

کاربست روش طیفی برای حل عددی معادلات آب کم عمق منطقه محدود

حسین غلامی^۱، علیرضا محب‌الحججه^{*} و سرمهد قادر^۲

^۱ دانش‌آموخته کارشناسی ارشد هواشناسی، گروه فیزیک فضای، مؤسسه ژئوفیزیک دانشگاه تهران، ایران

^۲ دانشیار، گروه فیزیک فضای، مؤسسه ژئوفیزیک دانشگاه تهران، ایران

(دریافت: ۹۰/۱۱/۱۵، پذیرش نهایی: ۹۱/۴/۱۳)

چکیده

در این پژوهش، روش شبه‌طیفی برای حل عددی معادلات آب کم عمق دو بعدی غیرخطی در منطقه محدود به کار گرفته می‌شود. روش شبه‌طیفی بر استفاده از توانایی روش طیفی در برآورد مشتقات فضایی تابع‌هایی که به قدر کافی هموارند، استوار است. در مدل منطقه محدود ساخته شده بر مبنای طرحواره دارای پایستاری آنسیتروفوی پتانسیلی سادونی برای معادلات آب کم عمق یا بسیط فشارورده، بهجای تفاضل مرکزی از روش طیفی بر مبنای تابع‌های فوریه برای برآورد مشتقات فضایی استفاده می‌شود. برای کاربست روش شبه‌طیفی در منطقه محدود که در هیچ‌یک از دو راستای شرقی-غربی و شمالی-جنوبی حوزه محاسباتی دورهای نیست، از الگوی گسترش و واهلش هاگن و مکنهاور استفاده می‌شود. برای پایداری محاسباتی یک میرایی صریح به صورت پخش عددی با ضرایب متفاوت برای معادلات تکانه و ژئوپتانسیل به الگوریتم افزوده می‌شود. برای بهروزرسانی کمیت‌های مدل در هر گام زمانی از طرحواره زمانی لیپ‌فراگ به همراه پالایه روپرت-آلسین استفاده می‌شود.

نتایج برای یک مورد پیش‌بینی ۴۸ ساعته با استفاده از روش طیفی در تفکیک‌های فضایی ۱۵۰، ۷۵ و $\frac{37}{5}$ کیلومتر عرضه و مقایسه می‌شوند. جواب‌ها در تفکیک ۱۵۰ کیلومتر به دلیل اثر پخش عددی و نیز میرایی خود میدان زمینه بسیار هموارند و این میرایی زیاد باعث جدایی جواب‌ها از جواب‌های متناظر الگوریتم تفاضل متناهی می‌شود. با این حال در تفکیک‌های ۷۵ و $\frac{37}{5}$ کیلومتر حرکت الگوهای مقیاس همدیدی و حتی زیرهمدیدی دارای نمایشی رضایت‌بخش هستند. محاسبه خطای روش طیفی از دیدگاه نبود توازن، حاکی از گسیل بی‌توازنی نسبتاً بزرگی از منطقه گسترش به داخل حوزه محاسباتی است.

واژه‌های کلیدی: منطقه محدود، معادلات آب کم عمق، روش شبه‌طیفی، روش تبدیل، گسترش دورهای، منطقه واهلش، میدان زمینه

Application of the spectral method to solve the limited-area shallow-water equations

Gholami, H.¹, Mohebalhojeh, A. R.² and Ghader, S.²

¹ M.Sc. Graduate of Meteorology, Space Physics Department, Institute of Geophysics, University of Tehran, Iran

² Associate Professor, Space Physics Department, Institute of Geophysics, University of Tehran, Iran

(Received: 04 Feb 2012, Accepted: 03 Jul 2012)

Abstract

The pseudo-spectral method is used to solve the shallow-water equations in a limited-area domain. The spectral computation of spatial derivatives in the pseudo-spectral method makes it in effect equivalent to a Galerkin spectral-transform method commonly used in numerical modeling of fluid flows. Based on the potential-enstrophy conserving scheme introduced by Sadourny in 1975, the limited-area model is constructed by replacing the

second-order finite-difference computation of spatial derivatives with the spectral method using Fourier basis functions. Since the limited-area domain is not periodic in the east-west and north-south directions, in order to apply the spectral method, the domain has to be made periodic using an extension zone as proposed by Haugen and Machenhauer. The background field obtained using the "Global Forecast System" (GFS) data is extended periodically and matched to the limited-area field across a relaxation zone which is introduced in order to reduce the adverse effects of the artificial extension of the field variables. In this way, the prognostic variables of the limited-area model including the velocity components and geopotential height are made periodic. To alleviate false generation of imbalance in the extension zone, two actions are taken. First, because of its large variation across the main limited-area domain, the geopotential height was decomposed to a zonal mean and a perturbation and the latter field was made periodic. Second, in the extension zone the velocity components were constructed using geostrophic approximation. Even with these two actions, the amount of imbalance penetrating the computation domain was sufficient to cause computational instability. In order to further control the generation of imbalance and reach computational stability, an explicit damping in the form of numerical diffusion was added to the equations of momentum and geopotential height with different diffusion coefficients for momentum and height. For time-stepping, a three-time-level leapfrog scheme with Robert-Asselin filter to remove the computational mode was used.

For a case, previously examined in literature, related to 1st of February 2003, results for the 48-hour prediction using the spectral algorithm in 150, 75 and 37.5 km resolutions are presented, compared and assessed using two norms, one measuring the deviation from the actual GFS fields and the other measuring the maintenance of balance during the 48-hour integrations. To determine balanced fields, the first-order implicit normal-mode initialization procedure is used. The spatial resolution refers to the grid spacing at 60°N latitude. At 150 km resolution, the predicted fields are excessively damped due to a combination of the numerical diffusion required for stability and the smoothness of the background fields used in the relaxation process. The excessive damping causes a significant departure of the fields from the results for the second-order finite-difference algorithm. At 75 and 37.5 km resolutions, however, the synoptic and even sub-synoptic scale motions are represented sufficiently well. The assessment of balance maintenance shows that a large amount of imbalance is emitted from the extension zone to the computational domain, making the limited-area spectral algorithm much less balance-preserving compared with the corresponding second-order finite-difference algorithm.

