مجلهٔ فیزیک زمین و فضا، دوره ۳۸، شماره ۱، ۱۳۹۱، صفحهٔ ۸۵- ۹۹

مقایسه روش‌های متفاوت تعیین پارامترهای سامانه تصویر مرکاتور براساس معیار چبیشوف

بهزاد وثوقی[۱*]، بهزاد ملکان[۲] و اصغر راست بود[۳]

[۱] دانشیار، دانشکده مهندسی نقشه‌برداری، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران
[۲] دانش‌آموخته کارشناسی ارشد ژئودزی، دانشکده مهندسی نقشه‌برداری، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران
[۳] دانشجوی دکتری ژئودزی، دانشکده مهندسی نقشه‌برداری، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران

(دریافت: ۸۸/۴/۹ ، پذیرش نهایی: ۸۹/۱۲/۲۴)

چکیده

بیشتر نقشه‌های توپوگرافی بزرگ‌مقیاس بر پایه سامانه‌های تصویر متشابه (Conformal) بنا نهاده شده‌اند. شرط لازم در هر سامانه تصویر، تشابه بی‌نهایت کوچک در آن است. چبیشوف (Chebyshev) واپیچش یک سامانه تصویر متشابه را به صورت نوسان لگاریتمی تابع بی‌نهایت کوچک‌مقیاس σ در نظر گرفت. طبق معیار چبیشوف بهترین (کمینه واپیچش) سامانه تصویر متشابه روی ناحیه Ω، سامانه‌ای است که در آن σ روی مرز ناحیه ثابت باشد. در این تحقیق با توجه به معیار چبیشوف معادله نگاشت متشابه برای ایران با در نظر گرفتن سامانه تصویر مرکاتور (Mercator) به‌منزلهٔ تصویر پایه با سه روش المان محدود (Finite Element Method)، فوریه (Fourier Method) و چندجمله‌ای‌های همساز (Harmonic Polynomials) حل شده است و در پایان نمودارهای مربوط به لگاریتم تابع مقیاس مربوط به بهترین تصویر چبیشوف و همچنین ضرایب به‌دست آمده برای چندجمله‌ای‌های همساز مربوط به بهترین تصویر چبیشوف آورده شده است. نتایج حاصل برای کمیت واپیچش متشابه کمینه نشان می‌دهد که برای دامنه با مرز مربع‌شکل به روش المان محدود مقدار این کمیت برابر 9.232×10^{-3} و با روش فوریه برابر 9.243×10^{-3} حاصل شده است. همچنین برای دامنه با مرزهای واقعی ایران مقدار این کمیت با روش المان محدود برابر 2.381×10^{-3} و با روش چندجمله‌ای همساز برابر 2.462×10^{-3} حاصل شده است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود، نتایج حاصل از سه روش، بسیار به همدیگر نزدیک هستند، لذا این نتیجه حاصل می‌شود که برای تعیین بهترین تصویر چبیشوف برای یک ناحیه جغرافیایی، استفاده از هرکدام از این سه روش عرضه شده، به جواب یکسان منجر خواهد شد.

واژه‌های کلیدی: سامانه تصویر، معیار چبیشوف، نگاشت متشابه، المان محدود، فوریه، چندجمله‌ای‌های همساز

Comparison of different methods for estimation of Mercator map projection parameters based on Chebyshev’s criterion

Voosoghi, B.[1], Malekan, B.[2] and Rastbood, A.[3]

[1] *Associate Professor, Faculty of Geodesy and Geomatics Engineering, K. N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran*
[2] *Graduate Student in Geodesy , Faculty of Geodesy and Geomatics Engineering, K. N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran*
[3] *Ph. D. Student of Geodesy, Faculty of Geodesy and Geomatics Engineering, K. N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran*

(Received: 30 June 2009 , Accepted: 15 March2011)

Abstract

The mathematical aspect of cartographic mapping is a process which establishes a unique connection between points of the earth’s sphere and their images on a plane. It was

*نگارنده رابط: تلفن: ۰۲۱-۸۸۷۷۰۲۱۸ دورنگار: ۰۲۱-۸۸۷۸۶۲۱۳ E-mail: vosoghi@ kntu.ac.ir

proven in differential geometry that an isometric mapping of a sphere onto a plane with all corresponding distances on both surfaces remaining identical can never be achieved since the two surfaces do not possess the same Gaussian curvature. One of the main tasks of mathematical cartography is to determine a projection of a mapped region in such a way that the resulting deformation of angles, areas and distances are minimized.

Most large-scale national topographic maps are based on conformal map projections such as transverse Mercator and Lambert conformal conic projections. The essential condition in every conformal map-projection is the infinitesimal similarity. Chebyshev studied conformal map projections, using the oscillation of the logarithm of the infinitesimal scale function as a measure of distortion. Chebyshev's criterion states that the conformal map projection on Ω with minimum distortion is characterized by the property that the infinitesimal-scale σ is constant along the boundary of Ω. The oscillation in Ω of the logarithm of the infinitesimal-scale function associated to this best Chebyshev conformal map projection (or simply Chebyshev projection) will be called the minimum conformal distortion associated with Ω.

Then we consider how to quantify the minimum conformal distortion associated with geographical regions. The minimum possible conformal mapping distortion associated with Ω coincides with the absolute value of the minimum of the solution of a Dirichlet boundary-value problem for an elliptic partial differential equation in divergence form and with homogeneous boundary condition. If the first map is conformal, the partial differential equation becomes a Poisson equation for the Laplace operator.

The Dirichlet BVP could be solved by the finite element method (FEM). The FEM method is a procedure used in finding approximate numerical solutions to BVPs/PDEs. It can handle irregular boundaries in the same way as regular boundaries. It consists of the following steps to solve the elliptic PDE:

1- Discretize the (two-dimensional) domain into subregions such as triangular elements, neither necessarily of the same size nor necessarily covering the entire domain completely and exactly.

2- Specify the positions of nodes and number them starting from the boundary nodes and then the interior nodes.

3- Define the basis/shape/interpolation functions for each subregion.

As a particular case, we consider the region of Iran in this paper. Conformal mapping equation in this region is solved for Mercator as the base map projection. To solve this equation three approaches are used: Finite Element Method (using Matlab Partial Differential Equation, PDE, Toolbox for square domain and Femlab code for arbitrary irregular domain), Fourier Method and Harmonic Polynomials.

At the end, graphs associated with logarithm of the infinitesimal-scale function and also obtained results for coefficients of harmonic polynomials associated with the best Chebyshev projection over the region of Iran are presented.

The minimum conformal distortion associated with square boundary domain estimated as 9.232×10-3 using finite element method and 9.243×10-3 using Fourier method. Also for the region of Iran with real domain, the value of this quantity estimated as 2.381×10-3 using finite element method and 2.462×10-3 using harmonic polynomials. Computations show that the results of three approaches are very close to each other. So for determination the best Chebyshev's projection for a geographic region, the three mentioned approaches give the same results.

