فیزیک زمین و فضا، دوره ۴۲، شماره ۳، پاییز ۱۳۹۵، صفحهٔ ۵۱۳-۵۲۲

تحلیل سرعت لرزه‌ای با استفاده از تقریب رتبهٔ کم تابع هسته‌ای و الگوریتم پروانه‌ای

شهریار خاص‌احمدی[1*] و علی غلامی[2]

۱. دانش‌آموخته کارشناسی ارشد، گروه فیزیک زمین، موسسه ژئوفیزیک دانشگاه تهران، ایران
۲. دانشیار، گروه فیزیک زمین، موسسه ژئوفیزیک دانشگاه تهران، ایران

(دریافت: ۹۴/۹/۳، پذیرش نهایی: ۹۵/۷/۲۷)

چکیده

تحلیل سرعت را می‌توان یکی از اساسی‌ترین مراحل پردازش داده‌های لرزه‌ای دانست چرا که نه فقط بسیاری از مراحل پردازش را به‌صورت مستقیم و غیر مستقیم تحت‌تاثیر قرار می‌دهد، بلکه می‌توان آن را تفسیری اولیه از داده‌ها تلقی کرد. بااین‌حال همچنان می‌توان آن را یکی از زمان‌برترین مراحل پردازش نیز دانست. روش معمول تحلیل سرعت با اندازه‌گیری دامنهٔ انرژی در امتداد مسیرهای هذلولی‌شکل و به‌ازای یک بازه از مقادیر سرعت سعی در به‌دست آوردن یک مدل سرعت دارد که در صورت بزرگ بودن ابعاد داده، محاسبهٔ طیف سرعت با این روش بسیار زمان‌بر خواهد بود. در این تحقیق به معرفی الگوریتم پروانه‌ای (Butterfly Algorithm) در حل سریع تبدیل رادون هذلولی برای تحلیل سرعت داده‌های لرزه‌ای می‌پردازیم. اساس این الگوریتم تغییر رابطهٔ تبدیل رادون هذلولی به‌صورت یک عملگر انتگرال فوریه و سپس به‌دست آوردن تقریب‌هایی با رتبهٔ کم (low-rank approximation) برای هستهٔ (کرنل) مسئله خواهد بود. همگرایی این روش برای داده‌های دوبُعدی برابر $O(N^2 \log N)$ خواهد بود که N به بازهٔ تغییرات متغیرهای داده و مدل بستگی دارد. همان‌طور که در مثال‌های عددی غیر واقعی و واقعی نشان داده خواهد شد، این همگرایی باعث کاهش زمان محاسبه مدل سرعت تا چندین برابر نسبت به روش معمول می‌شود.

واژه‌های کلیدی: تحلیل سرعت لرزه ای، تبدیل رادون هذلولی، الگوریتم پروانه‌ای، تقریب رتبهٔ کم.

۱. مقدمه

در پردازش داده‌های لرزه‌ای بازتابی، تحلیل سرعت و به‌دست آوردن یک مدل سرعت مناسب، بسیار حائز اهمیت است زیرا بسیاری از مراحل پردازش ازجمله تضعیف امواج تکراری، مهاجرت زمانی و عمقی و مانند آن، به تابع گرین به‌دست آمده از مدل سرعت احتیاج دارند. اما تحلیل سرعت یکی از مراحل زمان‌بر پردازش است و از طرفی به‌منظور بهبود بخشیدن به کیفیت مدل سرعت به‌دست آمده، این عمل ممکن است چندین‌بار طی پردازش داده‌ها صورت گیرد (ایلماز، ۱۹۸۷).

عملگرهای متغیر با زمان تحلیل سرعت ابتدا به‌منظور حذف بازتاب‌های چندگانه معرفی شدند (تورسن وکلربوت، ۱۹۸۵). این گونه از عملگرها برای یک رخداد هذلولی‌شکل با دهانهٔ بی‌نهایت، یک نقطه را در فضای مدل سرعت به‌دست خواهند داد. بنابراین ازآنجاکه یک ورداشت نقطهٔ میانی یا عمقی مشترک را می‌توان برهم‌نهی هذلولی‌ها دانست، می‌توان از یک عملگر متغیر با زمان سرعت برای تصویرکردن داده‌های لرزه‌ای بازتابی از فضای دورافت‌زمان به فضای سرعت‌زمان یا کُندی‌زمان بهره جست (ساچی، ۲۰۰۲). از دسته این گونه تبدیل‌های متغیر با زمان می‌توان به تبدیل رادون هذلولی اشاره کرد. در پردازش داده‌های لرزه‌ای از تبدیل رادون (رادون، ۱۹۱۷) که در واقع انتگرال‌گیری بر مسیرهای مشخصی است استفاده می‌شود تا داده‌های لرزه‌ای بازتابی به حوزه‌ای منتقل شوند که بتوان آنها را از یکدیگر تفکیک کرد (گاردنر، ۱۹۹۱). انواع دیگر تبدیل‌های رادون خطی و سهموی را نیز می‌توان برای تبدیل رادون برشمرد که از این میان تبدیل رادون هذلولی به‌علت داشتن بیشترین شباهت به داده‌های لرزه‌ای، ابزاری مناسب برای تحلیل سرعت خواهد بود (ترد وهمکاران، ۲۰۰۲). برخلاف تبدیل‌های رادون خطی و سهموی که مستقل از زمان هستند و در حوزهٔ بسامد با استفاده از نظریهٔ همامیخت به‌راحتی قابل محاسبه‌اند (دارچه، ۱۹۹۰،

*نگارنده رابط: E-mail: sh.khasahmadi@ut.ac.ir

کستو، ۱۹۹۰ و ساچی و اولریچ، ۱۹۹۵)، تبدیل رادون هذلولی این‌گونه نیست و در آن استفاده از الگوریتم‌های حل سریع مانند لوینسون (کستو، ۱۹۹۰) میسّر نیست و معمولاً به حل آن در حوزهٔ زمان پرداخته می‌شود که در صورت بزرگ بودن اندازه داده‌ها، محاسبه آن نیاز به زمان زیادی خواهد داشت.

در این تحقیق، الگوریتم پروانه‌ای درحکم راهکاری مناسب برای حل سریع‌تر تبدیل رادون هذلولی معرفی می‌شود. این الگوریتم یکی از حالت‌های تعمیم‌یافته روش‌های چندقطبی سریع (Fast Multipole methods) است که اولین‌بار گرین‌گارد و رخلین (۱۹۸۷) آن را معرفی کردند و در بین ده الگوریتم برتر قرن بیستم قرار گرفته است (دونگارا و سالیوان، ۲۰۰۰). تاکنون این الگوریتم در کاربردهای دیگری از جمله حل مسئله‌های هملهلتز (میکلسن و بواگ، ۱۹۹۶)، تبدیل‌های با تابع‌های خاص (اُنیل و رخلین، ۲۰۰۷)، عملگر انتگرال فوریه (کندس و همکاران، ۲۰۰۹)، تبدیل فوریه تنک (یینگ، ۲۰۰۹) و تصویرسازی رادار (دمنت و همکاران، ۲۰۱۲) مورد استفاده قرارگرفته است. این الگوریتم با همگرایی $O(N^2 \log N)$ می‌تواند تا چندین برابر نسبت به روش معمول سریع‌تر عمل کند. در ادامه، ابتدا به توضیح مسئله پیش‌رو، یعنی چگونگی کاربرد تقریب رتبهٔ کم، و سپس استفاده از ساختار الگوریتم پروانه‌ای در حل تقریب پرداخته و درنهایت با عرضهٔ مثال‌های مصنوعی و واقعی، کارایی روش بررسی می‌شود.