Key words: Limited area, Shallow water, Spectral method, Transform method, Periodic extension, Relaxation zone, Background field

۱ مقدمه

نظر گرفته شود، روش‌های تفاضل متناهی، و اگر این وابستگی به صورت جهانی (global) در نظر گرفته شود، روش شبه‌طیفی ایجاد می‌شود (دورن، ۲۰۱۰). روش شبه‌طیفی چنان‌که از نام آن بر می‌آید، برگرفته از روش طیفی و در حکم راه حل مناسبی برای استفاده از مزایای روش طیفی، بدون مواجهه با مشکلات ناشی از محاسبه

ساخت دسته مهمی از الگوریتم‌های عددی برای حل معادلات دینامیکی حاکم بر حرکت شاره‌ها که معادلات دیفرانسیلی با مشتقهای جزئی (PDEs) هستند، بر نحوه محاسبه مشتقهای موجود در این معادلات متمرکز است. به طور کلی، اگر در محاسبه مشتقهای موجود، وابستگی مکانی یک نقطه با نقاط پیرامون آن به صورت محلی در

پژوهش فعلی را از مطالعات پیشین متمایز می‌سازد.

۲ مدل فیزیکی و فرمول‌بندی

صورت ناوردای معادلات آب کم‌عمق بدون وارد کردن توپوگرافی چنین است (هالتنر و ویلیامز، ۱۹۸۰):

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -(\zeta + f) \hat{K} \times \mathbf{v} - \nabla (\Phi + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2}) \quad (1)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\nabla \cdot (\Phi \mathbf{v}) \quad (2)$$

که در آن، \mathbf{v} بردار سرعت، ζ تاوایی نسبی، f تاوایی سیاره‌ای، Φ ژئوپتانسیل و \hat{K} بردار یکه در راستای قائم محلی است. معادلات تکانه (۱) و پیوستگی جرم (۲) را می‌توان به صورت نزدیک در دستگاه مختصات دکارتی بنا شده بر هر نقشه دارای تصویر همدیس به صورت زیر نوشت:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (f + \zeta)v - m \frac{\partial}{\partial x} \left[\Phi + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \right] \quad (3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -(f + \zeta)u - m \frac{\partial}{\partial y} \left[\Phi + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \right] \quad (4)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -m^2 \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\Phi u}{m} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\Phi v}{m} \right) \right] \quad (5)$$

که در آن، u و v مؤلفه‌های بردار باد در امتداد محورهای x و y و m فاکتور نقشه است. با تغییر متغیر $V = v/m$ و $U = u/m$ می‌توان معادلات فوق را به شکل مناسب‌تر زیر نوشت به‌طوری که در آن m فقط به صورت مربعی ظاهر شود:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = qV - \frac{\partial}{\partial x} \left[gZ + \frac{1}{2}m^2(U^2 + V^2) \right] \quad (6)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -qU - \frac{\partial}{\partial y} \left[gZ + \frac{1}{2}m^2(U^2 + V^2) \right] \quad (7)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = -m^2 \left[\frac{\partial}{\partial x}(U) + \frac{\partial}{\partial y}(V) \right] \quad (8)$$

که در آن، Z ارتفاع ژئوپتانسیلی و V و U به ترتیب

جملات غیرخطی مطرح شده و کاربردهای فراوانی یافته است. لازم به ذکر است که تحت شرایط خاصی (دورن، ۲۰۱۰)، در واقع روش شبکه‌ای معادل یک روش تبدیل طیفی (اورجگ، ۱۹۷۰؛ الیاسن و همکاران، ۱۹۷۰) گالرکین است. به این دلیل، از این پس به جای شبکه‌ای از عنوان طیفی استفاده می‌کنیم.

ویژه تابع‌های عملگر لاپلاسی مانند هماهنگ‌های کروی برای حوزه‌های کروی و تابع‌های فوریه دوره‌ای برای حوزه‌های دوره‌ای در هر راستا از جمله تابع‌های جهانی معروف در روش طیفی مورد استفاده‌اند. اما در منطقه محدود، استفاده مستقیم از تابع‌های فوریه، به دلیل برآورده نشدن شرایط مرزی میسر نیست. برای حل این مشکل، هاگن و مکنهاور (۱۹۹۳) روشی برای گسترش منطقه محدود و دوره‌ای‌سازی مصنوعی آن عرضه کرده‌اند که استفاده از تابع‌های فوریه را ممکن می‌سازد. به علاوه در این روش، الگوی واهلش دیویس-کالبرگ (دیویس، ۱۹۷۶؛ دیویس و کالبرگ، ۱۹۷۷) به کار گرفته می‌شود تا اثرات منفی دوره‌ای‌سازی مصنوعی را کاهش دهد. از آنجا که از روش هاگن و مکنهاور (۱۹۹۳) در دو دهه اخیر در ساخت مدل‌های منطقه محدود مهمی چون مدل Aladin-NH (بنارد و همکاران، ۲۰۱۰) استفاده شده است، ارزیابی کارکرد آن در قالب مدل ساده‌تری چون معادلات آب کم‌عمق اهمیت دارد. علاوه‌بر این، روش طیفی می‌تواند در حکم یکی از گزینه‌های ممکن برای ساخت یک مدل منطقه‌ای مناسب برای کشور ما مطرح باشد. برای پاسخ به این نیازها، مقاله حاضر به معرفی، کاربست و ارزیابی درستی عددی روش طیفی با تابع‌های پایه فوریه اختصاص دارد. درستی عددی بر مبنای یک نرم خطاب با مقایسه با داده‌های موجود برای دوره انتگرال‌گیری و بررسی میزان نبود توازن ایجاد شده در طی تحول زمانی صورت می‌گیرد. لازم به ذکر است که کاربست فرایافت نبود توازن برای برآورده خطا در مدل طیفی منطقه محدود

اعمال روش تجزیه معادلات آب کم عمق به صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = qV - \frac{\partial}{\partial x} \left[g(\bar{Z} + Z') + \frac{1}{2} m^2 (U^2 + V^2) \right] \quad (10)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -qU \quad (11)$$

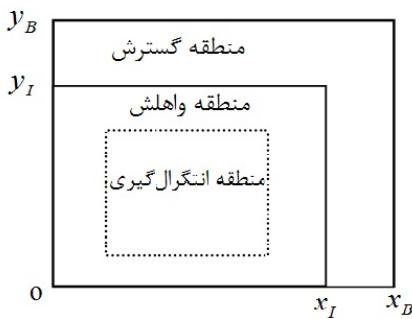
$$-\frac{\partial}{\partial y} \left[g(\bar{Z} + Z') + \frac{1}{2} m^2 (U^2 + V^2) \right]$$

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = -m_z^2 (\delta_x(\bar{U} + U') + \delta_y(\bar{V} + V')) \quad (12)$$

\bar{U} و \bar{V} شارهای جرم مداری در دو راستای x ، y ، U ، V شارهای جرم پریشیدگی در دو راستای x و y است.