Key words: Map projection, Chebyshev's criterion, conformal mapping, finite element, Fourier, harmonic polynomials

۱ مقدمه

از دیدگاه ریاضی، نگاشت کارتوگرافی، فرایندی است که منجر به ارتباطی یکه بین نقاط روی کره زمین و تصاویر آنها روی صفحه می‌شود. در هندسه دیفرانسیل اثبات شده است که یک نگاشت طول‌پای (isometric) کره به صفحه به‌طوری‌که همهٔ فواصل به‌طور صحیح تبدیل شوند ممکن نخواهد بود (گتز،۱۹۷۰). وظیفه اصلی کارتوگرافی ریاضی تعیین روابط تصویر برای یک ناحیه جغرافیایی است به‌طوری‌که تغییر شکل حاصل در آن ناحیه کمینه شود (فرانکیچ،۱۹۸۲). بیشتر نقشه‌های توپوگرافی بزرگ‌مقیاس بر پایه سامانه‌های تصویر متشابه بنا نهاده شده‌اند. بنابراین سامانه‌های تصویر متشابه دارای اهمیت ویژه‌ای در نقشه‌برداری و کارتوگرافی هستند (برمجو،۲۰۰۴). لذا چیزی که هم در عمل و هم در نظریه مورد علاقه است، یافتن بهترین سامانه تصویر متشابه ممکن است (برمجو و اترو، ۲۰۰۵). چبیشوف با استفاده از نوسان لگاریتمی تابع مقیاس بی‌نهایت کوچک σ به‌منزلهٔ اندازه واپیچش، سامانه‌های تصویر متشابه را بررسی کرد. در این مقاله کمیتی به نام واپیچش متشابه کمینه (Minimum Conformal Distortion)، برای ناحیه جغرافیایی ایران محاسبه شده است. این محاسبه نیازمند حل مسئله دیریکله (Dirichlet) برای یک معادله دیفرانسیل جزئی به شکل واگرایی (Divergence) است. در این مقاله این معادله دیفرانسیل جزئی به سه روش المان محدود، فوریه و چندجمله‌ای‌های همساز برای ناحیه جغرافیایی ایران حل و نتایج به‌صورت گراف آورده شده است. لازم به ذکر است که برای حل معادله با استفاده از روش المان محدود از نرم‌افزار FEMLAB استفاده شده است. در ۱۹۸۲ با استفاده از روش چندجمله‌ای‌های همساز بهترین تصور چبیشوف روی ناحیه جغرافیایی کانادا و در ۲۰۰۵ با استفاده از روش‌های المان محدود و فوریه بهترین تصویر چبیشوف روی ناحیه جغرافیایی اسپانیا تعیین شده است (برمجو و اترو،۲۰۰۵ و فرانکیچ، ۱۹۸۲). در این تحقیق بهترین تصویر چبیشوف برای ناحیه ایران با استفاده از هر سه روش ذکر شده تعیین شده و نتایج حاصل با هم مقایسه شده است.

۲ نگاشت‌های متشابه

نگاشت متشابه سطوح منظم به‌صورت یک تبدیل که ضریب مقیاس در هر نقطه دامنه تصویر مستقل از جهت است تعریف می‌شود (فرانکیچ،۱۹۸۲). در این تعریف ضریب مقیاس فقط تابع موقعیت است:

$$\sigma = \sigma(\varphi, l) \tag{۱}$$

که در این رابطه:

$$l = (\lambda - \lambda_0) \tag{۲}$$

با توجه به مستقل بودن ضریب مقیاس از جهات، زوایا در هر نقطه حفظ می‌شوند. المان طول دیفرانسیلی روی کره با شعاع R به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$dS^2 = R^2(d\varphi^2 + \cos^2\varphi dl^2) \tag{۳}$$

بنابراین شکل مربعی رابطه فوق با تعریف عرض طول‌پای q به‌صورت زیر، به شکل معادله (۶) خواهد شد:

$$dq = \sec\varphi\, d\varphi \tag{۴}$$

$$\Rightarrow \quad q = \ln\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}) \tag{۵}$$

$$dS^2 = R^2(dq^2 + dl^2) \tag{۶}$$

گاوس اثبات کرد که یک تبدیل متشابه است هرگاه رابطه زیر موجود باشد (فرانکیچ،۱۹۸۲):

$$Z = F(\omega) \tag{۷}$$

که:

$$\begin{aligned} Z &= Y + iX \\ \omega &= q + il \end{aligned} \tag{۸}$$

و F یک تابع تحلیلی است. مشتق‌پذیری تابع F با معادلات کوشی- ریمان (Cauchy- Riemann Equations) اثبات می‌شود:

$$X_l = Y_q = \mathrm{Re}\frac{dF(\omega)}{d\omega} \qquad (۹)$$
$$-X_q = Y_l = -\mathrm{Im}\frac{dF(\omega)}{d\omega}$$

معادلات دیفرانسیل بنیادی سامانه‌های تصویر به‌صورت زیر تعریف می‌شوند (فرانکیچ،۱۹۸۲):

$$\beta_\varphi = \frac{M_l + \nu_\varphi \sin\varepsilon}{\nu\cos\varepsilon}$$

$$-\beta_l = \frac{\nu_\varphi}{M\cos\varepsilon} + \frac{\tan\varepsilon}{M} M_l + \varepsilon_l \qquad (۱۰)$$

که در این روابط M تغییر شکل طول در راستای نصف‌النهار و ε تغییر شکل در زاویه است.

همچنین داریم:

$$\nu = N\cos\varphi \qquad (۱۱)$$

که N تغییر شکل طول در راستای منحنی مداری است. β یک تابع تحلیلی مجهول از مختصات (φ, l) است و β_φ، M_l، β_l، ν_φ و ε_l بیانگر مشتقات نسبی هستند. شرط تشابه در عبارت‌های تغییر شکل‌ها را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد:

$$M = N = \sigma \quad , \quad \varepsilon = 0 \qquad (۱۲)$$

در این‌صورت معادلات دیفرانسیل بنیادی سامانه‌های تصویر به معادلات زیر تبدیل می‌شوند:

$$\beta_\varphi = \frac{\sigma_l}{\nu} \qquad -\beta_l = \frac{\nu_\varphi}{\sigma} \qquad (۱۳)$$

تبدیل عرض جغرافیایی به عرض طول‌پای با رابطه (۴) صورت می‌گیرد که:

$$\frac{dq}{d\varphi} = \sec\varphi = \cosh q \qquad (۱۴)$$

پس می‌توان نوشت:

$$\nu = \sigma \,\mathrm{sech}\, q \qquad (۱۵)$$

معادلات دیفرانسیل بنیادی سامانه‌های تصویر متشابه (۱۳) در عبارات q به‌صورت زیر می‌شوند:

$$\beta_q = \frac{\partial \ln\nu}{\partial l} \qquad (۱۶)$$
$$-\beta_l = \frac{\partial \ln\nu}{\partial q}$$

شرط انتگرال پذیری $\beta_{\varphi l} = \beta_{l\varphi}$ روابط زیر را نتیجه می‌دهد:

$$\frac{\partial^2 \ln\nu}{\partial l^2} = -\frac{\partial^2 \ln\nu}{\partial q^2} \qquad (۱۷)$$

یا:

$$\frac{\partial^2 \ln\nu}{\partial l^2} + \frac{\partial^2 \ln\nu}{\partial q^2} = 0 \qquad (۱۸)$$

رابطه فوق معروف به معادله لاپلاس (Laplace Equation) است (گیلبرگ و ترودینگر،۱۹۷۷). با توجه به رابطه (۱۵) می‌توان نوشت:

$$\ln\nu = \ln\sigma - \ln\cosh q \qquad (۱۹)$$

و با مشتق‌گیری می توان نوشت:

$$\frac{\partial \ln\nu}{\partial l} = \frac{\partial \ln m}{\partial l} \quad , \quad \frac{\partial \ln\nu}{\partial q} = \frac{\partial \ln m}{\partial q} = -\tanh q \qquad (۲۰)$$

همچنین برای مشتق دوم داریم:

$$\frac{\partial^2 \ln\nu}{\partial l^2} = \frac{\partial^2 \ln\sigma}{\partial l^2} \quad ، \quad \frac{\partial^2 \ln\nu}{\partial q^2} = \frac{\partial^2 \ln\sigma}{\partial q^2} = -\mathrm{sech}^2 q \qquad (۲۱)$$

