتی تبدیلی تعیین کرد که تغییرشکل‌های زاویه و مساحت به وجود نیاینـد (کراکیسکی، ۱۹۷۳)، به چنین تصاویری به ترتیب متشابه و هم‌مساحت می‌گویند، اما فرایند تبدیل همیشه فواصل را تغییر می‌دهد، بنابراین از تغییرشکل فواصل به‌منزلهٔ پارامتر اساسی برای ارزیابی سامانه‌های تصویر استفاده می‌شود (کراکیسکی، ۱۹۷۳). به نسبت فاصله بی‌نهایت کوچک روی صفحه تصویر به فاصله نظیر آن روی کره، ضریب مقیاس (Scale Factor) گفته می‌شود. چبیشوف (Chebyshev) لگاریتم طبیعی ضریب مقیاس را درحکم معیار اندازه‌گیری تغییر شکل پیشنهاد کرد (برمجو، ۲۰۰۵). در این مقاله از تعریف چبیشوف به منزلهٔ معیار اندازه‌گیری تغییر شکل استفاده شده است سپس با استفاده از روش کمترین مربعات معیار ایری- کاورایسکی روی ناحیه جغرافیایی ایران برای سامانه‌های تصویر متشابه لامبرت، متشابه مرکاتور و متشابه استریوگرافیک درحکم نماینده‌هایی از تصاویر مخروطی، استوانه‌ای و آزیموتی کمینه شده است. از جمله فعالیت‌های صورت گرفته در زمینه بهینه‌سازی سامانه‌های تصویر، می‌توان به روش‌های عرضه شدهٔ فرانکیچ اشاره کرد (فرانکیچ، ۱۹۸۲).

۲ واپیچش فواصل

نگاشت طول‌پای بین دو صفحه، به‌طوری‌که فواصل نظیر روی هر دو صفحه برابر باقی بمانند حاصل می‌شود، اگر و فقط اگر انحناهای گاوسی (Guassian Curvatures) دو صفحه با هم برابر باشند (گتز، ۱۹۷۰). ازآنجاکه انحنای گاوسی کره برابر عکس مربع شعاع کره و انحنای گاوسی صفحه برابر صفر است، پس تعیین چنین نگاشتی برای این دو صفحه غیرممکن است. به نسبت فاصله بی‌نهایت کوچک روی صفحه به فاصله نظیر آن روی کره، ضریب مقیاس گفته می‌شود و داریم (کراکیسکی، ۱۹۷۳):

$$k = \frac{ds}{dS} \qquad (۱)$$

که در این رابطه ds فاصله روی صفحه و dS فاصله روی کره است. و در نهایت واپیچش فواصل به‌صورت زیر تعریف می‌شود (کراکیسکی، ۱۹۷۳):

$$v_s = k - 1 \qquad (۲)$$

۳ معیار کیفی محلی

با انتخاب توابع تبدیل خاص ممکن است که مساحت‌ها و زوایا بدون واپیچش تبدیل شوند، اما فواصل همیشه تغییر خواهند کرد. پس در نظر گرفتن تغییرشکل طول‌ها درحکم پارامتر پایه برای ارزیابی سامانه‌های تصویر، کاملاً مناسب خواهد بود. تغییر شکل طول‌ها در یک نقطه به‌صورت محلی با رابطه (۲) بیان می‌شود (کراکیسکی، ۱۹۷۳).

در کارتوگرافی ریاضی معیارهای اندازه‌گیری تغییر شکل دیگری نیز وجود دارد. برای مثال تغییر شکل را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد (فرانکیچ، ۱۹۸۲):

$$v_s' = 1 - \frac{1}{k} \qquad (۳)$$

چبیشوف از لگاریتم طبیعی ضریب مقیاس به‌صورت زیر درحکم تعریف تغییر شکل به‌صورت زیر استفاده کرد (برمجو و اوترو، ۲۰۰۵):

$$v_s'' = \ln k \qquad (۴)$$

همهٔ معیارهای اندازه‌گیری واپیچش‌های طول توابعی از ضریب مقیاس هستند. در این مقاله از تعریف چیبیشوف درحکم معیار اندازه‌گیری تغییر شکل استفاده شده است، زیرا بهینه‌سازی آن در مورد تصاویر متشابه یا هم‌فاصله به‌طور خودکار منجر به واپیچش کمینه مساحت‌ها و در مورد تصاویر هم‌فاصله و هم‌مساحت منجر به تغییر شکل‌های کمینه زوایا می‌شود (برمجو، ۲۰۰۴).

ایری در ۱۸۶۱، یک معیار اندازه‌گیری کیفی برای واپیچش‌ها بیان کرد. تعریف ایری ابتدا به‌صورت زیر بود (فرانکیچ، ۱۹۸۲):

$$\varepsilon_A^2 = (\frac{a}{b} - 1)^2 + (ab - 1)^2 \qquad (۵)$$

که در این رابطه a و b به‌ترتیب نیم‌قطرهای بزرگ و کوچک بیضی تیسوت هستند. اما بعدها در فرایند بهینه‌سازی، ایری از صورت دیگری که نام آن میانگین مربعی تغییر شکل طول بود استفاده کرد (فرانکیچ،۱۹۸۲):

$$\varepsilon_A^2 = \frac{1}{2}(v_a^2 + v_b^2) \qquad (۶)$$

که در این رابطه (فرانکیچ، ۱۹۸۲):

$$v_a = a - 1 \qquad v_b = b - 1 \qquad (۷)$$

معیار دیگری برای اندازه‌گیری تغییر شکل‌های طول در یک نقطه از سوی جردن (W. Jordan) در ۱۸۹۶ به‌صورت زیر پیشنهاد شد که در آن از میانگین مربعی تغییر شکل استفاده شده بود (فرانکیچ، ۱۹۸۲):

$$\varepsilon_J^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(k-1)^2 d\alpha \qquad (۸)$$

در رابطه بالا α زاویه امتدادی و k ضریب مقیاس است (فرانکیچ، ۱۹۸۲). کاورایسکی در ۱۹۵۹، با استفاده از تعریف لگاریتمی (۴) تغییر کوچکی در میانگین مربعی تغییرشکل‌های ایری و جردن داد. به این میانگین مربعی تغییر شکل‌ها، معیارهای ایری- کاورایسکی و جردن- کاورایسکی گفته می‌شود (فرانکیچ، ۱۹۸۲):

$$\varepsilon_{AK}^2 = \frac{1}{2}(\ln^2 a + \ln^2 b) \qquad (۹)$$

$$\varepsilon_{JK}^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln^2 k d\alpha \qquad (۱۰)$$

در این مقاله از معیار ایری- کاورایسکی در کمینه‌سازی استفاده شده است.

۳-۱ معیار کیفی برای یک ناحیه

در بخش قبل دیدیم که با استفاده از یکی از روابط (۶)، (۸)، (۹) یا (۱۰) می‌توانیم میانگین مربعی تغییر شکل فواصل را در یک نقطه محاسبه کنیم. ایری برای ارزیابی سامانه‌های تصویر در یک ناحیه، خطای میانگین مربعی از یک ناحیه را به‌صورت زیر معرفی کرد (فرانکیچ، ۱۹۸۲):

$$E_A^2 = \frac{1}{2A}\int_A (v_a^2 + v_b^2) dA \qquad (۱۱)$$

که انتگرالگیری روی کل مساحت A از ناحیه صورت می‌گیرد.