۲. نظریه

یک رخداد را در حوزهٔ مکان‌زمان می‌توان به‌صورت $d(t,h)$ که تابعی از مکان h و زمان t است تعریف کرد. تبدیل رادون خطی با انتگرال‌گیری بر مسیر یک خط و تبدیل رادون سهموی با انتگرال‌گیری روی یک سهمی را می‌توان به‌ترتیب بصورت روابط (۱) و (۲) تعریف کرد:

$$v(\tau, p) = \int_{-\infty}^{\infty} d(h, t = \tau + ph)\, dh \qquad (۱)$$

$$v(\tau, p) = \int_{-\infty}^{\infty} d(h, t = \tau + qh^2)\, dh \qquad (۲)$$

که در آن، p کُندی است و q نشان‌دهندهٔ خمیدگی رخداد خواهد بود. اگر روابط بالا با گرفتن تبدیل فوریه در راستای محور زمان به حوزهٔ بسامد برده شوند، به‌صورت روابط (۳) و (۴) در خواهند آمد:

$$v(f, \mathrm{p}) = \int_{-\infty}^{\infty} d(h, f)\, e^{2\pi jfph}\, dh \qquad (۳)$$

$$v(f, \mathrm{p}) = \int_{-\infty}^{\infty} d(h, f)\, e^{2\pi jfqh^2}\, dh \qquad (۴)$$

که در آن، $j = \sqrt{-1}$ است. همان‌طور که در روابط بالا مشخص است، در حوزهٔ بسامد، روابط تبدیل رادون‌های خطی و سهموی مستقل از زمان‌اند و می‌توان به‌ازای هر تک‌بسامد و به‌صورت جداگانه حوزهٔ رادون را به‌دست آورد که این امر موجب حل سریع تبدیل رادون‌های مستقل از زمان و به‌دست آوردن مدل رادون خواهد شد. بااین‌حال به‌منظور به‌دست آوردن طیف سرعت، از برداشت‌های نقطهٔ میانی یا عمقی مشترک استفاده می‌شود، ازاین‌رو استفاده از تبدیل رادون خطی غیر منطقی است. ازطرفی همپسن (۱۹۸۶) استفاده از تبدیل رادون سهموی را روی داده‌های مورد تصحیح برون‌راند قرارگرفته (normal move-out corrected) ممکن دانست و ایلماز (۱۹۸۹) نیز با بیان مفهوم کشیدگی زمان (time stretching) سعی در به کار بردن این تبدیل در داده‌های هذلولی‌شکل داشت. بنابراین استفاده از تبدیل رادون سهموی، ممکن، اما در هر صورت به معنی داشتن صرفاً تقریبی از رخدادها خواهد بود. از این میان تبدیل رادون هذلولی با توجه به شباهتش به رخدادها، بهترین تقریب را به‌دست خواهد داد.

یک رخداد هذلولی‌شکل به‌صورت $t^2 = t_0^2 + h^2 p^2$ قابل تعریف است که در آن t_0 زمان رفت و برگشت در دوراُفت صفر، h دوراُفت و p کُندی است. می‌توان تبدیل رادون هذلولی را به‌صورت ریاضی به شکل رابطه (۵) عنوان کرد:

$$(Rd)(\tau, p) = \int_{-\infty}^{\infty} d\left(h, \sqrt{\tau^2 + p^2 h^2}\right) dh \qquad (۵)$$

گرفتن تبدیل فوریه از رابطهٔ بالا منجر به رابطهٔ (۶) خواهد شد:

$$(Rd)(\tau, p) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{d}(h, f)\, e^{2\pi jf\sqrt{\tau^2 + p^2 h^2}}\, df\, dh \qquad (۶)$$

که در آن، f بسامد، $\hat{d}(h, f)$ تبدیل فوریه یا حوزهٔ

$f-x$ داده است. همان‌طور که مشخص است در حوزهٔ بسامد، همچنان متغیر زمان وجود دارد و نمی‌توان این انتگرال را به‌ازای هر تک‌بسامد و به‌صورت جداگانه و سریع حل کرد چرا که برای هر تک‌بسامد همهٔ زمان‌ها می‌باید در محاسبات لحاظ شود. ازاین‌رو، به‌طور معمول تبدیل رادون هذلولی با انتگرال‌گیری مستقیم، رابطهٔ (۵)، در حوزهٔ مکان‌زمان صورت می‌گیرد. بااین‌حال برای یک فضای داده با تعداد نمونه‌های زمانی N_τ و مکانی N_h و فضای مدل با تعداد نمونه‌های سرعت N_v و زمان N_τ نیاز به اجرای $N_\tau \times N_v \times N_h$ عمل محاسباتی است که در صورت افزایش اندازه و حجم داده‌ها امری بسیار زمان‌بر خواهد بود. بنابراین نیاز به روشی سریع برای به‌دست آوردن حوزهٔ رادون هذلولی و به‌دست آوردن طیف سرعت ضروری است.

۲. ۱. استفاده از تقریب رتبهٔ کم

تا اینجا، وابسته بودن هستهٔ تبدیل رادون هذلولی به‌صورت هم‌زمان به دو متغیر زمان و بسامد، درحکم مانعی برای حل سریع آن عنوان شد. در این قسمت با استفاده از تقریب رتبهٔ کم به حل این مشکل می‌پردازیم. اگر بتوان یک تابع را به‌صورت بسطی از جمله‌ها که هرکدام فقط تابعی از یک متغیر باشند نوشت، آن بسط یک تقریب رتبهٔ کم از آن تابع خواهد بود. برای مثال برای یک تابع مانند $G(x,y)$، اگر تابع‌هایی مانند F و H وجود داشته باشند طوری‌که:

$$G(x,y)=\sum_t F_t(x)H_t(y) \tag{۷}$$

آن‌گاه این بسط یک تقریب رتبهٔ کم از تابع $G(x,y)$ است. با محدود کردن کران بالای بسط، $1\le m,n\le r$، خواهیم داشت:

$$\left|G(x,y)-\sum_t^r F_t(x)H_t(y)\right|\le\varepsilon \tag{۸}$$

همان‌طور که مشخص است، تابع $G(x,y)$ که تابعی از دو متغیر x و y است، که با تابع‌های F و H که هرکدام فقط تابع یک متغیر هستند، بسط داده شده است. کندس و همکاران (۲۰۰۹) با اثبات وجود یک تقریب رتبهٔ کم برای هستهٔ عملگر انتگرال فوریه (Integral Fourier Operator) راه حل مناسبی برای رفع هم‌زمانی تبعیت هستهٔ مسئله از دو متغیر عرضه کردند که منجر به حل سریع آن می‌شود. یک عملگر انتگرال فوریه با فضای داده K و مدل X را می‌توان به‌صورت رابطه (۹) نوشت:

$$u(x)=\sum_{k\in K}e^{2\pi j\Phi(x,k)}g(k),\quad \mathrm{x}\in\mathrm{X} \tag{۹}$$

که در آن، به $g(k)$ چشمه و به $u(x)$ هدف یا پتانسیل اطلاق می‌شود.