با قرار دادن (۲۱) در (۱۸) داریم:

$$\frac{\partial^2 \ln\sigma}{\partial q^2} + \frac{\partial^2 \ln\sigma}{\partial l^2} = \mathrm{sech}^2 q \qquad (۲۲)$$

که این معادله، معادله پواسون (Poisson Equation) است (گیلبرگ و ترودینگر،۱۹۷۷). جواب‌های معادله لاپلاس را توابع همساز (Harmonic) می‌نامند و این جواب‌ها مقدار $\ln\nu$ را در هر نقطه از دامنه تصویر تعیین می‌کنند. در فرایند بهینه سازی سامانه های تصویر متشابه جواب خصوصی به‌صورت زیر برای معادله لاپلاس در نظر گرفته

می‌شود (فرانکیچ،۱۹۸۲):

$$\ln \nu = (q+il)^n \quad (۲۳)$$

این رابطه یک چند جمله‌ای همساز است که برای مثال، ۵ مقدار اولیه آن به‌صورت زیر هستند:

$$\begin{array}{ll} n=1 & q+il \\ n=2 & q^2+i2ql-l^2 \\ n=3 & q^3+i3q^2l-3ql^2-il^3 \\ n=4 & q^4+i4q^3l-6q^2l^2-i4ql^3+l^4 \\ n=5 & q^5+i5q^4l-10q^3l^2-i10q^2l^3+5ql^4+il^5 \end{array} \quad (۲۴)$$

اگر چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی را با ψ_n و چندجمله‌ای با ضرایب موهومی را با θ_n نشان دهیم، داریم:

$$\begin{array}{ll} \psi_0=1 & \theta_0=1 \\ \psi_1=q & \theta_1=l \\ \psi_2=q^2-l^2 & \theta_2=2ql \\ \psi_3=q^3-3ql^2 & \theta_3=3q^2l-l^3 \\ \psi_4=q^4-6q^2l^2+l^4 & \theta_4=4q^3l-4ql^3 \\ \psi_5=q^5-10q^3l^2+5ql^4 & \theta_5=5q^4l-10q^2l^3+l^5 \end{array}$$

(۲۵)

هر کدام از چندجمله ای های ψ_n و θ_n جواب خاصی از معادله لاپلاس هستند پس ترکیب خطی این جواب‌ها هم جواب معادله لاپلاس خواهد بود:

$$\ln \nu = \sum_{j=1}^{n} (a_j \psi_j + b_j \theta_j) \quad (۲۶)$$

۳ معیار چبیشوف

چبیشوف در ۱۸۵۶ قضیه‌ای را در مورد بهترین تصویر (best projection) از ردهٔ تصاویر متشابه مطرح ساخت، که به بیان آن در این بخش می‌پردازیم. سامانه‌های تبدیل متشابهی که تغییرات مقیاس آنها $\sigma = \sigma(\varphi, l)$ کمینه شده است را تصاویر چبیشوف می‌نامند (فرانکیچ،۱۹۸۲). به عبارت دیگر در این تصاویر، نسبت بیشینه و کمینه ضریب مقیاس برای کل دامنه تصویر کوچک‌تر از هر تصویر متشابه دیگری برای آن دامنه خواهد بود. قضیه چبیشوف بیان می کند که شرط لازم و کافی برای این‌که یک تصویر در زمرهٔ تصاویر چبیشوف باشد آن است که ضریب مقیاس در طول منحنی مرزی دامنه ثابت باشد (میلنر،۱۹۶۹). پس تعیین تصویر چبیشوف برای یک دامنه بسته شامل جست‌وجو برای یک تابع تحلیلی از متغیر $(q+il)$ است به‌طوری‌که این تابع ضریب مقیاس ثابت در راستای مرز دامنه را نتیجه دهد. با این بحث‌ها، معادله پواسون (۲۲) باید یک مقدار ثابت روی مرز داشته باشد که برای منحنی مرزی Γ داریم:

$$\sec h^2 q = const \quad (۲۷)$$

اگر در رابطه فوق ثابت را برابر صفر در نظر بگیریم، این انتخاب جواب مسئله را منحصربه‌فرد نمی‌کند. در این مورد تعیین تصاویر چبیشوف تبدیل به حل مسئله دیریکله با مقادیر مرزی صفر می‌شود.

ضریب واپیچش مساحت در تصاویر متشابه با رابطه زیر داده می‌شود:

$$P = \sigma^2 \quad (۲۸)$$

چون تصاویر چبیشوف واپیچش تعریف شده به‌صورت لگاریتم طبیعی ضریب مقیاس، $\ln \sigma$، را بهینه می‌کنند، در نتیجه لگاریتم ضریب واپیچش مساحت نیز به‌طور خودکار بهینه می شود:

$$\ln P = 2 \ln \sigma \quad (۲۹)$$

پس می‌توان گفت که تصاویر چبیشوف از بین همهٔ تصاویر متشابه به تصاویر هم‌مساحت نزدیک‌تر هستند. معیار چبیشوف را به‌طور ریاضی می‌توان از راه معادله پواسون (۲۲) تعریف کرد:

$$\frac{\partial^2 \ln \sigma}{\partial q^2} + \frac{\partial^2 \ln \sigma}{\partial l^2} = \sec h^2 q \quad (۳۰)$$

$$\sec h^2 q_\Gamma = const \quad (۳۱)$$

۴ روش چندجمله‌ای‌های همساز

هنگامی که تابع همساز انتخاب شد، روش کمترین مربعات ضرایب تابع همساز را تعیین می‌کند. راحت‌ترین تابع همساز برای این هدف چندجمله‌ای همساز (۲۳) است. کمیت V که با رابطه (۱۵) تعریف شده یک تابع مختلط است. پس لگاریتم طبیعی آن را می‌توان به‌صورت چندجمله‌ای همساز (۲۵) بیان کرد:

$$\ln(\sigma \sec hq) = a_0 + a_1\psi_1 + a_2\psi_2 + \ldots + a_k\psi_k \qquad (۳۲)$$

و یا:

$$\ln(\sigma) = a_0 + a_1\psi_1 + a_2\psi_2 + \ldots + a_k\psi_k + \ln\cosh q \qquad (۳۳)$$

ضرایب a_i برای $i = 0,1,\ldots,k$ با استفاده از روش کمترین مربعات از شرط اساسی کمترین مربعات زیر حاصل می‌شوند:

$$\sum_{i=1}^{n} (\ln\sigma_i)^2 = \min \qquad (۳۴)$$

که در این رابطه n تعداد نقاطی هستند که مرز دامنه را تقریب می‌زنند. تعداد نقاط مرزی ثابت باید بیشتر از مجهولات باشند:

$$n > k+1$$

اگر مدل ریاضی (۳۳) را به‌صورت ماتریسی بنویسیم، داریم:

$$U = \kappa \cdot a + l \qquad (۳۵)$$

که:

$$U = \begin{bmatrix} \ln\sigma_1 \\ \ln\sigma_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \ln\sigma_n \end{bmatrix} \quad , \quad \kappa = \begin{bmatrix} 1 & \psi_1^{(1)} & . & . & . & \psi_k^{(1)} \\ 1 & \psi_1^{(2)} & . & . & . & \psi_k^{(2)} \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ 1 & \psi_1^{(n)} & . & . & . & \psi_k^{(n)} \end{bmatrix}.$$

$$a = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_k \end{bmatrix} \quad , \quad l = \begin{bmatrix} \ln\cosh q_1 \\ \ln\cosh q_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \ln\cosh q_n \end{bmatrix}$$

(۳۶)

