

متراکم‌سازی داده‌های موقعیتی سامانه ماهواره GRACE با کمک تلفیق پارامترهای

موقعیت، سرعت و شتاب از راه درونیابی ارمیت

محمدعلی شریفی^{۱*}، زهره عرفانی جزی^۲ و علیرضا امیری سیمکوئی^۳

^۱استادیار، گروه مهندسی نقشه‌برداری، پردیس دانشکده‌های فنی، دانشگاه تهران، ایران
^۲دانشجوی کارشناسی ارشد ژئودزی، گروه مهندسی نقشه‌برداری، پردیس دانشکده‌های فنی، دانشگاه تهران، ایران
^۳استادیار، گروه مهندسی نقشه‌برداری، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه اصفهان، ایران

(دریافت: ۸۶/۱۱/۲۱، پذیرش نهایی: ۸۷/۴/۳)

چکیده

یکی از کاربردهای مهم و ارزشمند علم ژئودزی فضایی بررسی میدان گرانی زمین و تغییرات آن از راه تجزیه و تحلیل مدار ماهواره‌ها به صورت عام و ماهواره‌های گرانی‌سنجی به صورت خاص است. ماهواره‌های گرانی‌سنجی اغلب در مدارهای پایین قرار می‌گیرند تا تأثیرات میدان گرانی را بیشتر درک کنند و لذا بررسی و مدل‌سازی میدان گرانی زمین از روی اطلاعات مداری آنها با دقت بیشتری صورت گیرد. در این راستا به بررسی داده‌های موقعیتی ماهواره GRACE پرداخته و سعی در همسان‌سازی تراکم داده‌های موقعیتی به دست آمده از راه گیرنده‌های onboard سامانه موقعیت‌یابی جهانی، GPS، با داده‌های سرعت و شتاب نسبی به دست آمده از راه سامانه بین ماهواره‌ای شده است. این کار به روش درونیابی چند جمله‌ای ارمیت (Hermite) براساس روش کمترین مربعات صورت پذیرفت. در این روش درونیابی از یک تابع چندجمله‌ای و مشتقات آن برای مدل‌سازی مشاهدات استفاده می‌شود و لذا مسئله در ساده‌ترین شکل ممکن، بدون تکرار و مقدار اولیه به بهترین نحو به جواب مناسب می‌رسد. با متراکم کردن این داده‌ها، امکان بهبود مدل‌های میدان گرانی جهانی که از اطلاعات مدار GRACE حاصل می‌شود فراهم خواهد شد.

واژه‌های کلیدی: میدان گرانی، GPS، GRACE، درونیابی، متراکم‌سازی، کمترین مربعات

Least-square estimation of GRACE intersatellite and its time derivatives

Sharifi, M. A¹., Erfani Jazi, Z². and Amiri-Simkooei, A. R³.

¹Assistant Professor, Department of Surveying and Geomatics Engineering, Faculty of Engineering, University of Tehran, Iran

²M.Sc. student of Geodesy, Department of Surveying and Geomatics Engineering, Faculty of Engineering, University of Tehran, Iran

³Assistant Professor, Department of Surveying and Geomatics Engineering, Faculty of Engineering, University of Esfahan, Iran

(Received: 10 Feb 2008, Accepted: 23 Jun 2008)

Abstract

One of the most valuable and important application of artificial satellites in geodetic sciences is recovery of the earth's gravity field. Orbits of satellites either gravimetric or nongravimetric are analyzed to improve the earth's gravity field. Gravimetric satellites are launched at low altitudes to observe gravity field in more detail. GRACE twin satellites

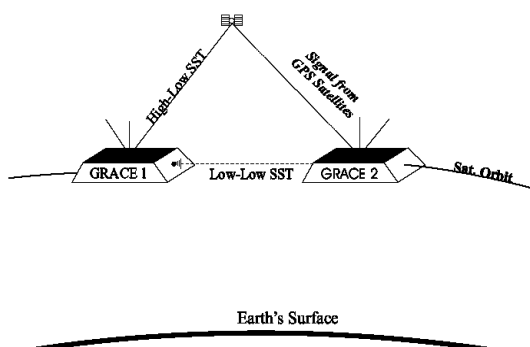
are the second spacecraft of gravity field dedicated missions, realizing the high-low (HL) and low-low (LL) satellite-to satellite tracking (SST) concepts. The onboard GPS receivers collect the HL observations while the k-band ranging system (KBR) realizes the LL configurations. Nevertheless, two data sets have different sampling rates. The positions are recorded every 60 seconds whereas the KBR system observes the range changes every 5 seconds. In this article, we propose a new idea for combining these two data sets. We employ Hermite polynomial approximation in Least-squares mode in order to provide a model to interpolate the position by KBR sampling rate. Hermite interpolation is a method closely related to the Newton method of interpolation in numerical analysis, which allows us to consider given derivatives at data points, as well as the data points themselves. We apply a linear Least-squares method of Hermite approximation which fits a polynomial and its derivatives to observations. First, the method was tested on simulated data and the suitable degree of polynomial selected. The algorithm was applied on real data and the suitable polynomial was found. The proposed algorithm leads to finding the best degree of polynomial that estimates range and its derivatives with reasonable accuracy.

Key words: GRACE, Interpolation, Range, Range rate, Range acceleration, Data fusion

۱ مقدمه

رساندند (چن و همکاران، ۲۰۰۷).

این سامانه ماهواره‌ای اولین نسل از ماهواره‌های خوشه‌ای است که در آن از دو ماهواره مشابه در یک مدار با ارتفاع ۴۵۰ کیلومتری زمین استفاده شده است (شکل ۱). اطلاعات مدار این ماهواره از دو کانال متفاوت حاصل می‌شود. موقعیت دو ماهواره از طریق سامانه تعیین موقعیت یابی جهانی GPS با استفاده از گیرنده‌هایی که روی جفت ماهواره قرار دارند ثبت می‌شود که سرعت ثبت اطلاعات موقعیتی جفت ماهواره در آن ۶۰ ثانیه است.



شکل ۱. سامانه ماهواره‌ای GRACE.