۲-۳ الگوی گسترش هاگن و مکنهاور

برای اجتناب از خطای گیس باید مقادیر ژئوپتانسیل و مؤلفه‌های سرعت باد مداری و نصف‌النهاری دارای مقادیر هموار و در هر دو راستای x و y دوره‌ای باشند. حوزه محاسباتی شامل منطقه انگرال‌گیری، منطقه واهلش (relaxation) و منطقه گسترش در شکل ۱ نشان داده شده است. منطقه واهلش اثرات منطقه گسترش را کاهش می‌دهد تا دوره‌ای‌سازی مصنوعی اثر منفی کمتری بر فرایندهای فیزیکی در حوزه اصلی داشته باشد. در تحقیق حاضر، طول منطقه گسترش حدود ۲۰٪ طول میدان زمینه انتخاب شده است.



شکل ۱. هندسه حوزه محاسباتی میدان زمینه، خطوط پُر بیرونی منطقه گسترش و خطوط پُر داخلی منطقه واهلش و خطوط نقطه‌چین داخلی منطقه انگرال‌گیری را نشان می‌دهد (هاگن و مکنهاور، ۱۹۹۳).

شارهای جرم در دو راستای x و y یعنی $\underline{U} = U \bar{Z}^x$ و $\underline{V} = V \bar{Z}^y$ توابعی پتانسیلی است. کار الگوریتم $q = \frac{\zeta + f}{Z}$ روش شبکه‌ای محاسبه مشتقات موجود در معادلات فوق است.

۳ الگوریتم عددی

با توجه به استفاده از تابع‌های فوریه برای برآورد مشتقات، وجود ناپیوستگی در کمیت موردنظر سبب بروز خطای گیس می‌شود که رشد خطأ و درنهایت از دست دادن دقت محاسباتی را به دنبال دارد. روش طیفی هاگن و مکنهاور (۱۹۹۳) با استفاده از روش‌های الگوی گسترش و الگوی واهلش و روش تجزیه که در دل الگوی گسترش جای دارد، سعی در جلوگیری از بروز این مشکل دارد.

۱-۳ دوره‌ای‌سازی کمیت‌های میدان زمینه

در پژوهش حاضر، در هر گام زمانی، میدان زمینه براساس درون‌یابی هرمیت مکعبی از داده‌های "سامانه پیش‌بینی جهانی موسوم" به GFS با تفکیک $1^\circ \times 1^\circ$ در بازه شش ساعته به بازه یک ساعت و به دنبال آن درون‌یابی خطی از داده‌های یک ساعت ساخته می‌شود. نکته قابل توجه این است که مقادیر ارتفاع ژئوپتانسیلی در راستای نصف‌النهاری، تغییرات قابل توجهی دارند. بنابراین، وقتی که مقادیر ارتفاع ژئوپتانسیلی در راستای y دوره‌ای می‌شوند، الگوی ناهنجاری ایجاد می‌شود. تدبیری که برای این مشکل اندیشه شده، تجزیه مقادیر ژئوپتانسیل به قسمت‌های مداری و پریشیدگی و دوره‌ای‌سازی قسمت‌های پریشیدگی در دو راستای x و y است. بنابراین:

$$\phi = \bar{\phi} + \phi' \quad (9)$$

که در آن، $\bar{\phi}$ مؤلفه مداری و ϕ' مؤلفه پریشیدگی ژئوپتانسیل است. البته این مشکل در مورد مؤلفه سرعت باد مداری U و نصف‌النهاری V پیش نمی‌آید و مقادیر U و V به آسانی از طریق الگوی گسترش هاگن و مکنهاور (۱۹۹۳) در دو راستای x و y دوره‌ای می‌شوند. با

که در آن، $\phi_i(x, y, t)$ کمیت واهلش یافته، $\phi_b(x, y, t)$ کمیت میدان زمینه است. ضریب واهلش γ_i در راستای x از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\gamma_i = \frac{1}{2} \left[1 + \cos\left(\pi \frac{x_i - x_I}{x_R - x_I}\right) \right]$$

که در آن، x_R طول میدان واهلش است. در برنامه محاسباتی، مقدار ضریب واهلش بر مبنای کمترین فاصله از یکی از چهار مرز غربی، شرقی، جنوبی و شمالی تنظیم می‌شود. شکل ۲ در یک راستا، طرحواره‌ای از میدان زمینه به همراه میدان پیش‌یافته که از راه الگوی واهلش دیویس-کالبرگ با آن ترکیب می‌شود را نشان می‌دهد.

۴-۳ محاسبه مشتقات

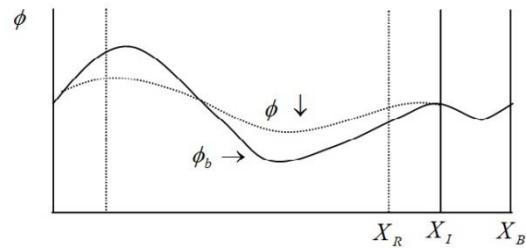
با تجزیه مقادیر ژئوپتانسیل به مؤلفه‌های مداری و پریشیدگی و توجه به اینکه مقادیر Z' ، U ، V میدان زمینه در دو راستای x و y با استفاده از الگوی گسترش هاگن و مکنهاور (۱۹۹۳) در هر گام زمانی دوره‌ای می‌شود، معادلات مدل (۱۰)، (۱۱) و (۱۲) به گونه‌ای درمی‌آید که محاسبه مشتقات \bar{Z} ، \bar{U} و \bar{V} به صورت مشتق‌گیری مرکزی روی شبکه C-آراکاوا صورت می‌پذیرد و محاسبه مشتقات Z' ، U ، V ، \underline{U}' و \underline{V}' به روش طیفی و از راه تبدیل فوریه سریع (FFT) عملی می‌شود. بنابراین معادلات مدل به صورت زیر درمی‌آید:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)_{i+\frac{1}{2}, j} = (\bar{V}^y \bar{U}^{xy})^*_{i+\frac{1}{2}, j} - \delta_x [g \bar{Z}]^*_{i+\frac{1}{2}, j} \quad (13)$$

$$-\delta_x \left[g Z' + \frac{1}{2} m_u^2 (U^2 + V^2) \right]_{spectral}$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t} \right)_{i, j+\frac{1}{2}} = (-q^x \bar{U}^{xy})^*_{i, j+\frac{1}{2}} - \delta_y [g \bar{Z}]^*_{i, j+\frac{1}{2}} \quad (14)$$

$$-\delta_y \left[g Z' + \frac{1}{2} m_v^2 (U^2 + V^2) \right]_{spectral}$$



شکل ۲. سطح مقطع طولی از شکل میدان زمینه و میدان پیش‌یافته در الگوی واهلش دیویس-کالبرگ (هاگن و مکنهاور ۱۹۹۳).