در این‌صورت شرط کمترین مربعات (۳۴) به‌صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$U^T U = \min \qquad (۳۷)$$

رابطه فوق وقتی حاصل می‌شود که مشتق از آن نسبت به بردار مجهولات a برابر صفر شود:

$$\frac{\partial(U^T U)}{\partial a} = 0 \qquad (۳۸)$$

با در نظر گرفتن مدل ریاضی (۳۵) داریم:

$$U^T U = (\kappa a + l)^T (\kappa a + l) l$$

$$= a^T \kappa^T \kappa a + a^T \kappa^T l + l^T \kappa a + l^T \qquad (۳۹)$$

یا:

$$U^T U = a^T \kappa^T \kappa a + 2a^T \kappa^T l + l^T l \qquad (۴۰)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial(U^T U)}{\partial a} = 2a^T \kappa^T \kappa + 2\kappa^T l = 0 \qquad (۴۱)$$

$$\Rightarrow \quad Ya + b = 0 \qquad (۴۲)$$

که:

$$Y = \kappa^T \kappa \quad , \quad b = \kappa^T l \qquad (۴۳)$$

حل معادلات نرمال (۴۲) بردار مجهولات را به‌صورت زیر نتیجه خواهد داد:

$$a = -Y^{-1} b \qquad (۴۴)$$

با ضرایب معلوم a_i می‌توان لگاریتم ضریب مقیاس و سپس ضریب مقیاس را در هر نقطه از دامنه حساب کرد:

$$\sigma = \exp((a_0 + a_1\psi_1 + \ldots + a_k\psi_k + \ln\cosh q) \qquad (۴۵)$$

۵ بهترین سامانه های تصویر متشابه

شرط لازم در هر سامانه تصویر، تشابه بی نهایت کوچک در آن است. در حقیقت اگر $P:\Omega \to R^2$ یک سامانه تصویر متشابه روی ناحیه Ω از بیضوی Σ باشد، آن‌گاه P یک مقیاس بی نهایت کوچک $\sigma(x)$ در هر نقطه x از ناحیه Ω دارد به‌طوری‌که (برمجو و اترو،۲۰۰۵):

$$\sigma(x) = \lim_{y \to x} \frac{|P(x) - P(y)|}{d_\Sigma(x,y)} \qquad (۴۶)$$

که در این رابطه داریم:

$d_\Sigma(x,y)$: فاصله ژئودزیک (Geodesic Distance) بین دو نقطه x و y $|P(x)-P(y)|$: فاصله اقلیدسی (Euclidean Distance) بین نقاط تصویر شده $P(x)$ و $P(y)$ چبیشوف با استفاده از نوسان لگاریتمی تابع مقیاس بی‌نهایت کوچک σ درحکم اندازه واپیچش، سامانه‌های تصویر متشابه را بررسی کرد. معیار چبیشوف بیان می‌کند که سامانه تصویر متشابه روی Ω با واپیچش کمینه با این خاصیت که σ روی مرز Ω ثابت است مشخص می شود. نوسان در Ω به‌صورت لگاریتم تابع σ مربوط به بهترین سامانه تصویر متشابه چبیشوف را واپیچش متشابه کمینه مربوط به Ω می‌نامند (برمجو و اترو،۲۰۰۵). محاسبه واپیچش متشابه کمینه مربوط به منطقه جغرافیایی نیازمند حل مسئله دیریکله برای یک معادله دیفرانسیل جزئی در شکل واگرایی است که به یک معادله پواسون برای عملگر لاپلاس تبدیل می‌شود.

فرض می‌کنیم Σ یک بیضوی دورانی با نیم‌قطر بزرگ a و خروج از مرکزیت اولیه e باشد (در این مقاله فرض می‌کنیم $a=1$) و $\Omega \subset \Sigma$ یک ناحیه از بیضوی و $\Omega_b = P_b(\Omega)$ نقشه اولیه از Ω باشد که از رابطه $P_b:\Omega \to R^2$ از بیضوی ساخته می‌شود. P_b را به‌منزلهٔ تصویر پایه در نظر می گیریم. همچنین مختصات قائم الزاویه نقاط تصویر شده با $(u,v)\in\Omega_b$ نشان داده می شوند. (u,v) را درحکم مختصات منحنی الخط روی بیضوی در نظر می‌گیریم. با فرض اینکه تصویر پایه P_b متشابه باشد، مختصات‌های (u,v) طول‌پای می شوند، پس المان کمانی روی Σ به‌صورت زیر می شود:

$$ds^2 = m^2(du^2 + dv^2) \qquad (۴۷)$$

که $m=\sigma_b^{-1}$ و σ_b تابع مقیاس بی نهایت کوچک مربوط به P_b است. انحنای گاوسی (Gaussian Curvature) K از Σ به‌صورت زیر حاصل می شود:

$$K = -\frac{1}{m^2}\Delta(\log m) = \sigma_b^2 \Delta(\log \sigma_b) \qquad (۴۸)$$

که $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}$ عملگر لاپلاس دوبُعدی است. تابع g را زیر همساز (Subharmonic) در یک دامنه صفحه گویند اگر $\Delta g \geq 0$. در رابطه (۴۸) چون $K>0$ نتیجه می شود که $\Delta(\log \sigma_b) > 0$ و سپس تابع $\log \sigma_b$ روی Ω_b زیر همساز است. برای مثال اگر P_b تصویر مرکاتور باشد، آن‌گاه $u=\lambda$ و $v=q$ که داریم (اشنایدر،۱۹۸۷):

$$q = \log[\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2})(\frac{1 - e\sin\varphi}{1 + e\sin\varphi})^{\frac{e}{2}}] \qquad (۴۹)$$

در این مورد $m=r(q)$ که $r(q)$ شعاع مدار بیضوی با q ثابت است. اگر Σ یک کره باشد داریم:

$$r(q) = \sec hq$$

$$\log \sigma_b = \log(\cosh q) \qquad (۵۰)$$

برای بیضوی $r(q)$ را نمی‌توان به‌صورت بسته نوشت، ولی می توان آن را به توان های e^2 بسط داد. معادلات سامانه تصویر متشابه P روی Ω به‌صورت زیر داده می شود:

$$x + iy = x(u,v) + iy(u,v) \qquad (۵۱)$$

که در این رابطه x و y مزدوج های همساز (Harmonic Conjugates) روی Ω_b هستند و i نشان دهنده بخش

موهومی است. با توجه به معادلات کوشی- ریمان می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{\partial y}{\partial v} \quad \text{و} \quad \frac{\partial x}{\partial v}=-\frac{\partial y}{\partial u} \tag{۵۲}$$

اگر $f(z)$ تابع تحلیلی به‌صورت $f(z)=x(u,v)+iy(u,v)$ از متغیر $z=u+iv$ باشد، تابع مقیاس بی نهایت کوچک $\sigma=\sigma(u,v)$ مربوط به P به‌صورت زیر داده می‌شود:

$$\sigma(u,v)=\left|f'(z)\right|\sigma_b(u,v) \quad \Leftrightarrow \quad \log\sigma=U+\log\sigma_b \tag{۵۳}$$

که $U(u,v)=\log\left|f'(z)\right|$ روی Ω_b همساز است($\Delta U=0$). بنابراین تابع $g=\log\sigma$ معادله دیفرانسیل جزئی از نوع پواسون را تأمین می کند.

$$\Delta g=\Delta(\log\sigma_b)=\sigma_b^{-2}K>0 \ \text{روی}\ \Omega_b \tag{۵۴}$$