مدل‌سازی فیزیک زمین و تغییرات زمانی آن دارای نقش ویژه‌ای در شناخت پدیده‌های طبیعی زمینی است. میدان گرانی و تغییرات زمانی آن نیز دارای یک چنین ویژگی است، چرا که مدل‌سازی تغییرات دینامیکی زمین با استفاده از اطلاعات مناسب گرانی می‌تواند اطلاعات منحصر به فردی در مورد تغییرات پوسته و ساختار داخلی زمین در اختیار محققان علوم زمین قرار دهد. تا چندین سال پیش به علت هزینه‌بر بودن جمع‌آوری اطلاعات گرانی‌سنجی عمدتاً این اطلاعات برای تعیین مدل استاتیکی گرانی زمین جمع‌آوری می‌شد. در سال ۲۰۰۲ پرتاب ماهواره مشترک امریکایی-آلمانی GRACE این امکان را فراهم ساخت که بتوان به صورت ماهانه تغییرات گرانی زمین را در مقیاس‌های بزرگ آشکار کرد (تاپلی و همکاران، ۲۰۰۴). این تغییرات بیشتر منشأ هیدرولوژیکی دارند. با این حال در مورد زلزله بزرگ سوماترا در ۲۶ دسامبر ۲۰۰۴، ماهواره‌های GRACE قابلیت فوق‌العاده خود را با ثبت ناهنجاری‌های اتفاق افتاده در میدان گرانی منطقه اندونزی به اثبات

۲ معرفی درونیابی چندجمله‌ای ارمیت

درونیابی از روش‌های متداول در متراکم‌سازی داده‌های تئک در مسائل متفاوت است که در آن تابعی به داده‌های موجود برازش می‌یابد و به این روش در نقاط میانی که در آنها مشاهده‌ای صورت نگرفته است، از روی تابع برازش‌یافته می‌توان داده‌های مورد نیاز را محاسبه کرد. یکی از روش‌های درونیابی یا میان‌یابی، روش درونیابی چندجمله‌ای ارمیت است. در این روش از توابع چندجمله‌ای برای مدل‌سازی داده‌ها استفاده می‌شود. علاوه بر خود تابع، مشتقات آن نیز در حل مسئله شرکت می‌کنند و لذا از بین روش‌های درونیابی ساده، این روش به خاطر در برداشتن مشتقات تابع به صورت مشاهده در مدل‌سازی می‌تواند بهترین برازش را به داده‌ها داشته باشد.

هرگاه $n+1$ داده در نقاط متفاوت (x_i, y_i) موجود باشند که هیچ دو x_i یکسان نباشند، می‌توان چندجمله‌ای $P(x)$ را به صورت زیر به این داده‌ها برازش داد.

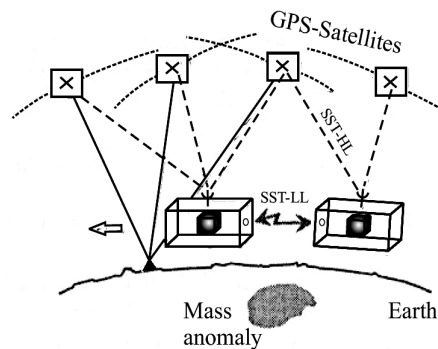
$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

که می‌توان این تابع را به صورت $P(x_i) = y_i$ برای $i \in \{0, 1, \dots, n+1\}$ بیان کرد. هرگاه مشتقات این داده‌ها نیز در نقاط مربوط موجود باشد، آن‌گاه مشتق این چندجمله‌ای نیز به این داده‌ها برازش داده می‌شود.

$$\begin{aligned} \dot{P}(x) &= n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + 2 a_2 x + a_1 \\ \ddot{P}(x) &= n(n-1) a_n x^{n-2} + (n-1)(n-2) a_{n-1} x^{n-3} + \dots + 6 a_3 x + 2 a_2 \\ &\vdots \\ \Rightarrow \dot{P}(x_i) &= \dot{y}_i \\ \ddot{P}(x_i) &= \ddot{y}_i \\ &\vdots \end{aligned}$$

به این ترتیب به منظور به دست آوردن چندجمله‌ای

به علاوه سرعت و شتاب نسبی دو ماهواره با سامانه‌ای داخلی در فواصل زمانی ۵ ثانیه ثبت می‌شود (شکل ۲). لذا هنگام پردازش هم‌زمان این اطلاعات بخش عظیمی از داده‌های مداری سرعت و شتاب برای هماهنگی با داده‌های موقعیتی کنار گذاشته می‌شود. از این‌رو هدف از این مقاله متراکم کردن داده‌های موقعیتی دو ماهواره از راه اطلاعات مداری سرعت و شتاب است. برای این منظور، در این مقاله از روش درونیابی چندجمله‌ای ارمیت (Hermite) استفاده شده است. علت استفاده از این روش استفاده از مشتقات تابع در حل مسئله است. استفاده از مشتقات تابع در درونیابی، باعث بالا رفتن صحت و دقت جواب به دست آمده می‌شود. به منظور انتخاب چندجمله‌ای مناسب می‌توان چندجمله‌ای‌های گوناگون را امتحان و از میان آنها چندجمله‌ای را که از نظر آماری بهترین برازش را به مقادیر درونیابی شده دارد انتخاب کرد. این مسئله درونیابی با داده‌های شبیه‌سازی شده GRACE و داده‌های واقعی مورد بررسی قرار گرفت که نتایج آن در این مقاله ارائه شده است. نتایج نشان می‌دهد که روش درونیابی ارمیت مسئله متراکم‌سازی را با دقت زیادی به جواب می‌رساند. بنابراین با این روش می‌توان امیدوار بود که، اطلاعات مداری GRACE با تراکم بیشتر و دقت بهتر، مدل‌های جهانی و محلی میدان گرانی زمین را بهبود دهد.



شکل ۲. سامانه‌های موقعیت ماهواره GRACE.

$$I_1 = \begin{bmatrix} \rho(t_0) \\ \rho(t_1) \\ \rho(t_2) \\ \vdots \\ \rho(t_{I+1}) \end{bmatrix}_{(I+1) \times 1} = \begin{bmatrix} \rho_0 \\ \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_{I+1} \end{bmatrix}_{(I+1) \times 1}$$

$$I_2 = \begin{bmatrix} \dot{\rho}(t_0) \\ \vdots \\ \dot{\rho}(t_1) \\ \vdots \\ \dot{\rho}(t_2) \\ \vdots \\ \dot{\rho}(t_{m \times I+1}) \end{bmatrix}_{(m \times I+1) \times 1} = \begin{bmatrix} \dot{\rho}_0 \\ \vdots \\ \dot{\rho}_1 \\ \vdots \\ \dot{\rho}_2 \\ \vdots \\ \dot{\rho}_{m \times I+1} \end{bmatrix}_{(m \times I+1) \times 1}$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} \ddot{\rho}(t_0) \\ \vdots \\ \ddot{\rho}(t_1) \\ \vdots \\ \ddot{\rho}(t_2) \\ \vdots \\ \ddot{\rho}(t_{m \times I+1}) \end{bmatrix}_{(m \times I+1) \times 1} = \begin{bmatrix} \ddot{\rho}_0 \\ \vdots \\ \ddot{\rho}_1 \\ \vdots \\ \ddot{\rho}_2 \\ \vdots \\ \ddot{\rho}_{m \times I+1} \end{bmatrix}_{(m \times I+1) \times 1}$$