ملاحظه می‌شود که منطقه گسترش از x_I شروع می‌شود و به x_B ختم می‌شود. در منطقه گسترش کمیت ϕ به صورت زیر دوره‌ای در می‌آید (هاگن و مکنهاور ۱۹۹۳):

$$\begin{aligned} & \phi(x, y, z) \\ &= a_0 + a_1 \cos x' + b_1 \sin x' + b_2 \sin 2x' \end{aligned}$$

که $x' = \pi \frac{x - x_I}{x_B - x_I}$ است و $x' \leq x \leq x_B$ به صورت تعريف می‌شود. ضرایب a_0 ، a_1 ، b_1 و b_2 از مقدار ϕ مقدار مشتق آن در نقاط $x = x_I$ و $x = x_B$ محاسبه می‌شود. در برنامه محاسباتی میدان زمینه سطربه‌سطر از سمت راست گسترش می‌یابد تا یک منطقه دوره‌ای در راستای x حاصل شود و سپس میدان زمینه ستون به ستون از سمت بالا گسترش می‌یابد تا یک منطقه دوره‌ای در راستای y حاصل شود. در این حالت میدان زمینه در دو راستای x و y دوره‌ای شده است.

۳-۳ الگوی واهلش دیویس-کالبرگ
برای اینکه دوره‌ای‌سازی مصنوعی اثر منفی کمتری ایجاد کند، میدان زمینه و میدان حاصل از بهروزرسانی کمیت‌های پیش‌یافته از راه الگوی واهلش دیویس-کالبرگ (دیویس، ۱۹۷۶؛ کالبرگ و گیبسون، ۱۹۷۷) ترکیب می‌شوند:

$$\hat{\phi}_i(x, y, t) = [1 - \gamma_i] \hat{\phi}_i(x, y, t) + \gamma_i \phi_b(x, y, t)$$

بایستی به اجبار مقداری میرایی به شکل طیفی به الگوریتم اضافه شود. در اینجا از میرایی صریح با افروزن یک جمله پخش به صورت $v_m \nabla^2$ به معادلات U و V و جمله متناظری به صورت $\nabla_z^2 v_z$ به معادله ارتفاع ژئوپتانسیلی استفاده می‌شود که v_m ضریب پخش عددی مؤلفه‌های تکانه و v_z ضریب پخش عددی برای ارتفاع ژئوپتانسیلی است. با نوشتن هریک از معادلات مؤلفه‌های تکانه و ارتفاع ژئوپتانسیلی به صورت کلی

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = F + v \nabla^2 Y \quad (17)$$

و گسته‌سازی آن با طرحواره ذوزنقه‌ای، به دست می‌آوریم

$$(1 - 2v\Delta t \nabla^2) Y^{n+1} = Y^{n-1} + 2\Delta t F \quad (18)$$

در اینجا Y یکی از کمیت‌های U ، V و Z و F عبارت طرف راست متناظر آن در حالت پایستار است. چنانچه تصویر Y را در فضای فوریه با \hat{Y} نمایش دهیم، داریم؛

$$\nabla^2 \hat{Y} = -(k^2 + l^2) \hat{Y} \quad (19)$$

که در آن، k و l اعداد امواج در دو راستای x و y هستند. به این ترتیب برای اعمال پخش عددی رابطه گستته زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \hat{Y}^{n+1} &= \left(\frac{1}{1 + 2v\Delta t(k^2 + l^2)} \right) (\hat{Y}^{n-1} + 2\Delta t \hat{F}) \end{aligned} \quad (20)$$

که در آن، v ضریب پخش بسته به مورد برابر با v_m برای مؤلفه‌های تکانه و v_z برای ارتفاع ژئوپتانسیلی است.

مقادیر v_m و v_z با عبارات زیر:

$$v_m = \frac{1}{(k_{\max}^2 + l_{\max}^2) \tau_m} \quad (21)$$

$$v_z = \frac{1}{(k_{\max}^2 + l_{\max}^2) \tau_z} \quad (22)$$

تعیین می‌شوند که در آن، $k_{\max} = \frac{\pi}{\Delta x}$ و $l_{\max} = \frac{\pi}{\Delta y}$ بزرگ‌ترین مقادیر اعداد موج در دو راستای x و y و

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial Z}{\partial t} \right)_{i,j} &= -m_z^2 (\delta_x \bar{U} + \delta_y \bar{V})_{ij}^* \\ &- m_z^2 (\delta_x \bar{U}' + \delta_y \bar{V}')_{spectral} \end{aligned} \quad (15)$$

که در آن، علامت * معرف محاسبه روی شبکه‌ای است که نسبت به نقاط Z به اندازه نیم فاصله شبکه‌ای جایه جا شده است.

۵-۳ شرایط مرزی

اصولاً معادلات هذلولی یک دستگاه معادله مقدار اولیه‌ای هستند که در ارتباط با مسائل منطقه محدود، شرایط مرزی برای آنها ایجاد می‌شود. به دلیل اینکه امواج روی خم مشخصه معادلات هذلولوی در سراسر حوزه محاسباتی منتشر می‌شوند، اگر شرایط مرزی به درستی مقداردهی نشوند، جواب را در کل حوزه خراب می‌کنند. بنابراین تعیین نادرست شرایط مرزی می‌تواند به یک جواب نادرست و یا به ناپایداری منجر شود.