با تعریف لگاریتمی واپیچش (۴) معیار ایری تبدیل به معیار ایری- کاورایسکی می‌شود و داریم (فرانکیچ،۱۹۸۲):

$$E_{AK}^2 = \frac{1}{2A}\int_A (\ln^2 a + \ln^2 b) dA \qquad (۱۲)$$

فرایند بهینه‌سازی که منجر به کمینه شدن رابطه فوق شود را بهینه‌سازی مطابق معیار ایری- کاورایسکی می‌گویند.

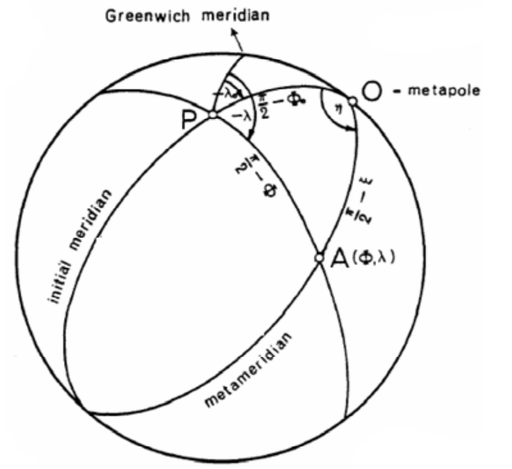
همچنین برای معیار جردن- کاورایسکی داریم (فرانکیچ، ۱۹۸۲):

$$E_{JK}^2 = \frac{1}{2\pi A}\int_A\int_0^{2\pi}\ln^2 k d\alpha dA \qquad (۱۳)$$

۴ سامانه‌های تصویر مایل

هنگامی که سطوح قابل گسترش در موقعیت‌های دیگری به غیر از موقعیت نرمال، کره را در بر بگیرند به تصاویر دیگری که دراصطلاح به آنها تصاویر مایل می‌گوییم

دست می‌یابیم (گرافارند، ۱۹۹۵)، برای این منظور موقعیت قطب را تغییر می‌دهیم که در ادامه با عرضهٔ تعاریفی، چگونگی این کار بیان می‌شود. با توجه به شکل ۱، قطب جدید (Metapole) نقطه مرکزی ناحیه تصویر است. نصف‌النهارهای جدید (Metameridian) دایره‌های عظیم گذرنده بر قطب جدید هستند. موقعیت نصف‌النهارهای جدید با زاویه η که آن را طول جغرافیایی جدید (Metalongitude) می‌نامیم ثابت می‌شود. دایره‌های متعامد بر نصف‌النهارهای جدید را مدارهای جدید (Metaparallel) می‌نامند که آنها با زاویه ξ که آن را عرض جغرافیایی جدید (Metalatitude) می‌گویند تعریف می‌شوند. نصف‌النهارهای جدید ($\eta = Const$) در تصویر مخروطی به‌صورت خطوط مستقیم تصویر می‌شوند. مدارهای جدید ($\xi = Const$) دایره‌های هم‌مرکز با مرکزی در نقطه تقاطع تصاویر نصف‌النهارهای جدید هستند.



شکل ۱. شبکه نصف‌النهارات و مدارات جدید(Metagraticule) (فرانکیچ،۱۹۸۲).

قطب جدید نقطه مرکزی ناحیه تصویر است. ازآنجاکه شبکه نصف‌النهارها و مدارهای جدید یک چارچوب ناوردا برای یک سامانه تصویر را نشان می‌دهد، مرحله اول درمحاسبات، تبدیل مختصات جغرافیایی (φ, λ) به مختصات جدید یعنی فرامختصات (Metacoordinate) است. مرحله دوم محاسبه مختصات صفحه است :

$$(\varphi, \lambda) \to (\xi, \eta) \to (x, y) \qquad (۱۴)$$

با توجه به شکل ۱، (ξ, η) در یک نقطه با مختصات جغرافیایی (φ, λ) از مثلث کروی OPA قابل برآورد هستند (فرانکیچ،۱۹۸۲):

$$\sin\xi = \sin\varphi_0 \sin\varphi + \cos\varphi_0 \cos\varphi \cos(\lambda_0 - \lambda) \qquad (۱۵)$$

$$\tan\eta = \frac{\cos\varphi \sin(\lambda_0 - \lambda)}{\sin\varphi \cos\varphi_0 - \sin\varphi_0 \cos\varphi \cos(\lambda_0 - \lambda)} \qquad (۱۶)$$

تبدیل نهایی در مختصات قائم‌الزاویه به‌صورت زیر است (فرانکیچ، ۱۹۸۲):

$$X = X(\xi, \eta) \qquad Y = Y(\xi, \eta) \qquad (۱۷)$$

۵ سامانه تصویر متشابه مخروطی لامبرت

رابطه کلی تصاویر مخروطی به‌صورت زیر است (دلمله، ۲۰۰۱):

$$X = \rho \sin\gamma \qquad Y = -\rho \cos\gamma \qquad (۱۸)$$

که:

$$\gamma = C\eta \qquad \rho = \rho(\xi) \qquad (۱۹)$$

کمیت C یک ثابت دلخواه مثبت است که معمولاً مقدار عددی آن از یک کمتر است.

این تصویر مخروطی و متشابه است. فاصله مدارها از هم برابر نیستند و این فواصل در مرکز نقشه کمتر می‌شود. نصف‌النهارها از هم فواصل برابر دارند و مدارها را در زوایای قائم قطع می‌کنند. مقیاس در راستای دو مدار استاندارد حقیقی است. این تصویر را لامبرت در ۱۷۷۲ عرضه کرد (اشنایدر، ۱۹۸۷).

روابط تبدیل برای این سامانه به‌صورت زیر است (اشنایدر، ۱۹۹۳):

$$X = \rho \sin\gamma \qquad Y = -\rho\cos\gamma \tag{۲۰}$$

که :

$$\gamma = C_1\eta \qquad \rho = C_2 e^{-C_1 q} \tag{۲۱}$$

که C_2 ثابت انتگرالگیری است و q عرض طول‌پای است کـه در مـورد عـرض جغرافیـایی جدیـد برابـر اسـت بـا (اشنایدر، ۱۹۹۳):

$$q = \ln\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{\xi}{2}) \tag{۲۲}$$

۶ سامانه تصویر متشابه استوانه‌ای مرکاتور

سـامانه‌هـای تـصویر اسـتوانه‌ای بـا رابطـه کلـی زیـر بیـان می‌شوند (سیدنهام و ترن، ۲۰۰۵):

$$X = k\eta \qquad Y = Y(\xi) \tag{۲۳}$$

که k یک ثابت دلخواه مثبت است.