شکل غیر ماتریسی این روابط به صورت زیر است:

$$\rho(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n = \sum_{i=0}^n h_i P_i(t)$$

$$\dot{\rho}(t) = a_1 + 2a_2 t + \dots + n a_n t^{n-1} = \sum_{i=1}^n h_i \dot{P}_i(t)$$

$$\ddot{\rho}(t) = 2a_2 + 6a_3 t + \dots + n(n-1)a_n t^{n-2} = \sum_{i=2}^n h_i \ddot{P}_i(t)$$

$$t_{\text{lower limit}} \leq t \leq t_{\text{upper limit}}$$

که در این روابط:

$$P_0(t) = 1 \quad P_1(t) = t \quad P_2(t) = t^2 \quad P_3(t) = t^3$$

$$\dot{P}_0(t) = 0 \quad \dot{P}_1(t) = 1 \quad \dot{P}_2(t) = 2t \quad \dot{P}_3(t) = 3t^2$$

$$\ddot{P}_0(t) = 0 \quad \ddot{P}_1(t) = 0 \quad \ddot{P}_2(t) = 2 \quad \ddot{P}_3(t) = 6t$$

$$h_0 = a_0 \quad h_1 = a_1 \quad h_2 = a_2 \quad h_3 = a_3 \dots h_i = a_i$$

$h_0, h_1, h_2, \dots, h_i$ ضرایب مجهول اند که در $I+1$ اپک با کمک معادلات مشاهدات در یک دستگاه خطی

مناسب که به داده‌ها برازش یابد، سامانه معادلات به صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{bmatrix} x_i^n & x_i^{n-1} & \dots & x & 1 \\ n x_i^{n-1} & (n-1)x_i^{n-2} & \dots & 1 & 0 \\ n(n-1)x_i^{n-2} & (n-1)(n-2)x_i^{n-3} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n! & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ a_{n-2} \\ \vdots \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_i \\ \dot{y}_i \\ \ddot{y}_i \\ \vdots \\ y_i^{(m)} \end{bmatrix}$$

با به دست آوردن ضرایب چندجمله‌ای می‌توان داده‌های موجود را درون‌یابی کرد. ادغام این مسئله با مسئله کمترین مربعات زمانی که درجه آزادی در مسئله وجود دارد، بسیار ساده صورت می‌گیرد. زیرا مسئله از توابع چندجمله‌ای استفاده می‌کند و نیاز به خطی‌سازی و مقادیر اولیه برای حل مسئله کمترین مربعات نیست. علاوه بر این، حضور مشتقات تابع نیز باعث می‌شود که برازش در نقاط گرهی به نحو مناسبی صورت پذیرد.

۳ مدل‌سازی درون‌یابی چندجمله‌ای ارمیت در

ترکیب با تقریب کمترین مربعات

بر اساس اندازه‌گیری موقعیت نسبی دو ماهواره با GPS، فاصله دو ماهواره $\rho(t)$ و اندازه‌گیری‌های سامانه مایکروویو بین دو ماهواره یعنی تغییرات فاصله و سرعت بین ماهواره‌ای، سه سری مشاهده موقعیت برای سامانه ماهواره‌ای GRACE موجود است که در اینجا با انتخاب یک روش بهینه و تلفیق این مشاهدات می‌توان داده‌ها را تراکم کرد. با استفاده از داده‌های تراکم‌تر و دقیق‌تر مداری، مدار با دقت بیشتری تعیین می‌شود. هر چه مدار دقیق‌تر تعیین شود مدل‌های میدان گرانی حاصله دقیق‌تر خواهند بود.

مدل ریاضی روش درون‌یابی چندجمله‌ای ارمیت که در تلفیق با مدل کمترین مربعات در این مقاله مورد استفاده قرار گرفته به صورت زیر است:

$$C = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} \quad e_y = \begin{bmatrix} e_{1_1} \\ e_{1_2} \\ e_{1_3} \end{bmatrix} = A\hat{x} - y$$

به همین ترتیب فاکتور وارینانس اولیه به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\hat{\sigma}_{02}^2 = \frac{e_{1_1}^T P_1 e_{1_1} + e_{1_2}^T P_2 e_{1_2} + e_{1_3}^T P_3 e_{1_3}}{df}$$

که در آن df درجه آزادی سرشکنی است.

با توجه به اینکه هر اپک زمانی به k فاصله تقسیم شده است با اضافه شدن هر اپک $n+1$ مجهول برای چندجمله‌ای درجه n و $2k+2$ معادله که k معادله آن مربوط به $\dot{\rho}$ و k معادله آن مربوط به $\ddot{\rho}$ و 2 معادله مربوط به ρ است، اضافه می‌شود. بنابراین هر اپک باعث افزایش درجه همان نقاط تغییر اپک است، بین توابع برازش یافته به اطلاعات مربوط به فاصله می‌شود. معادله (ii) موجب ایجاد پیوستگی سرعت در نقاط گرهی می‌شود و معادله (iii) نیز این پیوستگی را در اطلاعات مربوط به شتاب ایجاد می‌کند.

حل کمترین مربعات این معادلات به صورت زیر است. با توجه به خطی بودن معادلات، مسئله بدون تکرار حل می‌شود (سورنسن، ۱۹۷۰).

$$\hat{x} = [N^{-1} - N^{-1}C^T M^{-1} C N^{-1}] u$$

که در آن:

$$N = A^T P A$$

$$M = C N^{-1} C^T$$

$$u = A^T P l$$

درجه آزادی به اندازه $df = 2k + 2 - n$ می‌شود. روابط زیر نیز ماتریس‌های کوواریانس و ماتریس اعداد آزادی (redundancy) را به دست می‌دهد.