شرط مرزی منطقه محدود با دوره‌ای سازی متغیرهای حوزه محاسباتی در دو راستای x و y به یک شرط مرزی دوره‌ای مضاعف تبدیل می‌شود. بنابراین شرط مرزی اعمال شده به معادلات (۱۳)، (۱۴) و (۱۵) یک شرط مرزی دوره‌ای مضاعف است. بنابراین امواج گرانی- لختی را می‌توان در راستای شرقی- غربی و شمالی- جنوبی وارد حوزه محاسباتی و از آن خارج کرد. به ازای L_x و L_y طول حوزه در دو راستای x و y ، شرط مرزی دوره‌ای مضاعف به صورت زیر در می‌آید:

$$\phi(x, y, t) = \phi(x + L_x, y + L_y, t) \quad (16)$$

۶-۳ استفاده از هموارساز

الگوریتم دارای پایستاری آنستروفی پتانسیلی ساده‌رنی (۱۹۷۵) به گونه‌ای طراحی شده است که برای تفاضل‌گیری مرکزی ناپایداری غیرخطی را کنترل می‌کند. منتهای در روش طیفی این مقدار کفایت نمی‌کند و

طرحواره تفاضل متناهی مرتبه دوم ساورنی (۱۹۷۵) موجود در پژوهش محب‌الحجه و مشایخی (۱۳۸۳) است. به علاوه به‌دلیل حضور یک سامانه همدیدی فعال و قوی در پادجیریان‌سوی کشور ما، این مورد برای آزمون مدل‌های منطقه محدود برای کشور بسیار مناسب است. نتایج پیش‌بینی ۴۸ ساعته، با استفاده از روش طیفی در تفکیک‌های 150 ، 75 و $37/5$ کیلومتر در شکل‌های 4 ، 5 و 6 نشان داده شده است. با وارسی چشمی ملاحظه می‌شود که جواب‌ها در تفکیک فضایی 150 کیلومتر بسیار میرا هستند و این میرایی زیاد باعث شده است که جواب‌ها از جواب‌های متناظر برای الگوریتم سادورنی فاصله بگیرند. لازم به ذکر است که بخشی از این میرایی به میدان زمینه مورد استفاده در این تفکیک برمی‌گردد که به‌دلیل درون‌یابی از داده‌های GFS با تفکیک بیشتر $1^{\circ} \times 1^{\circ}$ به تفکیک کمتر، هموارتر از واقعیت شده است. در تفکیک‌های 75 و $37/5$ کیلومتر حرکت شرق‌سوی ناوه مستقر در غرب دریای مدیترانه به‌خوبی با جواب‌های الگوریتم سادورنی، هم‌خوانی دارد و پشتne مستقر میان دریاچه‌های آرال و بالخاش تقویت شده است. در سه تفکیک فوق در کناره‌های حوزه محاسباتی نیز شکستگی‌هایی در خطوط ژئوپتانسیلی دیده می‌شود که ناشی از اثرات منفی منطقه گسترش و دوره‌ای‌سازی بر نتایج در حوزه انتگرال گیری است.

جدول ۱. زمان میرایی بر حسب ثانیه در تفکیک‌های متفاوت.

$\tau_z(s)$	$\tau_m(s)$	زمان میرایی تفکیک فضایی
۹۰	۱۴۴۰	۱۵۰ km
۳۰	۱۴۴۰	۷۵ km
۱۰	۱۴۴۰	۳۷/۵ km

τ_z و τ_m زمان میرایی ارتفاع ژئوپتانسیلی و مؤلفه‌های میدان باد در کوچک‌ترین مقیاس شبکه‌ای هستند. مقدار عددی مورد استفاده برای τ_m و τ_z در جدول ۱ آورده شده است.

بنابراین الگوریتم روش طیفی هاگن و مکنهاور (۱۹۹۳) را می‌توان در مراحل زیر خلاصه کرد:

۱- حل معادلات بسیط برای یک گام زمانی در حوزه منطقه محدود و بهروز کردن ارتفاع ژئوپتانسیلی و مؤلفه‌های سرعت

۲- ساخت میدان زمینه با تعیین و خواندن دو فایل مربوط به نزدیک‌ترین داده‌های درون‌یابی شده یک ساعتی که زمان موردنظر در آن قرار می‌گیرد. پس از آن درون‌یابی خطی به زمان موردنظر صورت می‌گیرد و میدان زمینه در حوزه منطقه محدود تعیین می‌شود.

۳- گسترش میدان ارتفاع ژئوپتانسیلی به منطقه گسترش، به‌طوری که شرط مرزی دوره‌ای برآورده شود. میدان سرعت در منطقه گسترش با در نظر گرفتن شرایط مرزی دوره‌ای به صورت زمینگرد از روی میدان ارتفاع ژئوپتانسیلی به دست می‌آید.

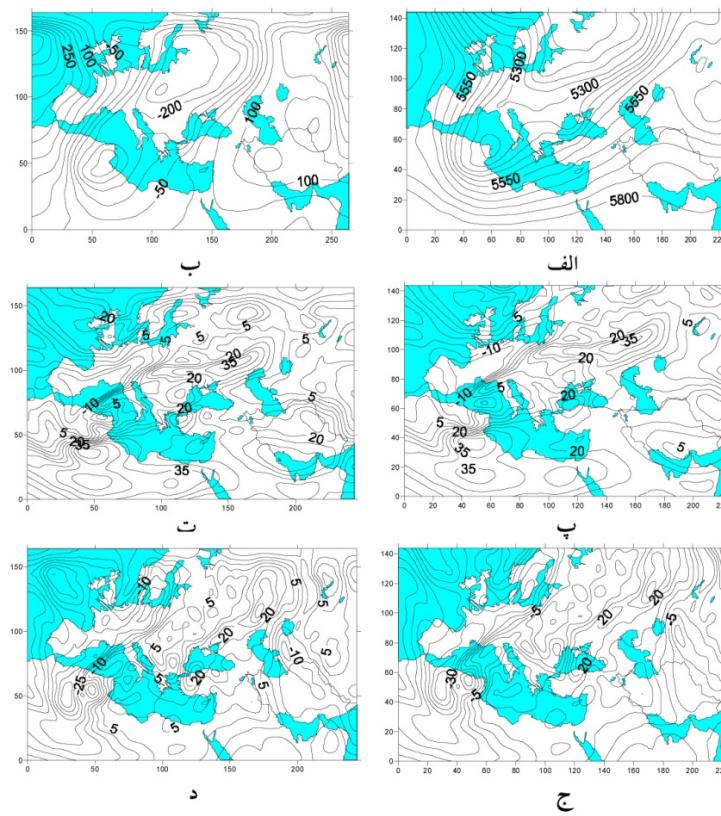
۴- اعمال فرایند واهلش و ترکیب میدان زمینه و میدان حاصل از بهروز کردن کمیت‌های پیش‌یافته در قسمت ۱ الگوریتم در منطقه گسترش.