معادله (۵۴) نشان می دهد که لگاریتم تابع بی نهایت کوچک مربوط به یک سامانه تصویر متشابه روی Ω در Ω_b زیر همساز است. توابع زیر همساز اصل بیشینهٔ قوی (Strong Maximum) را تأمین می کنند. این اصل بیان می کند که یک تابع زیرهمساز نمی‌تواند یک بیشینه داخلی داشته باشد مگر اینکه تابع ثابت باشد[پاول،۲۰۰۶]. ازآنجاکه $\Delta g>0$ پس g نمی‌تواند ثابت باشد، اگر $g\in C^0(\overline{\Omega}_b)$ و Ω_b کراندار باشد آن‌گاه بیشینه $g=\log\sigma$ در $\overline{\Omega}_b$ روی مرز $\partial\Omega_b$ از Ω_b اتفاق می‌افتد، داریم:

$$g(u,v)<\max_{\partial\Omega_b} g \quad \forall(u,v)\in\Omega_b \tag{۵۵}$$

اگر P_b تصویر مرکاتور باشد و Σ را کره در نظر بگیریم معادله (۵۴) به رابطه زیر تبدیل می شود:

$$\Delta g=-\frac{d^2\log r}{dq^2}=r^2K=\sec h^2 q \tag{۵۶}$$

اگر به‌صورت ایده‌آل فکر کنیم ما به‌دنبال پیدا کردن سامانه تصویر متشابهی با $\sigma=1$ در هر نقطه Ω_b هستیم، اما این ممکن نیست زیرا توابع ثابت (و به‌خصوص $g=0$) جواب‌های معادله (۵۴) نیستند.

فرض می کنیم $\delta(P,\Omega)$ اندازه واپیچش یک سامانه تصویر متشابه P روی Ω باشد که برحسب عبارت‌های لگاریتم تابع σ می توان نوشت:

$$\delta(P,\Omega)=\delta(\log\sigma) \tag{۵۷}$$

که $\delta:C^2(\Omega_b)\to[0,\infty)$ با $\delta(g)=0$ اگر و فقط اگر g یک تابع ثابت باشد.

یک سامانه تصویر متشابه P_0 روی Ω را در نظر می‌گیریم به‌طوری‌که نامساوی $\delta(P_0,\Omega)\le\delta(P,\Omega)$ برای هر سامانه تصویر متشابه P روی Ω صادق باشد. همچنین فرض می کنیم M مجموعه ای به‌صورت زیر باشد:

$$M=\{g\in C^2(\Omega_b)\left|\Delta g=\Delta(\log\sigma_b) in\Omega_b\right.\} \tag{۵۸}$$

برای پیدا کردن بهترین سامانه تصویر متشابه دو روش وجود دارد:

۱- یافتن یک المان $g_0\in M$ که کمترین انحراف را از یک تابع ثابت داشته باشد:

$$\delta(g_0)\le\delta(g) \quad \forall g\in M \tag{۵۹}$$

۲- تعیین یک تابع تحلیلی $f_0(z)$ از معادله:

$$\log\left|f_0'(z)\right|=g_0(u,v)-\log\sigma_b(u,v) \tag{۶۰}$$

که $z=u+iv\in\Omega_b$.

در این مقاله از روش اول استفاده شده است.

تبصره۱: مقدار واپیچش دارای این خاصیت است که $\delta(g)=0$ اگر و فقط اگر $g=0$.

چبیشوف با استفاده از تابع نوسان $g=\log\sigma$ سامانه های تصویر متشابه را بررسی کرد.

$$\delta(g)=\sup_{\Omega_b} g-\inf_{\Omega_b} g \tag{۶۱}$$

رابطه فوق برای مجموعه زیر صادق است:

$$\{g(u,v) | (u,v) \in \Omega_b\} \subset R \qquad (۶۲)$$

با فرض اینکه p_b متشابه باشد، قضیه زیر را داریم:

قضیه ۱: فرض می کنیم $g_0 \in M$ با $g_0 = 0$ روی $\partial\Omega_b$ آن‌گاه $\delta(g_0) \le \delta(g)$ برای همهٔ $g \in M$ تساوی برقرار است اگر و فقط اگر $g = g_0 + c$ که $c \in R$. دراینجا:

$$M = \{g \in c^2(\Omega_b) | \Delta g = \Delta(\log\sigma_b) in\Omega_b\} \qquad (۶۳)$$

پس تابع $g_0 \in c^2(\Omega_b) \cap c^0(\overline{\Omega}_b)$ جواب مسئله دیریکله زیر است:

$$\begin{cases} \Delta g_0 = \Delta(\log\sigma_b) & in\Omega_b \\ g_0 = 0 & on\partial\Omega_b \end{cases} \qquad (۶۴)$$

فرض می کنیم که این مسئله دارای جواب یکتا باشد. BVP در معادله (۶۴) قابل حل است اگر Ω_b کراندار باشد و نقاط مرزی آن همگی با یک کمان ساده از خارج قابل دسترس باشند. با توجه به اصل بیشینه برای توابع زیرهمساز داریم که $g_0 < 0$ در Ω_b (با توجه به معادله (۵۵)) و سپس مقدار کمینه g_0 در $\overline{\Omega}_b$ در داخل Ω_b اتفاق می افتد. نوسان $\delta(g_0)$ در Ω_b از تابع g_0 را با $\delta_0(\Omega)$ نشان می دهیم و آن را واپیچش متشابه کمینه مربوط به Ω می نامند. ازآنجاکه $\underset{\Omega_b}{Sup}\, g_0 = 0$ پس:

$$\delta_0(\Omega) = -\inf_{\Omega_b} g_0 = \left|\inf_{\Omega_b} g_0\right| \qquad (۶۵)$$

طبق معیار چبیشوف یک نقشه متشابه بهترین است آن‌گاه که σ در طول مرزش ثابت باشد.

تبصره۲: قضیه ۱ را می توان در عبارت‌های توابع همساز بیان کرد. فرض می کنیم $u_0 \in H(\Omega_b)$ با $u_0 = h$ روی $\partial\Omega_b$ باشد، آن‌گاه $\delta(u_0 - h) \le \delta(u - h), \forall u \in H(\Omega_b)$ و تساوی برقرار است اگر و فقط اگر $u = u_0 + c$ که $c \in R$. در این مورد باید مسئله دیریکله زیر را حل کنیم:

$$\begin{cases} \Delta u_0 = 0 & in\Omega_b \\ u_0 = h & on\partial\Omega_b \end{cases} \qquad (۶۶)$$

این روش اصلی است که چبیشوف با تصویر مرکاتور به‌منزلهٔ تصویر پایه و $h = \log r$ آن را عملی ساخت.

تبصره۳: اگر تصویر پایه p_b را غیر متشابه انتخاب کنیم قضیه۱ صادق است با $M = \{g \in c^2(\Omega) | Lg = HK\}$ که $Lg := Div(A\nabla g)$. حالا تابع $g_0 \in c^2(\Omega_b) \cap c^0(\overline{\Omega}_b)$ جواب BVP زیر است:

$$\begin{cases} Div(A\nabla g_0) = HK & in\Omega_b \\ g_0 = 0 & on\partial\Omega_b \end{cases} \qquad (۶۷)$$

فرض می کنیم که این مسئله دارای جواب یکتا است. از قبل داشتیم $g_0 < 0$ در Ω_b و واپیچش متشابه کمینه مربوط به Ω می شود:

$$\delta_0(\Omega) = \left|\inf_{\Omega_b} g_0\right| \qquad (۶۸)$$

۶ روش المان محدود

روش المان محدود یکی از روش های تقریبی برای پیدا کردن جواب معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی است. این روش بر این اساس پایه‌گذاری شده است که هر سامانه‌ای به‌طور فیزیکی از بخش های متفاوتی تشکیل شده است و بنابراین جواب آن در بخش های گوناگون قابل بیان است. به‌علاوه جواب در هر بخشی به‌صورت یک ترکیب خطی از پارامتر های مجهول و توابع معلوم از موقعیت و زمان بیان می شود. به‌طورکلی روش المان محدود دارای سه مشخصه اساسی زیر است[ردی،۲۰۰۴]:

تقسیم کل دامنه به بخش هایی که آنها را المان های محدود می نامیم.