به دست می‌آیند.

$$l = l + e_1 = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} H = A x$$

$$H^T = [h_0, h_1, h_2, \dots, h_n]$$

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} H = C x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \frac{\partial \rho_i}{\partial t} \quad C_1 = \frac{\partial (\rho_i - \rho_{i-1})}{\partial t}$$

$$A_2 = \frac{\partial \dot{\rho}_i}{\partial t} \quad C_2 = \frac{\partial (\dot{\rho}_i - \dot{\rho}_{i-1})}{\partial t}$$

$$A_3 = \frac{\partial \ddot{\rho}_i}{\partial t} \quad C_3 = \frac{\partial (\ddot{\rho}_i - \ddot{\rho}_{i-1})}{\partial t}$$

علاوه بر معادلات مشاهدات فوق چند معادله شرط نیز به این دستگاه اضافه می‌شود. معادلات شرط برای ایجاد پیوستگی در نقاط گرهی است و به صورت زیر بیان می‌شود.

$$i) \rho_i(t_n) = \rho_{i+1}(t_0)$$

$$ii) \dot{\rho}_i(t_n) = \dot{\rho}_{i+1}(t_0)$$

$$iii) \ddot{\rho}_i(t_n) = \ddot{\rho}_{i+1}(t_0)$$

این ناشی از طبیعت مسئله است که در اثر آن به هر بازه مشاهداتی یک چندجمله‌ای به مشاهدات آن اپک برازش داده می‌شود لذا این شروط باعث می‌شود که چندجمله‌ای‌های گوناگونی که در کنار هم قرار می‌گیرند، در نقاط مشترک که همان نقاط تغییر اپک است یک مقدار داشته باشند. از این رو معادله (i) باعث ایجاد پیوستگی در نقاط گرهی می‌شود، و ماتریس ساختار و بردار مشاهدات به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} \quad l = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix}$$

$$l_1 = A_1 x \quad l_2 = A_2 x \quad l_3 = A_3 x$$

ماتریس C ماتریس ساختار معادلات شرط است. همچنین e_y بردار باقی مانده‌ها، بعد از سرشکنی است.

$P = 10^6$ ، وزن مشاهدات سرعت $P = 10^{12}$ و وزن مشاهدات شتاب $P = 10^{15}$ در نظر گرفته شد.

از آنجا که از داده‌های شبیه‌سازی شده در حل مسئله استفاده شده است، فایل‌های مشاهداتی حاوی اطلاعات ۵ ثانیه‌ای فاصله بودند که در این مقاله از مشاهدات ۳۰ ثانیه‌ای آنها برای مدل‌سازی مسئله استفاده شد. لذا فاصله واقعی با فاصله درون‌یابی شده در فواصل ۵ ثانیه مقایسه شد. نتایج آماری باقی‌مانده‌های به‌دست آمده در ادامه به صورت نمودار و جدول نمایش داده شده است. از بین نتایج آماری شامل انحراف معیار، مینیموم، ماکزیموم و میانگین، کمترین انحراف معیار برای باقی‌مانده‌های به دست آمده می‌تواند برای انتخاب بهترین چندجمله‌ای، معیار مناسب‌تری باشد. انحراف معیار نمایش‌دهنده میزان پراکندگی داده‌های مورد بررسی است. از آنجا که داده‌های مورد بررسی باقی‌مانده‌ها هستند هرچه که پراکندگی کمتری داشته باشند، نشان‌دهنده این مطلب است که برازش تابع چندجمله‌ای به مشاهدات بهتر بوده است. در شکل ۳ و جدول ۱ دیده می‌شود که کمترین انحراف معیار مربوط به چندجمله‌ای درجه ۶ است. بنابراین چندجمله‌ای درجه ۶ برای درون‌یابی ارمیت به منظور مدل کردن مسئله و عملی ساختن بررسی‌های دقیق‌تر انتخاب شد و مورد استفاده قرار گرفت.

$$\sum_{\ddot{x}} = \hat{\sigma}_{02}^2 [N^{-1} - N^{-1}C^T M^{-1}CN^{-1}]$$

$$\sum_{\ddot{y}} = \hat{\sigma}_{02}^2 A [N^{-1} - N^{-1}C^T M^{-1}CN^{-1}] A^T$$

$$\sum_{e_i, e_j} = \sum_{\ddot{y}} - \sum_{\ddot{x}}$$

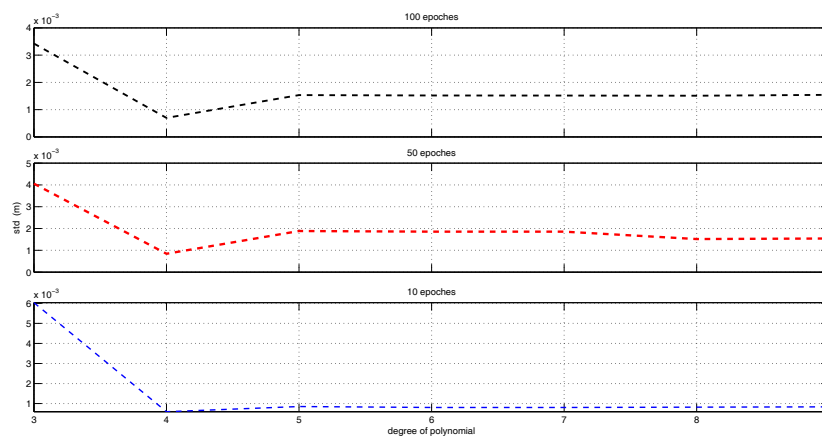
$\sum_{\ddot{x}}$ ماتریس کوواریانس مجهولات سرشکن شده
 $\sum_{\ddot{y}}$ ماتریس کوواریانس مشاهدات بعد از سرشکنی و
 \sum_{e_i, e_j} ماتریس کوواریانس باقی‌مانده‌ها است.

$$R = I - \sum_{\ddot{y}} P$$

R ماتریس اعداد آزادی نامیده می‌شود.

۴ بررسی انحراف معیار چندجمله‌ای‌های گوناگون در مسئله درون‌یابی ارمیت

ابتدا مسئله با سه درجه آزادی متفاوت برای ۶ چندجمله‌ای بررسی شد. با در نظر گرفتن ۱۰، ۵۰ و ۱۰۰ آپک جداگانه از داده‌های GRACE برای آپک‌های ۳۰ ثانیه‌ای با زیربازه‌های ۵ ثانیه مسئله حل شد. در این مسئله تعدادی چندجمله‌ای از درجات ۳ تا ۹ مورد بررسی قرار گرفتند. ماتریس‌های وزن در نظر گرفته شده برای هر سه گروه قطری در نظر گرفته شد به نحوی که وزن همه مشاهدات از یک جنس برابر باشد. لذا وزن مشاهدات فاصله



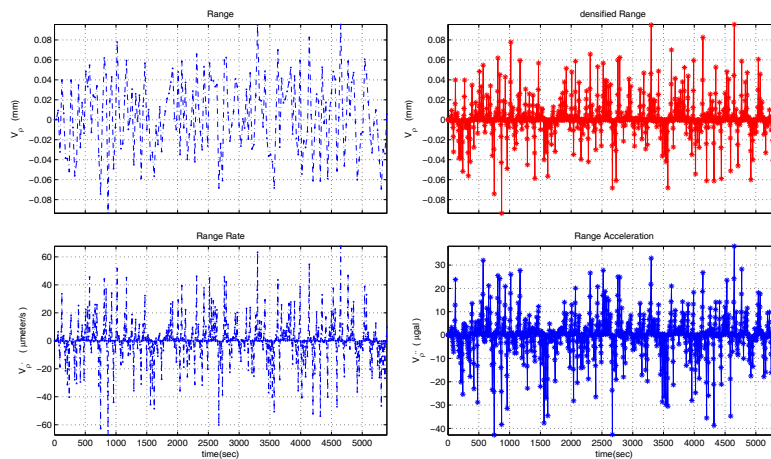
شکل ۳. انحراف معیار باقی‌مانده‌های فاصله برای سه آپک مختلف در ۶ چندجمله‌ای.