در این مسئله تابع فاز، $\Phi(x,k)$، و در واقع هسته به دو متغیر x و k وابسته است. کندس و همکاران (۲۰۰۹) نشان داد که اگر فضاهای مدل و داده به‌درستی به زیرفضاهای کوچک‌تری تقسیم شوند، می‌توان یک تقریب رتبهٔ کم از هسته به‌دست آورد. این به معنی به‌دست آوردن بسطی از هسته است که شامل تابع‌هایی می‌شود که هرکدام فقط تابعی از یک متغیر هستند. اگر مربع B با طول پنجره $w(B)$ درحکم یک زیرفضا در فضای داده و مربع A با طول $w(A)$ در زیرفضای مدل فرض شوند، رابطهٔ (۱۰) به‌منظور وجود این تقریب می‌بایدبرقرار باشد:

$$w(A)\times w(B)\le\frac{1}{N} \tag{۱۰}$$

که در آن، N یک عدد صحیح به توان ۲ است.

بنابراین با توجه به تعریف و وجود یک تقریب رتبهٔ کم، می‌توان دو تابع α و β را به‌گونه‌ای یافت که:

$$e^{2\pi j\Phi(x,k)}=\sum_{t=1}^{r}\alpha_t^{AB}(x)\beta_t^{AB}(k) \tag{۱۱}$$

$$\left|e^{2\pi j\Phi(x,k)}-\sum_{t=1}^{r}\alpha_t^{AB}(x)\beta_t^{AB}(k)\right|\le\varepsilon \tag{۱۲}$$

همچنین می‌توان نشان داد که وقتی $w(B)\le\frac{1}{\sqrt{N}}$، می‌توان یک تقریب رتبهٔ کم از هسته را با استفاده از درون‌یابی چندجمله‌ای هسته در متغیر k؛ و وقتی $w(A)\le\frac{1}{\sqrt{N}}$ است در متغیر x، به‌دست آورد. به این منظور از درون‌یابی لاگرانژ (Lagrange interpolation) و از شبکهٔ نقاط دوبُعدی چبیشوف (Chebyshev 2D grid) استفاده می‌شود.

برای یک عدد ثابت q_k و در جهت i (در حالتی که زیرفضای B و فضای K را در نظر گرفته باشیم) نقاط چیبیشوف در بازهٔ $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ به‌صورت رابطه (۱۳) تعریف می‌شود:

$$\left\{ z_{t_i} = \frac{1}{2}\cos(\frac{\pi t_i}{q_{k_i}-1}) \right\},\ 0 \le t_i \le q_{k_i}-1,\ i=(i_1,i_2) \quad (۱۳)$$

که در حالت دوبُعدی و در دو جهت i_1 و i_2 به‌صورت $q_{k_1} \times q_{k_2}$ تعمیم داده خواهد شد. این نقاط را می‌توان با یک تبدیل خطی ساده به زیرفضای B تصویر کرد.

برای نقاط چیبیشوف به‌دست آمده می‌توان در حالت یک‌بُعدی چندجمله‌ای لاگرانژ (Lagrange polynomial) را به‌صورت رابطه (۱۴) نوشت:

$$L_{t_i}^B(k_i) = \left(\prod_{s_i \ne t_i, s_i=0}^{q_{ki}-1} \frac{k_i - k_{s_i}^B}{k_{t_i}^B - k_{s_i}^B} \right) \quad (۱۴)$$

حال برای تبدیل آن به یک درون‌یاب دوبُعدی به ضرب تانسوری دو جهت نیاز است:

$$L_t^B(k) = L_{t1}^B(k_1) L_{t2}^B(k_2) \quad (۱۵)$$

$$L_t^B(k) = \left(\prod_{s_1 \ne t_1, s_1=0}^{qk_1-1} \frac{k_1 - k_{s_1}^B}{k_{t_1}^B - k_{s_1}^B} \right) \left(\prod_{s_2 \ne t_2, s_2=0}^{qk_2-1} \frac{k_2 - k_{s_2}^B}{k_{t_2}^B - k_{s_2}^B} \right) \quad (۱۶)$$

به‌طور مشابه می‌توان روابط ذکر شده را برای زیرفضای A و فضای X تعمیم داد.

محاسبهٔ تابع‌های α و β به نوع مسئله مورد بررسی بستگی دارد. با توجه به هستهٔ مسئله و خصوصیات تقریب رتبهٔ کم هسته، این تابع‌ها قابل محاسبه هستند. انیل و رخلین (۲۰۰۷) الگوریتم پروانه‌ای را روی تابع‌های تبدیل متفاوت در یک بُعد به کار بردند و تابع‌های α و β را با توجه به هستهٔ مسئله برای چند حالت خاص معرفی کردند. همچنین ینگ (۲۰۰۹) از الگوریتم پروانه‌ای به‌منظور حل سریع و تنک تبدیل فوریه بهره جست و تابع‌های متفاوتی را برای α و β معرفی کرد. در حالت خاص تبدیل رادون هذلولی نیز تابع‌های α و β به‌صورت زیر قابل دست‌یابی‌اند (هو و همکاران، ۲۰۱۳ و کندس و همکاران، ۲۰۰۹):

درصورتی‌که $w(B) \le \frac{1}{\sqrt{N}}$ باشد:

$$\alpha_t^{AB}(\mathrm{x}) = e^{2\pi j \Phi(x, k_t^B)} \quad (۱۷)$$

$$\beta_t^{AB}(k) = e^{-2\pi j \Phi(x_0(A), k_t^B)} L_t^B(k) e^{2\pi j \Phi(x_0(A), k)} \quad (۱۸)$$

درصورتی‌که $w(A) \le \frac{1}{\sqrt{N}}$ باشد:

$$\alpha_t^{AB}(\mathrm{x}) = e^{2\pi j \Phi(x, k_0(\mathrm{B}))} L_t^A(x) e^{-2\pi j \Phi(x_t^A, k_0(\mathrm{B}))} \quad (۱۹)$$

$$\beta_t^{AB}(k) = e^{2\pi j \Phi(x_t^A, k)} \quad (۲۰)$$

که در آن، $x_0(A)$ و $k_0(B)$ به‌ترتیب نقطهٔ وسط زیرفضاهای B و A هستند.

به‌منظور نشان دادن کاربرد تقریب رتبهٔ کم و استفاده از نقاط کمتر برای تقریب هسته، یک مثال در شکل ۱ آورده شده است. در قسمت (الف) در شکل ۱ مقدار حقیقی تابع $e^{2\pi j\sqrt{x^2+k^2}}$ به‌ازای ۱۰۰ نقطه از x و k و در بازه‌های $x \in [0,3]$ و $k \in [0,3]$ محاسبه و نشان داده شده است. در قسمت‌های (ب)، (ج) و (د) به‌ترتیب تقریب هسته به‌ازای ۴، ۶ و ۹ نقطهٔ درون‌یابی چیبیشوف آورده شده است. همان‌طور که مشخص است با صرفاً ۹ نقطهٔ معادل، این هسته تقریب زده شده است.