این تصویر استوانه‌ای و متشابه است. نصف‌النهارهـا در این تصویر خطوط مستقیمی هستند و فاصله بین آنها با هـم برابر است. مدارها به‌صورت خطوط مستقیم‌انـد امـا فاصـله بین آنها با هم برابر نیست. فاصـله بـین مـدارها در نزدیکـی استوا کمتر است. مـدارها و نـصف‌النهارهـا همـدیگر را در زاویه قائم قطع می‌کنند. در این تصویر قطب‌ها بـه‌صـورت یک خط تصویر می‌شوند. بیـشترین واپـیچش در مـساحت در مناطق قطبی رخ مـی‌دهـد. ایـن تـصویر را مرکـاتور در ۱۵۶۹ معرفی کرده اسـت (یـو اس ژئولوجیکـال سـوروی، ۲۰۰۴).

۷ سامانه تصویر متشابه آزیموتی استریوگرافیک

این تصویر، آزیموتی و متشابه است. نصف‌النهـار مرکـزی و یک مدار به‌خصوص به‌صورت خـط مـستقیم نـشان داده می‌شوند. نصف‌النهار مرکـزی در منظـر قطبـی و اسـتوا در منظر استوایی، خطوط مستقیم هستند. سایر نصف‌النهارها و مدارها بـه‌صـورت کمـان‌هـای دایـره هـستند. ایـن تـصویر توسط Hipparchus ارائه شد (اشنایدر، ۱۹۸۷).

۸ بهینه‌سازی به روش کمترین مربعات

با توجه به سهولت و امکانات محاسباتی موجود، از بین دو معیار ایری - کاورایـسکی و جـردن- کاورایـسکی، معیـار ایـری - کاورایـسکی بـه‌مثابـۀ پایـه بـرای محاسـبات و بهینه‌سازی سامانه تصویر انتخاب شد. با در نظر گرفتن ایـن معیار خواهیم داشت:

$$E_{AK}^2 = \frac{1}{2A}\int_A (\ln^2 a + \ln^2 b)dA \tag{۲۴}$$

برای ساده‌سازی قرار می‌دهیم :

$$\ln a = v_a \tag{۲۵}$$

$$\ln b = v_b \tag{۲۶}$$

و در نتیجـه معیـار ایـری- کاورایـسکی بـه‌صـورت زیـر می‌شود:

$$E_{AK}^2 = \frac{1}{2A}\int_A (v_a^2 + v_b^2)dA = \min \tag{۲۷}$$

که در این رابطه A مساحت کل ناحیه تصویر است. بـرای میسر شدن انتگرالگیـری فـوق آن را بـا جمـع متنـاهی زیـر تقریب می‌زنیم (تبلر،۱۹۷۷):

$$\hat{E}_{AK}^2 = \frac{1}{2A}\sum_{i=1}^{n}[(v_a)_i^2 + (v_b)_i^2]\Delta A_i = \min \tag{۲۸}$$

که $\hat{E}_{AK}$ تقریب E_{AK} اسـت و ΔA_i المـان مـساحت iاُم از ناحیه A است و n تعداد المان‌های مساحتی است که کـل ناحیه A را پوشش می‌دهند. همچنین پارامترهای واپـیچش (v_a, v_b) بـه‌طـور عـددی در نقطـه مرکـزی هـر المـان مساحت، ΔA، ارزیابی می‌شوند.

مـساحت یـک المـان، مـساحت ذوزنقـه‌ای کـه بـین مـــدارهای φ_1 و φ_2 و نـــصف‌النهارهـــای λ_1 و λ_2 واقـــع می‌شود، از رابطه زیر به‌دست مـی آیـد (مریتـز و سـانکل، ۱۹۷۸):

$$\Delta A = 2R^2(\lambda_2 - \lambda_1)\sin\frac{1}{2}(\varphi_2 - \varphi_1)\cos\frac{1}{2}(\varphi_2 + \varphi_1) \tag{۲۹}$$

که R شـعاع کـره اسـت. بـرای یـک طـول کوچـک بـین

مدارها می‌توان فرض کرد:

$$\sin\frac{1}{2}(\varphi_2-\varphi_1)=\frac{1}{2}(\varphi_2-\varphi_1) \quad (۳۰)$$

قرار می‌دهیم:

$$\varphi_2-\varphi_1=\Delta\varphi \qquad \lambda_2-\lambda_1=\Delta\lambda \quad (۳۱)$$

برای کره با شعاع واحد $R=1$ داریم (تبلر،۱۹۷۷):

$$\Delta A_i=\Delta\varphi\cdot\Delta\lambda\cdot\cos\varphi_i \quad (۳۲)$$

که φ_i عرض جغرافیایی نقطه مرکزی المان ΔA_i است. اگر فواصل بین مدارها و نصف‌النهارها با هم برابر باشند، حاصل‌ضرب آنها ثابت k خواهد بود و داریم:

$$\Delta\varphi\cdot\Delta\lambda=k \quad (۳۳)$$

در نتیجه :

$$\Delta A_i=k\cos\varphi_i \quad (۳۴)$$

با جای‌گذاری (۳۴) در رابطه معیار ایری- کاورایسکی داریم:

$$\hat{E}_{AK}^2=\frac{k}{2A}\sum_{i=1}^{n}[(v_a)_i^2+(v_b)_i^2]\cos\varphi_i=\min \quad (۳۵)$$

و چون $\frac{k}{2A}$ ثابت است، رابطه بهینه‌سازی را می‌توان به‌صورت زیر در نظر گرفت :

$$\sum_{i=1}^{n}[(v_a)_i^2+(v_b)_i^2]\cos\varphi_i=\min \quad (۳۶)$$

کمینه‌سازی فوق یک مسئله کمترین مربعات است.

برای استفاده از روش کمترین مربعات المان‌های واپیچش v_a و v_b را باید به‌صورت توابعی از پارامترهای مجهول بیان کرد. اگر بخواهیم به‌صورت ماتریسی نمایش دهیم، برای روش کمترین مربعات ارتباط تابعی بین المان‌های واپیچش و پارامترهای مجهول به‌صورت زیر است (میخائیل و اکرمن، ۱۹۷۶):

$$V=F(C) \quad (۳۷)$$

که V بردار ستونی با $2n$ المان واپیچش و $F(C)$ بردار ستونی با $2n$ تابع و C بردار مجهولات است که اندازه آن باید از $2n$ کمتر باشد (میخائیل و اکرمن،۱۹۷۶).

$$V=\begin{bmatrix}(v_a)_1\\(v_b)_1\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\(v_a)_n\\(v_b)_n\end{bmatrix} \quad , \quad C=\begin{bmatrix}\varphi_0\\ \lambda_0\\ C_1\\ C_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\end{bmatrix} \quad (۳۸)$$

اگر ماتریس وزن P را یک ماتریس $2n\times 2n$ به‌گونه‌ای که المان‌های آن کسینوس‌های عرض جغرافیایی مرکز المان سطح باشند، انتخاب کنیم داریم (فرانکیچ، ۱۹۸۲):

$$P=\begin{bmatrix}\cos\varphi_1 & 0 & . & . & 0\\ 0 & \cos\varphi_1 & 0 & . & .\\ . & . & . & . & .\\ . & . & 0 & \cos\varphi_n & 0\\ 0 & . & . & 0 & \cos\varphi_n\end{bmatrix} \quad (۳۹)$$