جدول ۱. انحراف معیار به متر در چندجمله‌ای‌های گوناگون برای سه درجه آزادی متفاوت.

$\frac{n}{df}$	3	4	5	6	7	8	9
10	1.34×10^{-5}	1.03×10^{-6}	4.30×10^{-8}	3.72×10^{-8}	5.6×10^{-8}	2.19×10^{-4}	0.043
50	4.85×10^{-5}	2.91×10^{-6}	6.62×10^{-8}	7.73×10^{-8}	5.05×10^{-8}	1.17×10^{-4}	0.069
100	3.83×10^{-5}	2.21×10^{-6}	7.75×10^{-8}	6.17×10^{-8}	6.39×10^{-8}	3.05×10^{-4}	0.091

باقی مانده‌های به دست آمده برای فاصله در نقاط گرهی، فاصله درونیابی شده در فواصل ۵ ثانیه‌ای، سرعت و شتاب ترسیم شده است (شکل ۴).
در جدول‌های ۲، ۳، ۴ و ۵ نتایج آماری نمودارهای شکل ۴ آمده است.

۵ بررسی دقت چندجمله‌ای درجه ۶ در درونیابی ارمیت روی داده‌های GRACE شامل ۱۸۰ اپک از داده‌های شبیه‌سازی شده GRACE شامل بردار موقعیت، سرعت و شتاب دو ماهواره را در نظر می‌گیریم و مسئله را برای موقعیت، سرعت و شتاب دو ماهواره با چندجمله‌ای درجه ۶ حل می‌کنیم.



شکل ۴. دقت فاصله، سرعت و شتاب برآوردشده برای داده‌های شبیه‌سازی شده.

جدول ۲. نتایج خطای تصادفی برای درونیابی چندجمله‌ای ارمیت درجه ۶.

نوع آماره	انحراف معیار	ماکزیموم	میانگین	مینیموم
باقی مانده فاصله (متر)	$1.745e-5$	$9.552e-5$	$1.351e-6$	$-9.361e-5$
باقی مانده سرعت (متر بر ثانیه)	$1.3310e-5$	$6.764e-5$	$5.439e-7$	$-6.731e-5$
باقی مانده شتاب (متر بر مجذور ثانیه)	$8.746e-6$	$3.809e-5$	$-2.722e-7$	$-4.283e-5$

جدول ۳. نتایج خطای تصادفی برای فاصله برآوردشده (میلی متر).

درجه چندجمله‌ای	انحراف معیار	ماکزیموم	میانگین	مینیموم
3	11.51	15.85	-7.508	-21.14e
4	3.297e-1	5.242e-1	7.145e-2	-5.256e-1
5	2.420e-1	2.871e-1	-8.324e-2	-4.833e-1
6	2.432e-2	2.747e-2	-9.716e-3	-5.186e-2
7	4.893e-3	1.071e-2	1.607e-3	-9.139e-3
8	3.714e-1	1.193	2.324e-1	-8.702e-3
9	120	410	5.177e-5	-7.477e-2

جدول ۴. نتایج آماری خطای تصادفی برای سرعت برآوردشده (میکرومتر بر ثانیه).

درجه چندجمله‌ای	انحراف معیار	ماکزیموم	میانگین	مینیموم
3	1.9272	3.0132	6.6820	-3.3885
4	9.3814e-2	17.094	-1.3215	-14.582
5	2.7368e-2	4.1300e-2	-2.0912e-1	-3.4129e-2
6	2.2867e-3	3.0256e-3	-3.8895e-3	-6.6206e-3
7	8.6332e-3	5.0763e-2	4.3817e-4	-6.3257e-2
8	7.0884e-2	2.3658e-1	4.6832e-2	1.2118e-5
9	17.775	58.747	8.7477	-1.1420e-3

جدول ۵. نتایج آماری خطای تصادفی برای شتاب برآوردشده (میلی گال).

درجه چندجمله‌ای	انحراف معیار	ماکزیموم	میانگین	مینیموم
3	3.4024e-1	4.2367e-1	3.5793e-4	-4.9980e-1
4	6.2257e-2	1.3981e-1	6.6932e-3	-1.2884e-1
5	1.5492e-3	2.0283e-3	-3.7149e-4	-3.1699e-3
6	4.9313e-4	8.5062e-4	-4.4609e-5	-9.0453e-4
7	1.2203e-3	7.4152e-3	7.7114e-5	-7.8342e-3
8	1.2224e-2	4.2599e-2	8.3760e-3	-5.2197e-2
9	1.9449	5.7937	1.1446	-2.9188e-4

گرفته شده برای مشاهدات رابطه عکس دارد. هر چه اعداد آزادی به یک نزدیک‌تر باشند نتیجه می‌گیریم که دقتی که برای این مشاهده در نظر گرفته شده بدینانه بوده است. به علاوه با حذف این مشاهده نیز باز می‌توان به راحتی به جواب مناسب رسید. هر چه این عدد به صفر نزدیک‌تر باشد نشان‌دهنده آن است که دقت فرض شده برای این مشاهده خوش‌بینانه بوده و حضور این مشاهده در حل مسئله ضروری است و حذف آن از مسئله باعث ایجاد اختلال در مسئله می‌شود.

در سرشکنی معیارهای اعتمادپذیری قابلیت دستگاه را در کشف باقی‌مانده‌ها یا خطاهای باقی‌مانده روی مشاهدات و یا تأثیر خطاهای کشف نشده روی پارامترهای مجهول را نشان می‌دهد. ماتریس اعداد آزادی (redundancy) نقش مهمی را در معیارهای اعتمادپذیری ایفا می‌کند. جمع مقادیر روی قطر اصلی این ماتریس درجه آزادی مسئله را به دست می‌دهد از این رو اعداد آزادی نامیده می‌شوند و در بازه صفر و یک قرار می‌گیرند. بزرگی اعداد آزادی با درستی دقت در نظر