بنابراین، اگر بتوان تبدیل رادون هذلولی را به‌صورت یک عملگر انتگرال فوریه بازنویسی کرد، می‌توان از تقریب رتبهٔ کم و درون‌یابی با نقاط معادل کمتر، برای حل سریع‌تر آن بهره جست.

با اعمال مجموعه‌ای از تبدیلات خطی می‌توان متغیرهای مسئله را به متغیرهای x_1، x_2، k_1 و k_2 تبدیل کرد؛ طوری‌که $\tau(x_1)$، $p(x_2)$، $f(k_1)$ و $h(k_2)$ که در آنها $x=(x_1,x_2) \in [0,1]^2 = X$ و $k=(k_1,k_2) \in [0,1]^2 = K$ است.

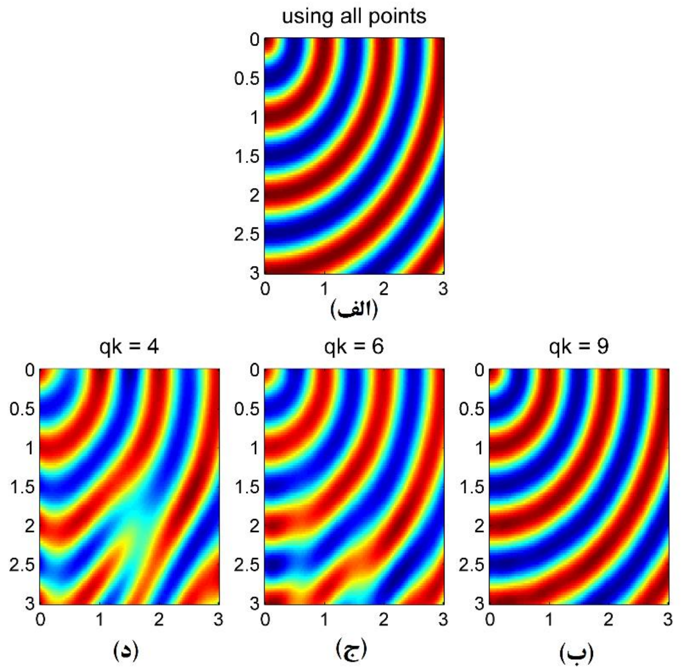
با توجه به تعریف‌های جدید خواهیم داشت:

$$\mathrm{g}(k) = \hat{d}(f(k_1), h(k_2)) \quad (۲۱)$$

$$\Phi(x,k) = f(k_1)\sqrt{\tau(x_1)^2 + p(x_2)^2 h(k_2)^2} \quad (۲۲)$$

$$u(x) = (Rd)(\tau(x_1), p(x_2)) \quad (۲۳)$$

با جای‌گذاری روابط بالا در رابطهٔ (۶) به رابطهٔ (۹) خواهیم رسید. بنابراین، می‌توان از تقریب رتبهٔ کم و درون‌یابی به‌منظور حل سریع تبدیل رادون هذلولی استفاده کرد.



شکل ۱. استفاده از تقریب رتبهٔ کم و درون‌یابی لاگرانژ به‌منظور تقریب هستهٔ $e^{2\pi j\sqrt{x^2+k^2}}$. (الف) قسمت حقیقی هسته به‌ازای ۱۰۰ نقطه در x و k. تقریب به‌دست آمده به‌ترتیب با استفاده از (ب) ۴ نقطه، (ج) ۶ نقطه و (د) ۹ نقطه چیبیشوف.

۲. ۲. استفاده از الگوریتم پروانه‌ای

حال اگر بخواهیم پتانسیل‌ها را در زیرفضای A با توجه به چشمه‌ها در زیرفضای B محاسبه کنیم خواهیم داشت:

$$
\begin{aligned}
u^B(x) &= \sum_{k\in B} e^{2\pi j\Phi(x,k)} g(k) \\
&= \sum \alpha_t^{AB}(x)\left(\sum \beta_t^{AB}(k) g(k)\right) \\
&= \sum \alpha_t^{AB}(x)\delta_t^{AB}, \quad \delta_t^{AB} = \sum \beta_t^{AB}(k) g(k)
\end{aligned}
\tag{۲۴}
$$

وقتی زیرفضای B شامل همهٔ فضای داده باشد، در واقع با مسئله اولیه، یا رابطه (۹)، روبه‌رو هستیم. در واقع داشتن ضریب‌های δ_t^{AB} وقتی $B=K$ باشد به معنی حل مسئله (۹) است اما با توجه به شرط وجود یک تقریب رتبهٔ کم، رابطهٔ (۱۰)، وقتی زیرفضای B آنقدر بزرگ باشد که همهٔ فضای داده را شامل شود، اندازهٔ زیرفضای A کوچک و تعداد زیرفضاهای A باید آنقدر زیاد باشد که همهٔ فضای مدل، X، را در برگیرد و در نتیجه محاسبه δ_t^{AB} ساده نخواهد بود. الگوریتم پروانه‌ای با استفاده از یک ساختار بازگشتی برای محاسبهٔ این ضریب‌ها، مورد استفاده خواهد بود.

دو ویژگی مهم الگوریتم پروانه‌ای باعث کاربردی بودن آن در حل سریع انتگرال تبدیل رادون هذلولی می‌شود:

۱. وجود تقریب رتبهٔ کم در هر مرحله برای هستهٔ مسئله.

۲. به‌دست آوردن ضریب‌ها در آخرین مرحله به‌صورت بازگشتی.

این الگوریتم به‌منظور برقراری شرط رتبهٔ کم از زیرفضای بسیار کوچک B و بزرگ A شروع به محاسبه δ_t^{AB} می‌کند و در هر مرحله زیرفضای B را بزرگ‌تر و A را کوچک‌تر می‌کند. این کار باعث برقراری رابطهٔ (۱۰) بین اندازهٔ زیرفضاهای A و B در هر مرحله و درنتیجهٔ وجود تقریب رتبهٔ کم خواهد شد. این الگوریتم در هر مرحله از δ_t^{AB} محاسبه شده از مرحلهٔ قبل استفاده می‌کند. تعداد کل مراحل تقسیم $l=0,1,\ldots,L=\log_2(N)$ خواهد بود. در شکل ۲ تقسیم‌بندی فضاهای X و K را برای حالت خاصی که $N=4$ باشد برای مثال نشان داده شده است. تقسیم‌بندی فضاهای داده و مدل برعکس یکدیگر است و با بزرگ‌تر شدن زیرفضای B زیرفضای A شروع به کوچک‌تر

شدن می‌کند. طول زیرفضای A در هر مرحله l برابر با $1/2^{l}$ و طول زیرفضای B برابر با $1/2^{L-l}$ خواهد بود.