۵- اعمال میرایی روی Z ، U و V به صورت طیفی در حوزه دوره‌ای.

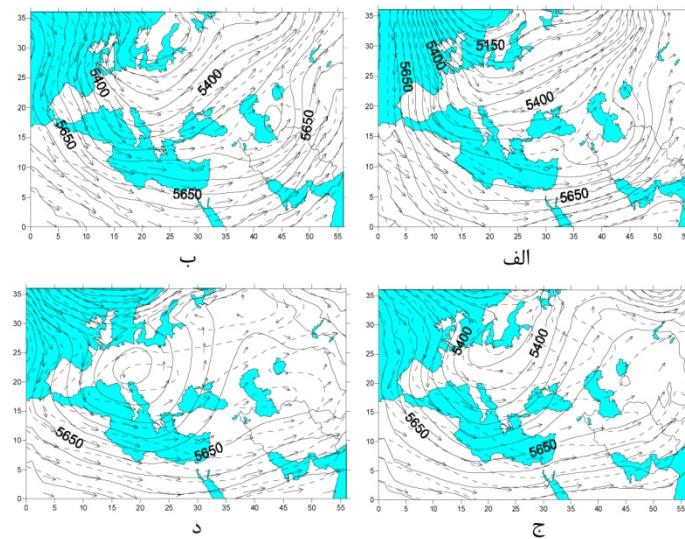
۶- اعمال فیلتر روبرت-آلین.

۴ نتایج روش طیفی

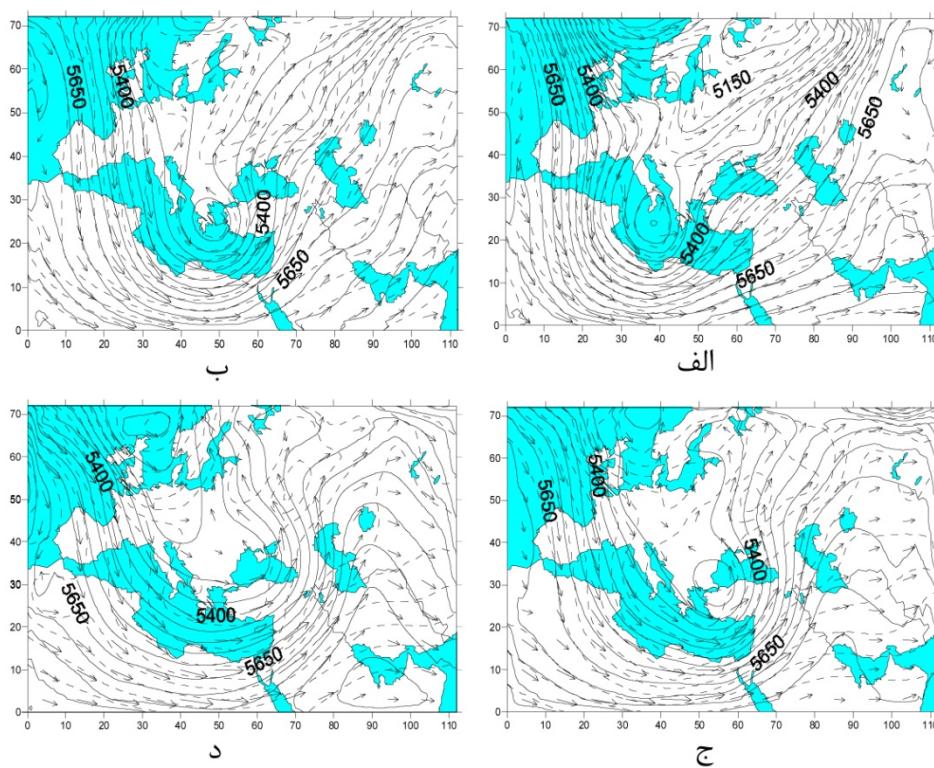
شرایط اولیه برای میدان‌های ارتفاع ژئوپتانسیلی و مؤلفه‌های میدان باد در دو راستای x و y مربوط به اول فوریه سال ۲۰۰۳ میلادی به همراه میدان‌های متناظر حاصل از دوره‌ای‌سازی در شکل ۳ نشان داده شده است. دلیل انتخاب این مورد، فراهم بودن امکان مقایسه با نتایج



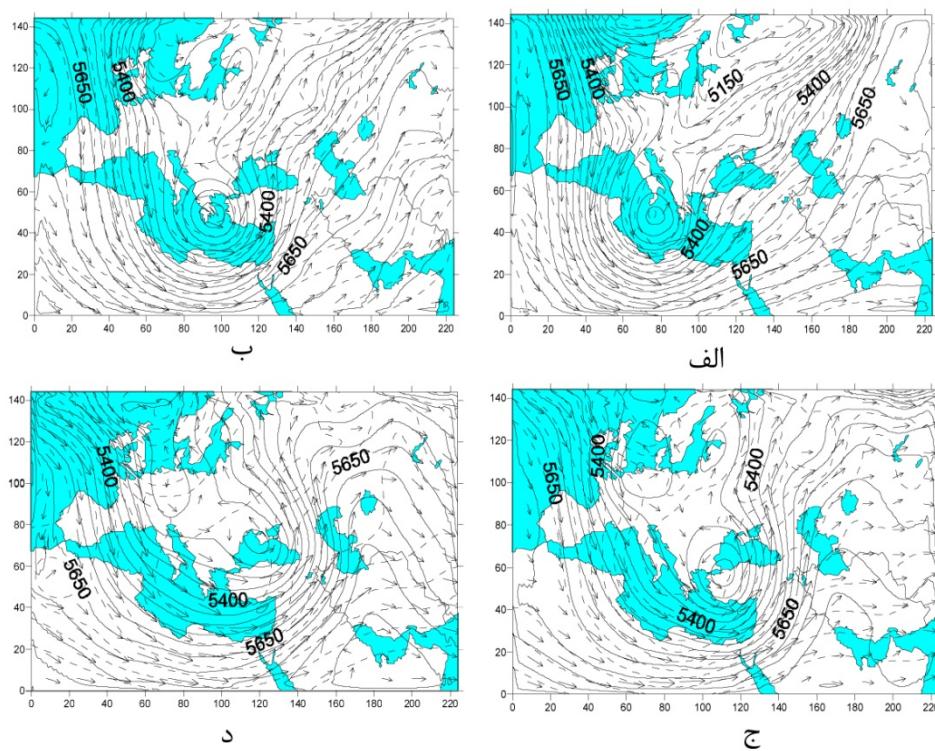
شکل ۳ (الف) میدان ارتفاع ژئوپتانسیلی اولیه ، (ب) میدان پریشیدگی ارتفاع ژئوپتانسیلی اولیه که در دو راستای x , y دوره‌ای شده است، (پ) میدان سرعت مداری اولیه، (ت) میدان سرعت مداری اولیه که در دو راستای x , y دوره‌ای شده است، (ج) میدان سرعت نصف‌النهاری اولیه، (د) میدان سرعت نصف‌النهاری اولیه که در دو راستای x , y دوره‌ای شده است. تفکیک فضایی $37/5$ کیلومتر است.