۶ بررسی روش درونیابی چندجمله‌ای ارمیت روی داده‌های واقعی

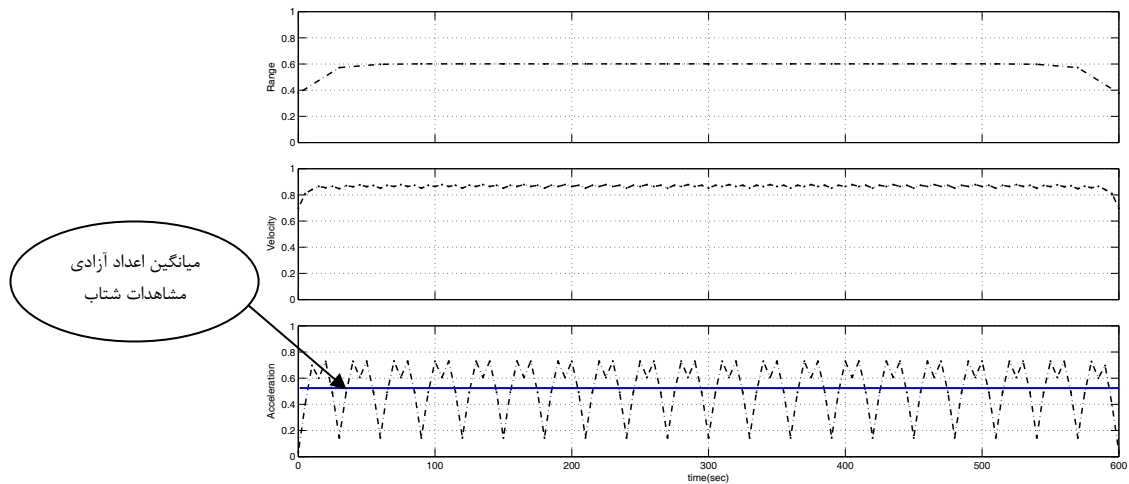
همان‌طور که چندجمله‌ای‌های گوناگون روی داده‌های شبیه‌سازی شده امتحان شد تا بهترین چندجمله‌ای انتخاب شود، در مورد داده‌های واقعی جفت ماهواره GRACE در روز اول ژانویه ۲۰۰۶، نیز این کار صورت گرفت که نتایج آن در ادامه آمده است. شکل ۶ مقادیر انحراف معیار، میانگین، ماکزیموم، مینیموم مربوط به باقی‌مانده‌های فاصله که درونیابی شده‌اند را نشان می‌دهد.

چنانچه در جدول ۶ مشاهده می‌شود، چند جمله‌ای درجه ۴ کمترین انحراف معیار را از بین این ۶ چندجمله‌ای دارد. بنابراین در مورد داده‌های واقعی از چندجمله‌ای درجه ۴ برای درونیابی استفاده می‌کنیم.

۷ بررسی دقت چندجمله‌ای درجه ۴ در درونیابی ارمیت روی مشاهدات واقعی GRACE

۶۵۰۰ ثانیه که معادل ۱۰۸ اپک از مشاهدات واقعی GRACE شامل بردار موقعیت، سرعت و شتاب دو ماهواره را در نظر گرفته و مسئله را برای موقعیت، سرعت

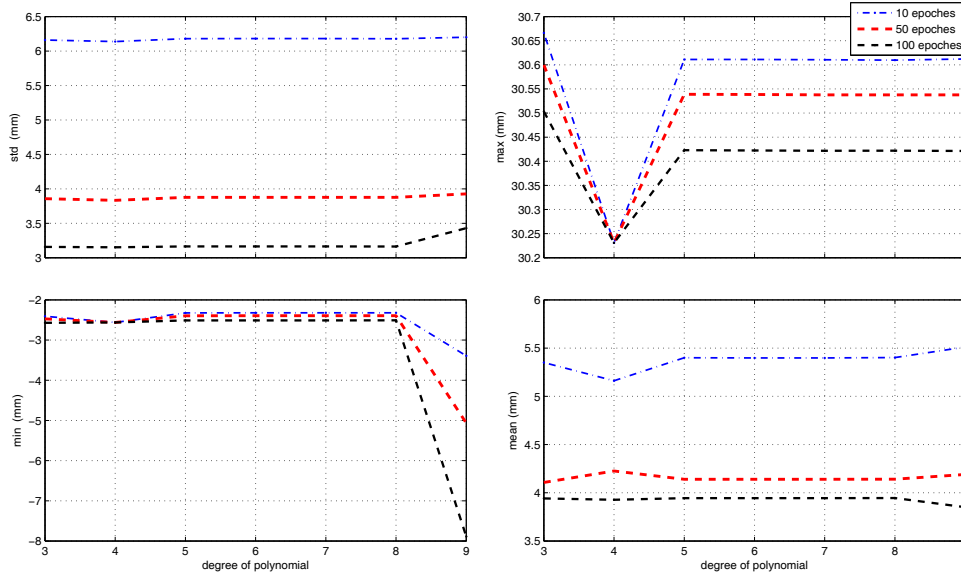
هدف از بررسی اعداد آزادی، به دست آوردن وزن نسبی صحیح برای مشاهدات است. یک روش برای به دست آوردن وزن صحیح مشاهدات روش برآورد مؤلفه واریانس (VCE) است که در اینجا ما از آن صرف‌نظر می‌کنیم. روش ساده‌تر این است که سهم مشاهدات فاصله، سرعت و شتاب را تقریباً در سرشکنی برابر بگیریم لذا با تغییر وزن مشاهدات کاری می‌کنیم که اعداد آزادی آنها در یک محدوده قرار گیرند. به عبارت دیگر، متوسط آنها را برابر می‌کنیم. شکل ۵ نمایش اعداد آزادی در حل مسئله کمترین مربعات در روش درونیابی ارمیت است. چنانچه در شکل ۵ دیده می‌شود اعداد آزادی مشاهدات فاصله و شتاب نشان‌دهنده این واقعیت‌اند که وزن‌های در نظر گرفته برای این مشاهدات واقعی‌تر از وزنی است که برای مشاهدات سرعت فرض شده است. از طرف دیگر در شکل ۵ دیده می‌شود که در نقاط تغییر اپک (نقاط گرهی) عدد آزادی مشاهدات مربوط به شتاب به صفر نزدیک شده‌اند، لذا حضور مشاهدات شتاب در نقاط بحرانی الزامی بوده و نباید در حل مسئله آنها را حذف کرد.