این الگوریتم در پنج مرحلهٔ کلی به محاسبهٔ حوزهٔ رادون می‌پردازد:

۱. ابتدایی

$$\delta_t^{AB} = e^{-2\pi j\Phi(x_0(A),k_t^B)}\sum L_t^B(k)e^{2\pi j\Phi(x_0(A),k)}g(k) \qquad (۲۵)$$

در مرحلهٔ $l=0$ از الگوریتم پروانه‌ای، $g(k)$ ها که چشمه‌ها در همهٔ نقاط k هستند، به نقاط کمتری،یعنی k_t^B، معادل‌سازی می‌شوند. می‌توان گفت در این مرحله δ_t^{AB} ها چشمه‌های معادل $g(k)$ ها هستند.

۲. بازگشت

$$\delta_t^{AB} = e^{-2\pi j\Phi(x_0(A),k_t^B)}\sum_c\sum L_t^B(k_{t'}^{Bc})e^{2\pi j\Phi(x_0(A),k_{t'}^{Bc})}\delta_{t'}^{ApBc} \qquad (۲۶)$$

این مرحله شامل $l=1,2,...,L/2$ می‌شود. همان‌طور که اشاره شد در هر مرحله از الگوریتم پروانه‌ای، زیرفضای A کوچک‌تر و B بزرگ‌تر می‌شود. به A بزرگ‌تر در مرحلهٔ قبل، والد گفته می‌شود و آن را با اندیس p نمایش می‌دهیم. به B کوچک‌تر در مرحلهٔ قبل، فرزند اطلاق می‌شود و آن را با اندیس c نشان می‌دهیم.

$\delta_{t'}^{A_pB_c}$ چشمه‌های معادل محاسبه شده در مرحلهٔ قبل است که درحکم چشمهٔ جدید در مرحلهٔ بعد مورد استفاده قرار می‌گیرند. درواقع در مرحلهٔ بازگشت، سعی بر کاهش چشمه‌های معادل به تعداد کمتر است.

۱. تعویض

$$\delta_t^{AB} = \sum e^{2\pi j\Phi(x_t^A,k_s^B)}\delta_s^{AB} \qquad (۲۷)$$

در مرحلهٔ $l=L/2$ چشمه‌های معادل محاسبه شده در فضای داده، حوزهٔ $f-x$، به پتانسیل‌های معادل در فضای مدل، $\tau-p$، انتقال می‌یابند. لازم به ذکر است که تا قبل از رسیدن به مرحلهٔ تعویض، با توجه به اینکه $w(B)\le\frac{1}{\sqrt{N}}$، از روابط (۱۷) و (۱۸) برای محاسبه تابع‌های α و β استفاده می‌شود، درحالی‌که از مرحلهٔ تعویض به بعد $w(A)\le\frac{1}{\sqrt{N}}$ و می‌باید از روابط (۱۹) و (۲۰) برای محاسبهٔ α و β استفاده کرد.

۲. بازگشت

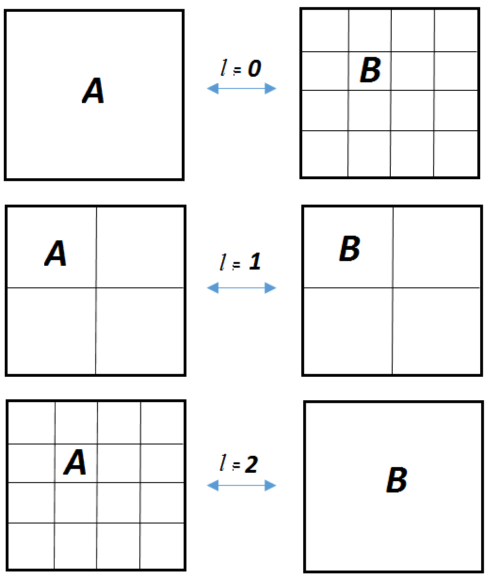
$$\delta_t^{AB} = \sum_c e^{2\pi j\Phi(x_t^A,k_0(\mathrm{Bc}))}\sum L_{t'}^{Ap}(x_t^A)e^{-2\pi j\Phi(x_{t'}^{Ap},k_0(\mathrm{Bc}))}\delta_{t'}^{ApBc} \qquad (۲۸)$$

شامل مراحل $l=L/2+1,...,L$ می‌شود. مشابه مرحله بازگشت قبل است با این تفاوت که این بار پتانسیل‌های معادل که در فضای رادون قرار دارند، به پتانسیل‌های معادل بیشتری افزایش می‌یابند.

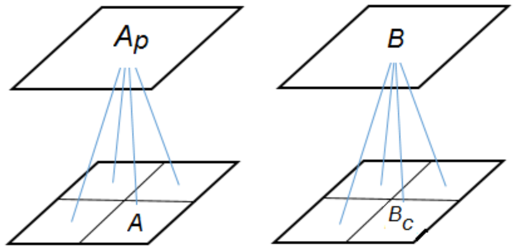
۳. نهایی

$$u(x) = e^{2\pi j\Phi(x,k_0(\mathrm{B}))}\sum L_t^A(x)e^{-2\pi j\Phi(x_t^A,k_0(\mathrm{B}))}\delta_t^{AB} \qquad (۲۹)$$

در مرحلهٔ $l=L$، زیرفضای B همهٔ فضای داده،یعنی K، را در بر می‌گیرد ($B=K$). در این مرحله پتانسیل‌های معادل، به پتانسیل‌ها در همهٔ نقاط x در فضای مدل افزایش می‌یابند و حوزهٔ رادون به‌صورت کامل بازسازی می‌شود.



شکل ۲. نمایش درخت‌های تقسیم در الگوریتم پروانه‌ای برای حالت خاص $N=4$. همان‌طور که مشخص است در هر مرحله زیرفضاهای A کوچک‌تر و B بزرگ‌تر می‌شوند تا در مرحلهٔ آخر، $L=2$، B همهٔ فضای داده را در بر می‌گیرد.



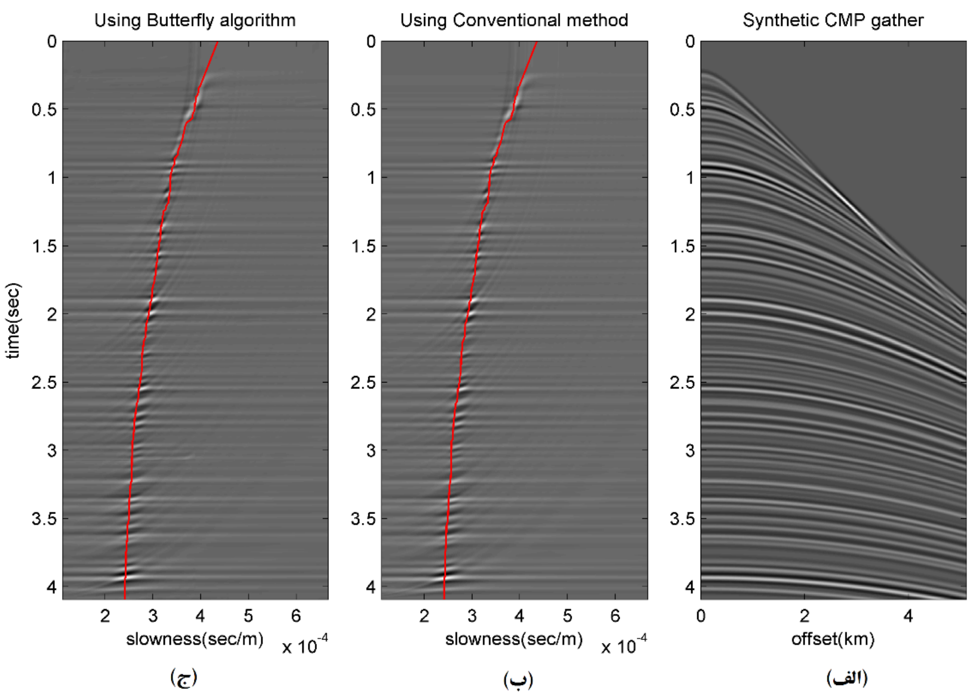
شکل ۳. چگونگی تقسیم زیرفضاهای A و B در هر مرحله