شرط اساسی سامانه تصویر بهینه با توجه به معیار ایری- کاورایسکی به‌صورت زیر است (میخائیل و اکرمن، ۱۹۷۶):

$$V^TPV=\min \quad (۴۰)$$

همان‌طور که ذکر شد المان‌های واپیچش $v_a=\ln a$ و $v_b=\ln b$ را باید برحسب پارامترهای مجهول C بیان کرد. از نظریهٔ واپیچش‌های نیم‌قطرهای بزرگ و کوچک بیضی تیسوت به روش زیر تعیین می‌شود (فرانکیچ، ۱۹۸۲):

$$\begin{aligned}g_{11}&=m^2=X_\xi^2+Y_\xi^2\\ g_{22}&=X_\eta^2+Y_\eta^2\\ g_{12}&=X_\xi X_\eta+Y_\xi Y_\eta\\ \sqrt{g}&=X_\eta Y_\xi-X_\xi Y_\eta\\ n^2&=g_{22}\sec^2\xi\\ A^2&=m^2+n^2+2mn\sin\theta\end{aligned}$$

$$B^2 = m^2 + n^2 - 2mn\sin\theta$$
$$b = \frac{1}{2}(A - B)$$
$$a = \frac{1}{2}(A + B)$$
(۴۱)

که در این روابط X_ξ و Y_ξ و X_η و Y_η مشتقات نسبی نسبت به ξ و η، و θ زاویه بین منحنی‌های پارامتریک است. مدل ریاضی (۳۷) یک مدل غیرخطی است و برای استفاده در روش کمترین مربعات باید آنرا خطی کرد برای این منظور از بسط به سری تیلور به‌صورت زیر استفاده می‌شود (دنیس، ۱۹۷۷):

$$v = F(c^\circ + \Delta c) = F(c^\circ) + \frac{\partial F}{\partial c}\Big|_0 \Delta c + \ldots \qquad (۴۲)$$

که c° بردار مقادیر تقریبی مجهولات است. با در نظر گرفتن تنها دو عبارت اول رابطه فوق، بردار تصحیح تقریب‌ها، Δc ، با روش کمترین مربعات قابل برآورد است. بردار پارامترهای مجهول، c ، به‌صورت زیر تعریف می‌شود (دنیس، ۱۹۷۷):

$$c = c^\circ + \Delta c \qquad (۴۳)$$

تعریف می‌کنیم (دنیس، ۱۹۷۷):

$$v^\circ = F(c^\circ) \qquad (۴۴)$$

$$B = \frac{\partial F}{\partial c}\Big|_0 \qquad (۴۵)$$

با در نظر گرفتن مطالب ذکر شده، مدل ریاضی (۴۲) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت (دنیس، ۱۹۷۷):

$$v = B \cdot \Delta c + v^\circ \qquad (۴۶)$$

و شرط اساسی کمترین مربعات، $v^T P v = \min$، وقتی حاصل می‌شود که (میخائیل و اکرمن، ۱۹۷۶):

$$\frac{\partial v^T P v}{\partial c} = 0 \qquad (۴۷)$$

ازآنجاکه (میخائیل و اکرمن، ۱۹۷۶):

$$v^T P v = (B \cdot \Delta c + v^\circ)^T P (B \cdot \Delta c + v^\circ)$$
$$= \Delta c^T B^T P B \Delta c + 2\Delta c^T B^T P v^\circ + v^{\circ T} P v^\circ$$
(۴۸)

مشتق‌گیری از معادله ماتریسی فوق نسبت به c می‌شود (میخائیل و اکرمن، ۱۹۷۶):

$$\frac{\partial v^T P v}{\partial c} = 2B^T P B \Delta c + 3B^T P v^\circ = 0 \qquad (۴۹)$$

یا (میخائیل، ۱۹۷۶):

$$N \cdot \Delta c + U = 0 \qquad (۵۰)$$

به معادله خطی فوق معادله نرمال گفته می‌شود و داریم (میخائیل و اکرمن، ۱۹۷۶):

$$N = B^T P B \qquad (۵۱)$$

$$U = B^T P v^\circ \qquad (۵۲)$$

حل معادله (۵۰) بردار تصحیح را به‌صورت زیر نتیجه می‌دهد (میخائیل و اکرمن، ۱۹۷۶):

$$\Delta c = -N^{-1} \cdot U \qquad (۵۳)$$

و درنهایتً موارد مجهول با جای‌گذاری در رابطه (۴۳)، برآورد می‌شوند.

بعد از تعیین مجهول‌ها اندازه واپیچش ایری- کاورایسکی توسط رابطه زیر به‌دست می‌آید (فرانکیچ، ۱۹۸۲):

$$E_{AK}^2 = \frac{k}{2A} v^T P v \qquad (۵۴)$$

۹ سامانه تصویر متشابه مخروطی لامبرت بهینه برای ایران

سامانه تصویر مخروطی متشابه لامبرت برای کره با شعاع واحد با روابط (۲۰) و (۲۱) بیان می‌شود. همچنین (ξ, η) از روابط (۱۵) و (۱۶) به‌دست می‌آیند. بنابراین فرایند بهینه‌سازی، چهار مجهول را تعیین خواهد کرد: مختصات جغرافیایی قطب جدید (φ_0, λ_0) و ثابت‌های تصویر C_1

و C_2.

ضریب مقیاس در تصویر مخروطی متشابه لامبرت از رابطه زیر به‌دست می‌آید (کراکیسکی، ۱۹۷۳):

$$K = C_1 C_2 \frac{e^{-C_1 q}}{\cos\xi} \tag{۵۵}$$

و اگر واپیچش را به‌صورت لگاریتم طبیعی ضریب مقیاس تعریف کنیم، داریم (برمجو، ۲۰۰۵):

$$v = \ln K \tag{۵۶}$$

دراین‌صورت مدل بهینه‌سازی (۳۶) در مورد تصاویر متشابه به‌صورت زیر تبدیل می‌شود (فرانکیچ،۱۹۸۲):

$$\sum_{i=1}^{n} v_i^2 \cdot \cos\xi_i = \min \tag{۵۷}$$

پس از خطی کردن مدل ریاضی (۵۵) عناصر ماتریس ضرایب B به‌صورت مشتقات جزئی زیر تعریف می‌شوند (فرانکیچ،۱۹۸۲):

$$b(i,1) = \frac{\partial v_i}{\partial \varphi_0} \quad , \quad b(i,2) = \frac{\partial v_i}{\partial \lambda_0} \quad fori = 1,....,n$$
$$b(i,3) = \frac{\partial v_i}{\partial C_1} \quad , \quad b(i,4) = \frac{\partial v_i}{\partial C_2}$$

(۵۸)

پس از جای‌گذاری رابطه (۵۵) در (۵۷) داریم:

$$v = \ln C_1 + \ln C_2 - C_1 q - \ln\cos\xi \tag{۵۹}$$

مشتق‌گیری از رابطه فوق نسبت به بردار مجهول‌ها $[\varphi_0 \quad \lambda_0 \quad C_1 \quad C_2]$ نتایج زیر را حاصل می‌سازد:

$$b(i,1) = (\tan\xi_i - C_1 \frac{dq_i}{d\xi}) \cdot \frac{d\xi_i}{d\varphi_0} \tag{۶۰}$$