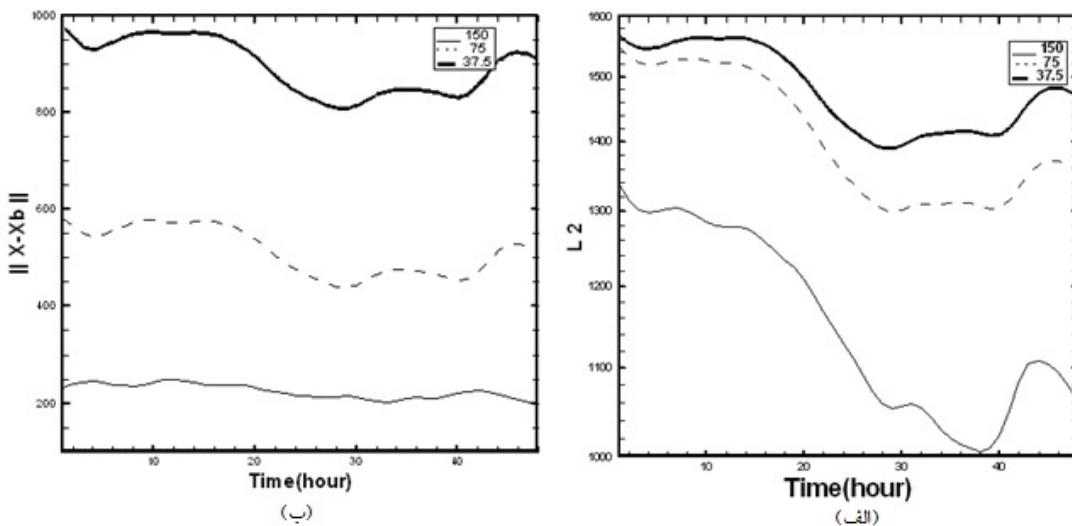
شکل ۴. تحول زمانی ارتفاع ژئوپتانسیلی و میدان باد متناظر در تفکیک فضایی 150 کیلومتر. خطوط پُر بیانگر روش طیفی و خطوط خط‌چین بیانگر میدان متوازن حاصل از کاربرست آغازگری مرتبه اول به داده‌های GFS برای (الف) پیش‌بینی 12 ساعته، (ب) پیش‌بینی 24 ساعته، (ج) پیش‌بینی 36 ساعته و (د) پیش‌بینی 48 ساعته هستند.



شکل ۵. مانند شکل ۴ ولی برای تفکیک فضایی ۷۵ کیلومتر.



شکل ۶. مانند شکل ۴ ولی برای تفکیک فضایی ۳۷.۵ کیلومتر.



شکل ۷. (الف) تحول زمانی نُرم خطای مدل و (ب) تحول زمانی نبود توازن، برای الگوریتم روش طیفی هاگن و مکنهاور در تفکیک فضایی ۱۵۰ کیلومتر (خط پُر نازک)، ۷۵ کیلومتر (خط چین) و ۳۷.۵/۵ کیلومتر (خط پُر ضخم) در طی انتگرال‌گیری ۴۸ ساعته.

تحول زمانی نبود توازن برای الگوریتم روش طیفی هاگن و مکنهاور را در سه تفکیک ۱۵۰، ۷۵ و ۳۷.۵ کیلومتر نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود با افزایش تفکیک، نُرم خطای مدل و نبود توازن افزایش یافته است. این افزایش نُرم خطای مدل با افزایش تفکیک می‌تواند ناشی از کاستی مدل آب کم عمق در تفکیک‌های بالاتر و نیز اثرات منفی وارد کردن میرایی مصنوعی باشد که برای پایداری محاسباتی لازم بوده است. در مورد افزایش میزان نبود توازن با تفکیک فضایی، برطبق نتایج قادر و همکاران (۲۰۰۹) روی حوزه دکارتی دوره‌ای در هر دو راستا، دینامیک درونی مدل صرف نظر از تاثیر شرایط مرزی، می‌تواند عامل موثر باشد. به‌حال میزان نبود توازن ایجاد شده به مراتب بیش از آنی است که از کارکرد الگوریتم تفاضل متناهی دارای دوره‌ای و نیز از کارکرد روش طیفی در حوزه پایستاری آنستروفی ساده‌رنی انتظار می‌رود. با توجه به این امر لازم است که در تحقیق دیگری امکان بهبود نتایج از جث برقاری توازن و نمایش امواج گرانی لختی بررسی شود.