۳. اندازه‌گیری، مشاهده و محاسبه

به‌منظور بررسی کارایی روش عرضه شده و همچنین مقایسه عملکرد آن با روش معمول محاسبه طیف سرعت به طرح مثال‌های مصنوعی و واقعی می‌پردازیم. در مثال اول، شکل۴–الف، از یک مقطع نقطهٔ میانی مشترک مصنوعی استفاده شده است. در این داده فاصلهٔ گیرنده‌ها ۵ متر و فاصلهٔ نمونه‌برداری زمانی ۰/۰۰۴ ثانیه انتخاب شده است. به‌منظور نمایش بهتر عملکرد الگوریتم پروانه‌ای در تحلیل سرعت، نسبت به روش معمول، ابعاد مکانی و زمانی داده بزرگ انتخاب شده است. در هریک از راستاهای زمان، مکان وکُندی، تعداد ۱۰۲۴ نمونه در نظر گرفته شده است. سرعت لایه‌ها به‌صورت تصادفی با عمق افزایش یافته است.

مقطع کُندی‌زمان به دو روش محاسبه و در شکل ۴–ب و–ج نشان داده شده است. خط سرخ‌رنگ، روند سرعت مورد استفاده برای ساخت مدل مصنوعی را نشان می‌دهد. همان‌طور که در شکل ۴ قابل مشاهده است، هر دو روش نتیجهٔ یکسان و درستی را در تحلیل سرعت مقطع نقطهٔ میانی مشترک به‌دست داده‌اند. زمان محاسبه طیف سرعت با استفاده از روش معمول ۱۰۶/۷ ثانیه است درحالی‌که الگوریتم پروانه‌ای با $N = 32$ و ۹ قطه در هریک از جهت‌های x_1، x_2، k_1 و k_2، طی صرفاً ۳/۱ ثانیه قادر به محاسبه طیف سرعت بوده است.

داده‌هایی با اندازه‌های متفاوت به‌منظور بیان بهتر تفاوت عملکرد دو روش در مدت‌زمان محاسبهٔ طیف سرعت به کارگرفته شده است و اختلاف زمان محاسبهٔ حوزهٔ رادون آنها در جدول زیر عرضه شده است. همان‌طور که نتایج نشان می‌دهد، با افزایش یافتن اندازهٔ داده‌ها، اختلاف زمان محاسبه به‌صورت نمایی افزایش می‌یابد و استفاده از الگوریتم پروانه‌ای می‌تواند سرعت محاسبات را تا چندین برابر افزایش دهد.

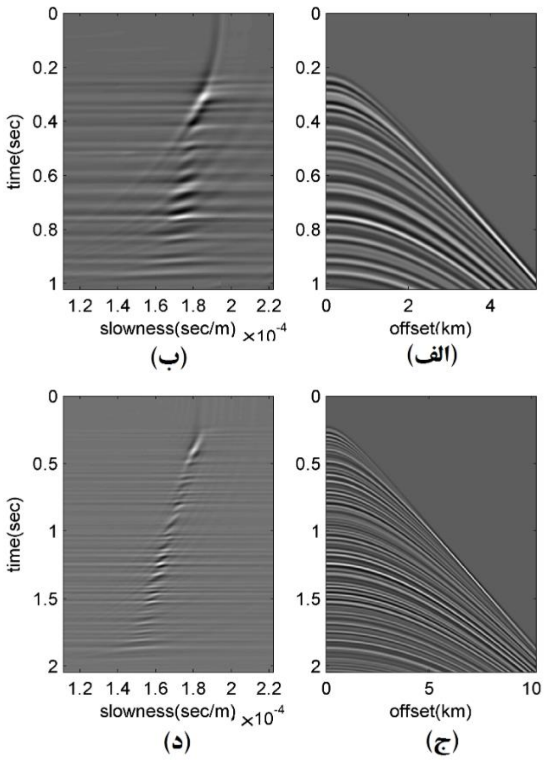


شکل ۴. (الف) ثبت نقطهٔ میانی مشترک مصنوعی با فاصلهٔ نمونه‌برداری مکانی ۵ متر و زمانی ۰/۰۰۴ ثانیه، (ب) مدل کُندی به‌دست آمده با استفاده از روش معمول، ۱۰۶/۷ ثانیه و (ج) مدل کُندی به‌دست آمده با استفاده از الگوریتم پروانه‌ای، ۳/۱ ثانیه

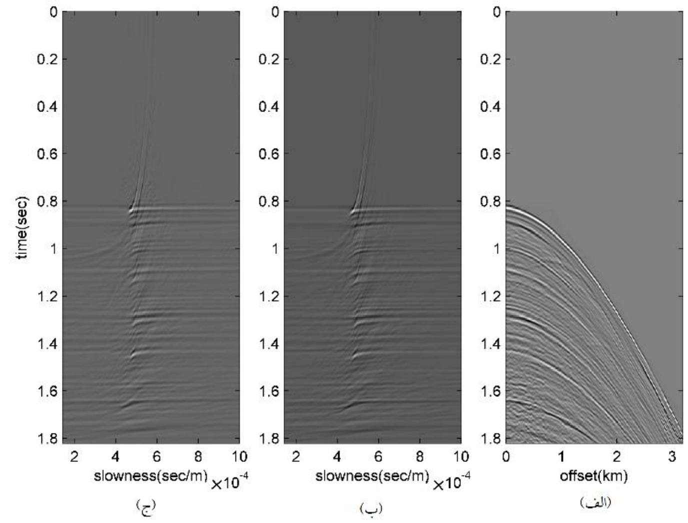
جدول ۱. اختلاف زمان محاسبهٔ حوزهٔ رادون پس از محاسبه به دو روش معمول و پروانه‌ای