قرار می‌دهیم:

$$\frac{dq}{d\xi} = \frac{1}{\cos\xi} \tag{۶۱}$$

$$\frac{d\xi}{d\varphi_0} = t \tag{۶۲}$$

$$\Rightarrow \quad b(i,1) = (\tan\xi_i - \frac{C_1}{\cos\xi_i}) \cdot t_i \tag{۶۳}$$

که:

$$t_i = \frac{\cos\varphi_0 \sin\varphi_i - \sin\varphi_0 \cos\varphi_i \cos(\lambda_0 - \lambda)}{\cos\xi_i}$$

(۶۴)

عناصر ستون دوم ماتریس B به‌صورت زیر هستند:

$$b(i,2) = (\tan\xi_i - \frac{C_1}{\cos\xi_i}) \cdot u_i \tag{۶۵}$$

که :

$$u_i = \frac{d\xi}{d\lambda_0} = -\frac{\cos\varphi_0 \cos\varphi_i \sin(\lambda_0 - \lambda_i)}{\cos\xi_i} \tag{۶۶}$$

و برای ستون‌های سوم و چهارم ماتریس B داریم:

$$b(i,3) = \frac{1}{C_1} - q_i \tag{۶۷}$$

$$b(i,4) = \frac{1}{C_2} \tag{۶۸}$$

برای سامانه تصویر لامبرت با دو مدار استاندارد ۳۰ و ۳۶ درجه ضریب مقیاس در امتداد مدارهای استاندارد برابر یک است و داریم (فرانکیچ،۱۹۸۲):

$$K' = K'' = 1 \tag{۶۹}$$

یا [۳]:

$$C_1 C_2 \frac{e^{-C_1 q'}}{\cos\varphi'} = C_1 C_2 \frac{e^{-C_1 q''}}{\cos\varphi''} \tag{۷۰}$$

و در نتیجه:

$$C_1 = \frac{\ln\cos\varphi' - \ln\cos\varphi''}{q'' - q'} = 0.5449 \tag{۷۱}$$

و از $K' = 1$ داریم:

$$C_2 = \frac{e^{C_1 q'} \cos\varphi'}{C_1} = 2.1439 \tag{۷۲}$$

برای تعیین مقادیر اولیه قطب جدید (φ_0, λ_0)، روی کره مختصات جغرافیایی سه نقطه را که خط مرکزی ایران را تقریب می‌زنند در نظر می‌گیریم، سپس (فرانکیچ،۱۹۸۲):

$$\tan\lambda_0 = \frac{A - B}{C - D} \tag{۷۳}$$

که:

$$A=(\sin\varphi_3-\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2\cos\lambda_2-\cos\varphi_1\cos\lambda_1)$$
$$B=(\sin\varphi_2-\sin\varphi_1)(\cos\varphi_3\cos\lambda_3-\cos\varphi_2\cos\lambda_2)$$
$$C=(\sin\varphi_2-\sin\varphi_1)(\cos\varphi_3\sin\lambda_3-\cos\varphi_2\sin\lambda_2)$$
$$D=(\sin\varphi_3-\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2\sin\lambda_2-\cos\varphi_1\sin\lambda_1)$$
(۷۴)

و همچنین داریم (فرانکیچ،۱۹۸۲):

$$\tan\varphi_0=\frac{\cos\varphi_1\cos(\lambda_1-\lambda_0)-\cos\varphi_2\cos(\lambda_2-\lambda_0)}{\sin\varphi_2-\sin\varphi_1}$$
(۷۵)

با داشتن مقادیر تقریبی (φ_0,λ_0) مقادیر ξ را برای تعدادی از نقاط مرزی با توجه به رابطه (۱۵) به‌دست می‌آوریم. سپس مقادیر تقریبی برای C_1 و C_2 از شروط زیر حاصل می‌شوند (فرانکیچ، ۱۹۸۲).

$$K_{\xi_{\max}}=K_{\xi_{\min}} \tag{۷۶}$$

$$K_{\xi_M}=1 \tag{۷۷}$$

که:

$$\xi_M=\frac{1}{2}(\xi_{\max}+\xi_{\min}) \tag{۷۸}$$

اگر شروط فوق را برای رابطه (۵۵) اعمال کنیم داریم (فرانکیچ، ۱۹۸۲):

$$C_1=\frac{\ln\cos\xi_{\min}-\ln\cos\xi_{\max}}{q_{\max}-q_{\min}} \tag{۷۹}$$

$$C_2=\frac{e^{C_1q_{\max}}\cos\xi_{\max}}{C_1} \tag{۸۰}$$

۱۰ سامانه تصویر متشابه استوانه‌ای مرکاتور بهینه برای ایران

معادلات مربوط به تصویر مرکاتور برای کره واحد به‌صورت زیر است (اشنایدر، ۱۹۹۳):

$$X=C\eta \qquad Y=Cq \tag{۸۱}$$

که [۸]:

$$q=\ln\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{\xi}{2}) \tag{۸۲}$$

و C ثابت مجهولی است که در فرایند بهینه‌سازی تعیین می‌شود. بنابراین در اینجا سه مجهول (φ_0,λ_0) و C وجود دارد. ضریب مقیاس در تصویر مرکاتور از رابطه زیر به‌دست می‌آید (کراکیسکی، ۱۹۷۳):

$$K=\frac{C}{\cos\xi} \tag{۸۳}$$

بنابراین داریم:

$$v=\ln K=\ln C-\ln\cos\xi \tag{۸۴}$$

در نتیجه عناصر ماتریس B برای $i=1,...,n$ به‌صورت زیر است :

$$b(i,1)=\tan\xi(i)\cdot t(i)$$
$$b(i,2)=\tan\xi(i)\cdot u(i) \tag{۸۵}$$
$$b(i,3)=\frac{1}{C}$$

که در این روابط $t(i)$ و $u(i)$ از روابط (۶۴) و (۶۶) به‌دست می‌آیند.

برای مقادیر اولیه (φ_0,λ_0) دو نقطه (φ_1,λ_1) و (φ_2,λ_2) روی کره به‌طوری‌که خط مرکزی گذرنده بر ایران را تقریب بزنند در نظر می‌گیریم، آن‌گاه داریم (فرانکیچ، ۱۹۸۲):

$$\tan\lambda_0=\frac{\tan\varphi_1\cos\lambda_2-\tan\varphi_2\cos\lambda_1}{\tan\varphi_2\sin\lambda_1-\tan\varphi_1\sin\lambda_2} \tag{۸۶}$$

$$\tan\varphi_0=\frac{\sin(\lambda_2-\lambda_1)\cos\lambda_0}{\tan\varphi_2\sin\lambda_1-\tan\varphi_1\sin\lambda_2} \tag{۸۷}$$

و برای ثابت C مقدار اولیه را برابر یک در نظر می‌گیریم (فرانکیچ، ۱۹۸۲).

۱۱ سامانه تصویر متشابه آزیموتی استریوگرافیک بهینه برای ایران

تصاویر آزیموتی حالت خاصی از تصاویر مخروطی هستند که در آنها ثابت $C1$ برابر یک است (کراکیسکی، ۱۹۷۳).