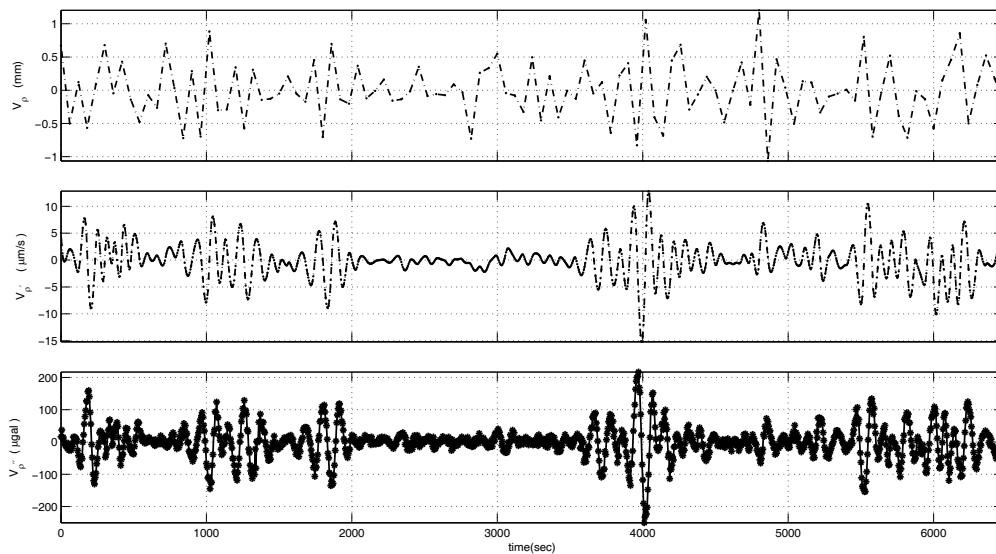
شکل ۵. اعداد آزادی مشاهدات ماهواره GRACE در مدت ۶۰۰ ثانیه برای داده‌های شبیه‌سازی شده.

آن مربوط به I_3 و ۲ معادله مربوط به I_1 است اضافه می‌شود. بنابراین هر اپیک باعث افزایش درجه آزادی به اندازه $df = 21$ می‌شود. باقی مانده‌های به دست آمده برای فاصله، سرعت و شتاب در شکل ۷ ترسیم شده است.

و شتاب دو ماهواره از راه چندجمله‌ای درجه ۴ حل می‌کنیم. مدت زمان هر اپیک ۶۰ ثانیه است. با توجه به اینکه هر اپیک زمانی به ۱۲ فاصله تقسیم شده است با اضافه شدن هر اپیک ۵ مجهول برای چندجمله‌ای درجه ۴ و ۲۶ معادله که ۱۲ معادله آن مربوط به I_2 و ۱۲ معادله



شکل ۶. انحراف معیار، میانگین، مینیموم و ماکزیموم مربوط به ۱۰، ۵۰ و ۱۰۰ اپیک از مشاهدات GRACE.



شکل ۷. دقت فاصله، سرعت و شتاب برآوردشده برای داده‌های واقعی GRACE.

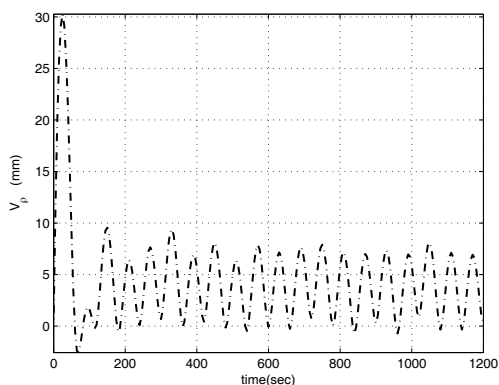
جدول ۶. انحراف معیار باقی مانده‌های فاصله در چندجمله‌ای‌های گوناگون با سه درجه آزادی متفاوت.

3	4	5	6	7	8	9	درجه چندجمله‌ای/تعداد اپک
6.160e-3	6.138e-3	6.180e-3	6.181e-3	6.181e-3	6.178e-3	6.200e-3	10
3.8571e-3	3.8334e-3	3.8761e-3	3.8763e-3	3.8763e-3	3.8759e-3	3.9262e-3	50
3.1569e-3	3.1514e-3	3.1634e-3	3.1636e-3	3.1636e-3	3.1631e-3	3.4290e-3	100

جدول ۷. نتایج آماری خطای تصادفی برای چندجمله‌ای درجه ۴.

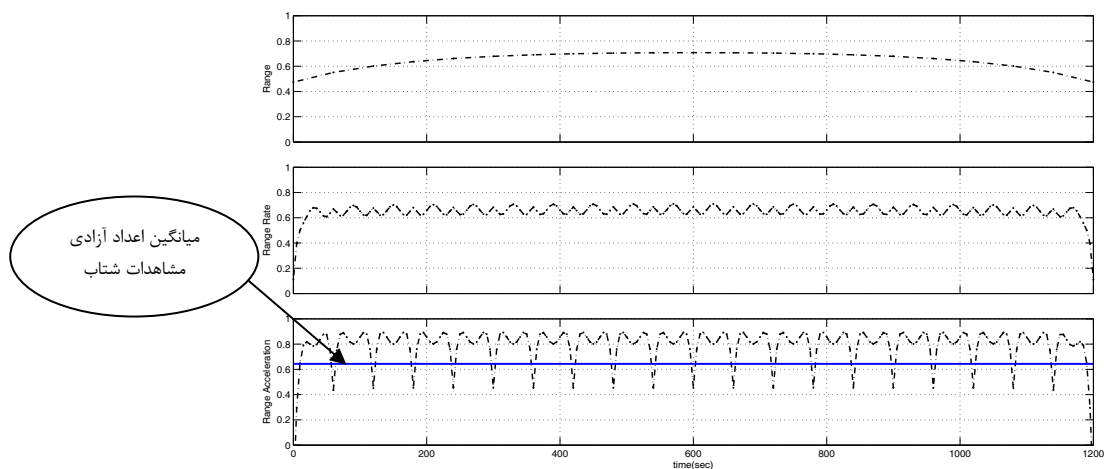
مینیموم	میانگین	ماکزیموم	انحراف معیار	نوع آماره
-0.002561	0.003935	0.03023	0.003123	باقی مانده فاصله (متر)
-1.642e-5	-1.307e-7	1.385e-5	3.618e-6	باقی مانده سرعت (متر بر ثانیه)
-2.447e-6	-9.695e-10	2.123e-6	4.864e-7	باقی مانده شتاب (متر بر مجذور ثانیه)

میانگین اعداد آزادی مربوط به مشاهدات فاصله، سرعت و شتاب بین ۰/۷ و ۰/۵ قرار می‌گیرند و این به‌خاطر آن است که وزن‌ها به طور نسبی در نظر گرفته شدند به این صورت که اعداد آزادی به‌دست آمده برای آنها تقریباً در یک محدوده در نوسان باشند. از آنجا که این اعداد در محدوده میانگین صفر و یک قرار دارند، لذا به وزن واقعی خود نزدیک‌اند. موارد پیش‌گفته، در شکل ۹ دیده می‌شود.



شکل ۸. تفاوت مقادیر درون‌یابی شده فاصله در روش ارمیت و روش اسپیلاین.