اندازه	۲۵۶× ۲۵۶	۵۱۲× ۵۱۲	۱۰۲۴×۱۰۲۴
اختلاف زمان محاسبه (ثانیه)	۱/۴	۱۳/۵	۱۰۳/۶

همان‌طور که پیش‌تر نیز به آن اشاره شد، انتخاب پارامتر N به بازهٔ تغییرات هستهٔ مسئله که تابعی از متغیرهای زمان، دوراُفت، سرعت و بسامد است بستگی دارد. برای نشان دادن این موضوع به طرح یک مثال می‌پردازیم. با تعداد ۵۱۲ نمونه در هریک از راستاهای مکان و زمان و فاصلهٔ نمونه‌برداری مکانی ۱۰ متر و زمانی ۰/۰۰۲ ثانیه یک مقطع نقطهٔ میانی مشترک مصنوعی تولید شده و در شکل ۵–الف نشان داده شده است. حوزه رادون آن با استفاده از الگوریتم پروانه‌ای و پارامترهای $N=16$ و ۸ نقطه درون‌یابی محاسبه و در شکل ۵–ب نشان داده شده است. به‌منظور تغییر بازهٔ تغییرات تابع فاز و هستهٔ مسئله، با ثابت نگه داشتن تعداد نمونه‌ها در راستاهای زمان و مکان، فاصلهٔ نمونه‌برداری مکانی را به ۲۰ متر و زمانی را به ۰/۰۰۴ ثانیه تغییر می‌دهیم و مقطع نقطهٔ میانی مشترک مصنوعی نشان داده شده در شکل ۵–ج تولید می‌شود. بازهٔ تغییرات هسته در این حالت دو برابر بازهٔ تغییرات هستهٔ مثال قبل، شکل ۵–الف، است و برای به‌دست آوردن حوزهٔ رادون با استفاده از الگوریتم پروانه‌ای این‌بار نیاز به تغییر پارامترها به $N=32$ و ۸ نقطهٔ درون‌یابی است. با تغییر بازهٔ تغییرات هسته نیاز به تغییر پارامتر N در الگوریتم پروانه‌ای است.



شکل ۵. (الف) یک مقطع مصنوعی با فاصلهٔ نمونه‌برداری مکانی ۱۰ متر و زمانی ۰/۰۰۲ ثانیه، (ب) حوزهٔ رادون قسمت (الف) با استفاده از $N = 16$ و ۸ نقطهٔ درون‌یابی و (ج) یک مقطع مصنوعی با فاصلهٔ نمونه‌برداری مکانی ۲۰ متر و زمانی ۰/۰۰۴ ثانیه. (د) حوزهٔ رادون قسمت (ج) با استفاده از $N = 32$ و ۸ نقطهٔ درون‌یابی.



شکل ۶. (الف) دادهٔ واقعی با فاصلهٔ نمونه‌برداری مکانی۱۲/۵ متر و زمانی ۰/۰۰۴ ثانیه، (ب) حوزهٔ رادون به‌دست آمده با استفاده از روش مرسوم و (ج) با استفاده از الگوریتم پروانه‌ای با $N = 32$ و ۹ نقطهٔ درون‌یابی در هر جهت.

به‌منظور آزمایش کارایی الگوریتم روی دادهٔ واقعی، از یک دادهٔ واقعی با فاصلهٔ نمونه‌برداری مکانی ۱۲/۵ متر و زمانی ۰/۰۰۴ ثانیه که در شکل ۶–الف نشان داده شده است استفاده شده است. حوزهٔ رادون این داده با استفاده از روش مرسوم و الگوریتم پروانه‌ای با $N = 32$ و ۹ نقطه درون‌یابی محاسبه، و به‌ترتیب در شکل ۶–ب و ۶–ج و نشان داده شده است. همان‌طور که مشخص است، نتایج حاصل از تحلیل سرعت با استفاده از دو روش یکسان است اما روش مرسوم در ۸/۷ ثانیه و الگوریتم پروانه‌ای در ۳/۴ ثانیه جواب را به‌دست داده‌اند. اگرچه ابعاد داده (۵۱۲ نمونه زمانی و ۴۱۷ نمونه مکانی) مانند داده‌های رایج در پردازش داده‌های لرزه‌ای آنچنان بزرگ نیست که بتوان برتری الگوریتم پروانه‌ای را نسبت به روش معمول نشان داد، اما همچنان روش معرفی شده در حدود دو برابر سریع تر به جواب رسیده است. در این داده، اولین رسیدها در مراحل ابتدایی پردازش حذف شده‌اند. با توجه به اینکه رسیدهای اولیه دارای ساختار خطی هستند و ازآنجاکه تبدیل رادون هذلولی دامنه‌ها را روی مسیرهای هذلولی‌شکل جمع می‌بندد، در صورت وجود رسیدهای اولیه در ثبت، علاوه بر تمرکز انرژی مربوط به بازتاب‌های هذلولی‌شکل، پخش‌شدگی انرژی ضریب‌های مربوط به رسیدهای اولیه نیز در مدل سرعت مشاهده خواهد شد.

۴. بحث

همان‌طور که در مثال‌های عددی هم نشان داده شد، استفاده از روش معمول با همگرایی $O(N_\tau N_h N_p)$ روش مناسبی در تحلیل سرعت داده‌هایی با ابعاد بالا نیست و الگوریتم پروانه‌ای با همگرایی $O(N^2 \log N)$ می‌تواند جایگزین مناسبی باشد. نحوه انتخاب پارامترهای الگوریتم پروانه‌ای، N و تعداد نقاط درون‌یابی، به بازه تغییرات متغیرهای f ، τ، p و h بستگی دارد. دلیل این امر وابسته بودن تقریب به میزان نوسانی بودن هستهٔ مسئله است و ازآنجاکه هسته با تابع فاز $f(k_1)\sqrt{\tau(x_1)^2 + p(x_2)^2 h(k_2)^2}$ تعریف شده است، بازه تغییرات این پارامترها روی هسته تاثیرگذار خواهند بود. به طور کلی می‌توان گفت که هرچه هستهٔ مسئله نوسانی‌تر باشد به مقدار بزرگ‌تری از N احتیاج است، همان‌طور که در مثال شکل ۵ نیز نشان داده شد. از طرفی به طور کلی می‌توان گفت که هرچه N بزرگ‌تر انتخاب شود می‌توان تعداد نقاط درون‌یابی چیبیشوف را کمتر انتخاب کرد و برعکس. بازه بسامد داده مورد بررسی از عوامل نوسانی بودن هسته است و برای داده‌های با پهنای بسامدی زیاد، شاید تجزیه حوزه $f-x$ آن به بازه‌های کوچک‌تر و استفاده از الگوریتم به‌منظور تحلیل سرعت آن به‌صورت جداگانه و نهایتا کنار هم قرار دادن آنها راه حل مناسبی باشد.

همان طور که در پنج مرحله ذکر شده برای الگوریتم پروانه‌ای مشخص است، تنها در مرحله اولیه، داده اولیه وارد الگوریتم می‌شود. ازاین‌رو در داده‌هایی با نمونه‌برداری غیر یکنواخت نیز می‌توان از این الگوریتم بهره جست. عملگر الحاقی این الگوریتم به‌منظور بازگشت از حوزه رادون به حوزه مکان‌زمان نیز قابل محاسبه است و برای محاسبه آن نیز می‌توان از الگوریتم پروانه‌ای بهره جست با این تفاوت که حوزه‌های X و K جا به جا خواهند شد (با توجه به موضوع این پژوهش، محاسبه الحاقی این روش از حیطه این مقاله خارج است).