- روی هر المان مشخص، روابط بین متغیرهای ثانویه و اولیه را بسط می دهیم.
- المان ها را جمع می‌کنیم (روابط همهٔ المان ها را ترکیب می کنیم) تا روابط بین متغیرهای ثانویه و اولیه کل سامانه را به‌دست آوریم.

در این تحقیق برای حل مسئله مقدار مرزی (۶۴) با استفاده

از روش المـان محـدود، از نـرم‌افزارهـای MATLAB و FEMLAB استفاده شده است، لـذا در ایـن بخـش، روش المان محدودی که در این نرم‌افزارهـا مـورد اسـتفاده قـرار می‌گیرد، به‌طور مختصر بیان شده است.

معادلـه دیفرانـسیل بیـضی‌وار زیـر را در نظـر مـی‌گیـریم (پاول،۲۰۰۶):

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}+g(x,y)u(x,y)=f(x,y) \tag{۶۹}$$

با در نظـر گـرفتن ناحیـه Ω و مـرز Γ بـرای ایـن معادلـه و شرط مرزی زیر:

$$u(x,y)=b(x,y) \tag{۷۰}$$

حل این معادلـه بـا اسـتفاده از روش المـان محـدود شـامل مراحل زیر است (ونگ و دیگران،۲۰۰۵):

- تقـسیم ناحیـه Ω بـه تعـداد N_s زیـر ناحیه $\{S_1,S_2,....,S_{N_s}\}$ به‌صورت المان های مثلثی.
- مشخص کردن موقعیت تعداد N_n گره و شماره‌گذاری آنها از گره های مرزی به‌صورت $n=1,......,N_b$ و سپس گره‌های داخلی به‌صورت $n=N_b+1,.....,N_n$.
- تعریف توابع درون‌یابی:

$$\begin{gathered}\forall \quad (x,y) \quad \in \quad \Omega \\ \phi_n(x,y)=\{\phi_{n,s},\ for S=1,...,N_s\} \\ \phi_{n,s}(x,y)=p_{n,s}(1)+p_{n,s}(2)x+p_{n,s}(3)y\end{gathered} \tag{۷۱}$$

برای همهٔ زیرناحیه‌های $S=1:N_S$ و برای همهٔ گره هـای $n=1:N_n$، ϕ_n فقط در گره n برابر یک و در سایر گره ها صفر است. بنابراین جواب تقریبی PDE یـک ترکیـب خطی از توابع پایه $\phi_n(x,y)$ به‌صورت زیر است:

$$u(x,y)={}^T\ \varphi(x,y)=\sum_{n=1}^{N_n}c_n\phi_n(x,y)$$

$$=\sum_{n=1}^{N_b}c_n\phi_n+\sum_{n=N_b+1}^{N_n}c_n\phi_n=C_1^T\varphi_1+C_2^T\varphi_2 \tag{۷۲}$$

که:

$$\begin{aligned}\varphi_1&=\begin{bmatrix}\phi_1 & \phi_2 & . & \phi_{N_b}\end{bmatrix}^T\\ C_1&=\begin{bmatrix}c_1 & c_2 & . & c_{N_b}\end{bmatrix}^T\\ \varphi_2&=\begin{bmatrix}\phi_{N_b+1} & \phi_{N_b+2} & . & \phi_n\end{bmatrix}^T\\ C_2&=\begin{bmatrix}c_{N_b+1} & c_{N_b+2} & . & c_n\end{bmatrix}^T\end{aligned} \tag{۷۳}$$

بـرای هـر زیرناحیـه $s=1,.......,N_s$ جـواب را مـی تـوان به‌صورت زیر نوشت:

$$\phi_s(x,y)=\sum_{n=1}^{N_n}c_n\phi_{n,s}(x,y)$$

$$=\sum_{n=1}^{N_n}c_n(p_{n,s}(1)+p_{n,s}(2)x+p_{n,s}(3)y) \tag{۷۴}$$

- قرار دادن مقادیر ضرایب گره ای مرزی در C_1 برای مقادیر مرزی با توجه به شرط مرزی.
- تعیین مقـادیر ضـرایب گـره ای داخلـی در C_2 بـا حـل سامانه معادلات زیر:

$$A_2C_2=d \tag{۷۵}$$

که:

$$\begin{aligned}A_1&=\sum_{s=1}^{N_s}\left\{\left[\frac{\partial}{\partial x}\varphi_{2,s}\right]\left[\frac{\partial}{\partial x}\varphi_{1,s}\right]^T+\left[\frac{\partial}{\partial y}\varphi_{2,s}\right]\left[\frac{\partial}{\partial y}\varphi_{1,s}\right]^T\right.\\ &\left.-g(x_s,y_s)\varphi_{2,s}\varphi_{1,s}^T\quad\right\}\Delta S_s\\ \varphi_{2,s}&=\begin{bmatrix}\phi_{N_b+1,s} & \phi_{N_b+2,s} & . & \phi_{N_n,s}\end{bmatrix}^T\\ \frac{\partial}{\partial x}\varphi_{2,s}&=\begin{bmatrix}p_{N_b+1,s}(2) & \phi_{N_b+2,s}(2) & . & \phi_{N_n,s}(2)\end{bmatrix}^T\\ \frac{\partial}{\partial y}\varphi_{2,s}&=\begin{bmatrix}p_{N_b+1,s}(3) & \phi_{N_b+2,s}(3) & . & \phi_{N_n,s}(3)\end{bmatrix}^T\\ d&=-A_1C_1-\sum_{s=1}^{N_s}f(x_s,y_s)\varphi_{2,s}\Delta S\end{aligned} \tag{۷۶}$$

در این روابط (x_s,y_s) مختصات مرکز گرانی زیـر ناحیـه Sام (S_s) است.

روش المان محدود بر پایه اصل تغییر است. طبق این اصـل یک جواب معادله (۶۹) با کمینه کردن تابع زیـر بـه‌دسـت می آید (ونگ و دیگران، ۲۰۰۵):

$$I = \iint_R \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x}u(x,y)\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}u(x,y)\right)^2 - g(x,y)u^2(x,y) + 2f(x,y)u(x,y) \right\} dxdy$$

(۷۷)

که با در نظر گرفتن $u(x,y) = C^T\varphi(x,y)$ می‌توان آنرا به‌صورت زیر نوشت:

$$I = \iint_R \left\{ C^T \frac{\partial}{\partial x}\varphi \frac{\partial}{\partial x}\varphi^T C + C^T \frac{\partial}{\partial y}\varphi \frac{\partial}{\partial y}\varphi^T C - g(x,y)C^T\varphi\varphi^T C + 2f(x,y)C^T\varphi \right\} dxdy$$

(۷۸)

شرط برای اینکه این تابع نسبت به C کمینه شود به‌صورت زیر است:

$$\frac{d}{dC_2}I = \iint_R \left\{ \frac{\partial}{\partial x}\varphi_2 \frac{\partial}{\partial x}\varphi^T C + \frac{\partial}{\partial y}\varphi_2 \frac{\partial}{\partial y}\varphi^T C - g(x,y)\varphi_2\varphi^T C + f(x,y)\varphi_2 \right\} dxdy = 0$$
$$\approx A_1C_1 + A_2C_2 + \sum_{s=1}^{N_s} f(x_s,y_s)\varphi_{2,s}\Delta S_s = 0$$