معادلات مربوط به تصویر استریوگرافیک برای کره واحد به‌صورت زیر است (اشنایدر، ۱۹۹۳):

$$X = k1 + \rho \sin\gamma \qquad Y = k2 - \rho\cos\gamma \qquad (۸۸)$$

که:

$$\gamma = \eta$$
$$\rho = Ce^{-q} = C\tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\xi}{2}) \qquad (۸۹)$$

که در این روابط $k1$ و $k2$ ثوابت دلخواه هستند. رابطه ضریب مقیاس در تصویر استریوگرافیک به‌صورت زیر است (کراکیسکی، ۱۹۷۳):

$$K = \frac{C}{2\cos^2(\frac{\pi}{4} - \frac{\xi}{2})} \qquad (۹۰)$$

پس داریم:

$$v = \ln K = \ln C - 2\ln\cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\xi}{2}) - \ln 2 \qquad (۹۱)$$

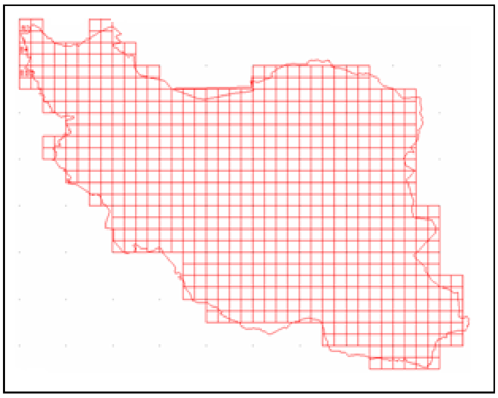
در نتیجه عناصر ماتریس B برای $i = 1,...,n$ به‌صورت زیر می‌شود :

$$b(i,1) = -\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{\xi(i)}{2})\cdot t(i)$$
$$b(i,2) = -\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{\xi(i)}{2})\cdot u(i) \qquad (۹۲)$$
$$b(i,3) = \frac{1}{C}$$

که در این روابط، $t(i)$ و $u(i)$ از روابط (۶۴) و (۶۶) به‌دست می‌آیند. مختصات جغرافیایی نقطه میانی ناحیه تصویر را درحکم مقدار اولیه برای (φ_0, λ_0) در نظر می‌گیریم. همچنین مقدار تقریبی برای ثابت C را ۲ در نظر می‌گیریم.

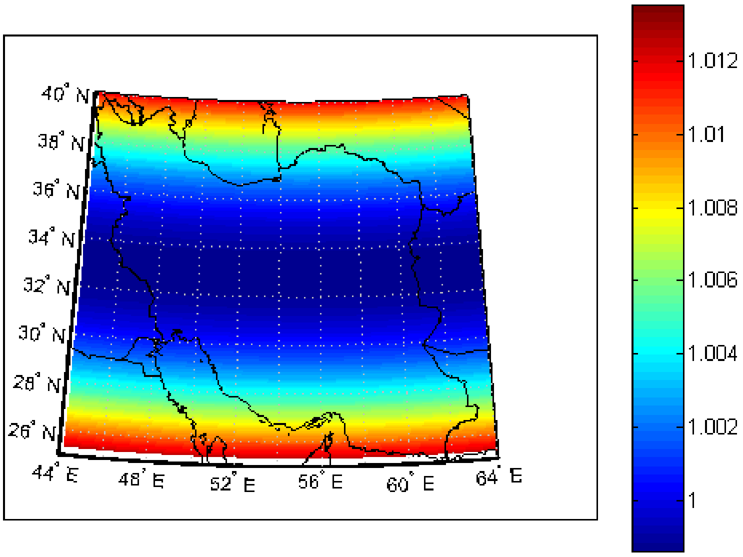
۱۲ نتایج عددی

در این بخش با توجه به مطالب ذکر شده، پارامترهای مجهول برای سامانه تصویر متشابه لامبرت، سامانه تصویر متشابه مرکاتور و سامانه تصویر متشابه استریوگرافیک برای ناحیه ایران طوری تعیین شده‌اند که معیار ایری-کاورایسکی در این ناحیه کمینه شود. در این مقاله برای کمینه کردن رابطه (۳۵) ابتدا یک گرید منظم متشکل از ۱۶۵ نقطه برای ایران مطابق شکل ۲ در نظر گرفته شده و سپس ضریب مقیاس برای مراکز المان‌های سطح گرید محاسبه شده است. بنابراین ابعاد ماتریس v° در رابطه (۵۸)، 165×1 و ابعاد ماتریس وزن P در این رابطه 165×165 است. ابعاد ماتریس ضرایب B برای سامانه تصویر لامبرت، 165×4 و برای سامانه‌های تصاویر مرکاتور و استریوگرافیک 165×3 است. با توجه به این مطالب و با استفاده از رابطه (۵۳) جواب حاصل از روش کمترین مربعات مطابق جدول‌های ۱ و ۲ و ۳ حاصل شده است. سپس با توجه به پارامترهای بهینه شده ضریب واپیچش طول بعد از بهینه‌سازی برای ایران محاسبه شده است.

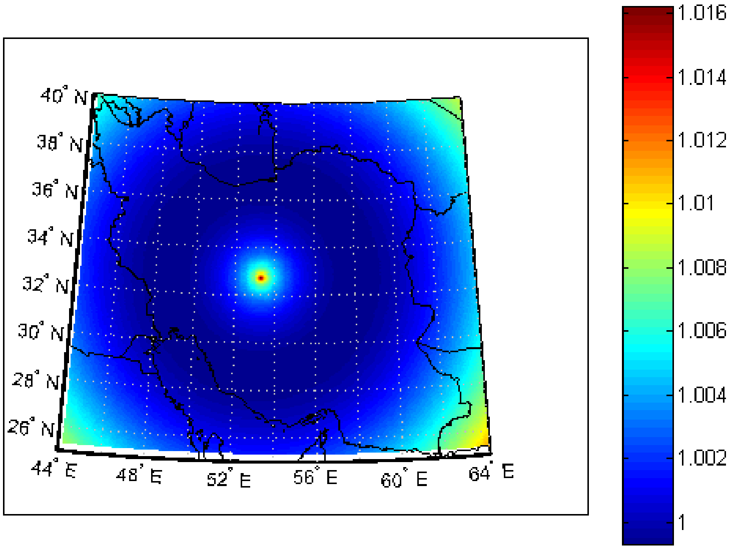


شکل ۲. گرید منظم در نظر گرفته شده برای ناحیه جغرافیایی ایران.

در شکل‌های ۳ و ۴ ضریب واپیچش طول در سامانه تصویر لامبرت قبل و بعد از بهینه‌سازی قابل‌ملاحظه است، مشاهده می‌شود که میزان واپیچش بعد از بهینه‌سازی و تعیین پارامترهای مجهول سامانه تصویر لامبرت به‌صورت قابل‌ملاحظه‌ای کاهش می‌یابد. در جدول ۱ پارامترهای سامانه تصویر لامبرت در حالت متداول و حالت بهینه‌شده مشاهده می‌شود. همچنین در این جدول مقدار عددی معیار ایری- کاورایسکی قبل و بعد از بهینه‌سازی آورده شده است که همان‌طور که ملاحظه می‌شود، بعد از بهینه‌سازی مقدار عددی این معیار کاهش یافته است.



شکل ۳. ضریب واپیچش طول برای ایران در سامانه تصویر متشابه لامبرت (حالت متداول).