۵. نتیجه‌گیری

در این تحقیق به بررسی تقریب رتبهٔ کم و الگوریتم پروانه‌ای درحکم روشی سریع در حل تبدیل رادون هذلولی و به‌دست آوردن طیف سرعت پرداخته شد. اگر در هستهٔ انتگرال تبدیل رادون هذلولی، فضاهای داده و مدل به‌درستی به زیرفضاهای کوچک‌تری تقسیم شوند، می‌توان تقریبی با رتبهٔ کم برای هسته پیدا کرد و از ساختار الگوریتم پروانه‌ای برای حل آن بهره جست. همان‌طور که در مثال‌های مصنوعی و واقعی نشان داده شد، این الگوریتم با همگرایی $O(N^2 \log N)$ می‌تواند تا چندین برابر، زمان محاسبات را نسبت به روش معمول کاهش دهد. متغیرهای زمان، بسامد، دوراُفت و کُندی بر چگونگی انتخاب پارامترهای الگوریتم پروانه‌ای موثرند. کاربردهای دیگری ازجمله حذف بازتاب‌های چندگانه، درون‌یابی ردلرزه‌ها و جدا کردن اثر چشمه‌های هم‌زمان نیز می‌توان برای تبدیل رادون هذلولی نام برد که استفاده از این الگوریتم می‌تواند به عملی شدن آنها تا چندین برابر سرعت ببخشد.

مراجع

Candes, E., Demanet, L. and Ying, L., 2009, A fast buttery algorithm for the computation of Fourier integral operators, Multiscale Modeling and Simulation, 7, 1727-175.

Darche, G., 1990, Spatial interpolation using a fast parabolic transform: 60th Annual Internet Mtg., Soc. Geophys., Expanded Abstracts, 1647-1650.

Demanet, L., Ferrara, M., Maxwell, N., Poulson, J. and Ying, L., 2012, A butterfly algorithm for synthetic aperture radar imaging, SIAM J. Img. Sci., 5, 203-243.

Dongarra, J. and Sullivan, F., 2000, The top ten algorithms of the century, Computing in Science and Engineering, 2(1), 22-23.

Gardner, G. H. F. and Lu, L., eds., 1991, Slant-stack processing: society of exploration geophysicists, Issue 14 of Geophysics reprint series.

Greengard, L. and Rokhlin, V., 1987, A fast algorithm for particle simulations, J. Comput. Phys., 73, 325-348.

Hampson, D., 1986, Inverse velocity stacking for multiple elimination, J. Can. Soc. Exploration Geophysics, 22, 44-55.

Hu, J., Fomel, S., Demanet, L. and Ying, L., 2013, A fast buttery algorithm for generalized Radon transforms, Geophysics, 78(4), U41-U51

Kostov, C., 1990, Toeplitz structure in slant-stack inversion, 60th Annual Internat. Mtg., Soc. Exploration Geophysics, Expanded Abstracts, 1618-1621.

Michielssen, E. and Boag, A., 1996, A multilevel matrix decomposition algorithm for analyzing scattering from large structures, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 44, 1086-1093.

O'Neil, M. and Rokhlin, V., 2007, A new class of analysis-based fast transforms. Technical report, Yale University, YALE/DCS/TR1384.

Sacchi, M. D. and Ulrych, T., J., 1995, High-resolution velocity gathers and offset space reconstruction, Geophysics, 60(4), 1169-1177.

Sacchi, M. D., 2002, Statistical and transform methods in geophysical signal processing.

Thorson, J. R. and Claerbout, J. F., 1985, Velocity-stack and slant-stack stochastic inversion, Geophysics, 50, 2727-2741.

Trad, D., Ulrych, T. and Sacchi, M. D., 2002, Accurate interpolation with high resolution time-variant Radon transforms, Geophysics, 67, 644-656.

Ying, L., 2009, Sparse Fourier transform via butterfly algorithm, SIAM Journal on Scientific Computing, 31, 1678.

Yilmaz, Ö., 1989, Velocity-stack processing, Geophysical Prospecting., 37, 357-382.

Yilmaz, Ö., 1987, Seismic data processing, 2, Soc. Exploration Geophysics.

Journal of the Earth and Space Physics, Vol. 42, No. 3, Autumn 2016, P. 4

Seismic velocity analysis using low-rank approximation of the Kernel function and a Butterfly algorithm

Khasahmadi, Sh.[1]* and Gholami, A.[2]

1. M.Sc. Graduated, Department of Earth Physics, Institute of Geophysics, University of Tehran, Iran
2. Associate Professor, Department of Earth Physics, Institute of Geophysics, University of Tehran, Iran

(Received: 24 Nov 2015, Accepted: 18 Oct 2016)

Summary

Velocity analysis is one of the most important step in seismic data processing. It affects not only many processing steps directly and indirectly, but also is known as a primary interpretation of the data. However, it can also be assumed as one of the most time consuming processing step. The conventional velocity analysis method measures the energy amplitude along hyperbolic trajectories within a velocity interval and creates a velocity model. In this procedure, the data from time-offset domain is mapped to time-velocity or time-slowness domain. For a number of N_τ , N_h and N_v time, offset and velocity samples respectively, $N_\tau \times N_h \times N_v$ computations is necessary to obtain a velocity model. However, in the presence of large size data and model parameters, computing the velocity spectrum using conventional method would be a time consuming task. On the other hand, in order to improve the initial velocity model obtained in the processing steps, usually velocity analysis is conducted several times during the processing of the seismic data. Hence, there should be a better way to compute the velocity model in a much less time computation. In this paper, we introduce the Butterfly algorithm for fast computation of hyperbolic Radon transform (HRT), as a kind of time variant operator, with an application in seismic velocity analysis. In seismic data processing, Radon transforms map the overlapping data in seismic gathers to another domain which they can be separated. Among different types of Radon transforms, the HRT has the most similarity to the seismic events and hence, produce the most accurate approximation in the velocity spectrum. However, its time-variant kernel prohibits its fast computation especially for large size data. Unlike time-invariant operators which use the convolution theorem in the Fourier domain to compute the velocity domain for each frequency separately and therefore efficiently, Fourier transform of time-variant operators is a function of both frequency and time and using the convolution theorem is not applicable. The Butterfly algorithm can be used as a fast solver for the Fourier Integral Operators (FIO), so reformulating the HRT integral in the Fourier domain as FIO makes it possible to use this algorithm to overcome the problem of the time-variant kernel. The basis of this solution is the existence of low-rank approximations of the kernel when it is restricted to subdomains in data and model spaces. Subdividing the model and data domain properly to smaller subdomains admits low-rank approximations of the kernel. These low-rank approximations enable us to obtain functions of only one variable, time or frequency, which approximate the kernel. This decoupling of time and frequency variables allows fast computation of the HRT integral. In order to do the subdivision properly, a pair of quad trees, one for each data and model domains, is used to restrict the domains in a level-base structure in which the size of data domain subsets are increasing while the size of model domain subsets are decreasing in each level. The Butterfly algorithm is used to compute the kernel equivalent functions in each level of these quad trees for each subdomain. Finally, at the last level, the Radon panel or velocity model is obtained. The complexity of this method for two dimensional data is $O(N^2 \log N)$ in which N depends on data and model variables range. As it was demonstrated in the synthetic and the real numerical examples, $O(N^2 \log N)$ complexity results in reduction of computation time in several orders relative to the conventional method.

Keywords: Seismic velocity analysis, Hyperbolic radon transform, Butterfly algorithm, Low-rank approximation.

*Corresponding author: sh.khasahmadi@ut.ac.ir