(۷۹)

۷ روش فوریه

مسئله مقدار مرزی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} \Delta g_0 = Sech^2 q & in\Omega_m \\ g_0 = 0 & on\partial\Omega_m \end{cases} \quad (۸۰)$$

Hill، (1908) با استفاره از روش فوریه مسئله مقدار مرزی فوق را حل کرد. با توجه به روش حل داده شده برای حل مسئله مقدار مرزی فوق فرض می‌کنیم که: $f = \log Sechq - (a+bq)$. ضرایب a و bطوری انتخاب می‌شوند که $f(q_s) = f(q_n) = 0$ باشد، آن‌گاه (هیل، ۱۹۰۸):

$$g_0 = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \left[\frac{\cosh(nc\lambda)}{\cosh(nc\lambda_0)} - 1\right] \sin[nc(q-q_s)] \quad (۸۱)$$

که در این رابطه $c = \pi/(q_n - q_s)$ و f_n ضرایب سینوسی فوریه تابع f هستند:

$$f_n = \frac{2}{q_n - q_s}\int_{q_s}^{q_n} f(q)\sin[nc(q-q_s)]dq \quad (۸۲)$$

برای یافتن جواب به این روش، معادله (۸۱) را با سری‌های فوریه جزئی به شکل زیر تقریب می‌زنیم:

$$g_{0,N} = \sum_{n=1}^{N} f_n \left[\frac{\cosh(nc\lambda)}{\cosh(nc\lambda_0)} - 1\right] \sin[nc(q-q_s)] \quad (۸۳)$$

بعد یک گرید برای ناحیه جغرافیایی ایران به‌صورت (λ_j,φ_i) که $j = 1,.....,26$ و $i = 1,.....,38$ تعریف می‌کنیم که $\lambda_j = \frac{(j-1)}{2}$ و $\varphi_i = \varphi_s + \frac{(i-1)}{2}$ و با $N = 30$، $g_{0,N}$ را در نقاط (λ_j,q_i) که $q_i = q(\varphi_i)$ ارزیابی می‌کنیم. مشاهده می‌شود که $g_{0,N}(-\lambda_j,q_i) = g_{0,N}(\lambda_j,q_i)$.

همان‌طور که ذکر شد، محاسبه واپیچش متشابه کمینه نیازمند حل یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی بود. در این مقاله از جعبه ابزار PDE نرم‌افزار MATLAB برای حل معادله دیفرانسیل با مرز مستطیل‌شکل استفاده و سپس برای حل معادله دیفرانسیل برای مرزهای حقیقی ایران از نرم‌افزار FEMLAB استفاده شده است. لازم به ذکر است که در هر دو نرم‌افزار با استفاده از روش المان محدود به حل معادلات دیفرانسیل پرداخته می‌شود (ردی،۲۰۰۴، ونگ و دیگران،۲۰۰۵ و مث ورک،۲۰۰۲).

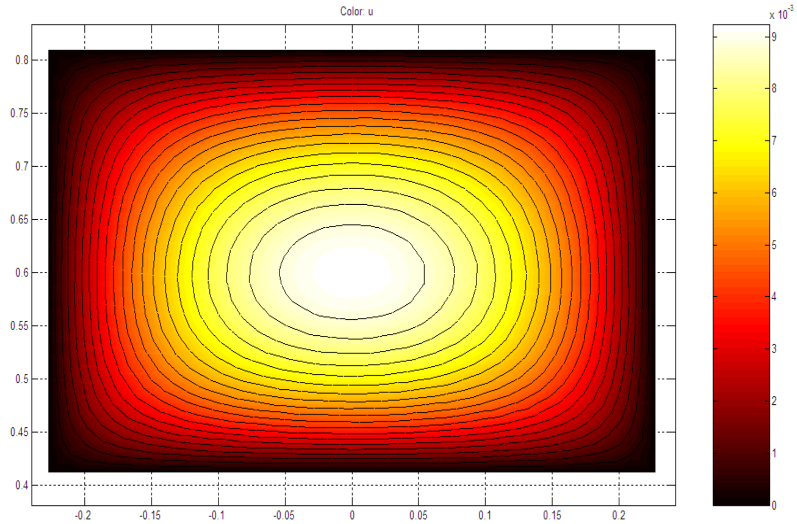
۸ نتایج عددی

در این بخش واپیچش متشابه کمینه برای کشور ایران با فرض کروی بودن زمین تعیین شده است. اگر Ω ناحیه‌ای روی سطح کره بین دو مدار φ_s و φ_n و دو نصف‌النهار λ_e و λ_w باشد و اگر تصویر پایه تصویر مرکاتور باشد و اگر طول جغرافیایی را از نصف النهار مرکزی حساب کنیم، نقشه اولیه Ω به‌صورت $\Omega_m = [-\lambda_0,\lambda_0]\times[q_s,q_n]$ خواهد بود. که $\pm\lambda_0$ مقادیر حدی طول جغرافیایی و q_s

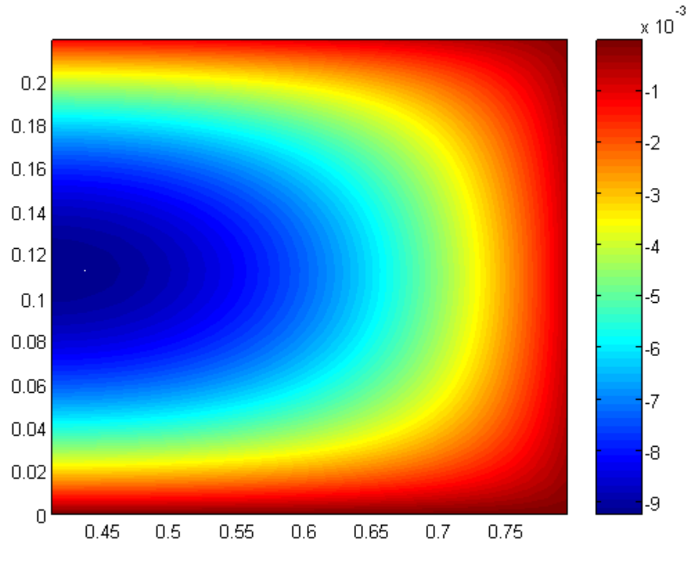
و q_n حدود بالا و پایین عرض طول‌پای q هستند. برای ناحیه جغرافیایی ایران $\lambda_0 = 13^\circ$ و $\varphi_s = 23^\circ$ و $\varphi_n = 42^\circ$ است، در نتیجه $q_s = 0.41239578$ و $q_n = 0.80871025$. برای محاسبه واپیچش متشابه کمینه مربوط به ناحیه ایران با مستطیل شکل بودن مرز باید مسئله مقدار مرزی زیر را حل کنیم:

$$\begin{cases} \Delta g_0 = Sech^2 q & in\Omega_m \\ g_0 = 0 & on\partial\Omega_m \end{cases} \tag{۸۴}$$

که این مسئله مقدار مرزی در اینجا با توجه به روش المان محدود با استفاده از نرم‌افزار *MATLAB* برای ناحیه جغرافیایی ایران حل شده است و گراف آن مطابق شکل ۱ است. با توجه به شکل ۱ مشخص می‌شود که مقدار کمینه g_0 برابر است با $\delta_0(\Omega) = -\inf_{\Omega_m} g_0 = 9.2325\times10^{-3}$. همچنین با توجه به روش فوریه برای حل مسئله مقدار مرزی ذکر شده برای ناحیه جغرافیایی ایران با مرز مربع‌شکل مقدار کمینه برابر است با $g_{0,30} = 9.2433\times10^{-3}$ و نمودار مربوط به آن در شکل ۲ ملاحظه می شود.