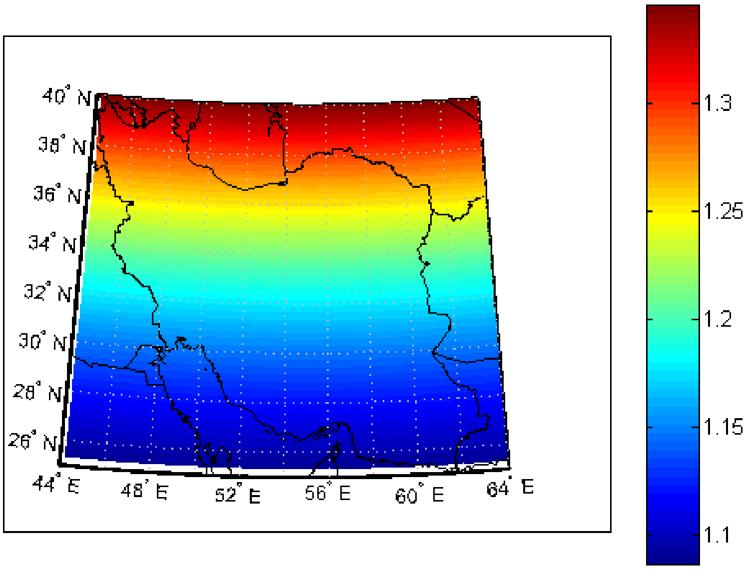


شکل ٤. ضریب واپیچش طول برای ایران در سامانه تصویر متشابه لامبرت (بهینه شده).

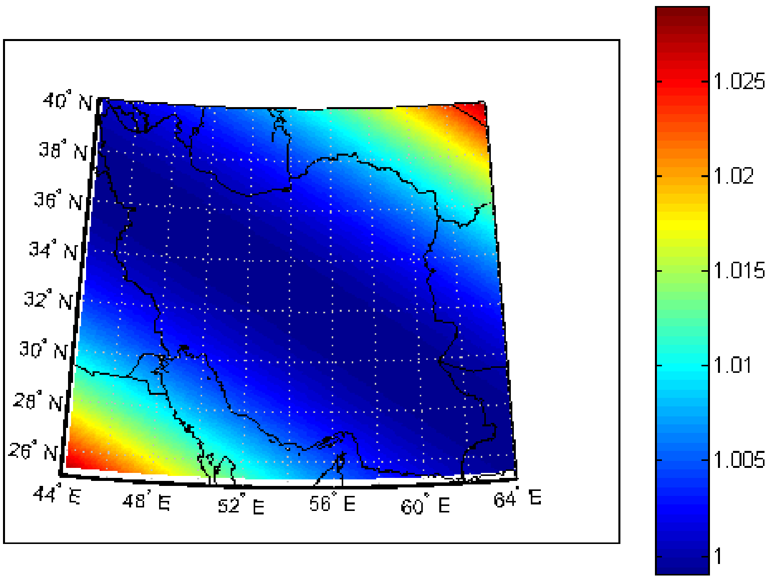
جدول ۱. پارامترهای بهینه شده تصویر مخروطی متشابه لامبرت با استفاده از روش کمترین مربعات.

پارامترهای برآورد شده	تصویر مخروطی متشابه لامبرت (بهینه شده)	تصویر مخروطی متشابه لامبرت (حالت متداول)
φ_0	$32^\circ \quad 48' \quad 04.10''$	$90^\circ \quad 0' \quad 0''$
λ_0	$54^\circ \quad 02' \quad 26.39''$	-
C_1	0.9959	0.5449
C_2	1.9774	2.1439
$\hat{E}_{AK}$	1.8128×10^{-4}	1.2895×10^{-3}

در شکل‌های ۵ و ۶، ضریب واپیچش طول در سامانه تصویر مرکاتور قبل و بعد از بهینه‌سازی قابل‌ملاحظه است، در این شکل‌ها نیز مشاهده می‌شود که میزان واپیچش بعد از بهینه‌سازی و تعیین پارامترهای مجهول سامانه تصویر مرکاتور به‌صورت قابل‌ملاحظه‌ای کاهش یافته است. در جدول ۲ پارامترهای سامانه تصویر مرکاتور که در متن مقاله به آنها اشاره شد، در حالت بهینه‌شده مشاهده می‌شود. همچنین در این جدول مقدار عددی معیار ایری- کاورایسکی بعد از بهینه‌سازی آورده شده است. لازم به ذکر است که برای سامانه تصویر مرکاتور قبل از بهینه‌سازی مقدار این معیار برابر 1.8848×10^{-3} است که همان‌طور که ملاحظه می‌شود، بعد از بهینه‌سازی، مقدار عددی این معیار کاهش یافته است.



شکل ۵. ضریب واپیچش طول برای ایران در سامانه تصویر متشابه مرکاتور (حالت متداول).



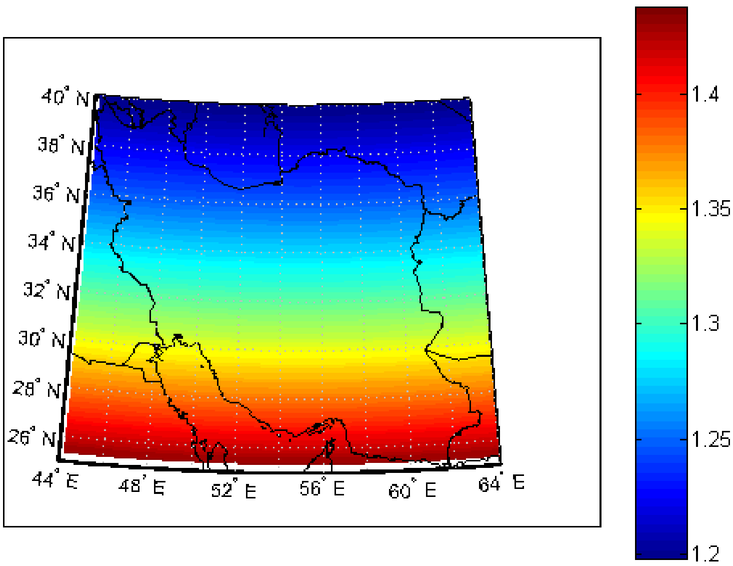
شکل٦. ضریب واپیچش طول برای ایران در سامانه تصویر متشابه مرکاتور (بهینه شده).

جدول۲. پارامترهای بهینه شده تصویر استوانه‌ای متشابه مرکاتور با استفاده از روش کمترین مربعات.

پارامترهای برآورد شده	تصویر استوانه‌ای متشابه مرکاتور (بهینه شده)
φ_0	$-46^\circ \quad 17' \quad 08.96''$
λ_0	$07^\circ \quad 07' \quad 45.53''$
C	0.99895
$\hat{E}_{AK}$	8.1897×10^{-4}

در شکل‌های ۷ و ۸ ضریب واپیچش طول در سامانه تصویر استریوگرافیک قبل و بعد از بهینه‌سازی قابل‌ملاحظه است، در این شکل‌ها نیز مشاهده می‌شود که میزان واپیچش بعد از بهینه‌سازی و تعیین پارامترهای مجهول سامانه تصویر استریوگرافیک به‌صورت قابل ملاحظه‌ای کاهش یافته است. در جدول ۳ پارامترهای سامانه تصویر مرکاتور که در متن مقاله به آنها اشاره شد در حالت بهینه‌شده مشاهده می‌شود. همچنین در این جدول مقدار عددی معیار ایری- کاوایسکی بعد از بهینه‌سازی آورده شده است. لازم به ذکر است که برای سامانه تصویر استریوگرافیک قبل از بهینه‌سازی مقدار این معیار برابر 7.7709×10^{-4} است که همان‌طور که ملاحظه می‌شود بعد از بهینه‌سازی، مقدار عددی این معیار کاهش یافته است.