۵ تحلیل خطای

برای محاسبه خطای تولید شده در الگوریتم روش طیفی، ابتدا اختلاف داده‌های حاصل از اجرای مدل و داده‌های آغازگری شده GFS در حکم نُرم خطای مدل محاسبه می‌شود و سپس اختلاف بین داده‌های حاصل از اجرای مدل و داده‌های حاصل از اجرای آغازگری در هر گام زمانی مدل بهمنزله میزان نبود توازن بدست می‌آید. در اینجا میدان‌های متوازن از شرایط توازن مد بهنجار مرتبه اول (محب‌الحججه و مرادی، ۱۳۸۲) به دست می‌آیند. برای بررسی نُرم خطای مدل و نبود توازن در انتگرال‌گیری‌ها، از نُرم مربعی زیر استفاده می‌شود (محب‌الحججه و مرادی، ۱۳۸۱ و ۱۳۸۲):

$$\|\mathbf{X}\| = \left(\iint dx dy (\bar{Z}(U^2 + V^2) + gZ^2) \right)^{1/2} \quad (26)$$

که در آن، \mathbf{X} معرف بردار حالت دستگاه در نمایش (Z, U, V) بیانگر انرژی در دسترس خطی شده دستگاه و \bar{Z} میانگین ارتفاع ژئوپتانسیلی روی حوزه محاسباتی است.

شکل ۷-الف تحول زمانی نُرم خطای مدل و شکل ۷-ب

اول در موسسه ژئوفیزیک دانشگاه تهران به انجام رسیده است و نگارنده‌گان مراتب قدردانی خود را از دانشگاه تهران برای حمایت از آن اعلام می‌دارند.

منابع

- محب‌الحجه، ع. ر. و مرادی، م.، ۱۳۸۱، تجربیاتی با مدل بسیط فشارورد و آغازگری آن، گزارش طرح پژوهشی شماره ۲۰۸۱۳۵۰۳ سازمان هوافضای کشور.
- محب‌الحجه، ع. ر. و مرادی، م.، ۱۳۸۲، آغازگری مدل بسیط فشارورد منطقه‌ای به روش مد بهنجار، فیزیک زمین و فضا، ۱(۲۹)، ۸۱-۶۹.
- محب‌الحجه، ع. ر. و مشایخی، ر.، ۱۳۸۳، نمایش شارش‌های تواواری و امواج گرانی در الگوریتم‌های حل عددی معادلات بسیط فشارورد منطقه‌ای، فیزیک زمین و فضا، ۱(۳۰)، ۴۷-۳۷.
- Bénard, P., Vivoda, J., Másek, J., Smolíkova, P., Yessad, K., Smith, Ch., Brožková, R. and Geleyn, J.-F., 2010, Dynamical kernel of the Aladin-NH spectral limited-area model, Revised formulation and sensitivity experiments, Quart. J. Roy. Meteor. Soc., **136**, 155-169.
- Davies, H. C., 1976, A lateral boundary formulation for multilevel prediction model, Quart. J. Roy. Meteor. Soc., **102**, 405-418.
- Durran, D. R., 2010, Numerical methods for Fluid Dynamics, 2nd Ed., Springer, 516 pp.
- Eliassen, E., Machenhauer, B. and Rasmussen, E., 1970, On a numerical method for integration of the hydrodynamical equations with a spectral representation of the horizontal fields, Report no. 2, Institut for Teoretisk Meteorologi, University of Copenhagen.
- Ghader, S., Mohebalhojeh, A. R. and Esfahanian, V., 2009, On the spectral convergence of the super-compact finite-difference schemes for the *f*-plane shallow-water equations, Mon. Wea. Rev., 2393-2406.
- Haltiner, G. J. and Williams, R. T., 1980, Numerical prediction and dynamic meteorology, John Wiley & Sons, Inc., New York.

۶ نتیجه‌گیری

روش طیفی هاگن و مکنهاور برای حل عددی معادلات آب کم‌عمق دوبعدی غیرخطی به کار گرفته شد. در روش طیفی مشتقات کمیت‌های مدل که در هر گام زمانی با استفاده از الگوی گسترش، دوره‌ای و با استفاده از تبدیل فوریه سریع محاسبه می‌شود. در واقع در روش طیفی وابستگی مکانی یک نقطه با همه نقاط پیرامون آن به صورت جهانی در نظر گرفته می‌شود. بررسی صورت گرفته نشان می‌دهد که دقت الگوریتم روش طیفی فقط از وابستگی و تأثیر نقاط پیرامونی تعیین نمی‌شود و مسائل دیگری همانند شرایط مرزی، میرایی و برهم‌کنش بین منطقه گسترش و منطقه انتگرال‌گیری تأثیر بسزایی دارد. میرایی اضافه شده به کمیت‌های مدل در تفکیک ۱۵۰ کیلومتر، باعث می‌شود که این میرایی به طول موج‌های بزرگ‌تر اعمال شود و حرکت موج راسی به درستی صورت نگیرد. ولی در تفکیک‌های ۷۵ و ۳۷/۵ کیلومتر، حرکت شرق‌سوی ناوه مدیترانه‌ای به خوبی صورت می‌گیرد و ارتفاع پشتۀ مستقر روی دریاچه‌های آرال و بالخاش نیز زیاد می‌شود. محاسبه خطای روش طیفی از دیدگاه نرم خطای مدل و نبود توازن، نشان می‌دهد که خطای روش طیفی دو مرتبه بزرگی، بزرگ‌تر از خطای محاسبه شده در کار محب‌الحجه و مشایخی (۱۳۸۳) است. آزمایش‌های جداگانه‌ای برای طول منطقه گسترش با طول٪۲۰ و٪۳۰ طول منطقه محدود نشان می‌دهد که طول منطقه گسترش تأثیری کمتر از٪۲ در خطای محاسبه شده دارد. بنابراین خطای نسبتاً بزرگی از منطقه گسترش به داخل حوزه محاسباتی گسیل می‌شود که ناشی از برهم‌کنش بین منطقه گسترش و منطقه انتگرال‌گیری و دینامیک درونی خود الگوریتم است.

تشکر و قدردانی

این پژوهش در قالب پایان‌نامه کارشناسی ارشد نگارنده

- Report, WMO, Geneva, **14**, 103-105.
- Orszag, S. A., 1970, Transform method for calculation of vector-coupled sums, application to the spectral form of the vorticity equation, *J. Atmos. Sci.*, **27**, 890-895.
- Sadourny, R., 1975, The dynamics of finite-difference models of the shallow-water equations, *J. Atmos. Sci.*, **32**, 680-689.
- Haugen, J. E. and Machenhauer, B., 1993, A spectral limited-area model formulation with time-dependent boundary conditions applied to the shallow-water equations, *Mon. Wea. Rev.*, **121**, 2618-2630.
- Kallberg, P. and Gibson, R., 1977, Lateral boundary condition for a limited area version of the ECMWF model, *WGNE progress*