با کمک اسپیلاین درجه ۳ فواصل ۵ ثانیه‌ای مشاهدات فاصله را مقداردهی کرده و مقادیر درون‌یابی شده فاصله به روش چندجمله‌ای ارمیت را با آنها مقایسه می‌کنیم. تفاوت به‌دست آمده در شکل ۸ نمایش داده شده است. همین‌طور که دیده می‌شود، در مقایسه با باقی‌مانده‌های فاصله در شکل ۷ یک انتقال ۵+ میلی‌متری در نتایج دیده می‌شود که نشان‌دهنده دقت روش ارمیت نسبت به روش اسپیلاین است، زیرا در روش ارمیت مشتقات تابع باعث می‌شوند که تابع برازش یافته دچار انحراف‌های خفیف و ناخواسته نشود و نتایج به‌دست آمده از درون‌یابی قابل اطمینان‌تر باشند. برای بررسی بیشتر، اعداد آزادی مشاهدات را که همان قطر اصلی ماتریس اعداد آزادی‌اند را به‌دست آورده و ترسیم می‌کنیم. وزن در نظر گرفته شده برای مشاهدات $P_1 = 10^7, P_2 = 10^{11}, P_3 = 10^{13}$ است. شکل ۹ نمایش اعداد آزادی در حل مسئله کمترین مربعات در روش درون‌یابی ارمیت با مشاهدات واقعی است.



شکل ۹. اعداد آزادی مشاهدات ماهواره GRACE در مدت ۱۲۰۰ ثانیه برای داده‌های واقعی.

۸ نتیجه گیری

۱. در این مقاله ترکیب سه مشاهده متفاوت از دو کانال اطلاعاتی متفاوت در یک روش ساده و مناسب صورت پذیرفت.
۲. حل مسئله درون‌یابی با کمک توابع چندجمله‌ای و مشتقاتشان در ساختار کمترین مربعات باعث برازش بهتر تابع به مشاهدات شد.
۳. مدل کردن مسئله به منظور درون‌یابی مشاهدات کم‌تراکم این امکان را فراهم ساخت تا مشاهدات فاصله با همان تراکم مشاهدات سرعت و شتاب به دست آید.
۴. متراکم شدن مشاهدات فاصله باعث می‌شود که مدار ماهواره با دقت بیشتری تعیین شود.
۵. چندجمله‌ای درجه ۶ درحکم چندجمله‌ای مناسب براساس شرط کمترین انحراف معیار برای مشاهدات شبیه‌سازی شده، انتخاب شد. از آنجا که هر چه انحراف معیار کوچک‌تر باشد برازش تابع بهتر خواهد بود، بنابراین چندجمله‌ای درجه ۶ نسبت به دیگر چندجمله‌ای‌ها برازش بهتری به داده‌های شبیه‌سازی

شده داشت.

۶. چندجمله‌ای درجه ۴ درحکم چندجمله‌ای مناسب، براساس شرط کمترین انحراف معیار برای مشاهدات واقعی، انتخاب شد.
۷. وارد کردن معادلات مربوط به پیوستگی تابع و مشتقات آن در نقاط گرهی در حل مسئله به روش کمترین مربعات، باعث نرم شدن تابع و برازش بهتر آن شد.

منابع

- Bettadpur, B., 2007a, Gravity recovery and climate experiment level-2 gravity field product user handbook, Rep, GRACE 327-734, Cent. For Space Res., Austin, Tex.
- Bettadpur, B., 2007b, CSR Level-2 processing standards document for product release 04, Rep. GRACE 327-742, Cent. For Space Res., Austin, Tex.
- Bramble, H., and Hilbert, S. R., 1971, Bounds for a class of linear functionals with applications to Hermite interpolation, *Jurnal Numerische Mathematik*, Vol.16, Number 4/January, 10.1007/BF02165007, PP: 362-369.
- Chen, J. L., Wilson, C. R., Tapley, B. D., and Grand, S., 2007, GRACE detects coseismic

- Welch, G., and Bishop, G., 1996, One-Step-at-a-Time Tracking, University of North California at Chapel Hill, CB 3175, Sitterson Hall, NC, 27599-3175.
- Zi-Wei, Zheng, Yi-Sheng, Zhu 2004, New Least Squares registration algorithm for data fusion, Aerospace and Electronic systems, IEEE Transaction, **40**, 1410-1416.
- and postseismic deformation from the Sumatra-Andaman earthquake, *Geophys. Res. Lett.*, **34**, doi:10.1029/2007GL030356.
- Ciarlet, P. G., and Raviart, P. A., 1972, General Lagrange and Hermite Interpolation in R^n with applications to finite element methods, *Rational Mechanics and Analysis*, Vol. 46, Number 3/January, 10.1007/BF00252458, p 177-199.
- Golub, G. H., and Van Loan, C. F., 1996, *Matrix Computations (3rd)* Baltimore, MD: Johns Hopkins University Press.
- Hall, D. L., 1992, *Mathematical Techniques Multisensor Data Fusion*, Norwood, MA: Artech House.
- Hodgart, M. S., Tortora, P., and Morrison, N., 2000, A Gaussian deterministic approach to smoothing and prediction for application to spacecraft attitude and orbit determination, National Aerospace and Electronic Conference, IEEE2000 PP:687-695.
- Kohlas, A. O., Kroes, R., and D'Amico, S., 2006, Interfrometric baseline performance estimations for multistatic synthetic aperture radar configurations derived from GRACE GPS observation, *J. Geodesy*, **80**, 28-39.
- Krakiwsky, E. J., 1975, *A Synthesis of Recent Advances in the Method of Least Squares*, Department of Geodesy and Geomatics Engineering, University of New Brunswick, Canada.
- Leaon, G., 1989, *Probability and Random Processes for Electrical Engineering*, University of Toronto Canada.
- Sneeuw, N., 2006, *Adjustment Theory*, Lecture Notes, Geodatisches Institut, University Stuttgart.
- Sorenson, H. W., 1970, Least Squares Estimation: From Gauss to Kalman, *IEEE Spectrum*, **7**, 63-68.
- Tapley, B. D., and Reigber, C., 2006, GRACE mission status and future plans, paper presented at GRACE Science Working Team Meeting, NASA, San Francisco, Calif., 8-9 December.
- Tapley, B. D., Bettadpur, S., Watkins, M., and Reigber, C., 2004, The Gravity Recovery and Climate Experiment: Mission overview and early results, *Geophys. Res. Lett.*, **31**, L09607, doi: 10.1029/2004GL019920.
- Vanicek, P., and Wells, D. E., 1972, *The Least Squares Approximation*, Department of Geodesy and Geomatics Engineering, University of New Brunswick, P.O. Box 4400, Fredericton, N.B., Canada.