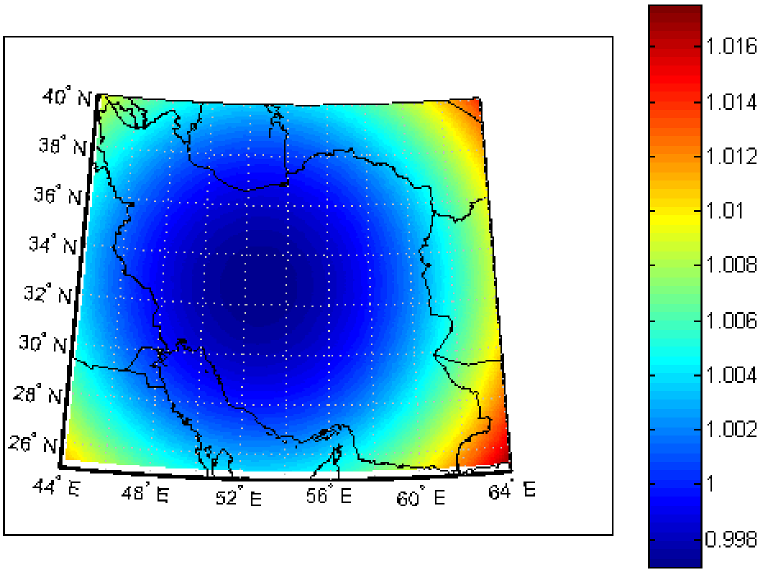
مطابق رابطه (۱۲)، معیار ایری - کاوایسکی وابسته به مرزهای ناحیه‌ای است که این معیار در آن ناحیه کمینه می‌شود. مقادیر ذکر شده در جدول‌های ۱، ۲ و ۳ بیانگر کمینه شدن این معیار در هر سه سامانه تصویر با استفاده از روش کمترین مربعات است. شکل‌های ۴، ۶ و ۸ نیز بیانگر کاهش ضریب واپیچش طول در هر سه سامانه تصویر در داخل مرزهای جغرافیایی منطقه مورد مطالعه (ایران) هستند. دلیل تغییر طرح توزیع ضریب واپیچش طول نسبت به حالت متداول آن، تغییر پارامترهای مربوط به سه سامانه تصویر در ضمن بهینه‌سازی است که با توجه به هندسه خاص هر سامانه تصویر (مخروطی، استوانه‌ای و صفحه‌ای) و جابه‌جا شدن آنها با پارامترهای بهینه شده، باعث تغییر طرح توزیع ضریب واپیچش طول در منطقه مورد بررسی می‌شود.



شکل۷. ضریب واپیچش طول برای ایران در سامانه تصویر متشابه استریوگرافیک (حالت متداول).

جدول۳. پارامترهای بهینه شده تصویر آزیموتی متشابه استریوگرافیک با استفاده از روش کمترین مربعات.

پارامترهای برآورد شده	تصویر آزیموتی متشابه استریوگرافیک (بهینه شده)
φ_0	$32^\circ \quad 49' \quad 29.56''$
λ_0	$53^\circ \quad 10' \quad 10.79''$
C	1.99396
$\hat{E}_{AK}$	4.1702×10^{-4}



شکل۸. ضریب واپیچش طول برای ایران در سامانه تصویر متشابه استریوگرافیک (بهینه شده).

۱۳ نتیجه‌گیری

واپیچش طول، پارامتر اساسی در ارزیابی سامانه‌های تصویر است. در این مقاله با در نظر گرفتن تعریف چبیشوف از واپیچش طول، معیار ایری- کاورایسکی برای ناحیه جغرافیایی ایران در سامانه‌های تصویر مخروطی متشابه لامبرت، استوانه‌ای متشابه مرکاتور و آزیموتی متشابه استریوگرافیک با بهینه‌سازی پارامترهای این سامانه‌ها محاسبه شد و مقادیر آن به‌ترتیب برابر 1.8128×10^{-4}، 8.1897×10^{-4} و 4.1702×10^{-4} به‌دست آمد. همچنین طی فرایند بهینه‌سازی پارامترهای بهینه برای سامانه‌های تصویر تعیین شد که نتایج عددی آنها را می‌توان در جدول‌های ۱ و ۲ و ۳ مشاهده کرد. شکل‌های ۴، ۶ و ۸ حاکی از بهبود ضریب واپیچش طول در سامانه‌های تصویر پیش‌گفته برای ناحیه ایران هستند.

منابع

Bermejo, M., 2004, Analysis of the Transverse Mercator Projection, PhD Thesis (in Spanish), Faculty of Mathematics, Complutense University, Madrid.

Bermejo, M. and Otero, J., 2005, Minimum Conformal Mapping Distortion According to Chebyshev's Principle, A Case Study Over Peninsular, J. Geod., **79**, 124-134.

Delmelle, E. M., 2001, Map Projection Properties, Considerations for Small-Scale GIS Applications, State University of New York at Buffalo, Master's Thesis, pp. 112-113.

Dennis, J. E., 1977, Non-linear Least Squares and Equations, The State of the Art in Numerical Analysis, Academic Press, New York.

Frankich, K., 1982, Optimization of Geographic Map Projections for Canadian Territory, PhD thesis, Calgary University, Canada.

Goetz, A., 1970, Introduction to Differential Geometry, Addison Wesley Publishing Company, New York.

Grafarend, E. W., 1995, The Optimal Universal Transverse Mercator Projection, Manuscr Geoda, **20**, 421-468.

Krakiwsky, E. J., 1973, Conformal Map Projections in Geodesy, Lecture Notes No. 37, Department of Surveying Engineering, University of New Brunswick.

Mikhail, E. and Ackermann, F., 1976, Observations and Least Squares, John Wiley & Sons, Inc. New York.

Moritz, H. and Sunkel, H., 1978, Approximation Methods in Geodesy, Herbert Wiechmann Verlag, Karlsruhe.

Snyder, J. P., 1993, Flattening the Earth, Two Thousand Year of Map Projections, The University of Chicago Press, Chicago, ISBN-0-226-76746-9.

Snyder, J. P., 1987, Map projections – a Working Manual. U. S. Geological Survey Professional Paper 1395, United States Government Printing Office, Washington.

Sydenham, P. H. and Thorn, R., 2005, Handbook of Measuring System Design, Rule-based Expert Systems, John Wiley & Sons, USA.

Tobler, W. R., 1977, Numerical Approaches to Map Projections, Festschrift Arnberger, Kretschmer, Vienna.

U. S. Geological Survey, 2004, Decision Support System for Map Projections of Small Scale Data, URL:
http:// mcmcweb.er.usgs.gov/DSS/. (accessed on 7 January 2006).