شکل ۱. لگاریتم تابع مقیاس بی‌نهایت کوچک σ مربوط به بهترین تصویر چبیشوف برای ناحیه جغرافیایی $[23^\circ, 42^\circ]\times[-13^\circ, 13^\circ]$.



شکل ۲. لگاریتم تابع مقیاس بی نهایت کوچک σ مربوط به بهترین تصویر چبیشوف برای ناحیه جغرافیایی $[23^\circ, 42^\circ]\times[0, 13^\circ]$ با استفاده از روش فوریه.

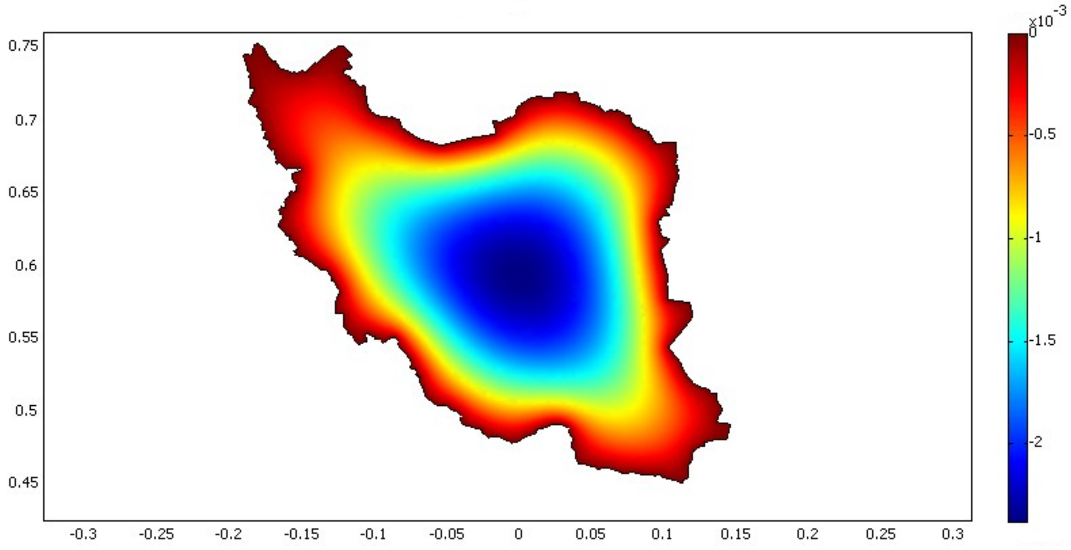
در شکل ۳ مسئله مقدار مرزی برای مرزهای واقعی ایران حل شده است و در این شکل لگاریتم تابع مقیاس مربوط به بهترین تصویر چبیشوف برای مرزهای واقعی ایران را ملاحظه می‌کنیم. لازم به ذکر است که در اینجا از طول و عرض ۸۵۶۲ نقطه برای مرز ایران استفاده شده است. در جدول ۱ مقدار کمینه و مختصاتی که کمینه در آن رخ داده ذکر شده است. همچنین در جدول ۲ ضرایب چندجمله‌ای های همساز مربوط به بهترین تصاویر چبیشوف تا مرتبه ۶ و کمینه مربعات لگاریتم مقیاس دیده می شود. لازم به‌ذکر است که مقدار واپیچش متشابه کمینه با استفاده از روش چندجمله ای همساز برابر 2.4619×10^{-3} به‌دست آمده است.

جدول ۱. واپیچش متشابه کمینه و مختصات جغرافیایی آن.

$\delta_0(\Omega)$	φ_m	q_m	λ_m
0.2381×10^{-2}	$32^\circ\ 23'\ 0.84''$	0.594312	$55^\circ\ 06'\ 52.53''$

جدول ۲. ضرایب چند جمله ای های همساز مربوط به تصاویر چبیشوف برای ایران.

$\sum(\ln\sigma)^2$	a_i	مرتبه
0.04961	+0.14797 −0.53611	1
0.03135	+0.09351 −0.35272 −0.15392	2
0.02940	+0.14193 −0.58893 +0.23450 −0.21571	3
0.0085497	+0.51621 −3.14709 +6.78901 −7.66631 +3.17364	4
0.0084836	+0.60775 −3.91193 +9.34564 −11.93540 +6.73333 −1.18620	5
0.0084814	+0.54284 −3.26120 +6.61340 −5.79727 −1.03661 +4.06322 −1.47814	6



شکل۳. لگاریتم تابع مقیاس بی‌نهایت کوچک σ مربوط به بهترین تصویر چبیشوف برای ناحیه جغرافیایی ایران.

۹ نتیجه‌گیری

واپیچش متشابه کمینه، $\delta_0(\Omega)$، مربوط به ناحیه جغرافیایی Ω از سطح کره برابر مقدار مطلق کمینه تابع g_0 مربوط به حل یک مسئله مقدار مرزی دیریکله است.

با توجه به نتایج آورده شده در بخش نتایج عددی ملاحظه می‌شود که واپیچش متشابه کمینه برای کشور ایران با فرض مرز مربع شکل با استفاده از روش المان محدود برابر 9.2325×10^{-3} و با استفاده از روش فوریه برابر 9.2433×10^{-3} خواهد بود. همچنین با در نظر گرفتن مرزهای واقعی ایران، مقدار این کمیت با استفاده از روش المان محدود برابر 2.3813×10^{-3} و با استفاده از روش چندجمله‌ای‌های همساز برابر 2.4619×10^{-3} حاصل شده است. نتایج نشان می‌دهند که مقادیر عددی حاصل از سه روش با هم برابر هستند. لذا این نتیجه حاصل می‌شود که برای تعیین بهترین تصویر چبیشوف برای یک ناحیه جغرافیایی استفاده از هر کدام از این سه روش عرضه شده، منجر به جواب یکسان خواهد شد.

منابع

Bermejo, M., 2004, Analysis of the transverse mercator projection, PhD thesis (in Spanish), Faculty of Mathematics, Complutense University, Madrid.

Bermejo, M. and Otero, J., 2005, Minimum Conformal Mapping Distortion According to Chebyshev's Principle, A Case Study Over Peninsular, J. Geod., **79**,124-134.

Frankich, K., 1982, Optimization of Geographic Map Projections for Canadian Territory, PhD thesis, Calgary University, Canada.

Gilberg, D. and Trudinger, N. S., 1977, Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Springer, Berlin Heidelberg New York.

Goetz, A., 1970, Introduction to Differential Geometry, Addison Wesley Publishing Company, New York.

Hill, G. W., 1908, Application of Tchebyshev's Principle in the Projection of Maps, Ann. Math., **10**(2), 23-36.

Mathworks Inc., 2002, Partial Differential Equation Toolbox User's Guide, The Mathworks Inc Natick.

Milnor, J., 1969, A Problem in Cartography, Amer Math Monthly, **76**, 1101-1112.

Pavel, S., 2006, Partial Differential Equations and the Finite Element Method, Wiley Interscience, University of Texas, USA.

Reddy, J. N., 2004, An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis, Department of Mechanical Engineering, Texas AM University, College Station, TX 77843-3123, USA.

Snyder, J. P., 1987, Map projections– a Working Manual, U.S. Geological Survey Professional Paper 1395, United States Government Printing Office, Washington.

Wong, Y. Y., Wenwn, C., Tea- Sang, C. and John, M., 2005, Applied Numerical Methods Using MATLAB, Wiley Interscience, USA.